危険回避と比較静学分析*

Risk Aversion and Comparative Statics

酒　井　泰　弘

YASUHIRO　SAKAI

目　　次

I．はじめに

本稿の目的は，危険回避度の変化にかんする比較静学分析について，従来のアプローチを批判的に検討するとともに，ひとつの見通しの良いアプローチを新たに提案することにある。不確実性の経済学は 1970 年代に学問としての市民権を獲得して以来，その内容が次第に深化する一方で，色々の周辺分野に応用

*本研究の一部は，昭和57年度筑波大学学内プロジェクト（プロジェクト番号522「不完全情報下の金融仲介機関に関する理論的・実証的研究」）からの資金援助によって行なわれた。記して感謝の意を表わしたい。

されつつある。この新しい学問分野は，人間の知識が有限であり不確実性が支配する世界において，人びとの経済活動がどういう特性を持つかを，市場や組織とのかかわりにおいて体系的に究明する。そのさい中心的役割を演じるのが,「危険」および「危険回避」という概念である。

具体的に言えば，次のごとき一連の問題が発生する。①危険度の増大とは一体何を意味するのだろうか。②たとえ危険度が同じでも，それに直面する人びとの態度が異なるかもしれないが，かような危険回避の程度はいかに測られるべきなのだろうか。③危険度が何らかの外生的理由のために変化したとき，それは当該モデルの経済諸量に対してどういう影響を与えるだろうか。④たとえ危険度が不変だとしても，危険回避の程度が各個人間で異なったり，同一個人についても外生的理由のために変化することがありうるが，そのことは経済諸量のあり方に対してどのような効果を及ぼすだろうか。

不確実性の経済学の現状に照しあわせてみると，われわれはこれらすべての問題に満足な解答を与える段階には未だ至っていないのを知る。本稿においては，危険度が一応所与であると前提した上で,危険回避の程度と経済諸量との間の関係を専ら取り扱う。すなわち,われわれは上述の問題②および④に分析の焦点をあてることにする。そのさい，次の3つのケースに分けて別々に考察するのが好都合である。Ⓐ効用関数が1つの確率変数の関数として定義されるケース(つまり，$U(x)$のケース)。Ⓑ効用関数が複数個の確率変数の関数であるケース(例えば，$U(x, y)$のケース)。Ⓒ両者の中間の場合として，確率変数が複数個存在するのだが,効用関数がそれらの変数の和として表わされるケース(例えば，$U(x+y)$のケース)。

まず，分析の出発点として，上述のⒶのケースを取り上げよう。当該の効用関数が$U(x)$なる形で表わされる場合には，話は比較的簡単である。これはすでにアロー〔1〕やプラット〔10〕によって詳細に研究された場合であって，(絶

対的）危険回避関数 $R(x)=-U''(x)/U'(x)$ が比較静学分析において中核的位置を占めることがよく知られている。しかし，確率変数の数が1個から2個以上に増えるや否や，危険回避の議論は急に難しさを増す。というのは，危険回避測度を多変数の場合へと拡張しよう企てるとき，われわれは対応すべき危険プレミアムの一意性の欠如という基本的困難に逢着するからである。ダンカン〔2〕やカーニ〔5〕は，ひとつの拡張化への試みとして，「危険回避行列」という概念を導入するけれども，上述した危険回避測度の一意性の欠如のために，かかる危険回避行列と危険プレミアムベクトルとの間の関係を明確に示すことには成功していない。他方，キールストローム=マーマン〔7〕は，当該効用関数の背後にある選好順序が「相似拡大的」(homothetic) である場合に分析を限ることによって，多変数の場合につきものの非一意性の難点を一応回避する。しかしながら，相似拡大的ならざるケースの分析こそが，むしろ一般的重要性を持つのである。

以上のように考察を進めてくると，ケースⒶからいきなりケースⒷへと飛躍することに対しては，重大な障害が存在することが分かる。それ故に両者の中間のケースとして，効用関数が変数の和(ないし1次結合)の関数として表わせれるケースⒸを立入って検討することが必要となる。これは最近において，ロス〔13〕，キールストローム=ローマー=ウィリアムス〔8〕，プラット〔11，12〕，マチナ〔9〕などによって精力的に研究されているケースである。かかる“additive risks”のケースにあっては，次のごとき状況が念頭に置かれている。すなわち，当該個人の直面する危険は通常複数個存在するけれども，それらすべての危険に対して保険をかけるというのは余り現実的ではない。それよりむしろ，保険の加入を通じて回避を図るべき危険と，保険に加入せず運命のなすがままに任せるべき危険とを区別することが肝要である。問題は，あるひとつの危険の存在を前提としての他の危険を回避するというケースにおいて，伝統的なア

ロー=プラットの結果がいかに拡張され，また具体的な経済モデルへの応用がいかに可能となるのか，という点である。

本稿では，ケースⒶとケースⒸの両者を専ら分析する（ケースⒷについての話は別の機会に譲る)。これら 2 つのケースを取り扱う従来の文献を検討してみると，われわれが直ちに気づくことがある。それは，分析過程や証明方法における見通しの悪さであり，その点に改良の余地が大いにあるということである。実際のところ，従来の文献では，危険回避変化にかんする比較静学的結果を導出するさい，危険回避関数の単調性を素朴な形のまま使用しようとするため，最終結果に行きつくまでの計算が錯綜しがちなのである。このような見通しの悪さを改善するため，不等式にかんするいくつかの数学定理を積極的に利用するという，ひとつの新しい方法を採用したい。

第II節において，われわれは数学的準備として，不等式にかんする定理の若干について論じる。第III節では，それらの定理が具体的な経済モデルにどのように応用されるかを明らかにする。そして，最後の第IV節において，将来に残された課題について言及する。

II．不等式に関する若干の定理

本節の目的は不等式に関する数学定理のいくつかを提示し，その証明を厳密に行なうことである。これは，次節で具体的なミクロ経済モデルについて比較静学分析をするさいの数学的準備となるものである。

以下において取り上げる関数は，すべて $R^1{}_+$ または $R^2{}_+$の上で定義された実数値関数であるとし，必要な回数だけ微分可能であると仮定する。記号 E は「期待オペレーター」(expectations operator) を示す。

不確実性の経済学において最も重用される定理は次の定理である。それは有名なジェンセンの不等式の一般化となっている。

定理1[1]　もし関数ϕ：$R^1{}_+ \to R^1$が凹であれば，任意の関数fについて次の不等式が成立する。

$$\phi\{E[f(\mathrm{x})]\} \geq E[\phi\{f(\mathrm{x})\}] \tag{1}$$

もし関数ϕが凸であれば，不等式の符号の向きが変わる。[2]

（証明）　関数ϕが凹であるとすると，式(1)が成り立つことは，$\int pdx \neq 0$ なるすべての関数 $p \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つことと同値である。

$$\phi(\int fpdx / \int pdx) \geq \int \phi(f)pdx / \int pdx \tag{2}$$

しかも，$q = p / \int pdx$ と置くと，$q \geq 0$ かつ $\int qdx = 1$となるので，式(2)は次のように書きかえられる。

$$\phi(\int fqdx) \geq \int \phi(f)qdx \tag{3}$$

いま，$\Gamma = \int fqdx$ と定義し，テイラーの定理を利用すれば，すべての所与の x に対して次式を満たす μ が存在する。

$$\phi(f) = \phi(\Gamma) + (f - \Gamma)\phi'(\Gamma) + \frac{1}{2}(f - \Gamma)^2\phi''(\mu) \tag{4}$$

ここで $min\{f, \Gamma\} \leq \mu \leq max\{f, \Gamma\}$ である。仮定によって，すべての x について $\phi'' \leq 0$ であるから，式(4)より次の不等式が得られる。

$$\phi(f) \leq \phi(\Gamma) + (f - \Gamma)\phi'(\Gamma)$$

したがって，両式に q を乗じたあと，積分オペレーターを施せば，上式は

$$\int \phi(f)qdx \leq \phi(\Gamma)\int qdx + \phi'(\Gamma)\int(f - \Gamma)qdx = \phi(\Gamma)$$

---

1) この定理1は，ハーディ＝リットルウッド＝ポーリャ〔3〕，150～151ページの定理204を期待オペレーターを用いて書き直したものである。以下の証明も大筋においてほぼそれに従っている。

2) 関数ϕが「強い意味で凹」(strictly concave)，または「強い意味で凸」(strictly convex)である場合には，式(1)の不等号は強い意味での不等号「$>$」または「$<$」に変わる。このような不等号の書きかえが可能であることは自明なので，以下の定理においてはいちいち断わらないことにする。

となる。これは式(3)と同じものである。

他方，関数ϕが凸であるときも，不等式の符号が逆になる点を除けば，同様な証明が可能である。 (証明終)

定理1に関して注意を払うべきことは，関数 $f: R_+^1 \longrightarrow R^1$ は任意の関数でよいという点である。ここで特に，$f(x)=x$ と置くことによって，次の系が直ちに導出されよう。

系1 もし関数$\phi: R_+^1 \rightarrow R^1$が凹であれば，次の不等式が成立する。

$$\phi(E[x]) \geq E\ [\phi(x)] \tag{5}$$

関数ϕが凸の場合には，上式の不等式の符号が逆となる。

この系1は一般にジェンセンの不等式〔4〕と呼ばれるものである。いま，xを所得，ϕを効用関数とみなすと，式(5)の経済学的解釈は容易である。実際，凹なる効用関数は危険回避，凸なる効用関数は危険愛好を示すから，その解釈は次のようになる。もしある個人が危険回避者であれば，その個人の期待所得の効用の大きさは，その所得の期待効用の大きさを上まわる(危険愛好者のケースでは，これは逆に，前者が後者を下まわる)。したがって，式(5)が成立し，しかもϕが単調非減少関数であるときには，

$$\phi(E[x]-\rho) = E\ [\phi(x)] \tag{6}$$

なる等式を成立させる非負の実数$\rho = \rho(x)$が存在する。このρの大きさは，危険回避者が所得の変動を避けて，それを確定所得に切り換えようとするさい余分に支払ってもよいと考える最大可能額を表わす。それは「保険プレミアム」とも「(マイナスの)危険プレミアム」とも称されるが，かかるプレミアムの値が大であればあるほど，当該個人の危険回避の程度は大であると解釈でき

るのである。[3)]

さて，当該個人の直面する危険というものは通常1種類にとどまるものではない。そして，この個人が複数個の危険に対拠するとき，これらの危険のすべてに対して保険をかけるというのは現実的ではないだろう。それよりむしろ，保険加入を通じて回避をはかるべき第1種の危険と，運命のなすがままに身を任ねるべき第2種の危険との2種類が存在すると考えるべきであろう。このように当面の危険がこれら第1種と第2種の危険の総和となっている場合（いわゆる 'additive risks' の場合）を分析するためには，次の定理がしばしば有用となる。

定理2 いますべての x について $E\ [y|x]=E\ [y]$ であり，関数 f は凹であると仮定せよ。そのとき，次の不等式が成り立つ。

$$E\ [f(x+y)]\leq E\ [f(x)]+E\ [f'(x)]\ E\ [y] \tag{7}$$

関数 f が凸である場合には，上式の不等号の向きは逆となる。

（証明） まず，x, y をある任意の値に固定する。このときテイラーの定理を適用すれば，次のごとき実数 h が存在する。

$$f(x,\ y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(h)$$

ただし，hの値は $min\ \{x,\ y\}\ \leq h\leq max\ \{x,\ y\}$ を満足する。それ故に，もし関数 f が凹であれば，次の不等式が成立するはずである（f が凸である場合でも，以下の証明は同様である）。

3) 保険プレミアムないし危険プレミアムの詳しい説明については，拙著〔14〕第5章を参照されたい。

$$f(x,\ y) \leq f(x) + y\, f'(x)$$

上式の両辺に$(x,\ y)$の確率関数 $p(x,\ y) \geq 0$ を乗じたあと，変数 y に関してのみ積分オペレーターを施すと，われわれは次式を得る。

$$\int f(x+y)\, p(x,\ y)\, dy$$
$$\leq f(x) \int p(x,\ y)\, dy + f'(x) \int y\, p(x,\ y)\, dy \tag{8}$$

ところが，定義によって

$$E\ [y] = \int y p(y)\, dy$$

$$E\ [y|x] = \int y p(y|x)\, dy = \int y\, p(x,\ y)\, dy / p(x)$$

であるから，もし$E\ [y|x] = E\ [y]$ であると仮定すれば，次の等式が成り立たねばならない。

$$\int y p(x,\ y)\, dy = p(x) \int y\, p(y)\, dy \tag{9}$$

式(9)を式(8)に代入することによって，われわれは次式を得る。

$$\int f(x+y)\, p(x,\ y)\, dy$$
$$\leq f(x) \int p(x,\ y)\, dy + f'(x) p(x) \int y\, p(y)\, dy$$

上式がすべての x に関して成立しているわけだから，ここで x に関する積分オペレーターを追加的に施すと，次式が直ちに導かれる。

$$\int\int f(x+y)\, p(x,\ y)\, dxdy$$
$$\leq \int\int f(x)\, p(x,\ y)\, dxdy + \int f'(x)\, p(x) \int y\, p(y)\, dy$$

これは求める不等式(7)と全く同じものである。 (証明終)

確率変数 y の期待値$E\ [y]$ と，確率変数 x が所与のときの確率変数 y の条件付き期待値 $E\ [y|x]$ とが相等しいとき，２つの確率変数 x と y とは「強い意味で無相関である」(strongly uncorrelated) と言う。[4]したがって，上の定理２の有効性は，強い意味で無相関の場合に限定されていることに注意すべきである。特に，y の期待値がゼロであるという条件を付加するとき(すなわち，

$E[y]=0$ のとき)，定理2から次の系が導出できるのは自明であろう。

系2　もしすべての x について $E[y|x]=0$ であり，かつ，関数 f が凹であるならば，次の不等式が成り立つ。

$$E[f(x+y)] \leq E[f(x)] \tag{10}$$

上と同じ条件の下で関数 f が凸であるときには，上式の不等号の向きは逆となる。

系2の経済学的意味は次のように簡単明瞭である。すなわち，当該個人の所得源として，x と y という2種類の変動所得があり，しかも両変動所得間の相関関係が——すべての x について y の条件付き期待値が常にゼロであるという意味で——全く無いとする。そのとき，この個人が危険回避者であるならば，2つの変動所得の和の期待効用は，そのいずれか1つの変動所得の期待効用より小さい。要するに，危険回避者は1つの危険よりも2つの危険の方を嫌うわけである。

理解を一層深めるために，式(10)の成立を図表的に確かめてみよう。簡単化のため，x および y の確率密度関数がそれぞれ次の通りであるとする(ただし，$\varepsilon>\eta>0$)。

4)　これに対して，x，y が単に「無相関である」(uncorrelated)とは，$\mathrm{Cov}(x, y)=0$ のとき，すなわち $E[xy]=E[x]E[y]$ が成り立つときのことを言う。他方，もし $p(y|x)=p(y)$ が成立するとき，すなわちもし $p(x, y)=p(x)p(y)$ が成立するとき，x と y は「独立である」(*independent*)と呼ばれる(ここで例えば，$p(y|x)$ は x が所与のときの y の条件付き確率関数であることに注意せよ)。
もし x と y が独立ならば，両者は強い意味で無相関であることが証明できる。また，x と y が強い意味で無相関である場合には，両者は単に無相関であることも簡単に示せる。

$$p(x)=\begin{cases} 1/2 & \textit{for } x=\mu-\varepsilon,\ \mu+\varepsilon \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases} 1/2 & \textit{for } y=-\eta,\ \eta \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

このとき，2つの確率変数 x と y は独立，したがって強い意味で無相関であり，和$(x+y)$の確率密度関数は次のようになる。

$$p(x+y)=\begin{cases} 1/4 & \textit{for } x+y=\begin{cases} \mu-\varepsilon-\eta,\ \mu-\varepsilon+\eta \\ \mu+\varepsilon-\eta,\ \mu+\varepsilon+\eta \end{cases} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

図1　系2の図解

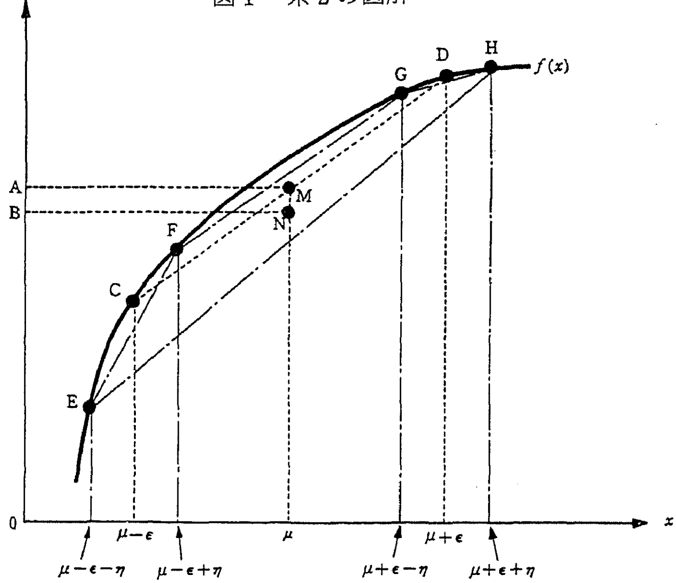


図1において，点Mは線分ＣＤの中点であり，点Nは四辺形ＥＦＧＨの中心である（点Nは，線分ＥＦの中点と線分ＧＨの中点とを結ぶ線分上の中点であ

るとも解釈できる)。ここで式(10)が成り立つということは，点Mが点Nの方に位置するということ，すなわち，縦軸上において線分ＯＡの長さが線分ＯＢの長さを上まわるということに外ならない。

式(10)が成立し，かつ関数 f が単調非減少関数であれば，次の不等式を満足させるようにな実数 $\rho=\rho(x,\ y)$ が常に存在するはずである。

$$E\ [f(x,\ y)]=E\ [f(x-\rho)] \tag{11}$$

以前と同じように，x と y は変動所得，f は効用関数を表わすと考える。当該個人は x の変動および y の変動という２種類の危険に直面している。このうち x に関係する危険の存在を所与と前提した上で，この個人は y に関係する危険のみの回避を保険加入を通じて図らんとすると想定する。[5]このとき，彼が保険プレミアムとして余分に支払ってもよいと思う最大可能額が実数 ρ の大きさによって示されているのである(図１において，かかる ρ の大きさを図解することが可能である。読者みずから試みよ)。

系２を３変数以上の場合に拡張することも可能である。そしてそのときには，これらすべての変数が互いに独立であるという仮定を設けるのが妥当であろう。

系３　もし n 個の確率変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が互いに独立であり，かつ関数 f が凹であるならば，次のごとき一連の不等式が成り立つ。

$$E\ [f(x_1)]\ \geq E\ [f(x_1+x_2)]\ \geq\cdots\cdots\cdots\cdots\geq E\ [f(\Sigma_{i=1}^{n} x_i)]$$

同じ条件の下において関数 f が凸である場合には，上の一連の不等式の符号の向きはすべて逆となる。

---

5)　このような問題は"Aversion to One Risk in the Presence of Another"の問題と称される。詳しいことは，文献〔８，９，11，12，13〕を見よ。

不確実性下のミクロ経済モデルについて比較静学分析を行なおうとするとき，われわれは危険回避のあり方に関して一定の合理的仮説を設ける必要に迫られる。例えば，絶対的危険回避減少の仮説や相対的危険回避増加の仮説はその代表例である。[6]しかし，これらの仮説の下に比較静学的諸結果を実際に導出しようとするさい，従来の関係文献を多くに採用されてきた方法は余り見通しが良いとは言えない。その理由は，これらの仮説をそのままの形で直接的に適用しようとするため，所望の結果へ到る計算過程がかなり強引なものとなるためと考えられる。本稿の主要目的のひとつは，この点に関して非常に見通しのよい，改善された証明方法を開発することである。次節で明らかになるであろうように，次の定理は，不確実性下の比較静学を実行するさいの「導きの赤い糸」の役割を演じる。

定理3　2つの確率変数 x と y の関数 $f, g: R^2_+ \rightarrow R^1$ がともに単調非減少，またはともに単調非増加であるとする。そのとき，次の不等式が成立する。

$$E[f(x, y)g(x, y)] \geq E[f(x, y)]\,E[g(x, y)] \tag{12}$$

もし関数 f と $(-g)$ がともに単調非減少，またはともに単調非増加であれば，そのときには上式の不等号の向きは逆となる。[7]

（証明）　不等式(12)が成立することは，$\iint p(x, y)\,dxdy \neq 0$ を満たす任意の実数値関数 $p(x, y) \geq 0$ について，次式が成立することと同値である。

$$\iint f(x, y)g(x, y)p(x, y)\,dxdy \Big/ \iint p(x, y)\,dxdy$$
$$\geq \frac{\iint f(x, y)p(x, y)\,dxdy}{\iint p(x, y)\,dxdy} \quad \frac{\iint g(x, y)p(x, y)\,dxdy}{\iint p(x, y)\,dxdy}$$

---

6)　これらの仮説はアロー〔1〕およびプラット〔10〕によってはじめて導入された。

7)　この定理は，ハーディ＝リットルウッド＝ポーリャ〔3〕，43ページの定理43を連続変数のケースに拡張したものである。

ここで，われわれが

$$A \equiv \iint p dx dy \iint fgp dx dy - \iint fp dx dy \iint gp dx dy$$

と置くと，このAが非負の値をとることを証明すればよい。ところが，重積分の性質を使えば，次式が導かれることに注意する。

$$\begin{aligned} A &= \iint p(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1 \iint f(x_2, y_2) g(x_2, y_2) p(x_2, y_2)\, dx_2 dy_2 \\ &\quad - \iint f(x_1, y_1) p(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1 \iint g(x_2, y_2) p(x_2, y_2)\, dx_2 dy_2 \\ &= \iiiint \{ f(x_2, y_2) g(x_2, y_2) p(x_1, y_1) p(x_2, y_2) \\ &\qquad - f(x_1, y_1) g(x_2, y_2) p(x_1, y_1) p(x_2, y_2) \}\ dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

しかるに，確率変数の変換 $x_1 \longleftrightarrow x_2$, $y_1 \longleftrightarrow y_2$ を行なっても，重積分値は不変のままであるから，上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} A = \iiiint \{ & f(x_1, y_1) g(x_1, y_1) p(x_2, y_2) p(x_1, y_1) \\ & - f(x_2, y_2) g(x_1, y_1) p(x_2, y_2) p(x_1, y_1) \}\ dx_2 dx_1 dy_2 dy_1 \end{aligned}$$

したがって，これら両者を結びつければ，次式が容易に出る。

$$A = \frac{1}{2} \iiiint B\ dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$$

ただし，

$$\begin{aligned} B \equiv\ & f(x_2, y_2) g(x_2, y_2) p(x_1, y_1) p(x_2, y_2) \\ & - f(x_1, y_1) g(x_2, y_2) p(x_1, y_1) p(x_2, y_2) \\ & + f(x_1, y_1) g(x_1, y_1) p(x_2, y_2) p(x_1, y_1) \\ & - f(x_2, y_2) g(x_1, y_1) p(x_2, y_2) p(x_1, y_1) \\ =\ & \{ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \} \{ g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2) \} \\ & \times p(x_1, y_1) p(x_2, y_2) \end{aligned}$$

もし関数 f と g がともに単調非減少，またはともに単調非増加であれば，Bの値は明らかに非負である。それ故に，所望通り，この場合にはAの値も非負となる。同様な方法を用いれば，関数 f と $(-g)$ がともに単調非減少，またはともに単調非増加であるとき，Aの値が非正となることが証明できる。

(証明終)

定理3をもっと一般的な n 変数の場合へと一般化することも,また1変数の場合に限定することも容易な業である。両者のケースを系の形にまとめておけば,次のとおりである。

系4　いま n 個の確率変数 x_1, x_2, ……, x_n の実数値関数がいずれも単調非減少,またはいずれも単調非増加であるとする。そのとき,次の不等式が成立する。

$$E\,[\,f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)g(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)]$$
$$\geq E\,[f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)]\ E\,[g(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)]$$

系5　もし $f'(x)g'(x)\geq 0$ であれば,次の不等式が成り立つ。

$$E\,[\,f(x)g(x)]\ \geq E[\,f(x)]\ E\,[\,g(x)] \tag{13}$$

他方,もし $f'(x)g'(x)\leq 0$ であれば,上式の不等号の向きが逆となる。[8)]

系5の理解を深めるため,例として $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ のケースを取り上げる。これらの関数 f と g はともに単調増加の関数であるから, $f'(x)g'(x)>0$ という条件は確かに満足されている。確率関数として特に,

$$p(x)=\begin{cases} 1/2 & \text{for } x=2,\ 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と指示すると,われわれは $E\,[\,f(x)]$, $E[g(x)]$ および $E\,[\,f(x)g(x)]$ を具体的に次のごとく計算することができる。

$$E\,[\,f(x)]\ =\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}f(4)$$

---

8)　この系5の経済学への応用は,キールストローム=マーマン〔6〕においてはじめて行なわれた。

$$=\frac{1}{2}(2+4)=3$$

$$E[g(x)]=\frac{1}{2}(2^2+4^2)=10$$

$$E[f(x)g(x)]=\frac{1}{2}(2^3+4^3)=36$$

したがって，$E[f(x)g(x)]=36>30=E[f(x)]E[g(x)]$ が確かに成立していることが分かる。

III．経済モデルへの応用——比較静学——

前節において不等式に関するいくつかの定理を論じたが，それらの定理の価値は何も数学的なものに限られるべきではない。本節では，ミクロ経済モデルの若干を取り上げることによって，それらの応用上の価値について言及したい。そのさい，不確実性下における比較静学的諸結果が，従来の方法よりも見通しの良い形で導出されることが明らかとなるだろう。

A．危険と保険プレミアム

まず第1番目に取り扱うべきことは，危険と保険プレミアムの問題への上記の定理を応用である。すでに述べたように，定理1と系1とはいわゆるジェンセンの不等式と深く関係する。アロー［1］とプラット［10］は，不等式(5)を等式化たらしめるものとしての保険プレミアム ρ の存在に着目し，かかる ρ の値の大小こそが危険回避の測度を与えることを示した。すなわち，2人の個人AとBの効用関数をそれぞれ U_A，U_B と置くとき，彼らは互いに独立に次のような命題を樹立することに成功したのである。

命題1 関数U_AとU_Bはともに単調非減少の凹関数であると仮定する。そのとき，次の3つの条件は互いに同値である。

(i)すべてのxについて，次の不等式が成立する。

$$-U_A''(x)/U_A'(x) \geq -U_B''(x)/U_B'(x)$$

(ii)次式を成立させる単調非減少の凹関数Gが存在する。

$$U_A(x)=G(U_B(x))$$

(iii)すべての$\tilde{\epsilon}$に対して，もし$E[\tilde{\epsilon}]=0$, $E[U_A(w+\tilde{\epsilon})]=U_A(w-\rho_A)$, $E[U_B(w+\tilde{\epsilon})]=U_B(w-\rho_B)$であれば，$\rho_A \geq \rho_B$が成立する。

(証明)[9] (i)⇨(ii)： 関数U_AとU_Bはともに単調非減少関数であるから，次式を満たす単調非減少変換の関数Gが存在する。

$$U_A = G(U_B), \quad G' \geq 0$$

ここで上式の微分をとると，$U_A'=G'U_B'$かつ$U_A''=G''(U_B')^2+G'U_B''$となるから，われわれは次式を得る。

$$G''=\frac{U_A''-G'U_B''}{(U_B')^2}=\frac{U_B''}{(U_B')^3}\left(\frac{U_A''}{U_B''}-\frac{U_A'}{U_B'}\right)$$

したがって，もし条件(i)が成り立つならば，$G'' \leq 0$でなければならない。

(ii)⇨(iii)： まず，$G' \geq 0$, $G'' \leq 0$および$U_A=G(U_B)$を満たす関数Gが存在すると仮定する。さらに，すべての$\tilde{\epsilon}$に対して，$E[\tilde{\epsilon}]=0$, $E[U_A(w+\tilde{\epsilon})]=U_A(w-\rho_A)$かつ$E[U_B(w+\tilde{\epsilon})]=U_B(w-\rho_B)$であると前提する。このとき，系1より$E[G(\cdot)] \leq G(E[\cdot])$となることを利用すれば，次式が得

9) 以下の証明は，キールストローム=マーマン〔6〕の方法を用いて，プラット〔10〕のもともとの証明に若干の改良を加えたものである。

られる。

$$U_A(w-\rho_A)=E\ [U_A(w+\tilde{\epsilon})]\ =E\ [G(U_B(w+\tilde{\epsilon}))]$$
$$\leq G(E\ [U_B(w+\tilde{\epsilon})]\ )=G(U_B(w-\rho_B))=U_A(w-\rho_B)$$

上式は明らかに，$\rho_A \geq \rho_B$を意味する。

(iii)⇨(i)：　例として，次のごとき $\tilde{w}$ の密度関数を取り上げる。

$$p(\tilde{\epsilon})=\begin{cases} 1/2 & \text{for } \tilde{\epsilon}=\epsilon,-\epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，$E[\tilde{\epsilon}]=(1/2)(\epsilon)+(1/2)(-\epsilon)=0$ であることに注意する。確率変数 $\tilde{w}$ に対して,個人 U_i の保険プレミアム ρ_iを次のごとく定義する(i=A，B)。

$$E\ [U_i(w+\tilde{\epsilon})]\ =U_i(w-\rho_i) \tag{14}$$

もし$\tilde{\epsilon}$の値が十分小さいときには，かかる ρ_iの値もそれに対応して十分小さくなる。したがって，テイラー展開を利用すれば，式(14)の左辺と右辺はそれぞれ次のように近似される。

$$E\ [U_i(w+\tilde{\epsilon})]\ =\frac{1}{2}U_i(w+\epsilon)+\frac{1}{2}U_i(w-\epsilon)$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\ \{U_i(w)+U_i'(w)\epsilon+U_i''(w)\frac{\epsilon^2}{2}\}$$
$$+\frac{1}{2}\ \{U_i(w)-U_i'\ (w)\epsilon+U_i''(w)\frac{\epsilon^2}{2}\} \tag{15}$$
$$=U_i(w)+U_i''(w)\frac{\epsilon^2}{2}$$

$$U_i(w-\rho_i)\fallingdotseq U_i(w)-U_i'(w)\rho_i \tag{16}$$

これら2つの式(15)と(16)を等しくすることによって，われわれは次式を得る。

$$\rho_i\fallingdotseq-\frac{\epsilon^2}{2}\frac{U_i''(w)}{U_i'(w)} \qquad (i=\text{A},\ \text{B})$$

したがって，もし $\rho_A \geq \rho_B$ ならば，次の不等式がすべての w について成立しなければならかい。

$$-\frac{U_A''(w)}{U_A'(w)} \geq -\frac{U_B''(w)}{U_B'(w)}$$

これはもちろん条件(ｉ)と同じものである。（証明終）

命題１に関して念題に置くべきことは，$R(x)=-U''(x)/U'(x)$ が絶対的危険回避測度を与えているという事実である。したがって，この命題は次のことをわれわれに教える。すなわち，すべての危険について，その危険回避の程度が大きくなるということは，効用関数の凹度が大きくなるということと同値なのであり，さらにまた，保険プレミアムが大きくなるということと同値なのである。この結果は，危険回避の程度が変化したときの当該モデルの均衡解の変化を吟味するときに非常に有効である。

次に，定理２および系２，３はいわゆる‘additive risks’の場合に重用される。というのは，ロス［13］が指摘したように，かかる場合には，普通の絶対危険回避測度を用いるだけは，経済的に有意味な比較静学的結果を導出できないという事態が生じるからである。実際このことから，通常の絶対的危険回避よりも強い測度を工夫する必要が新たに生れるのである。次の命題はロスによってもともと樹立されたものであるが，このような‘additive risks’のケースを分析するさい威力を発揮する。

命題２　関数 U_A と U_B はともに単調非減少関数であると仮定する。そのとき，次の３つの条件は互いに同値である。

（ｉ）すべての x，y に関して，次の不等式が成立する。

$U_A''(x)/U_B''(x) \geq U_A'(y)/U_B'(y)$

(ii)次式を成立させる関数 G, $G' \leq 0$, $G'' \leq 0$, および実数$\lambda > 0$が存在する。

$$U_A(x) = \lambda U_B(x) + G(x)$$

(iii)すべての$\tilde{w}$, すべての$\tilde{\epsilon}$に関して, もし$E[\tilde{\epsilon} \mid \tilde{w}] = 0$, $E[U_A(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] = E[U_A(\tilde{w}-\rho_A)]$, $E[U_B(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] = E[U_B(\tilde{w}-\rho_B)]$ ならば, $\rho_A \geq \rho_B$が成立する。

(証明)[10] (i)⇨(ii): もし条件(i)が成り立つならば, すべての x に関して,

$$U_A''(x) / U_B''(x) \geq \lambda \geq U_A'(x) / U_B'(x) \tag{17}$$

を満たす正の実数 λ が存在するはずである。ここで関数 G を$G = U_A - \lambda U_B$として定義すると, 式(17)より $G' = U_A' - \lambda U_B' \leq 0$ となる。

しかるに, $U_A' = \lambda U_B' + G'$, $U_A'' = \lambda U_B'' + G''$であるから, 式(17)を再び利用すると,

$$U_A'' / U_B'' = \lambda + G'' / U_B'' \geq \lambda$$

となる。これより直ちに $G'' \leq 0$ が出る。

(ii)⇨(iii): まず, $G' \leq 0$, $G'' \leq 0$, $U_A = \lambda U_B + G$を満たす関数 G および正の実数λが存在すると仮定する。さらに, すべての$\tilde{w}$およびすべての$\tilde{\epsilon}$に関して, $E[\tilde{\epsilon} \mid \tilde{w}] = 0$, $E[U_A(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] = E[U_A(\tilde{w}-\rho_A)]$, $E[U_B(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] = E[U_B(\tilde{w}-\rho_B)]$ であると前提する。このとき, 系2より$E[G(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] \leq E[G(\tilde{w})]$ となること, および $G' \leq 0$ であることを利用すれば, 次式が容易に求められる。

$$E[U_A(\tilde{w}-\rho_A] = E[U_A(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})]$$

10) 以下の証明について, (i)⇨(ii)および(ii)⇨(iii)の導出は基本的にロス〔13〕に依拠する。しかし, (iii)⇨(i)については, ロスより見通しのよい別証明を新たに与える。

$$= \lambda E\ [U_B(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})]\ +E\ [G(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})]$$

$$\leq \lambda E\ [U_B(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})]\ +E[G(\tilde{w})]$$

$$\leq \lambda E\ [U_B(\tilde{w}-\rho_B)]\ +E\ [G(\tilde{w}-\rho_B)]$$

$$= E\ [U_A(\tilde{w}-\rho_B)]$$

これは明らかに $\rho_A \geq \rho_B$ を意味する。

(iii)⇨(i)： 例として，次のごとき$\tilde{w}$の密度関数および$\tilde{\epsilon}$の条件付き密度関数を取り上げる。

$$p(\tilde{w}) = \begin{cases} p & \text{for } \tilde{w}=x \\ 1-p & \text{for } \tilde{w}=y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$p(\tilde{\epsilon} \mid x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } \tilde{\epsilon}=\epsilon,\ -\epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$p(\tilde{\epsilon} \mid y) = \begin{cases} 1 & \text{for } \tilde{\epsilon}=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

したがって，和$(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})$の密度関数は次のようになる。

$$p(\tilde{w}+\tilde{\epsilon}) = \begin{cases} 1/2\,p & \text{for } \tilde{w}+\tilde{\epsilon}=x-\epsilon,\ x+\epsilon \\ 1-p & \text{for } \tilde{w}+\tilde{\epsilon}=y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，すべての$\tilde{\epsilon}$に関して，$E\ [\tilde{\epsilon} \mid x] = (1/2)(\epsilon) + (1/2)(-\epsilon) = 0$ および$E\ [\tilde{\epsilon} \mid y]\ = (1)(0) = 0$ となることに注意する。

2つの確率変数$\tilde{\epsilon}$と$\tilde{w}$に対して，個人 U_iの保険プレミアム ρ_iを次のごとく定義する(i=A，B)。

$$E\ [U_i(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})]\ = E\ [U_i(\tilde{w}-\rho_i)] \tag{18}$$

もし条件(iii)が満たされているならば，$\rho_A \geq \rho_B$が必ず成立するはずである。ところが，$\tilde{w}$ と $\tilde{\epsilon}$ の密度関数が上のごとく具体的に与えられているとき，正数 ϵ の値が十分小さく，プレミアム ρ_iの値も十分小さいとして，テイラー展開を利用すれば，式(18)の左辺と右辺はそれぞれ次のように近似される。

$$
\begin{aligned}
&E\ [U_i(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] \\
&=\frac{1}{2}pU_i(x-\epsilon)+\frac{1}{2}pU_i(x+\epsilon)+(1-p)U_i(y) \\
&\fallingdotseq \frac{1}{2}p\ \{U_i(x)-U_i'(x)\epsilon+U_i''(x)\frac{\epsilon^2}{2}\} \\
&\quad +\frac{1}{2}p\ \{U_i(x)+U_i'(x)\epsilon)+U_i''(x)\frac{\epsilon^2}{2}\} \\
&\quad +(1-p)U_i(y) \\
&=pU_i(x)+(1-p)U_i(y)+pU_i''(x)\frac{\epsilon^2}{2} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\ [U_i(\tilde{w}-\rho_i)] \\
&\quad =pU_i(x-\rho_i)+(1-p)U_i(y-\rho_i) \\
&\fallingdotseq p\ \{U_i(x)-U_i'(x)\rho_i\}+(1-p)\ \{U_i(y)-U_i'(y)\rho_i\} \\
&=pU_i(x)+(1-p)U_i(y)-\rho_i\ \{pU_i'(x)+(1-p)U_i'(y)\} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

これら2つの式(19)と(20)を等しくすることから，われわれは次式を得る。

$$\rho_i \fallingdotseq -\frac{\epsilon^2}{2}\frac{pU_i''(x)}{pU_i'(x)+(1-p)U_i'(y)} \quad (i=\mathrm{A},\ \mathrm{B})$$

したがって，もし$\rho_A \geq \rho_B$ならば，次の不等式がすべてのx，y，p について成立する。

$$\frac{U_A''(x)}{U_B''(x)} \geq \frac{pU_A'(x)+(1-p)U_A'(y)}{pU_B'(x)+(1-p)U_B'(y)}$$

ここで p が十分小さいとすると，上式から結局次式が導出できる。

$$\frac{U_A''(x)}{U_B''(x)} \geq \frac{U_A'(y)}{U_B'(y)}$$

これは条件(i)にほかならない。 (証明終)

命題2の意味を考えてみよう。2人の個人AとBに関して，その命題の条件(i)が成り立つとき，個人Aの方が個人Bより「ロスの意味において」危険回避の度合が大きいと言う。特に，$x=y$ と置くと，かかる条件は命題1の条件(i)と全く同じである。したがって，ロスの危険回避の概念は，アロー=プラットの危険回避の概念を強めたものであるとみなされる。命題1と比較したときの命題2のかかる条件の強さは，2つの効用関数 U_A と U_B との間における単調非減少凹変換の関係にも明確に表われる。なぜならば，命題2においては，$U_A=\lambda U_B+G$ という風に，かような凹変換が「加法分離的」な形をとることが特別に要求されているからである。条件(iii)を見れば，命題2が 'additive risks' の場合に有効であることがよく理解できる。ここで変数 ρ_A の大きさは，ひとつの危険 $\tilde{w}$ の存在を前提した上で，もうひとつの危険 $\tilde{\epsilon}$ を回避するために余分に支払ってもよいと個人Aが考える最大可能額(保険プレミアム)を示す。同様な解釈が，個人Bが支払うべき保険プレミアム ρ_B についても可能である。

要するに，命題2がわれわれに教えることは次のごとくである。もし個人Aの危険回避の度合が個人Bのそれよりロスの意味において大きいならば，個人Aの効用関数は個人Bの効用関数を「加法分離的」に単調凹変換したものであり，さらにまた，2つの危険が存在する場合に1つの危険のみに関係する，個人Aの保険プレミアムは個人Bのそれより大きい（ただし，これら2つの危険は強い意味において無相関であると仮定する)。そして，これと逆の命題もまた真なのである。

さて，命題2の意味を一層掘り下げるために，その条件(iii)を次のような条件に変えればどうなるかを考察してみよう。

(iv)すべての $\tilde{w}$，すべての $\tilde{\epsilon}$に関して，もし $\tilde{\epsilon}$ と $\tilde{w}$ が独立で，$E\,[U_A(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] = E\,[U_A(\tilde{w}-\rho_A)]$，$E\,[U_B(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})] = E\,[U_B(\tilde{w}-\rho_B)]$ ならば，$\rho_A \geq \rho_B$ が成立する。

もし$\tilde{\epsilon}$と$\tilde{w}$が独立ならば，$E\,[\tilde{\epsilon} \mid \tilde{w}]=0$ となるけれども，この逆が必ずしも成立しないことは明らかである（この点については，9ページ，脚注4）を見よ)。したがって，命題として見たとき，新しい条件(iv)は命題2の条件(iii)より弱い条件である。それ故に，命題2の条件(ii)が条件(iv)を意味することは当然至極である。しかし，条件(iv)から条件(i)が必ずしも出てくるわけではないことを次に示そう。そのため，例として，次のごとき$\tilde{w}$ および $\tilde{\epsilon}$ の密度関数を取り上げる。

$$p(\tilde{w}) = \begin{cases} p & \text{for } \tilde{w}=x \\ 1-p & \text{for } \tilde{w}=y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$p(\tilde{\epsilon}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{for } \tilde{\epsilon}=\epsilon, -\epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき明らかに，$\tilde{w}$と $\tilde{\epsilon}$は互いに独立であるから，その和$(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})$の密度関数は次のようになる。

$$p(\tilde{w}+\tilde{\epsilon}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}p & \text{for } \tilde{w}+\tilde{\epsilon}=x-\epsilon,\ x+\epsilon \\ \dfrac{1}{2}(1-p) & \text{for } \tilde{w}+\tilde{\epsilon}=y-\epsilon,\ y+\epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

個人 U_i の保険プレミアムは上述の式 (18) によって表わされる ($i=$A, B)。いまϵの値が十分小さいとすれば，それに対応して ρ_i の値も十分小さくなる。したがって，今の場合にテイラー展開を利用すれば，式 (18) の左辺と右辺はそれぞれ次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
&E\ [U_i(\tilde{w}+\tilde{\epsilon})]\\
&=\frac{1}{2}p\ U_i(x-\epsilon)+\frac{1}{2}p\ U_i(x+\epsilon)\\
&\quad+\frac{1}{2}(1-p)\,U_i(y-\epsilon)+\frac{1}{2}(1-p)\,U_i(y+\epsilon)\\
&\tilde{=}\frac{1}{2}p\ \{U_i(x)-U_i'(x)\,\epsilon+U_i''(x)\frac{\epsilon^2}{2}\}\\
&\quad+\frac{1}{2}p\ \{U_i(x)+U_i(x)\,\epsilon+U_i''(x)\frac{\epsilon^2}{2}\}\\
&\quad+\frac{1}{2}(1-p)\ \{U_i(y)-U_i'(y)\,\epsilon+U_i''(y)\frac{\epsilon^2}{2}\}\\
&\quad+\frac{1}{2}(1-p)\ \{U_i(y)+U_i'(y)\,\epsilon+U_i''(y)\frac{\epsilon^2}{2}\}\\
&=pU_i(x)+(1-p)\,U_i'(y)+pU_i''(x)\frac{\epsilon^2}{2}+(1-p)\,U_i''(y)\frac{\epsilon^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\ [U_i(\tilde{w}-\rho_i)]\\
&=pU_i(x-\rho_i)+(1-p)\,U_i(y-\rho_i)\\
&\tilde{=}p\ \{U_i(x)-U_i'(x)\rho_i\}+(1-p)\ \{U_i(y)-U_i'(y)\rho_i\}\\
&=pU_i(x)+(1-p)\,U_i(y)-\rho_i\ \{pU_i(x)+(1-p)\,U_i'(y)\}
\end{aligned}
$$

上の 2 式を等しくすれば，次の近似式が導き出される。

$$\rho_i \simeq \frac{\epsilon^2}{2}\frac{pU_i''(x)+(1-p)U_i''(y)}{pU_i'(x)+(1-p)U_i'(y)} \quad (i=\mathrm{A},\ \mathrm{B})$$

したがって，もし $\rho_A \geq \rho_B$が成立するならば，すべての x, y, p について次の不等式が成立しなければならない。

$$\frac{pU_A''(x)+(1-p)U_A''(y)}{pU_B''(x)+(1-p)U_B''(y)} \geq \frac{pU_A'(x)+(1-p)U_A'(y)}{pU_B'(x)+(1-p)U_B'(y)} \tag{21}$$

ところが，$x=1$，$y=2$，$p=1/5$ とし，$U_A''(x)=-4$，$U_A''(y)=-3$，$U_B''(x)=-5$，$U_B''(y)=-1$；$U_A'(x)=5$，$U_A'(y)=3$，$U_B'(x)=3$，$U_B'(y)=2$ と置くと，式 (21) の左辺と右辺の値はそれぞれ次のように計算される。

$$\frac{pU_A''(x)+(1-p)U_A''(y)}{pU_B''(x)+(1-p)U_B''(y)} = \frac{(\frac{1}{5})(-4)+(\frac{4}{5})(-3)}{(\frac{1}{5})(-5)+(\frac{4}{5})(-1)}$$

$$=\frac{16}{9}=1.77\cdots\cdots$$

$$\frac{pU_A'(x)+(1-p)U_A'(y)}{pU_B'(x)+(1-p)U_B'(y)} = \frac{(\frac{1}{5})(5)+(\frac{4}{5})(3)}{(\frac{1}{5})(3)+(\frac{4}{5})(2)}$$

$$=\frac{17}{11}=1.54\cdots\cdots$$

したがって，式(21)はこの場合確かに満足されている。しかし，$U_A''(x)/U_B''(x)=4/5$，$U_A'(x)/U_B'(x)=5/3$，$U_A''(y)/U_B''(y)=3$，$U_A'(y)/U_B'(y)=3/2$ であるから，この例は命題２の条件（ i ）に背反することが分かるのである。

B．生産モデル

以上論じてきたところから分かるように，不等式に関する定理およびそれに付随する系は，保険プレミアムに関係する経済学的命題１を樹立するための礎石の役割を演じる。他方，定理２およびそれに付随する系の成立を前提として，

命題2の意義と有効性がはじめて明らかとなる。以下では，危険回避度変化に関する比較静学分析を行ないさい，第II節で述べた数学定理がどのように有効なのかを検討してみたいと思う。このような検討を通じて，命題1および命題2の援用がそのさい不可欠となることがおのずから了解されるであろう。

まず出発点として生産モデルを取り上げ，価格不確実性下の企業均衡の特性を分析しよう。簡単化のため，当該企業の単一生産物を y，単位価格を p，費用関数をC (y) とする(価格 p が確率変数であると想定する)。企業の目的が利潤の期待効用の極大化であると仮定すると，当面の問題は次式のように定式化される。

$$\underset{y}{Max}\ \underset{\tilde{p}}{E}\ [U(\pi)],\ \pi=\tilde{p}y-C(y)$$

均衡産出量 y^*とは，極大化のための第1次条件

$$E\ [U'(\pi)(\tilde{p}-C'(y)]=0 \tag{22}$$

を満足する産出量に外ならない。企業が危険回避者であり，限界費用逓増の法則が成立するかぎり，極大化のための第2次条件は常に満足されている。

ところで，微分計算を直接行なうことによって，次の不等式が成立することが直ちに分かる。

$$\frac{\partial}{\partial p}\ \{U'(\pi)\}=U''(\pi)y<0$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\ \{\tilde{p}-C'(y)\}=1>0$$

かくして，第II節で導出した数学定理を利用する準備がすべて整ったわけである。すなわち，系5を今の場合に適用すれば，式 (22) から次式が出る。

$$\begin{aligned}0&=E\ [U'(\pi)(\tilde{p}-C'(y)]\ \big|_{y^*}\\&<E\ [U'(\pi)]\ \big|_{y^*}\ E\ [\tilde{p}-C'(y)]\ \big|_{y^*}\end{aligned} \tag{23}$$

したがって，われわれはこれより $E[\tilde{p}]>C'(y^*)$ を得る。これは価格不確実性下の企業均衡において，期待価格が限界費用を上まわるということを示す。

今度は，当面の企業がAとBと2つあり，A企業の方がB企業より危険回避的であると仮定する。すなわち，$-U_A''(\pi)/U_A'(\pi)\geq -U_B''(\pi)/U_B'(\pi)$ がすべての π について成立するという仮定を置く。このことは命題1を利用すれば，次式を成立させる変換関数Gが存在することを意味する。

$G'>0$，$G''<0$，$U_A(\pi)=G(U_B(\pi))$

上式を用いることにより，次式が容易に導かれよう。

$$-\frac{\partial}{\partial y}\{E\ [U_A(\pi)]\}=E\ [U_A'(\pi)(-\tilde{p}+C'(y))]$$

$$=E\ [G'(U_B(\pi))U_B'(\pi)(-\tilde{p}+C'(y))] \tag{24}$$

しかるに，関数 $G'(U_B(\pi))$ と $U_B'(\pi)(-\tilde{p}+C'(y))$ はともに p に関して減少関数である。それ故に，前節の数学系5を利用すれば，式 (24) から次式が得られる。

$$-\frac{\partial}{\partial y}\{E[U_A(\pi)]\}\ \Big|_{y_B^*}$$

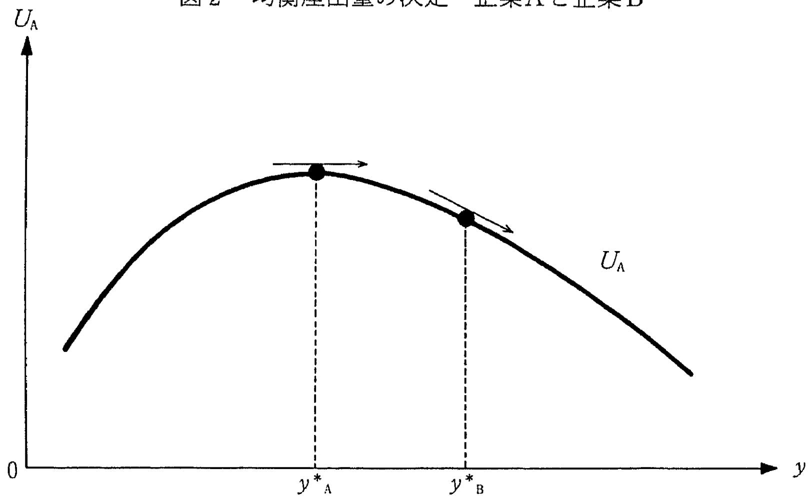
$$>E\ [G'(U_B(\pi))]\ \Big|_{y_B^*}\ E\ [U_B'(\pi)(-\tilde{p}+C'(y))]\ \Big|_{y_B^*}$$

企業 B の均衡条件より $E\ [U_B'(\pi)(p-C'(y_B^*))]=0$ であるから，われわれは結局

$$\frac{\partial}{\partial y}\{E\ [U_A(\pi)]\}\ \Big|_{y_B^*}<0$$

を得る。このことは $y_A^*<y_B^*$ が成立すること，すなわち，危険回避の程度のより大きい企業の産出量はそれだけ小さくなることを意味する(図2を見よ)。

図２　均衡産出量の決定―企業Ａと企業Ｂ



以上の結果を命題の形にまとめておけば，次の通りである。

命題３　生産価格が不確実である場合，そこで成立する企業の均衡にあっては，期待価格が限界費用を上まわる。

さらに，２つの企業均衡を比較するとき，より危険回避的な企業の産出量はそうでない企業のそれより小さくなる。

この命題ははじめてサンドモ［15］によって導出され，不確実性下の生産理論ではあまねく知られている結果である（例えば，酒井［14］，第９章を見よ）。しかし，この命題を導く従来の証明方法は少々錯綜していて，見通しの良いものとはいえない。本稿はこの方面において一層の改善をめざしたのである。すなわち，不等式に関する数学定理学やそれに付髄する系を積極的に活用するという新しい方法を採用することを通じて，従来よりもはるかに見通しのいい別証を与えることに成功したわけである。

C．資産選択モデル

われわれの眼を生産モデルから資産選択モデルへ転じよう。資産選択モデルとして最も有名なものは，アロー〔1〕とプラット〔10〕によって分析された2資産モデルである。すなわち，彼らは1つの安全資産および1つの危険資産から構成されるという最も簡単なケースを俎上にあげ，そこで危険回避度のより大きい個人はそうでない個人に比して，安全資産をより多く保有し，危険資産をより少なく保有することを示した(かかるモデルの展望については，酒井〔14〕，第7章を見よ)。

ところが，現実の世界にあっては，危険資産の数が2個以上存在するのが通常である。したがって，興味をそそる問題は，アロー=プラット流の資産選択アプローチをもっと複雑な場合へといかに一般化できるだろうか，ということである。最近，キールストローム=ローマー=ウィリアムス〔8〕とロス〔13〕はそれぞれ独立に，かような拡張ないし一般化への途を一歩進める研究を行なっている。以下において，第II節で開発した数学定理を活用することを通じて，彼らの採用したアプローチを再検討すると同時に，一般化への途をさらにもう一歩押し進めることを試みようと思う。

キールストローム=ローマー=ウィリアムスが分析した問題とは，富の初期量が不確定である場合における資産選択の問題である。アローやプラットの世界では，期首の富ないし所得量は外生的に与えられており，かかる所与の量を安全資産と危険資産との間にいかに配分するのが最適だろうか，ということが中心問題となる。しかしながら，当該個人が直面する所得変動という危険が，単に危険資産の収益率の不確定性のみに帰せられるとは限らないのである。例えば，この個人は予め定められた確定所得の外に，ボーナス・諸手当などの別途収入の途を持っており，かかる別途収入が確率的に増減するという可能性があ

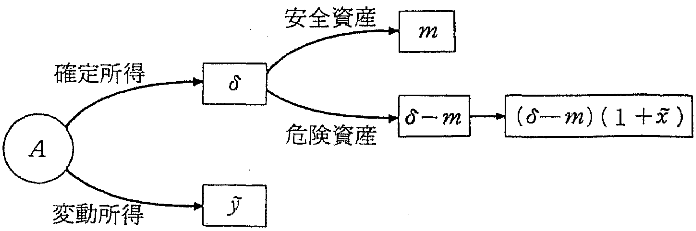
る。このようなケースにあっては，その個人の収入源は，確定収入の部分と変動収入の部分との2つから構成されることになる。

いま，当該個人が受け取る確定所得および変動所得をそれぞれ$\delta(>0)$および$\tilde{y}(\geq 0)$とする。そして，変動所得$\tilde{y}$の実現値を実際に知る以前に，この個人は，確定所得δを安全資産mおよび危険資産$(\delta-m)$へと投資配分するものと仮定する。単純化のため，安全資産の利子率はゼロ，危険資産の利子率$\tilde{x}$は一定の確率分布に従うという仮定を置く。そうすると，当該個人の期末における資産量は次式によって与えられる。11)

$$\tilde{W}=m+(\delta-m)(1+\tilde{x})+\tilde{y}$$

したがって，当面の資産選択モデルを図解すれば，図3のごとくになる。

図3 資産選択モデル—その1



もしわれわれが期待効用極大化仮設を採用するならば，当該の資産選択問題は

$$\underset{m}{Max} \; \underset{\tilde{x},\tilde{y}}{E}[U(\tilde{W})]$$

なる極大問題として定式化される。それ故に，求める最適安全資産量m^*の大きさとは，

$$\underset{\tilde{x},\tilde{y}}{E}[U'(\tilde{W})(-\tilde{x})]=0$$

を満たすmの値にほかならない。

11) たとえ安全資産の利子率がプラスであるとしても，それが確定値であるかぎり，以下の分析は全く同様である。

さて，問題の個人がAとBの２人おり，個人Aの方が個人Bより危険回避の気持が大きいと仮定する。換言すれば，両個人の効用関数 U_A と U_B との間に，次式を満足させる変換関数Gが存在すると仮定する（命題１の利用）。

$$G'>0,\ G''<0 \quad \text{かつ} \quad U_A(W)=G(U_B(W))$$

そのとき，次式が成立することに注意する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial m}\mathrm{E}\ [U_A(\tilde{W})]&=E\ [U_A'(\tilde{W})(-\tilde{x})]\\&=E\ [G'(U_B(\tilde{W}))\,U_B'(\tilde{W})(-\tilde{x})]\end{aligned} \tag{25}$$

しかるに，関数 $G'(U_B(\tilde{w}))$ と関数$U_B'(\tilde{W})(-\tilde{x})$はともに変数$(\tilde{x},\ \tilde{y})$に関して非増加関数である。したがって，前節の数学定理 3 を式 (25) に適用し，企業 B の均衡条件を念頭に置けば，次式が成り立つ

$$\frac{\partial}{\partial m}E\ [U_A(\tilde{W})]\ \Big|_{m_B^*}$$

$$\geq E\ [G'(U_B(\tilde{W}))]\ \Big|_{m_B^*}E\ [U_B'(\tilde{W})(-\tilde{x})]\ \Big|_{m_B^*}=0$$

これより，$m_A^*\geq m_B^*$が直ちに出る。以上の分析から，次のごとき命題が樹立されたことになる。

命題 4　期首の所得が確定所得と変動所得の２つから構成され，当該個人は前者の所得を安全資産と危険資産に投資配分すると仮定する。そのとき，危険回避度の大きい個人はそうでない個人に比して，安全資産をより多く，危険資産をより少なく保有しようとする傾向がある。

もし変動所得 $\tilde{y}$ の存在を捨象すれば，上述のモデルはアロー＝プラットの伝統的なモデルと完全に一致する。したがって，命題 4 の意義は，アロー＝プラットの比較静学的結果を，変動所得が存在する場合に拡張した点にある。この命題を導出するために，キールストローム＝ローマー＝ウィリアムスは収益率 $\tilde{x}$ と

変動所得 $\tilde{y}$ とが互いに独立な確率変数であること，および，2人の個人の中の少くとも1人の絶対的危険回避が所得量の増加とともに減少すること（すなわち，$-U_A''/U_A'$ または $-U_B''/U_B'$ が減少関数であること）を仮定した。しかしながら，われわれが上で示したように，これらの仮定を特別に設けることなく，同一の結果が得られるのである。そして，このように証明が改善できた理由は，われわれが不等式に関する数学定理3およびそれに付髄する系を積極的に活用したからである。[12)]

さて，ロス〔13〕は別の角度からアロー=プラットのモデルの一般化を企てる。すなわち，ロスは富の投資対象として2種類の危険資産が存在するモデルを提示し，その中でどのような比較静学的結果が出てくるかを吟味する。中心問題は，当該個人がその富を，危険度の大きい第1危険資産と危険度の小さい第2危険資産との間にいかに投資配分するか，という点である。ここで，第2危険資産の危険度がゼロとなる極限の場合を考えると，ロスのモデルはアロー=プ

12) 上述の K-R-W モデルに対しては，3資産モデルの立場から，別の解釈を与えることができる。

いま，当該個人の投資対象となるべき資産として，危険資産が2種類，安全資産が1種類あると想定する。さらにその上，第1危険資産への投資額は——何らかの理由のため——予め固定されていると仮定する。すなわち，当該個人は先ず，保有資金額Aの中で（$1-\delta$）の部分を必ず第1危険資産の購入に当てる（第1ステップ）。そして，残りの部分 δ が，安全資産 m と第2危険資産 $(\delta-m)$ とからなるポートフォリオへ投資配分するために利用可能な資金プール額となる（第2ステップ）。したがって，$\tilde{z}$ を第1危険資産の収益率，$\tilde{x}$ を第2危険資産の収益率とすれば，期末の富の額は

$$W=m+(\delta-m)(1+\tilde{x})+(1-\delta)\tilde{z}$$

によって与えられる。ここで $(1-\delta)\tilde{z}$ をあらためて $\tilde{y}$ と置けば，このモデルは本文のモデルと完全に一致する。

かかる3資産モデルの観点からすれば，命題4は次のように読みかえることができる。「もし資金の投資対象として危険資産が2種類，安全資産が1種類あり，かつ第1危険資産への投資額が予め固定されているならば，その場合には危険回避度のより大きい個人はそうでない個人に比べて，第2危険資産への投資額を減少させるであろう。」

ラットのモデルに帰着してしまうことに留意すべきである。

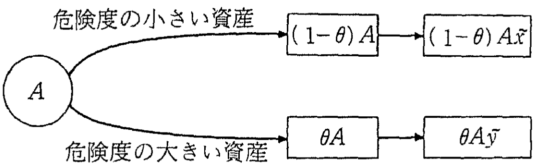
当該個人は，その初期保有資金 A のうち $(1-\theta)$ の割合を危険度の小さい危険資産に，残りの θ の割合を危険度の大きい危険資産に投資配分すると仮定する。したがって，前者および後者の資産の収益率をそれぞれ $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ と置くと，$\tilde{y}$ の確率分布の方が $\tilde{x}$ のそれより危険度が大きいということになる。しかも，危険度の大きい資産の購入量がゼロとならないと前提すれば，かかる資産の期待収益率は他の資産のそれを必ず上まわらなければならない(つまり，$E\tilde{y}>E\tilde{x}$)。かくして，期待効用極大化仮設を採用すれば，われわれは次のごとき極大問題に直面していることになる(図 4 を参照)。

$$\underset{\theta}{Max}\quad E\ [U(\tilde{W})],\quad \tilde{W}=A\ \{(1-\theta)\tilde{x}+\theta\tilde{y}\}$$

ここで $\tilde{z}=\tilde{y}-\tilde{x}$ と置くと，最適な配分比率 θ^* とは次の均衡式を満たす θ の値にほかならない。

$$E\ [U'(\tilde{W})\tilde{z}]=0 \tag{26}$$

図 4　資産選択モデル—その 2



例によって，2 人の個人 A と B を取り上げ，個人 A の危険回避度の方が「ロスの意味において」より大きいと仮定する。すなわち，すべての W_1, W_2 について

$$U_A''(W_1)/U_B''(W_1)>U_A'(W_2)/U_B'(W_2)$$

が成立していると仮定する。[13]すると，命題 2 に従えば，このことは次のごとき

13)　アロー=プラットの意味において個人Aの危険回避度が個人Bのそれより大きいという「より弱い」仮定だけからでは，以下の比較静学的結果は導出できないことが知られている。この点については，ロス〔13〕を見よ。

実数 G が存在することを意味する。

$\lambda>0$, $G'<0$, $G''<0$, $U_A=\lambda U_B+G$

上式と均衡式 (26) を利用すれば，われわれは次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E\left[U_A(\tilde{W})\right]\Big|_{\theta_B*}=E\left[U_A'(\tilde{W})\tilde{z}\right]\Big|_{\theta_B*}$$

$$=\lambda E\left[U_B'(\tilde{W})\tilde{z}\right]\Big|_{\theta_B*}+E\left[G'(\tilde{W})\tilde{z}\right]\Big|_{\theta_B*}$$

$$=E\left[G'(\tilde{W})\tilde{z}\right]\Big|_{\theta_B*}$$

さて，$(\tilde{x},\ \tilde{z})$の関数として見た場合，$G'(\tilde{W})$は減少関数であり，$\tilde{z}$は非減少関数である。それ故に，われわれは数学定理3を利用できるのであって，実際そのとき次の不等式が容易に出る。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E\left[U_A(\tilde{W})\right]\Big|_{\theta_B*}\leqq E\left[G'(\tilde{W})\right]\Big|_{\theta_B*}E\left[\tilde{z}\right]\Big|_{\theta_B*}$$

ところが，仮定によって $G'<0$ であり，かつ $E\ [\tilde{z}]>0$ であるから，上式の右辺の値はマイナスとなり，われわれは次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E\left[U_A(\tilde{W})\right]\Big|_{\theta_A*}<0$$

このことは明らかに，$\theta_A*<\theta_B*$の成立を意味する。以上のことから，次の命題が導出されたわけである。

命題5　投資対象として，2種類の危険資産が存在すると前提する。そのとき，ロスの意味において危険回避度の大きい個人は，そうでない個人に比して，危険度の小さい資産をより多く，危険度の大きい資産をより少なく保有しようとする。

この命題5はロス〔13〕によってはじめて樹立されたが，彼によるもともと

の証明はややスケッチ風で，完璧なものとは言えない。本稿では，数学定理3を積極的に利用するという観点に立って，ロスの証明過程上のギャップを完全に埋める努力をしたわけである。[14)]

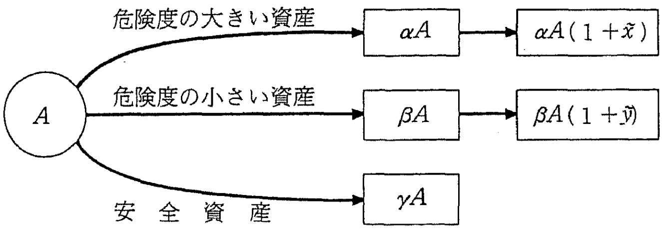
最後の問題として，投資対象として1種類の安全資産および2種類の危険資産が存在するという，より一般的な3資産モデルを検討したい。このモデルは，その特殊なケースとして，上で取り扱ったアロー=プラット，キールストローム=ローマー=ウィリアムスおよびロスのモデルをすべて包摂する。

当該個人は初期保有資金Aのうち，αの割合を危険度の大きい資産，βの割合を危険度の小さい資産，γの割合を危険度の全く無い資産(つまり安全資産)に投資配分すると仮定する(ただし，$\alpha+\beta+\gamma=1$)。危険度の大きい資産の収益率を$\tilde{x}$，危険度の小さい資産の収益率を$\tilde{y}$とした場合に，これら3つの資産の購入量がいずれもプラスとなる世界を想定すれば，次の不等式が成立することは当然であろう。

$$E\tilde{x} > E\tilde{y} > 0$$

当面のモデルを図解すれば，図5のごとくである。

図5　資産選択モデル—その3



かくして，われわれの直面する極大問題は次のように定式化される。

---

14)　ロスでは，すべての所与のxについて，$E[\tilde{z}|x]>0$という仮定が要求されている。しかし，本文中の証明から分かるように，これを単に$E[\tilde{z}]>0$，すなわち$E\tilde{y}>E\tilde{x}$という風に変えることが可能である。

$$\underset{\alpha,\ \beta}{Max}\quad E\ [U(\tilde{W})],$$

$$\tilde{W}=\mathrm{A}\ \{\alpha(1+\tilde{x})+\beta(1+\tilde{y})+\gamma\}=A(1+\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y})$$

われわれはいわゆる内的均衡解のみを考えているから，求める最適配分比率 α^*と β^*とは次の方程式体系を満たす α と β の値である。

$$\partial EU/\partial\alpha\equiv AE\ [U'(\tilde{W})\tilde{x}]=0$$

$$\partial EU/\partial\beta\equiv AE\ [U'(\tilde{W})\tilde{y}]=0 \tag{27}$$

例のごとく，2人の個人 A と B に関して，個人 A の方が個人 B よりロスの意味において危険回避度が大きいと仮定すると，命題2によって，次のごとき実数 λ と関数 G が存在するはずである。

$\lambda>0$，$G'<0$，$G''<0$，$U_A(W)=\lambda U_B(W)+G(W)$

かくして，式 (27) を用いつつ，これまでの証明方法を繰り返せば，次式が導出できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}E\ [U_A(\tilde{W})]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}&=E\ [U_A'(\tilde{W})\tilde{x}]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}\\&=\lambda E\ [U_B'(\tilde{W})\tilde{x}]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}+E\ [G'(\tilde{W})\tilde{x}]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}\\&=E\ [G'(\tilde{W})\tilde{x}]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}\end{aligned}$$

しかるに，$(\tilde{x},\ \tilde{y})$の関数とみなしたとき，$G'(W)$は減少関数，$\tilde{x}$は非減少関数である。ここで数学定理3を再び活用すれば，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}E\ [U_A(\tilde{W})]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}&\leq E\ [G'(\tilde{W})]\ \Big|_{\alpha_B^*,\ \beta_B^*}\ E\ [\tilde{x}]\\&<0\end{aligned} \tag{28}$$

となる。同様な方法を用いれば，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}E\ [U_{\mathrm{A}}(\tilde{W})]\ |_{\alpha_{\mathrm{B}}{}^*,\ \beta_{\mathrm{B}}{}^*} \leq E\ [G'(\tilde{W})]\ |_{\alpha_{\mathrm{B}}{}^*,\ \beta_{\mathrm{B}}{}^*}\ E\ [\tilde{y}]$$

$$< 0 \tag{29}$$

も容易に証明できるだろう。

上の2式(28)と(29)を合わせて考えれば，このことはわれわれに対して，次の不等関係のうち少くとも1つが成り立つことを教える。

$\alpha_{\mathrm{A}}{}^* < \alpha_{\mathrm{B}}{}^*$,　$\beta_{\mathrm{A}}{}^* < \beta_{\mathrm{B}}{}^*$

以上の結果をまとめれば，次の命題が得られたことになる。

命題6　投資対象として，2種類の危険資産と1種類の安全資産が存在すると仮定する。そのとき，ロスの意味において危険回避度の大きい個人は，そうでない個人に比べて，少くとも1つの危険資産を少なく保有しようと企てる。

この命題6は命類4および命題5の一般化をめざしたものである。しかし，経済学的含蓄という立場からみると，かような一般化の内容は非常に豊かだとは言えない。なぜならば，次のような問題点が未解決のままに残されているからである。①ロスの意味において危険度の大きい個人Aが，そうでない個人Bに比べて，危険度の最も大きい資産を少なく保有するということが言えるためには，どのような条件が新たに付加されるべきだろうか。②個人Aが個人Bに比べてみて，2つの危険資産をともに少なく保有する(換言すれば，安全資産を多く保有する)ということが成り立つのは，一体どのような状況の下であろうか。これらの残された問題に解答を与えることにより，危険資産が多数個存在するモデルにおける比較静学分析は，一段と飛躍的発展をとげることであろう。

IV. おわりに

比較静学の問題は，均衡解の存在，一意性，安定性や経済厚生の諸問題とともに，ミクロ経済学の中核部分を形成する。不確実性の世界という枠組みの中でとりわけ興味を引く問題は，危険度ないし危険回避度の変化が均衡解の成立に及ぼす効果に関係する。本稿においてはこのうち，危険回避度の変化に関する比較静学分析のみに焦点をしぼり，それについて非常に立入った検討を行なった。このような検討の結果得た結論と今後に残された課題を要約すれば，次のごとくである。

1. 効用関数が1つの確率変数の関数として表現される場合についての比較静学分析は，すでに10年以上も前にアローとプラットによって先鞭がつけられ，以後実にさまざまな分野に応用されてきた。かかる方面における研究は今やほぼ飽和状態に到達しており，新しい成果の限界貢献度は概して余り大きくない。

2. もし1変数の効用関数のケースについてなお貢献できる点があるとすれば，その1つの方向は，不等式に関する数学定理の積極的活用を通じて，既存の証明方法に改良を加えるという方向である。本稿では，保険プレミアムや生産のモデルについて，このような改良作業を若干試みた。

3. 最も一般的なケースは，効用関数が多変数の関数として表わされるケースである。しかし，はしがきで言及したように，このケースでは保険プレミアムの一意性の欠如という決定的困難が存在する。この点については，学界でも未だ定着したアプローチが無い状態であり，本稿では完全に割愛することにした。別の機会に，しかもある程度の時間経過の後に，立戻って再検討を加えるのが得策であろう。

4. 近年研究が盛んなケースは，確率変数は多数個あるが，効用関数がこれ

らの変数の算術和ないし1次結合の関数として表わされるケースである。本稿でも，'additive risks' と呼ばれるかかる中間的ケースを取り上げ，不等式の数学定理を積極的に活用するという観点から，ロスやキールストローム=ローマー=ウィリアムスなどのモデルを再吟味した。その結果，彼らの証明上のギャップを埋めたり，見通しの良い新しい証明方法を用いて従来のものより良い結果を導出することに成功した。

5. 本稿で俎上にあげた経済モデルへの応用は，危険と保険プレミアムの簡単なモデル，簡単な生産モデル，簡単な資産選択モデルという3つのトピックに限られていた。これらのモデルについて，それらをより一般的なケースに拡張することが，われわれのさしあたっての課題である。さらに，その他の重要な経済モデル，例えば，貯蓄モデル，資源配分モデル，開放経済モデルなどにおいて，本稿で採用したアプローチがどの程度有効なのかを見究めることも今後に残された課題である。

参 考 文 献

[1] Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk-Bearing,* North-Holland, 1970.

[2] Duncan, G. T., "A Matrix of Multivariate Local Risk Aversion," *Econometrica* 45, 1977, 895-903.

[3] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., *Inequalities*, Cambridge University Press, Second Edition, 1952.

[4] Jensen, J. L. W. V., "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes," *Acta Math.* 30, 1906, 175-193.

[5] Karni, E., "On Multivariate Risk Aversion," *Econometrica* 47, 1979, 1391-1401.

[6] Kihlstrom, R. E. and Mirman, L. J., "Risk Aversion with Many Commodities," *Journal of Economic Theory* 8, 1974, 361-388.

[7] Kihlstrom, R. E. and Mirman, L. J., "Constant, Increasing and Decreasing Risk Aversion with Many Commodities," *Review of Economic Studies* 48, 1981, 271-280.

[8] Kihlstrom, R. E., Romer, D. and Williams, S., "Risk Aversion with Random Initial Wealth," *Econometrica* 49, 1981, 911-920.

[9] Machina, M. J., "A Stronger Characterization of Declining Risk Aversion," *Econometrica* 50, 1982, 1069-1079.

[10] Pratt, J. W., "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica* 32, 1964, 122-136.

[11] Pratt, J. W., "Some Remarks on Some Stronger Measures of Risk Aversion," Unpublished Working Paper, Harvard University, November 1981.

[12] Pratt, J. W., "Aversion to One Risk in the Presence of Another," Unpublished Working Paper, Harvard University, November 1981.

[13] Ross, S. A., "Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large with Applications," *Econometrica* 49, 1981, 621-638.

[14] 酒井泰弘『不確実性の経済学』有斐閣, 1982.

[15] Sandmo, A., "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty," *American Economic Review* 61, 1971, 65-73.