筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第32集　1992年11月

情報化社会に対応した
創造的教材・指導法の実践的研究

——教育研究会での公開授業について——

筑波大学附属駒場中高等学校　数学科
井上　正允・熊倉　啓之・駒　野　誠
佐藤　和孝・城野　正彦・鈴木　清夫
深瀬　幹雄

情報化社会に対応した
創造的教材・指導法の実践的研究

――――教育研究会での公開授業について――――

筑波大学附属駒場中高等学校　数学科
井上　正允・熊倉　啓之・駒野　誠
佐藤　和孝・城野　正彦・鈴木　清夫
深瀬　幹雄

1. はじめに

本校数学科では数学に対する興味関心を育てながら，数学的思考力を培う事の出来るような創造的教材・指導法についての研究を従前より行ってきたが，社会の情報化が急速に進みコンピュータが一般に普及し始めた事から，コンピュータを有効に利用するという立場を加えてこの研究に取り組んできた。そしてその成果をふまえて，本校の教育研究会に於いて次の様な公開授業を行ってきた。(詳細は過去の本校研究報告をご参照ください。)

昭和60年	中学1年生	立方体の切断
	高校2年生	1次変換
昭和62年	中学2年生	合同変換（美術科との連係を考えた）
昭和64年	中学2年生	1次関数の応用
	高校1年生	複素数平面の応用

これらの授業実践などを通して，創造的な思考を育てる題材を扱う授業の中でコンピュータを利用するには，その高速性・反復可能性・グラフィック機能などを，ある目的達成のための作業が手計算などでも可能だが非常に煩雑で時間も掛るような場合に用いるのが有効である，という結果を得た。このような考えで研究を進め，平成3年度に行った公開授業，アフィン変換（中学2年生），2次曲線の分類（高校2年生）について報告する。

2. ソフトの概要

まず，昨年の研究報告の形式にしたがって，授業で使用したソフトの概要を紹介する。

① アフィン変換

1. ソフト名：アフィン変換

2. 適用機種：PC9801シリーズ

3. 使用言語：N88BASIC（86）コンパイラ（MS-DOS）

4. ソフトの概要：

もとになる図形を選ぶと，その図形に平行光線をあててスクリーン上に映る影を表示する。またキー操作により，スクリーンを傾けることができ，そのときの影が変化する様子を表示する。

5. ソフトの利用例：

変換という立場から幾何を考える「アフィン変換」の導入として利用する。

いろいろな図形の変換の様子を観察して，アフィン変換の基本的性質を発見する。

6. ソフトの操作方法：

(1) プログラムを起動する。

A＞ AFINとタイプする。

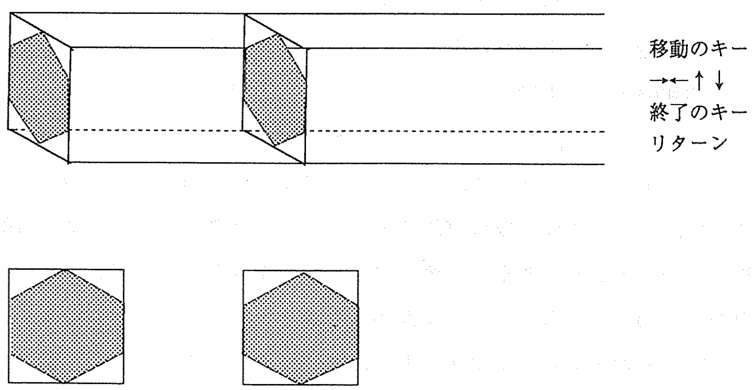
(2) 図形を選択する。

テンキー（0～9）を使って，選ぶ図形の番号を入力する。選択できる図形は次の通りである。

1. 正方形	2. 六角形	3. 正三角形
4. 台形	5. 平行四辺形	6. 三角形

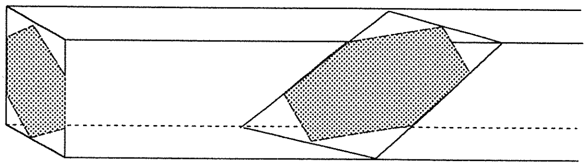
(3) 影を表示する。

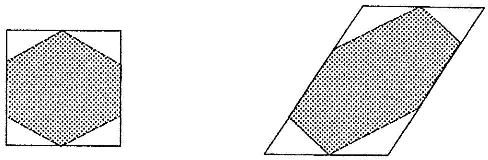
図形を選ぶと，その図形に平行光線をあててスクリーン上に映る影を表示する。



(4) スクリーンを傾ける。

→←↑↓を使ってスクリーンを傾け，その状態で映る図形の影を表示する。





(5) リターンを押すと，再びもとになる図形を選択することができる。

② 2次曲線の分類

1. ソフト名：「2次曲線」
2. 適用機種：PC-9801 シリーズ
3. 使用言語：Turbo PASCAL
4. ソフトの概要：

x, y の2次方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ の係数 a, b, c, d, e, f を入力すると，それの描く図形が表示される。

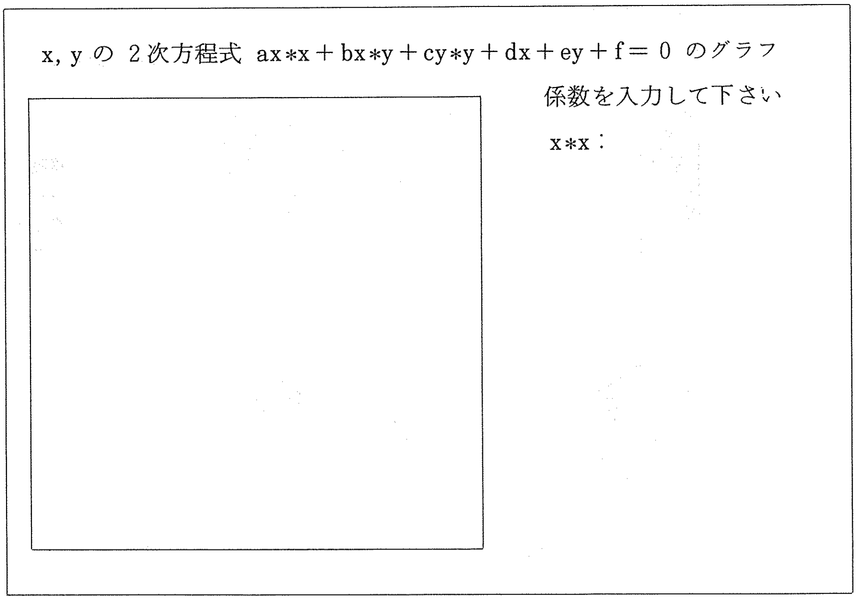
5. ソフトの利用例：

高校2年生 2次曲線の分類

6. ソフトの操作方法：

(1) ソフトの起動

フロッピィディスクをスロットに入れ，リセットボタンを押すと自動的に立ち上がり，ディスプレイに下の様な画面が表示される。

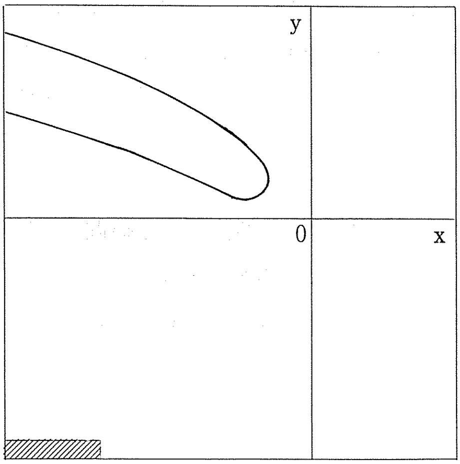


(2)　係数の入力及び図形の表示

x^2の係数aの数値をテンキーなどで入力し，リターンキーを押す。このとき数値以外は受け付けない。リターンキーを押したときそれらは消去され，入力待ちの状態に戻る。また，入力間違いはBSキーで消して再入力する。なお，数値は負の数を含めた整数，小数で入力する。

以下同様に xy, y^2, x, y, 定数項の係数 b, c, d, e, f を入力するとその方程式の表わす図形が次の様に表示される。このとき同時に図形の名称，頂点又は中心の座標なども表示され，図形画面左下のメジャーによりおおよその大きさを知る事が出来る。

x, y の２次方程式　ax*x＋bx*y＋cy*y＋dx＋ey＋f＝０ のグラフ



2.034821850

係数を入力して下さい

x*x ：１

x*y ：４

y*y ：４

x　：１

y　：１

定数 ：１

放物線

頂点（－1.880, 0.790）

再実行は　リターンキー

⑶　再実行と終了

リターンキーを押すと起動時の画面に戻り，再実行できる。またSTOPキーを押すと終了し，MS-DOS の初期画面になる。

3.　授業の実際

A．中学２年生　　「アフィン変換」　　　　　　　　授業者　井　上　正　允

①　題目及び指導計画

題　　目：アフィン変換

指導計画：1.　合同変換・相似変換・等積変換………１時間

2.　アフィン変換……………………………３時間

（本時はその１時間目）

②　なぜ「アフィン変換」なのか。

中学校のユークリッド流幾何と高校のベクトルや１次変換などの間のギャップは，内容的にも学習者の心理的な側面に関しても極めて大きい。現行の中学校幾何は，図形の諸性質をスタティックに追求することが中心で，図形が置かれた空間に着目したり，空間を変化させることで図形がどのように変化していくのか，高校内容の中心であるベクトルや１次変換につながるダイナミックな視点が欠落している。高校の「代数・幾何」の授業を担当した際にこのことを強く感じ，図形学習における中・高のつなぎをどう図るかという問

題意識が今回の授業の根底にある。

このアフィン変換の授業を先駆的に試みている東京・明星学園中学では，相似を扱う前に，十数時間かけてアフィン変換を学習。「平行性」や「線分比（分点比）」の保存をアフィン変換の特質として取り出し，正三角形で確認した中点連続定理や重心の性質を，アフィン合同である一般の三角形の定理としてスライド承認していくという手続きをとる。変換という視点で空間と図形をとらえることの重要性と，多くの中学生にとって相似によるこれら諸定理の証明が容易なものではないという判断がそこには働いている。

本校では，一学期に５章平行と合同，６章三角形と四角形（29時間），二学期に入って７章相似と比（15時間）の学習を受けて「アフィン変換」を４時間で扱うというもので，明星学園の実践とは，位置付け・ねらいはかなりちがう。「合同・相似をいま一度“変換”という視点で見直すこと」「これまで扱ってきた三角形・四角形の諸性質の中から，アフィン的性質をとり出すこと」が授業のねらいになっている。

③　「アフィン変換」とは……？

合同変換は図形をこれと合同な図形に移す変換で，線分の長さや角の大きさを変えない。

図１のような平行投影がひとつのモデルになる。相似変換は，図形の拡大・縮小であり，ここでは角は不変で，線分の長さの比が保存される。図２のようなスライド映写のフィルム（原画）とスクリーンに描き出される像がひとつのモデルになる。

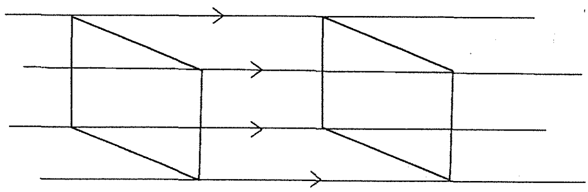


図１　合同変換（形，大きさを変えない）・平行投影

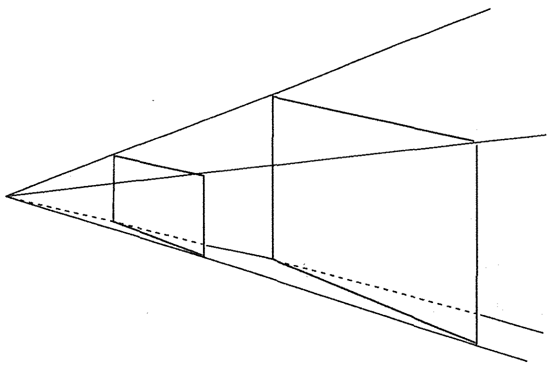


図２　相似変換（形を変えない）・点光源からの投影

これに対して，アフィン変換のモデルは図３で示される。

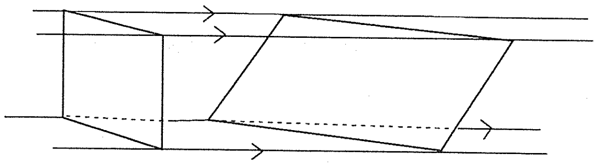


図３　アフィン変換（何が不変か？）・平行投影

フィルム画面を固定して，スクリーン画面を自由に動かす。フィルム画面に描かれた図形がスクリーン上でどのように変化するのか。２つの図を照合しながら，保存される性質，保存されない性質を明らかにしていく。さらに合同・相似変換とちがいは……等々。

参考までに，アフィン変換の定義を挙げておく。

２つの平面E, E′ のそれぞれの上で，アフィン座標を考え，E上の点P(x, y) に，E′ 上の点P′(x′, y′) を

$$x' = ax + by + k$$
$$y' = cx + dy + \ell \quad （ただし，ad - bc \neq 0）$$

によって対応させるのが，EからE′ へのアフィン変換である。

こうして定義されたアフィン変換の性質は，以下の３点である。

ア)　直線は直線にうつる。

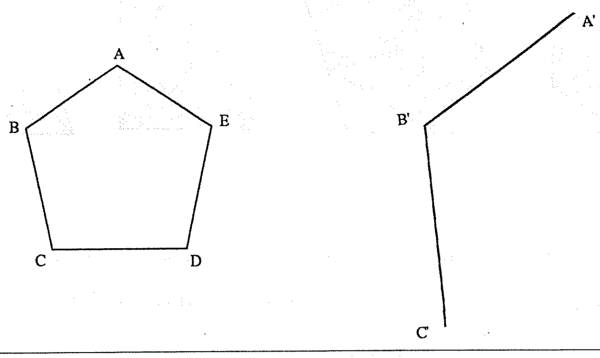
イ)　平行な直線は，平行な直線にうつる。

ウ)　一直線上の線分の長さの比は変わらない。

④　本時の授業

本時の授業の最終課題は次のように設定。

課題1.　正５角形ＡＢＣＤＥをアフィン変換して得られる図形を完成せよ。

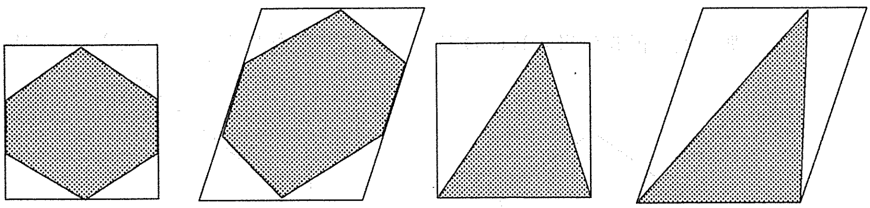


上記の課題解決をねらいとして，指導過程を以下のように組み立てた。

指　導　内　容	学　習　内　容	備　　考
1. 前時の確認	合同変換・相似変換とアフィン変換のモデル比較	
2. 課題の提示	課題１（前出）	
3. コンピュータのシュミレーションモデルによるアフィン変換の分析	グループによる作業を通してアフィン変換によって保存されるもの，保存されないものを抜き出しメモ（各班，最低３つ）	キー操作説明 ソフトについては別項参照
4. アフィン変換の特質を発表・確認	平行性，分点比，点対称性など生徒から出てきたものをシュミレーションモデルによって再確認	
5. 課題の解決・発表	代表的な方法を２つほど取り上げ，検討,・確認	

3.の「コンピュータシュミレーションモデルによるアフィン変換の分析」については，3～4人で班をつくり，班毎にコンピュータを操作しながら，アフィン変換で保存されるもの，保存されないものを見つけ出す。

（例）



正方形のフレームの中の六角形や三角形がアフィン変換によって，フレームが長方形や平行四辺形に変わり，それにともなって六角形や三角形が変化していく。ソフトには，この他に正三角形，正方形，平行四辺形，台形が納められており，それらを自由に取り出して，アフィン変換による各図の変化の様子，特徴が調べられるようになっている。

およそ15～20分のグループ作業を通して，「保存されるもの」として取り出されたものは次のとおりである。（順不同）

○　平行な辺は平行な辺にうつる。

○　中点は中点に，三等分点は三等分点にうつる。（線分上の分点比は不変）

○　三角形は三角形に………。三角形が四角形になるようなことはない。

○　平行な辺の比（相等関係）

○　点対称性

○　重心は重心にうつる

○　対辺相等，対角相等

これに対して「保存されないもの」は，

○　辺の長さ

○　角の大きさ

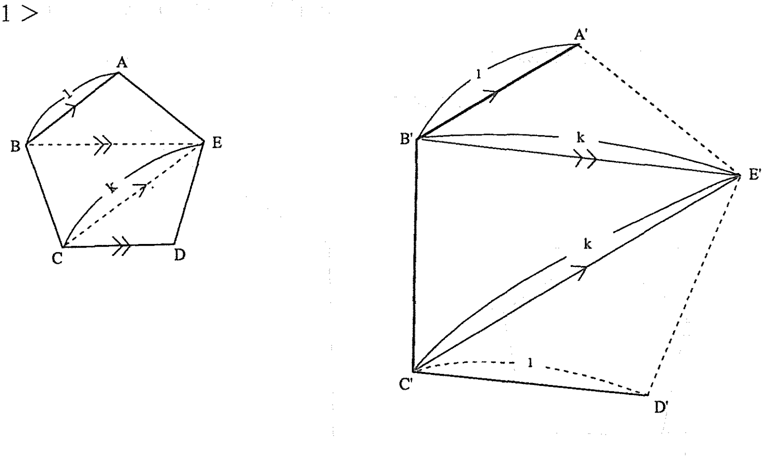
○　線対称性

○　平行でない辺の比

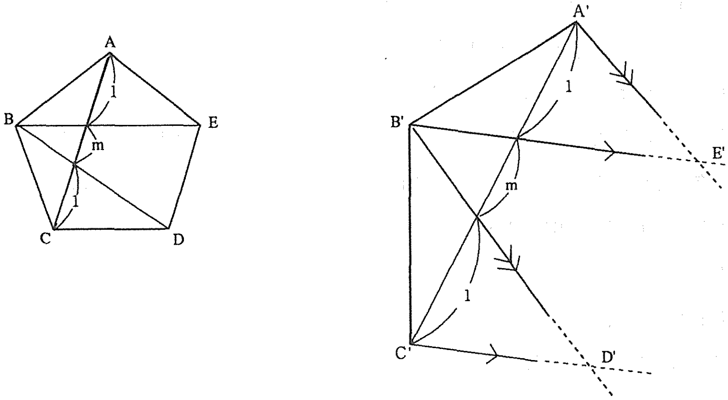
が挙がった。これらを改めて教室のスクリーンにコンピュータディスプレイ画面を写し出しながら確認し，「すべての三角形はアフィン合同であり，アフィン幾何の世界では，四角形は一般の四角形，台形，平行四辺形に分類されること。そこで保存されるものは“平行性”と“分点比”であること」を押えて，残されたわずかな時間で課題1に取り組んだ。

教師の予想を超えて，解決は手間どり時間内に全体で確認し合うことは出来なかったが生徒の作図法のいくつかを紹介しておく。

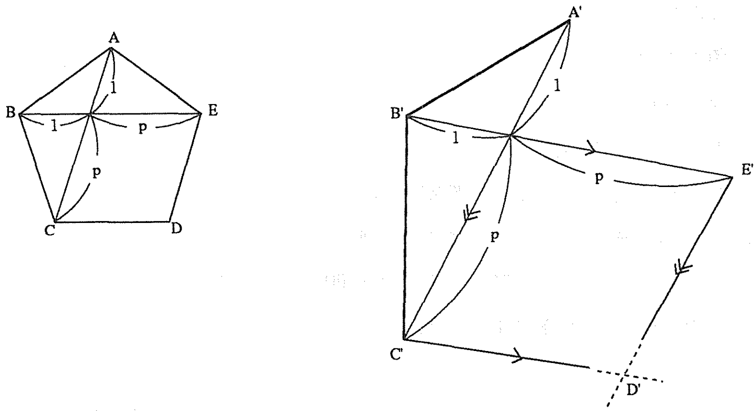
<例1>



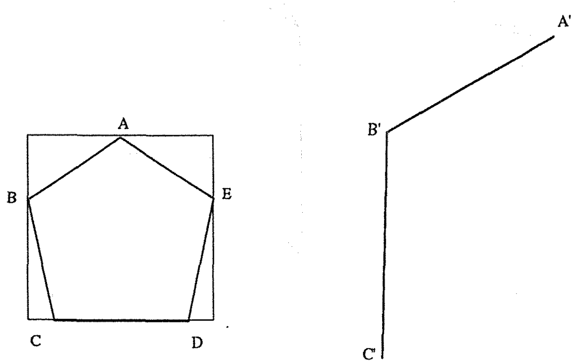
＜例２＞



＜例３＞

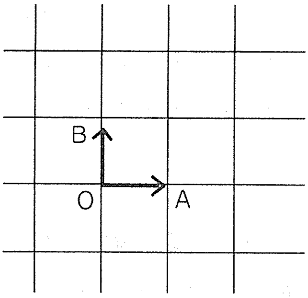


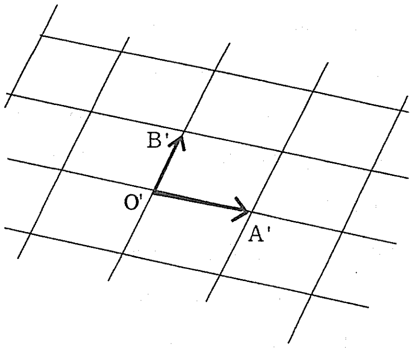
解決が容易でなかった最大の要因は，コンピュータ・グラフィックの正方形および平行四辺形のフレームの存在である。多くの生徒が，次図のように正五角形ＡＢＣＤＥを長方形で囲み，辺上の分点比を測定して，五角形A′ B′ C′ D′ E′ の作図にチャレンジするのだが，外枠の平行四辺形づくりで行き詰まってしまう。残された時間内で，この壁を突破できなかったということである。



ただし，この発想は「アフィン変換」を考える上で，「図形のおかれた空間の枠組みを変えてみる」というアイデアにつながるもので貴重である。つまり，直交座標で考えていたものを斜交座標で考えればいいというアイデアを内包している。

あまり深入りは出来なかったが，この発想については後の２時間で簡単に触れた。





⑤　まとめとコンピュータ利用について

今までとはちがい形や大きさに拘わらない幾何の世界に触れて，生徒は少なからず興味を抱いたようだが，これを学んだことで，どんないいことが拓けてくるのかを実感できたとはいい難い。「中点連結定理」や「重心の定理」の相似による証明も本校の生徒達にとってはそれ程抵抗のあるものではないから，「正三角形で証明したことをアフィン合同な一般の三角形にスライドしていく」という方法が目新しいものではあっても，ダイナミックに新しい世界が開かれるまでには到らない。このあと「射影変換」の導入等も含めて検討する必要はある。

さて，コンピュータ利用だが，今回の利用法は，以前本校数学科で分類した８タイプの中の，2.教材提示・演示補助，3.概念形成，5.法則性の発見，6.法則性の検証の４つのねらいにそったものである。ソフトも決して複雑なものでなく，授業の進行によっていかようにも使える汎用性の高いものである。細部に渡って使用法が規定されているソフトは意外に使いにくい。「平行性が保存される」「分点比が保存される」という予測を持って２個の図で色々調べ，確認できる今回のソフトは，授業の中でかなり有効に機能したといってよいだろう。

B.　高校２年生　　「２次曲線の分類」　　　　　　　　授業者　　鈴　木　清　夫

①　題目及び指導計画

題　　目：代数・幾何　　　２次曲線

指導計画：1.　放物線　　　　　　２時間

2.　楕　円　　　　　　２時間

3.　双曲線　　　　　　２時間

4.　２次曲線の分類　　２時間（本時はその１時間目）

5.　2次曲線の諸性質　　7時間

②　本時のねらい及びコンピュータ利用の意義

放物線，楕円，双曲線について，その方程式に注目すると，それらはいずれも x, y についての2次方程式であるという共通点を持っていることがわかる。このことは高校1年で学んだ分数関数（直角双曲線）についても，分母を払った式を考えれば同様であり，2次関数や直線などの式も同じように考えることができる。これらの事から逆に適当な係数を持つ「x, y の2次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ がどのような図形を表すか。」という事は自然な問題として出てくるであろう。この問題について考察する事がここでの目的である。

具体的には，2次曲線の図形的な定義を学習し，焦点と準線，或いは2焦点との距離の和又は差が与えられた時の軌跡の方程式を求める事や，特殊な x, y の2次方程式が表わす図形を求める事などを前時までに行なった。これに引き続く本時は，一般の x, y の 2次方程式が与えられた時，それがどのような図形を表すかについての考察の1時間目である。

特殊な場合（例えば x y の項がない場合など）は実際に平方完成などの式変形を行なう事でどのような図形を表わすかが比較的容易に判断でき，またそれらが表わす図形には放物線，楕円，双曲線，平行2直線，交わる2直線，1直線，1点があることはわかる。しかしこれら以外の別の図形を表わす事があるか，又これらになる場合でも，一般の場合（x y の項がある場合）にどれになるかは考えにくい。そこで，コンピュータを利用していろいろな場合のグラフを調べ，それらを手がかりに分類を試みるというものである。

2次曲線へのコンピュータの利用として，同心円などを用いて図形を描いて見せ，図形的な定義や離心率による分類を確認させるものなどがあるが，x, y の2次方程式が表す図形の分類を考察する場面での利用を試みた。この考察を手計算だけで行なうと天下り的で単調になる恐れが多分にあり，生徒が興味を失う事も予想される。そこで具体的なグラフを見せる事で興味を喚起するとともに，分類の手がかりを数多く得させるためにコンピュータを利用する事にした。それらを基に生徒一人一人が自ら考え分類に取り組む事が出来るであろうし，予想した分類の確認にもコンピュータが利用できるため，より多くの生徒に発見の喜びを味わってもらえるであろうと考えた。

③　指導過程

指導内容	学習内容	備考
1. 課題の提示	「x, y の2次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ が どのような図形を表すか。」	放物線，楕円，双曲線は左の式で表される。

	＜プロジェクターを用いて特殊な場合をコンピュータでデモンストレーションする。＞	ほかにどのような図形になるか？ 係数と図形の関係は？
2. 実　験 （コンピュータを利用して調べる。）	係数 a, b, c, d, e, f を入力してグラフを調べる。 （調べた結果はプリントに記入。） （分類を予想できたら，それに添った係数でさらに調べてみる。）	コンピュータの操作の説明。
3. 実験結果の整理 分類の予想	調べた結果を発表し図形ごとに整理する。 放物線 楕　円 双曲線 平行２直線 交わる２直線 １直線 １　点 図形なし 分類を予想する。 放物線　→　$b^2-4ac=0$ 楕　円　→　$b^2-4ac<0$ 双曲線　→　$b^2-4ac>0$ etc. ＜予想に添った係数でデモンストレーションしてみせる。＞	発表された図形ごとに係数をかき並べる。 直線等になる場合は２次式の判別式でわかる。 予想がでない時は，放物線になる場合が少ないことに注目させ a, b, c の関係を導かせる。
4. 予想の証明	「放物線　→　$b^2-4ac=0$」の場合 例えば，準線　$\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 焦点　(p, q) として方程式を求めてみる。 etc.	逆は成立しない $b^2-4ac=0$ →　放物線　or 直　線　or 図形なし
5. 次時の指示	＜次時までに証明し残した予想について考察し，分類をまとめておく事を指示する。＞	

④　授業後の感想

コンピュータを生徒３人に１台程度用意して実施したのであるが，実際の授業は「分類

の予想」の段階まで で終了した。これは，入力する数値に何の指示も与えず自由に行わせたため，“図形なし”となるものや，極端に大きな数が入力されたもの（予想の材料にならない）などが数多くあったことから，コンピュータを利用して生徒が調べる時間を多く取らざるを得なかったためである。もちろん幾つかこのような数値で行なっているうちにどんな数値で試したらよいかを考え始め，予想の材料を揃えて行くのであるが，日常的にはコンピュータを利用していないため考えていた以上に時間が必要であった。試行錯誤の中である項の係数だけを変化させて図形の変り目を調べ始めた生徒もいたが，途中で入力する数値に対してなんらかの指示を出した方がよかったようである。

いずれにしても，この時間中に「b^2-4ac の正．負．0により図形の種類が変りそうだ」との予想を立てられたものが多くでたことや，それをもとに次の授業では分類に取り掛かったわけであるが，1次変換の回転を利用して分類するもの以外に次に挙げるような様々な分類の方法が，完全な形ではないが，だされたことなどはコンピュータを利用した1つの成果であると考えられる。又授業後ソフトを借りに来たものが何人もおり，興味付け，動機付けとしても効果があったと思われる。

授業の進め方には工夫改善の余地が数多くあるが，この題材にコンピュータ利用する事は有効であったと考えている。

<生徒が考えた分類法など>

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (a>0) \text{ ——— ①}$$

①が表す図形について

$b=0$ のとき①が表すものは次のいずれか。

放物線，楕円，双曲線，交わる2直線，平行な2直線，1つの直線，1点又はなし　}　*

原点中心の回転移動により①の xy の項を消去できるので，①が表す図形は上の㊀のいずれかである。

∵　$f:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

①に代入したときの $x'y'$ の項の係数は

$$2a\sin\theta\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2c\sin\theta\cos\theta$$
$$=b\cos 2\theta+(a-c)\sin 2\theta$$

従って　$a-c=0$ のときは $\theta=\frac{\pi}{4}$

$a-c\neq 0$ のときは $\tan 2\theta=\dfrac{b}{c-a}$

をみたす θ だけ原点を中心に回転すれば xy の項が消去できる

判別式を用いた分類

①より $\quad ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)=0 \qquad (a>0)$ ——①′

判別式 $\quad D=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)$

$\qquad\qquad =(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+(d^2-4af)$

$b^2-4ac\neq 0$ のとき 判別式 $\dfrac{D'}{4}=(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)$

①′ をみたす実数 x, y の範囲を考えて

$$\begin{cases} b^2-4ac>0, & \begin{cases} D'=0 & \to \text{交わる 2 直線} \\ D'\neq 0 & \to \text{双曲線} \end{cases} \\[2ex] b^2-4ac<0, & \begin{cases} D'=0 & \to 1\text{ 点} \\ D'<0 & \to \text{なし} \\ D'>0 & \to \text{楕円} \end{cases} \\[2ex] b^2-4ac=0, & \begin{cases} bd-2ae\neq 0 & \to \text{放物線} \\ bd-2ae=0 & \begin{cases} d^2-4af=0 & \to 1\text{ 直線} \\ d^2-4af>0 & \to \text{平行 2 直線} \\ d^2-4af<0 & \to \text{なし} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

1次変換を用いた分類

逆変換が存在する1次変換によって図形の種類は変わらないので,

$\underline{b^2-4ac=0}$ のとき ①より $(\alpha x+\beta y)^2+dx+ey+f=0 \quad (\alpha\neq 0)$

1次変換 $\quad f:\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x+\beta y \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

従って f により①は

$$X^2+\frac{d}{\alpha}X+\frac{-d\beta+e\alpha}{\alpha}Y+f=0$$

$e\alpha=d\beta$ のとき $\left(\begin{array}{ll} \text{a, c で表すと,} & b>0 \text{ のとき } e\sqrt{a}=d\sqrt{c} \\ & b<0 \text{ のとき } e\sqrt{a}=-d\sqrt{c} \end{array}\right)$

$$\begin{cases} d^2-4af=0 & \to 1\text{直線} \\ d^2-4af<0 & \to\text{なし} \\ d^2-4af>0 & \to\text{平行}2\text{直線} \end{cases}$$

$e\alpha \neq d\beta$ のとき（$b>0$, $e\sqrt{a} \neq d\sqrt{c}$ 又は $b<0$, $e\sqrt{a} \neq -d\sqrt{c}$ ）

→放物線

<u>$b^2-4ac>0$ のとき</u>　①より　$(\alpha x+\beta y)^2-k^2y^2+dx+ey+f=0$　$(\alpha \neq 0,\ k \neq 0)$

同様の1次変換fによって

$$X^2-k^2Y^2+\frac{d}{\alpha}X+\frac{-d\beta+e\alpha}{\alpha}Y+f=0$$

→双曲線又は交わる2直線

<u>$b^2-4ac<0$ のとき</u>　①より　$(\alpha x+\beta y)^2+k^2y^2+dx+ey+f=0$　$(\alpha \neq 0,\ k \neq 0)$

同様に考えて　$X^2+k^2Y^2+\dfrac{d}{\alpha}X+\dfrac{-d\beta+e\alpha}{\alpha}Y+f=0$

→楕円 又は 1点 又は なし

離心率 k(>0) を用いた分類

焦点 (p, q)，準線 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$，離心率 $k(>0)$ とすると

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=k\cdot\frac{|\alpha x+\beta y+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\underline{\underline{\{(1-k^2)\alpha^2+\beta^2\}}}x^2\underline{\underline{-2k^2\alpha\beta}}xy+\underline{\underline{\{\alpha^2+(1-k^2)\beta^2\}}}y^2$$

$$-2\{p(\alpha^2+\beta^2)+k^2\alpha\gamma\}x-2\{q(\alpha^2+\beta^2)+k^2\beta\gamma\}y+\{(\alpha^2+\beta^2)(p^2+q^2)-k^2\gamma^2\}=0$$

（═══ 線部に注目して）

$a=\{(1-k^2)\alpha^2+\beta^2\}t$,　$b=-2k^2\alpha\beta t$,　$c=\{\alpha^2+(1-k^2)\beta^2\}t$　とおくと

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= t^2[4k^4\alpha^2\beta^2-4\{(1-k^2)\alpha^2+\beta^2\}\{\alpha^2+(1-k^2)\beta^2\}] \\ &= -4t^2(\alpha^2+\beta^2)(1-k^2) \end{aligned}$$

従って
$$\begin{cases} 0<k<1 & \to & b^2-4ac<0 \\ \text{（楕円）} & & \\ k=1 & \to & b^2-4ac=0 \\ \text{（放物線）} & & \\ 1<k & \to & b^2-4ac>0 \\ \text{（双曲線）} & & \end{cases}$$

4. 終わりに

中学校技術家庭，高等学校数学Ａ，Ｂ，Ｃ など，指導要領内へのコンピュータの位置付けや，学校へのコンピュータ機器の配備が急速に進んでいる状況を考えると，“コンピュータのための授業”になってはつまらないが，それを教具の１つとして有効に利用するための研究実践はますます重要になってくる。コンピュータがあるから出来る事は現在の教育内容にも数多くあるであろうし，新しい観点の利用法も含めて，今後も研究を進めていく必要があろう。またソフトの開発には多くの時間と労力がかかる。今回のソフトについても途中でエラーが起きないようにするために多くの時間を費やした。市販されているソフトや他の人が作ったものの活用を考える事も必要であろうし，そのための開発，流通面についての研究も必要である。

新指導要領の実施を目前にし，これについての検討を含めながら今後も研究を続けていきたいと考えている。