提携均衡と逐次決定過程

長 尾 昭 哉
村 田 潔

Coalitional Equilibrium and Sequential Decision Process

Teruya Nagao
Kiyoshi Murata

目　次

は じ め に

市場機構と呼ばれる社会制度の果している機能の核心を表現する手段の一つとして，Scarf[1973]の不動点アルゴリズム——とそれ以後の展開——に注目すべきことを前稿に述べた。[1]本稿でわれわれは，H・サイモン以降の経済学／経営学に特有な社会／経済像，つまり社会構成員の key role をいわゆる管理行動に見る社会イメージを模型化する問題を取り上げる。いいかえれば伝統的な市場模型に代えて、参加による組織形成——従って提携構造の再調整——を主題化する模型をつくることである。その場合，茨木［1979］の体系化による逐次決

定過程が表現手段として有用である。

1. 市場均衡と提携均衡

伝統的な競争均衡分析においては，財・サービスその他すべてのものについての市場取引を想定し，もちろん生産的労働用役もその中に含めて考えている。すなわち、企業が家計から労働を受取るのは，金銭による購入であり，雇用関係は要するに，市場関係の一種に過ぎない。新古典派の標準構成から，非協力ゲームによる現代的表現にいたるまで，すべてその通りである。

ここで視点を変え，焦点を移して，異なった社会／経済像を模型化することを考える。労働主体の自発的参加によって社会集団が結成され，その集団が企業と呼ばれる。集団の共同決定に従って，資金が集められ，経営戦略が選ばれる。こうして，一旦，生産的投入・産出の決定主体としての企業が体系内にセットされ，又消費的決定の主体を社会構成員のひとりひとりによって自然に定義してしまえば，あとは伝統に従って市場模型を構成するのに何の問題もない。

Ichiishi [1982 b] がたくみに要約している通り，過去30年間にゲーム理論の二つの流れが展開された。その一つは標準型ゲームにおけるナッシュ均衡解の問題に代表されるが，各人が非協力的に行動する場合にどんな社会的均衡が生ずるかを明らかにする。もう一つの流れは，特性関数型ゲームに代表されるが，各人が他人と協力して何を達成出来るか意識している場合の安定的な社会的帰決が何であるかを研究した。

簡単にいえば，本稿で考える模型は提携均衡過程と市場均衡過程が，同時あるいは交互に進行するようなプロセスを構成しようとするのであって，協力ゲームと非協力ゲームの合成を企てているといってもよい。そしてその協力ゲームのパートは要するに集合分割問題に他ならない。ただし通常の数理計画の意味における set partitioning problem は例えば単一の線型関数を目的型式

とするのであるが，この場合は，社会的厚生関数のようなものが与えられない限り単一の目的型式を持たないことはいうまでもない。

つまりわれわれは，社会構成員がどんな具合にそれぞれ集ってグループを作るかによって，すなわち誰と誰が一しょになるかによって本質的な差異を生ずるような社会を考えていることになる。例えば$N=\{1, 2, \cdots, 10\}$という社会があって，$\beta_1=(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \cdots)$と$\beta_2=(\{1, 2, 3,\}, \{4, 5, 6, 7\}, \cdots)$という二つの構成は全く違っているとか，$\beta_3=(\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6, 7\}, \cdots)$はまた違った結果を生ずるということである。

もう少し形式的にいうと，Nの部分集合T_iの族$\bar{N}(=2^N)$のうちからNの分割になっているコレクションβを取る。（$i \neq j$のとき$T_i \cap T_j = \emptyset$, $\cup_i T_i = N$)

集合分割問題とは，それぞれの集合の要素の個数を#をつけてあらわし，Aを incidence とすると，

max $\{f(x) \mid Ax=b$, ただしxは$\#\bar{N}$次元の$0-1$ベクトル，bは$\#N$次元の1ベクトル$\}$

というように書ける。ここで$f(x)$と記されている目的形式は，以下の模型においてはやや複雑なプロセスによって計算されるものになる。

Ichiishi [1981, 1982 a] は市場均衡と提携均衡を統合する代表的な模型と，提携均衡解の存在問題に関する完全な議論を与えている。

2.　市石模型の概略

現在の時期（$t=1$）において，将来（$t=2$）に生ずるであろう事態について各人（$j \in N$）が主観的な予測を持ち，その予測にもとづいて企業Sを設立し，そこに参加する意思決定を考えているのが，このモデルのエッセンス

と言える。

財と株の市場均衡が達成されるのは，当期においてである。そこで各人は，消費者として最終財を購入したり，投資家として株を購入したりする決定を，個人として行なう。

他方，提携構造βが決っているとき，彼は自分の参加している提携(すなわち企業) $T \in \beta$にのみ労働を提供し，彼の配分すなわち賃金 w を含む企業戦略について，T の他のメンバーと共同決定 $(y^T, \eta^T) \in Y(T)$を行なう。$Y(T)$は，T についての生産可能性情報であり，y は当期の投入ベクトル，ηは来期の産出物の確率測度を表わす。

$t = 1$における市場均衡の説明は省略するが，いま市場状況すなわち，提携構造・各人の各企業への資金供給・各企業の株価と戦略および市場価格が次のように集約されているとする。

$$\Xi_1 = (\beta, \{c_j\}_{j \in N}, \{q_T, (y^T, \eta^T)\}_{T \in \beta}, p)$$

この状況において，何人かが集まって将来をそれぞれ予測しながら，企業形成のやり直しをするのがこの協力ゲームのエッセンスをなす。すなわち，あらゆる可能な企業形成（その一つをSで表わす）について，各人が期待しうる効用$\hat{U}^{(j,S)}$ の配分可能性 $V_S(\Xi)$ (後述) によって支配されないことが提携均衡の定義である。

状態Ξ_1 において成立していない組織 S の発起人集団 ($j \in S$) によって，将来期待が形成される仕方について，付け加えておく。市石模型では，各人が自分の現に参加している企業から離れて形成する可能性のあるすべての新企業について考慮がなされていて，しかも，もとの企業にまさる期待は持ちえないことが，社会分割としての提携均衡の意味であると考えているのである。

各人 $j \in S$は，自分たちの投資配分を変更することを念頭において，Sの資金調達を予測し，Sの企業戦略$(y^S, \eta^S) \in Y(S)$を決め，同時に他企業の将

来産出についての主観的確率測度 $\hat{\mu}^{(j,S)}$ を定める。彼はまた，ポートフォリオを変更したことと，全企業の産出と市場価格の想定から，将来所得を予想し，最後に期待効用 $\hat{U}^{(j,S)}(\Xi_1)$ を推測する。

可能な提携 S について，

$$V_S(\Xi) = \{v \in R^n \mid v_j \leqq \hat{U}^{(j,S)}(\Xi),\ {}^{\forall}j \in S\}$$

$$\tilde{V}_S(\Xi) = \{v \in V_S(\Xi) \mid v_j = 0,\ {}^{\forall}j \in N \setminus S\}$$

$$H(\Xi) = \bigcup_{\beta \in B} \sum_{S \in \beta} \tilde{V}_S(\Xi)$$

とすると（B はすべての提携構造の族），手付を前提としないゲーム

$$(\{\tilde{V}_S(\Xi)\}_{S \in N},\ H(\Xi))$$

を考えることが出来る。図1は $\tilde{V}_S$ を，図2はそれから作られる H を示している。この図から分かるように，$H(\Xi)$のうち V_S のどの一つによっても切取られないで残る部分（コア）は，社会的提携均衡を表わしている。

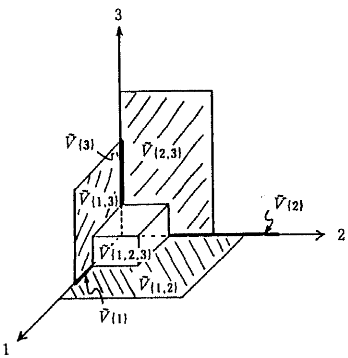

図1　$\tilde{V}_S$ (Ξ)　　(n = 3)

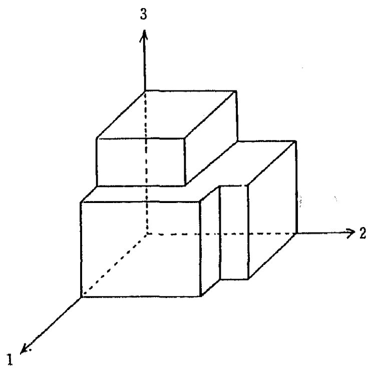

図2　H (Ξ)　　(n = 3)

3.　逐次決定過程

提携均衡過程が，構造的に集合分割問題に対応していることは，先に述べた通りである。ところが不幸にしてこの問題には── Balas and Padberg [1976] に論評されているような、いくつかのすぐれた研究があるにもかかわらず──決定的な解決方法が発見されていないし，又，容易にそれが見つかることは考えられないのである。そこでこの種の問題には，いわばまわり道のようであるが，状態空間表現を通じて，着実にアプローチした方がよい。次節でわれわれの考え方を述べるが，先ずそれに先立って，茨木俊秀氏による現代的定式化のうち，われわれに必要な部分を要約する。

さて，Σを空でない有限個の決定の集合としよう。つまり，$a \in \Sigma$はある決定を示す(離散型変数と考えてよい)。またΣ^*で方策の集合を表わす。方策というのは，有限個の連続した決定のことである。従って，Σ^*はたかだか可算無限個の要素を持つことになる。そこでΣを使って離散最適化問題を書くと，

$$\Upsilon = (\Sigma,\ S,\ f)$$

であり，ここで $S \subset \Sigma^*$は実現可能な方策の集合，$f: S \to R$ は目的関数である。以下，最適化問題を最大化問題に限定すると，離散最適化問題Υの最適方策の集合は，

$$O(\Upsilon) \triangleq \{x \in S \mid f(x) \geqq f(y),\ {}^{\forall} y \in S\}$$

となる。

次に，離散最適化問題を状態空間上で表現するのだが，その場合，われわれの必要とするアルゴリズムにとっては，有限状態空間を用いればよい。ここで有限オートマトンは，

$$M = (Q,\ \Sigma,\ q_0,\ \lambda,\ Q_F)$$

というように表わされる。ただし，Q は状態の有限集合，$q_0 \in Q$ は初期状態，$\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ は状態遷移関数，$Q_F \subset Q$ は最終状態の集合である。λ は，ある状態 $q \in Q$ にある決定 $a \in \Sigma$をした場合に，M がどのような状態になっているかを示す。特に，

$$\lambda\ (q,\ \varepsilon) = q,\ {}^{\forall} q \in Q$$

$$\lambda\ (q,\ xa) = \lambda\ (\lambda (q,\ x),\ a),\ {}^{\forall} q \in Q,\ {}^{\forall} x \in \Sigma^*,\ {}^{\forall} a \in \Sigma$$

とすると，$\lambda: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ と考えられる。ただし，εは何も決定しないという方策である。

$$\bar{\lambda}(x) \triangleq \lambda (q_0,\ x),\ x \in \Sigma^*$$

としておこう。さて，もし$\bar{\lambda}(x) \in Q_F$ ならば，M は x を受理するという。M の受理集合は，

$$F(M) \triangleq \{x \in \Sigma^* \mid \bar{\lambda}(x) \in Q_F\}$$

と定義される。$F(M) \subset \Sigma^*$であることは言うまでもない。

有限オートマン M に目的関数を付随させたシステムが，この節の主題である sdp（逐次決定過程）である。それは，

$$\Pi = (M,\ h,\ \xi_0)$$

と書き表わされる。ここで $h: R \times Q \times \Sigma \rightarrow R$ は目的関数，$\xi_0 \in R$ は初期状態での目的関数の値である。現在の状態 $q \in Q$ が目的関数値$\xi \in R$ を持つとき，決定 $a \in \Sigma$が加えられると，状態は$\lambda(q,\ a)$ に移り，新しい状態での目的関数値は，$h\ (\xi,\ q,\ a)$ になる。

$$h\ (\xi,\ q,\ \varepsilon) = \xi,\ {}^{\forall} \xi \in R,\ {}^{\forall} q \in Q$$

$$h\ (\xi,\ q,\ xa) = h\ (h(\xi, q, x),\ \lambda (q,\ x),\ a),$$

$$ {}^{\forall} \xi \in R,\ {}^{\forall} q, \in Q,$$

$$ {}^{\forall} x \in \Sigma^*,\quad {}^{\forall} x \in \Sigma^*,\ {}^{\forall} a \in \Sigma,$$

$$\bar{h}(x) \triangleq h(\xi_0,\ q_0,\ x),\ {}^{\forall} x \in \Sigma^*$$

としておこう。sdp Πの受理集合は $F(\Pi)=F(M)$ であり，最適方策の集合は，

$$O(\Pi) \triangleq \{x \in F(\Pi) \mid \bar{h}(x) \geqq \bar{h}(y),\ {}^{\forall}y \in F(\Pi)\}$$

である。特に，sdp Πで，任意のξ_1，$\xi_2 \in R$，$q \in Q$，$a \in \Sigma$について，$\xi_1 \leqq \xi_2$ なら $h(\xi_1, q, a) \leqq h(\xi_2, q, a)$ である場合，この sdp を単調 sdp，また任意の$\xi \in R$，$q \in Q$，$a \in \Sigma$に関し，$h(\xi, q, a) \geqq \xi$を満す sdp を正単調 sdp と言う。

さて，離散最適化問題Υを sdp Πで表現する場合，2通りの方法がある。それは，

(i)強表現

$$F(\Pi)=S$$

$$\bar{h}(x)=f(x),\ {}^{\forall}x \in F(\Pi)$$

(ii)弱表現

$$O(\Pi)=O(\Upsilon)$$

である。(i)の場合，$O(\Pi)=O(\Upsilon)$であることは明らかであろう。本稿では(i)のみを取り扱う。そこで，最後に離散最適化問題Υを強表現する sdp Πが存在するための，必要十分条件を示しておこう。そのために，まずいくつかの定義を与えておく。

Σ^*上の二項関係 I を考える。このとき，任意の x，y，$z \in \Sigma^*$について，

(i) $x \ \mathrm{I} \ x$

(ii) $x \ \mathrm{I} \ y$ なら $y \ \mathrm{I} \ x$

(iii) $x \ \mathrm{I} \ y$ かつ $y \ \mathrm{I} \ z$ なら $x \ \mathrm{I} \ z$

を満すとき，I は同値関係と呼ばれる。また，同様に，任意の x，y，$z \in \Sigma^*$に関して，$x \ \mathrm{I} \ y$ なら，$xz \ \mathrm{I} \ yz$ であるとき，I は右不変であるという。ここで，ある $x \in \Sigma^*$ について，その同値類は，

$$[x] \triangleq \{y \in \Sigma^* \mid x \ \mathrm{I} \ y\}$$

と定義される。Σ^*は I によって，互いに素ないくつかの同値類に分割され，その集合をΣ^*/Iで表わす。また，$B \subset \Sigma^*$であるとき，任意の x，$y \in \Sigma^*$に対して，x I y なら，$x \in B$ のときは，$y \in B$ であり，かつ $y \in B$ のときは $x \in B$ である場合，I は B を細分するという。つまり，I の同値類をいくつか合せると，B に等しく出来るということである。$\Lambda(B)$で $B \subset \Sigma^*$を細分する右不変同値関係の集合を示す。特に，

$$\Lambda_F(B) \triangleq \{\mathrm{I} \in \Lambda(B) \mid \#(\Sigma^*/\mathrm{I}) < \infty\}$$

とする。

次に，二項関係 R_Υ を以下のように定義する。離散最適化問題$\Upsilon=(M, S, f)$に対し，

(i) $xz \in S \Leftrightarrow yz \in S$, ${}^\forall x$, ${}^\forall y$, ${}^\forall z \in \Sigma^*$

(ii) $f(xz)=f(yz)$, ${}^\forall xz \in S$

であるなら，$x\mathrm{R}_\Upsilon y$。逆もまた成り立つ。これをもとに，

$$\Psi_\eta \triangleq \{A_j \mid A_j \in S/\mathrm{R}_\Upsilon \quad \text{かつ}\ f(x)=\eta,\ {}^\forall x \in A_j\}$$

とする。二項関係 $\mathrm{T} \in \Lambda_F(\Sigma^*)$を考えたとき，もし，

(i) $x \in A_i$, $x \in \Sigma^*$, $A_i \in \Psi_\eta$

(ii) $y \in A_j$, $y \in \Sigma^*$, $A_j \in \Psi_\eta$

(iii) x T y

であるなら，$i=j$ であるとき，T はΨ_ηを共分離するという。

さて，いよいよ sdp の強表現定理を示す。

〈定理〉

離散最適化問題$\Upsilon=(\Sigma, S, f)$を強表現する sdp Πが存在する必要十分条件は，すべての $\eta \in R$ それぞれに対し，Ψ_η を共分離する $\mathrm{T} \in \Lambda_F(S)$が存在することである。

証明は本稿では省略する。実際ある最適化問題が sdp で表現されたとしても，

それが，そのまま最適解なり，最適解を求めるアルゴリズムを与えるとは限らない。そのためには，より進んだ議論が必要であるが，それについては茨木［1979］参照のこと。

4．提携均衡問題の sdp による強表現

ここでは，第2節で考察した市石模型を，前節で与えた手法を用いて，sdp で強表現する。使用する記号は，前節までと同様のものである。

市石模型における決定の集合は，各主体について共通で，

$$\Sigma = \{1, \cdots, \# \bar{N}\}$$

と定義出来る。$x \in \Sigma$という決定が，ある主体 $j \in N$ によってなされたということの意味は，j が提携 $S_x \in \bar{N}$ を作るということである。(2)

状態集合 Q および最終状態集合 Q_F は，この場合同一で，

$$Q = Q_F = \{q \in P_N\}$$

である。ここで P_N は集合 N の分割の族であり，また $q = \{S_{l_1}, \cdots, S_{l_k}\}$，ただしすべての l_i，$l_t \in \Sigma$ について，$i < t$ なら $l_i < l_t$ となっている。もちろん、$S_{l_i} \cap S_{l_t} = \varnothing$ $(i, t = 1, \cdots, k$ かつ $i \neq t)$ で，$\bigcup_{i=1}^{k} S_{l_i} = N$ である。

さて今，状態 $\bar{q} \in Q$ において，提携 $\bar{S} \in \bar{q}$ にいる主体 j が，何らかの決定を行なう場合を考えよう。このとき，j はΣに含まれるすべての決定を行なえるわけではない。なぜなら，複数のメンバーで構成される提携を作ろうとする場合，それは j 以外のメンバーの決定にも依存するからである。すると，状態 $\bar{q}$ で j にとって実現可能な決定の集合は，

$$A_j^{\bar{q}} = \{x \in \Sigma \mid S_x = \{j\},\ \text{または} S = S_x \text{ なる } S \in \bar{q} \text{ が存在する},$$
$$\text{または } S = S_x \setminus \{j\} \text{ なる } S \in \bar{q} \text{ が存在する}\}$$

であることが容易に分る。

次に，状態遷移関数を定義する。提携 $\bar{S}$ にいる主体 j が，状態 $\bar{q}$ で $x \in A_j^{\bar{q}}$ なる決定をしたとき，状態遷移先の提携構造は，提携 S_x にかかわる部分が変化する。すなわち，

$$\lambda(\bar{q},\ x) = \begin{cases} \bar{q} & S_x \in \bar{q} \text{ のとき} \\ (\bar{q} \setminus \bar{S}) \cup \{j\} \cup (\bar{S} \setminus \{j\}) & \\ \quad S_x \notin \bar{q} \text{ かつ} \#S_x = 1 \text{ のとき} & \\ (\bar{q} \setminus ((S_x \setminus \{j\}) \cup \bar{S})) \cup S_x \cup (\bar{S} \setminus \{j\}) & \\ \quad S_x \notin \bar{q} \text{ かつ} \#S_x \geqq 2 \text{ のとき} & \end{cases}$$

である。

ここでの目的関数は，各主体の期待効用関数であるが，それが一連の変数の組Ξ_1 と，ある提携 $S \in \bar{N}$ の決定に依存しており，Ξ_1 はさらに，その提携構造βによっていることを思い起こせば，それを状態空間表現を使って，

$$\hat{U}_j = \hat{U}_j(\xi_q,\ q,\ x)\ j \in N,\ q \in Q,\ \xi_q \in R,\ x \in \Sigma$$

と書き表わせることが分る。ただしξ_q は状態 q での目的関数の値である。また，Σ_A^* を各状態において実現可能な，任意の主体の決定の，有限個の連続のすべての集合であるとしよう。(3)そのとき，

$$\bar{U}_j(\bar{x}) \triangleq \hat{U}_j(\xi_0,\ q_0,\ \bar{x}),\ {}^{\forall}\bar{x} \in \Sigma_A^*,\ {}^{\forall}j \in N,\ q_0 \in Q,\ \xi_0 \in R$$

と定義する。

この sdp $\Pi = (M,\ \hat{U},\ \xi_0)$ では，$\Sigma_A^* = F(M)$ であり，また最適方策集合は次のようになる。

$$O(\Pi) = \{\bar{x} \in \Sigma_A^* \mid \text{いかなる } S \in \bar{N} \text{ についても，} \bar{U}_j(\bar{x}) < \bar{U}_j(\bar{y}),\ {}^{\forall}j \in S \text{ を満たすような } \bar{y} \in \Sigma^*_A \text{ は存在しない}\}$$

さて，以上のように，市石模型を sdp で強表現したわけであるが，ここでの目的関数 $\bar{U}$ を今一度考えてみると，明らかにこの sdp は正単調 sdp ではない

し，F (II) は可算無限個の要素をもつ。これは最適解を求めることが非常に困難であることを示している。そのためには，組合せ論的なアルゴリズムによるアプローチが考えられるが，実際には，モデルに少々制限を加えることになろう。

注

(1) 長尾，鈴木，村田 [1981]

(2) ここでは，この経済において存在可能なすべての提携に番号付けをしている。

(3) $\Sigma^*{}_A$ の要素は，主体 i の実現可能な決定，j の実現可能な決定，k の…というように並んだものである。もちろん，同じ主体が続けて決定をしている場合もある。

参 考 文 献

Balas, E. and M. W. Padberg, 1976, Set Partitioning - A Survey, *SIAM Review* **18**, 710-760.

茨木俊秀，1979，『組合せ最適化の理論』，電子通信学会。

Ichiishi, T., 1981, A Social Coalitional Equilibrium Existence Lemma. *Econometrica* **49**, 369-377.

Ichiishi, T., 1982a, Management versus Ownership, I, *International Economic Review* **23**, 323-336.

Ichiishi, T., 1982b, Non-Cooperation and Cooperation, in M. Deistler. E. Fürst and G. Schwödiauer, eds., *Games, Economic Dynamics, and Time Series Analysis,* Physica-Verlag, Wien-Würzburg.

長尾昭哉，鈴木牧雄，村田潔，1981，模索過程と不動点アルゴリズム，『筑波大学経済学論集』第７号，１－32。

Scarf, H. E. and T. Hansen, 1973, *The Computation of Econocic Equilibria,* Yale University Press, New Haven.