# 危険度の変化について
## —簡単な分析—

酒井泰弘

# On Increasing Risk: An Exposition

Yasuhiro Sakai

目　次



## Ⅰ．確率関数間の順序づけ——序説

われわれは不確実性の世界の住人である。この住人はこの不確実性を前にして，それをできるだけ回避しようとするのが常である。ところで，この個人によって回避されるべき対象としての「危険」そのものの程度，すなわち危険度の大小とはそもそもどのように測るべきものなのだろうか。この当然の疑問に答えんとするのが小論の目的である。

いま任意の２つの確率関数（確率密度関数または累積分布関数）が与えられており，しかもこれら両関数の平均値は等しいと仮定する。そのとき，もしこ

の共通平均値のまわりでの分布の「ばらつき」の状態が両者間で異なれば，ばらつきの程度の大なる関数の方が，そうでない関数より「危険度が大きい」とみなすのが常識であろう。かくして，危険度の大小関係を考察することによって，平均値の等しい確率関数の間にひとつの順序づけを行なうことが可能となる。しかし他方において，平均値の異なる確率関数間においても順序づけができる場合があるという点を忘れてはならない。例えば，もし２つの確率関数が平均値を除いてその形状が全く同一であるとすれば，その場合には平均値の大きい関数の方が，そうでない関数より順序として優位にあると考えるのが自然であろう。このようなわけで，危険度の大小をいかに決定するかという問題は，確率関数の間にいかに順序づけを行なうかという問題と密接に絡みあっており，事実，前者の問題は後者の問題の中の特殊ケースとして位置づけられるのである。

話を分かりやすくするため，例として次のごとき２つの確率密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ を取り上げよう。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x=\mu_f-\sigma_f,\ \mu_f+\sigma_f\ \text{の場合}) \\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases} \tag{1}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x=\mu_g-\sigma_g,\ \mu_g+\sigma_g\ \text{の場合}) \\ 0 & (\text{その他の場合})\end{cases} \tag{2}$$

ここで $\mu_f$ と $\mu_g$ がそれぞれ関数 $f(x), g(x)$ の平均値に等しく，$\sigma_f$ と $\sigma_g$ がそれぞれの関数のばらつきの程度を示すことは自明であろう。したがって，もし $\mu_g \geq \mu_f$ かつ $\sigma_g \leq \sigma_f$ なる不等関係が成立するならば，関数 $g(x)$ が関数 $f(x)$ より選好される（もっと厳密に言えば，$g(x)$ が $f(x)$ より嫌われることはない）とみなしてよい。換言すれば，そのとき，$g(x)$ の方が $f(x)$ より順序として優位にあるだろう（もっと厳密に言えば，劣位にあることはないだろう）。このような確率関数間の順序づけは，上述のごとき離散的なケースにつ

いてばかりではなく，もっと一般的な連続的ケースについても妥当する。例えば，次のような２つの正規分布関数を比較してみよう。

$$f(x)\equiv N(\mu_f,\sigma_f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f{}^2}}e^{-(x-\mu_f)^2/(2\sigma_f{}^2)} \tag{3}$$

$$g(x)\equiv N(\mu_g,\sigma_g) \tag{4}$$

この場合においても，もし $\mu_g\geq\mu_f$ かつ $\sigma_g\leq\sigma_f$ なる不等関係が成立するならば，$g(x)$ の方が $f(x)$ より順序として優位にある（劣位にあることはない）とみなすことができよう。われわれがここで留意すべきことは，上式(1)〜(4)はいずれもパラメータの数が２つしかないという風な，全く特殊な関数形をしているという点である。問題は，パラメータの数が２つ以上存在するもっと一般的な諸々の確率関数について，その間に優位・劣位の順序関係を導入すべき合理的方法が存在するか否かである。この興味ある問題点は，文献上ではハダー＝ラッセル [4, 5, 6]，ロスチャイルド＝スティグリッツ [13, 14] などによってほぼ同時並行的に提起され，その後今日に至るまで「不確実性の経済学」の１分野として大いなる展開を見せてきている。かかる展開を交通整理的にとりまとめ，特にさまざまな図表を考案してその理解を容易にしようというのが，小論の目的なのである。登山をするさい，十分な体力づくりと周到な準備をせずに，いきなりアルプスの高峰に挑むのは無謀にして危険である。登山用具も地図も要るし，道先案内人も要るだろう。そのような本格的登山の前の準備作業のひとつとして，小論がいささかでも役に立てば筆者の望外の喜びである。

小論の構成を概略する。まず次節において，確率優位および確率劣位なる概念を導入し，その概念を用いての確率関数間の順序づけを試みる。第Ⅲ節では，確率関数に何らかのシフトがあったとき，それがこの順序づけに及ぼす影響について吟味する。つづいて第Ⅳ節において，順序づけの対象を**平均値の等しい**確率関数の族のみに限定するとき，平均保存的拡散および平均保存的縮小

という新しい特別な順序づけが可能となることを示す。そして，この平均保存的拡散にもとづく順序づけと，期待効用にもとづく順序づけとの同値性について論じる。最後の第V節では，かかる共通の順序づけ，すなわち「危険度による順序づけ」の立場から，トービン [16]，マーコッヴィッツ [8] 以来のいわゆる「平均=分散アプローチ」が，近似的アプローチとしてどの程度の有効性と限界を持つのかについて検討する。

## II．確率優位と確率劣位

本節の目的は，任意の２つの確率関数（確率密度関数または累積分布関数）が与えられたとき，その間に「大小」関係の順序づけをすることが果して可能であるかどうかを検討することである。任意の２つの実数をとれば，その間における最も自然な順序づけは通常の大小関係“≧”によって与えられる。また，ある特定集合の中の任意の２つの部分集合に対しては，その間における包含関係“⊃”が自然な順序を提供する。われわれにとっての関心事は，これと同様な順序づけが確率関数間においても存在するかどうかである。

いま $f(x)$ と $g(x)$ を任意の２つの確率密度関数とする。そして，大文字で書かれた関数 $F(x)$ と $G(x)$ をそれぞれの（小文字で書かれた）密度関数に対応する（第１次）累積分布関数，さらに $\hat{F}(x)$ と $\hat{G}(x)$ をそれぞれの累積分布関数の累積分布関数（第２次累積分布関数）とする。すなわち，次のように定義する。

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \qquad \text{または} \qquad F(x)=\sum_{t\leq x} f(t)$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt \qquad \text{または} \qquad G(x)=\sum_{t\leq x} g(t)$$

$$\hat{F}(x)=\int_0^x F(t)dt \qquad \text{または} \qquad \hat{F}(x)=\sum_{t\leq x} F(t)$$

$$\hat{G}(x)=\int_0^x G(t)dt \qquad \text{または} \qquad \hat{G}(x)=\sum_{t\leq x} G(t)$$

図1において，上段の図は確率密度曲線 $f(x)$ と $g(x)$，中段の図はそれに対応する（第1次）累積分布曲線 $F(x)$ と $G(x)$，そして下段の図は第2次累積分布曲線 $\hat{F}(x)$ と $\hat{G}(x)$ を図示する。ここで実線で描かれた曲線が一連の関数 $f(x)$，$F(x)$，$\hat{F}(x)$ に関係し，破線で描かれた曲線が一連の関数 $g(x)$，$G(x)$，$\hat{G}(x)$ に関係するという点に注意せよ。式(1)，(2)において $\mu_f<\mu_g$ かつ $\sigma_f=\sigma_g$ と置けば，$f(x)$ と $g(x)$ のグラフが左の(a)図の上段の図のようになることは明らかであろう。このときには——中段の図に見られるごとく——累積分布曲線の段階で早くも $f(x)$ と $g(x)$ との間の順序づけが確定する。というのは，すべての $x$ に対して $F(x)\geq G(x)$ なる大小関係が成立するからである。このような関数間の大小関係はもう1度累積オペレータを施しても保存されるはずだから，すべての $x$ に対して $\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ という風な第2次累積分布曲線間の大小関係も成立している（下段の図を見よ)。次に，右の(b)図は，式(1)，(2)にあって $\mu_f=\mu_g$ かつ $\sigma_f>\sigma_g$ と特定化することによって得られた図である。このように分布のばらつき状態を示す $\sigma$ の値が $f(x)$ と $g(x)$ との間で異なる場合にあっては——中段の図を眺めれば明らかなように——累積分布曲線の相対的位置のみを見て両関数間の大小関係を決めるということはもはや不可能である。しかしこの場合でも，もう1度累積オペレータを施して，第2次累積分布曲線の次元で両関数を比較するならば，そこに $\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ なる不等関係がすべての $x$ に関して成立していることが判明する（次頁の図を見よ)。

式(1)，(2)から（第1次）累積分布関数および第2次累積分布関数を具体的に導出してみると，次の通りである。

$$F(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<\mu_f-\sigma_f \text{ の場合})\\ \frac{1}{2} & (\mu_f-\sigma_f\leq x<\mu_f+\sigma_f \text{ の場合})\\ 1 & (x\geq\mu_f+\sigma_f \text{ の場合})\end{cases}$$

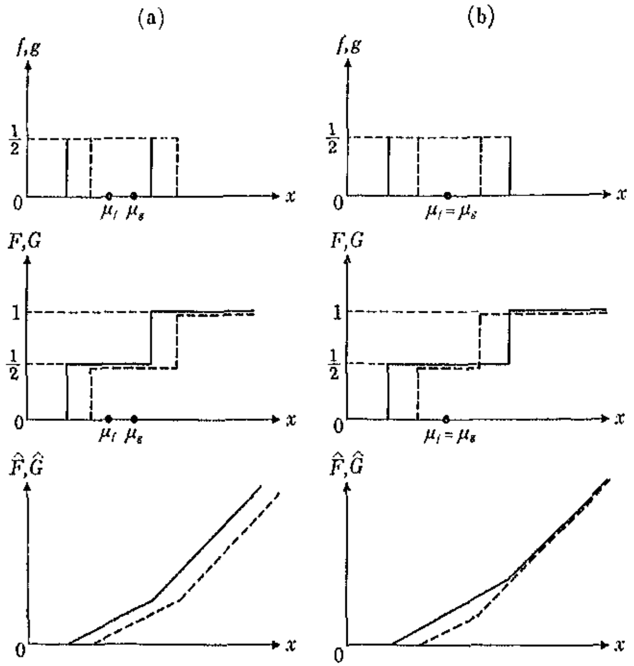


図 1　確率優位と確率劣位——関数例　その1

$$G(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<\mu_g-\sigma_g \text{ の場合})\\ \frac{1}{2} & (\mu_g-\sigma_g\leq x<\mu_g+\sigma_g \text{ の場合})\\ 1 & (x\geq\mu_g+\sigma_g \text{ の場合})\end{cases}$$

$$\hat{F}(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<\mu_f-\sigma_f \text{ の場合})\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(u_f-\sigma_f) & (\mu_f-\sigma_f\leq x<u_f+\sigma_f \text{ の場合})\\ x-\mu_f & (x\geq\mu_f+\sigma_f \text{ の場合})\end{cases}$$

$$\hat{G}(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<\mu_g-\sigma_g \text{ の場合})\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(\mu_g-\sigma_g) & (\mu_g-\sigma_g\leq x<\mu_g+\sigma_g \text{ の場合})\\ x-\mu_g & (x\geq\mu_g+\sigma_g \text{ の場合})\end{cases}$$

もし $\mu_f<\mu_g$ かつ $\sigma_f=\sigma_g$ と置けば，$F(x)\geq G(x)$ かつ $\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ とな

るということはこれより明らかであろう。また $\mu_f=\mu_g$ かつ $\sigma_f>\sigma_g$ のとき，$F(x)$ と $G(x)$ との間に大小関係をつけることはできないけれども，われわれはやはり $\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ を得ることも容易に確認できるであろう。

以上の分析からわれわれが理解できることは，2つの確率関数の優劣を決定するさい，それを直接突き合わせるのではなくて，むしろ累積オペレーターを施すことによって第2次累積分布関数の次元にまで持ちこみ，そこでどちらかが優位にあるかを定めるのが非常に有効であるという点である。このことは図1のごとく離散的なケースにかぎらず，もっと一般的な連続的ケースについても妥当する。例えば，図2は正規分布関数を表現する式(3)，(4)をグラフ化したものであって，実線のグラフが $f(x)$，$F(x)$，$\hat{F}(x)$ に対応し，破線のグラフが $g(x)$, $G(x)$, $\hat{G}(x)$ に対応する。すなわち，一方において，これらの式において $\mu_f<\mu_g$ かつ $\sigma_f=\sigma_g$ と置くと左の(a)図のような曲線群が得られ，また他方において，$\mu_f=\mu_g$ かつ $\sigma_f>\sigma_g$ と置くと右の(b)図のような曲線群が得られる。いずれのケースにおいても，$\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ なる大小関係がすべての $x$ に対して成立しているわけである。

これまで行なってきた準備的考察から，確率優位および確率劣位の定義を次のようにするのが自然であろう。

**定義 1.** 確率変数 $x$ の値域を閉区間 $[0,a]$ とし，任意の2つの確率密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ が与えられているとせよ。もし $\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ なる大小関係がこの閉区間内のすべての $x$ に対して成立するならば，$g(x)$ は $f(x)$ より「確率優位」または「確率上位」stochastic dominance にあると言い，また $f(x)$ は $g(x)$ より「確率劣位」または「確率下位」にあると言う（もっと厳密に言えば，$g(x)$ は $f(x)$ に対して少なくとも確率同位にあり，$f(x)$ は $g(x)$ に対してたかだか確率同位にある）。この場合，2つの対応する累積分布関数

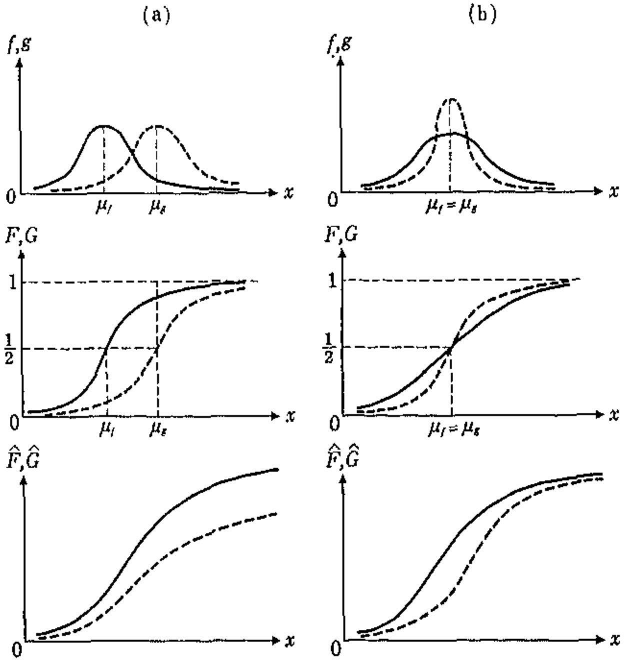


図 2　確率優位と確率劣位——関数例　その 2

$F(x)$ と $G(x)$ について，$G(x)$ は $F(x)$ より確率優位，$F(x)$ は $G(x)$ より確率劣位にあるとも言う[1]。

さて，（第 1 次）累積分布関数および第 2 次累積分布関数について，次のごとき性質が成立する。

---

1)「確率優位」という概念はもともと統計学で用いられていたものであるが，それを経済学の中に積極的に導入した学者はハダーとラッセル［4～6］である。本文では，その概念を定義するさい，確率変数 $x$ の値域を閉区間 $[0, a]$ に限定したけれども，これはもっぱら分析上の便宜にもとづくものである。それを実数全体 $(-\infty, +\infty)$ にまで拡張することももちろん可能である。

**性質（A）** $F(x)$ および $G(x)$ はともに単調増加関数であり，$F(0)=G(0)=0$ かつ $F(a)=G(a)=1$ である。

**性質（B）** $\hat{F}(x)$ および $\hat{G}(x)$ もまた単調増加関数であり，$\hat{F}(0)=\hat{G}(0)=0$ が成り立つ。

**性質（C）** $\hat{F}(a)=\hat{G}(a)$ となるための必要十分条件は，$\mu_f=\mu_g$ となることである。ただし，$\mu_f$ と $\mu_g$ はそれぞれ $f(x)$ および $g(x)$ の平均値を表わす。

性質（A）と（B）の成立はこれらの関数の定義そのものから当然至極であろう。また性質（C）の成立に関しても，図1や図2における下段の図を比較対照することより明らかであろう。念のため，性質（C）の数字的証明をしておけば次のとおりである。まず，部分積分法および性質（B）を用いれば，われわれは次式を得る。

$$\hat{F}(a)=\int_0^a F(t)\,dt=[tF(t)]_0^a-\int_0^a tf(t)\,dt$$
$$=a-\mu_f \qquad (5)$$

同様にして $\hat{G}(a)=a-\mu_g$ も導出できる。これより

$$\hat{F}(a)\gtreqless\hat{G}(a) \iff \mu_f\lesseqgtr\mu_g \qquad \text{（複号同順）}$$

なる同値式が得られるが，この式の1部分として，性質（C）が成立することは当然である。

ところで，ある一定の確率関数が与えられれば，当該個人の期待効用はそれにもとづいて計算することができる。実際，$f(x)$ および $F(x)$ をそれぞれ当該の確率密度関数および累積分布関数とすれば，その期待効用は

$$\underset{f}{E}[U(x)]=\int_0^a U(x)f(x)\,dx=\int_0^a U(x)\,dF(x)$$

として与えられる。問題となるのは，確率関数間における優位・劣位の順序づけが，期待効用の大小関係として反映されるかどうかということである。その

さい当然に生じる推測は次のようになろう。「確率優位の関数および確率劣位の関数を用いて，当該個人の期待効用の大きさを計算したとする。そのとき，確率優位の関数の下での期待効用の方が，確率劣位の関数の下でのそれより大きいのではなかろうか」。かかる推測の妥当性を確めるため，式(1)，(2)によって表現される２つの確率密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ を再び取り上げてみよう。この場合には，密度関数 $f(x)$ の下での期待効用および密度関数 $g(x)$ の下での期待効用は，それぞれ次のように書ける。

$$\underset{f}{E}[U(x)]=\tfrac{1}{2}U(\mu_f-\sigma_f)+\tfrac{1}{2}U(\mu_f+\sigma_f) \tag{6}$$

$$\underset{g}{E}[U(x)]=\tfrac{1}{2}U(\mu_g-\sigma_g)+\tfrac{1}{2}U(\mu_g+\sigma_g) \tag{7}$$

図３において，左の(a)図は $\mu_g>\mu_f$ でかつ $\sigma_g=\sigma_f=\sigma$ の場合を図示する。この場合，線分 $OE_f$ の大きさおよび線分 $OE_g$ の大きさがそれぞれ式(6)および(7)に対応するから，次の不等関係が成立している。

$$\underset{g}{E}[U(x)]=\overline{OE}_g>\overline{OE}_f=\underset{f}{E}[U(x)] \tag{8}$$

他方，右の(b)図は $\mu_g=\mu_f=\mu$ でかつ $\sigma_g<\sigma_f$ の場合を図示するが，この場合にあっても，式(8)は依然として成立している。しかも，図１から明らかなように，もし $\mu_g\geq\mu_f$ でかつ $\sigma_g\leq\sigma_f$ であれば，密度関数 $g(x)$ は密度関数 $f(x)$ より確率優位にある。このような事実にもとづいて，上述のように，われわれは次のごとき予想を立てることができるのである。「いま２つの密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，$g(x)$ が $f(x)$ より確率優位にあると仮定せよ。そうすれば，どのような正常な危険回避者をとっても，$g(x)$ の下での期待効用は $f(x)$ の下での期待効用を上まわるのではなかろうか。さらにまた，これと逆の命題も成立するのではなかろうか。」かかる予想の正しさは次のごとき命題の形において確認されるのである。

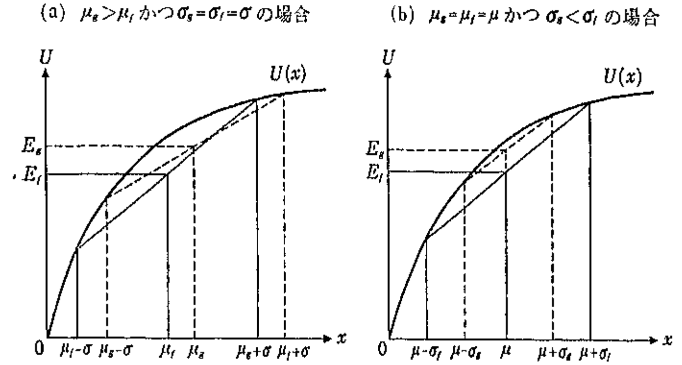


図 3 確率優位と期待効用

**命題 1.** 任意の2つの確率密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，$g(x)$ が $f(x)$ より確率優位にあるための必要十分条件は，すべての正常な危険回避者にとって，(期待効用のタームで) $g(x)$ の方が $f(x)$ より好まれるということである。すなわち，次の同値関係が成り立つ。

すべての $x$ $(0\leq x\leq a)$ に対して，$\hat{G}(x)\leq\hat{F}(x)$

$\Longleftrightarrow$ あらゆる非減少凹関数 $U(x)$ に対して，

$$\underset{g}{E}[U(x)]\geq\underset{f}{E}[U(x)]$$

ここで注意を払うべきことは，限界効用がプラスかゼロの個人(つまり $U'(x)\geq 0$) を「正常な」normal 個人と考えているという点である。この命題の証明はやや長いので，本節の終りの所で行なうことにする。

**命題 2.** 任意の2つの確率密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，$g(x)$ が $f(x)$ より確率優位にあると想定せよ。そのとき，次のことが成り立つ。

(i) $\mu_g\geq\mu_f$。

(ii) もし $\mu_g=\mu_f$ ならば $\sigma_g^2\leq\sigma_f^2$。

もし密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが式(1)~(4)で表わされるような2パラメータ表示の関数形をとるならば，その場合には命題2の成立は全く自明の事柄であろう。したがって，かかる命題の核心は，その性質 (i) や (ii) が，2パラメータ表示の関数形にかぎらず，どのような（すなわちパラメータの数が2つ以上あるような）密度関数に対しても導出されうるという点なのである。

本節最後の「数学注」として，これらの命題1および2の証明を与えておこう[2]。まず命題1を証明するため，閉区間 $[0, a]$ 内のすべての $x$ について $\hat{G}(x) \leq \hat{F}(x)$ であると仮定せよ。そのとき，部分積分法を繰り返し用いることによって，われわれは次式を得る。

$$\begin{aligned}
\int_0^a U(t)(g(t)-f(t))dt &= [U(t)(G(t)-F(t))]_0^a \\
&\quad -\int_0^a U'(t)(G(t)-F(t))dt \\
&= -\int_0^a U'(t)(G(t)-F(t))dt \quad \text{（性質(A)の利用）} \\
&= -[U'(t)(\hat{G}(t)-\hat{F}(t))]_0^a \\
&\quad +\int_0^a U''(t)(\hat{G}(t)-\hat{F}(t))dt \\
&= -U'(a)(\hat{G}(a)-\hat{F}(a)) \\
&\quad +\int_0^a U''(t)(\hat{G}(t)-\hat{F}(t))dt \quad \text{（性質(B)の利用）}
\end{aligned}$$

したがって，単調非減少にして凹なるあらゆる効用関数 $U(x)$ に対して，

$$\int_0^a U(t)(g(t)-f(t))dt \geq 0, \quad \text{すなわち} \quad \underset{g}{E}[U(x)] \geq \underset{f}{E}[U(x)]$$

となる。

逆に，単調非減少にして凹なるすべての効用関数 $U$ に対して，

---

2) 命題1および2の証明はハダー＝ラッセル [4,5]，ロスチャイルド [13] などによってはじめて与えられた。

$$\int_0^a U(t)(g(t)-f(t))dt \geq 0$$

であると想定せよ。このとき，閉区間 $[0,a]$ 内の１点 $x$ を任意に拾い上げて固定する。そして，

$$h_x(t) = \mathrm{Min}\ (t-x, 0)$$

と定義すれば，この関数 $h_x(t)$ は単調非減少な凹関数であるから，仮定によって，次の不等式が成立するはずである。

$$\int_0^a h_x(t)(g(t)-f(t))dt \geq 0$$

ここで部分積分法の適用により，次式が導出できるだろう。

$$\begin{aligned}
\int_0^a h_x(t)(g(t)-f(t))dt &= \int_0^x h_x(t)(g(t)-f(t))dt \\
&\quad + \int_x^a h_x(t)(g(t)-f(t))dt \\
&= \int_0^x (t-x)(g(t)-f(t))dt \\
&\quad + \int_x^a (0)(g(t)-f(t))dt \\
&= \int_0^x (t-x)(g(t)-f(t))dt \\
&= [(t-x)(G(t)-F(t))]_{t=0}^{t=x} \\
&\quad - \int_0^x (G(t)-F(t))dt \\
&= -\int_0^x (G(t)-F(t))dt \quad [\text{性質 (A) の利用}]
\end{aligned}$$

それ故に，閉区間 $[0,a]$ 内のいかなる $x$ に対しても，

$$\int_0^x (G(t)-F(t))dt \leq 0, \quad \text{すなわち} \quad \hat{G}(x) \leq \hat{F}(x)$$

が成り立つ。

次に，命題2の証明を与える。もし閉区間 $[0, a]$ 内のいかなる $x$ に対しても，$\hat{G}(x) \leq \hat{F}(x)$ であるならば，特に $\hat{G}(a) \leq \hat{F}(a)$ が成立することはもちろんである。しかるに式(5)より，$\hat{G}(a) = a - \mu_g$ かつ $\hat{F}(a) = a - \mu_f$。これよりわれわれはまず $\mu_g \geq \mu_f$ を得る。次に，分散の定義そのものから，

$$\sigma_g{}^2 = \int_0^a (t-\mu_g)^2 g(t)\,dt = \int_0^a t^2 g(t)\,dt - (\mu_g)^2$$

$$\sigma_f{}^2 = \int_0^a t^2 f(t)\,dt - (\mu_f)^2$$

となることに注意する。それ故に，もし $\mu_g = \mu_f$ であれば，部分積分法の適用によって次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\sigma_g{}^2 - \sigma_f{}^2 &= \int_0^a t^2 (g(t) - f(t))\,dt \\
&= [t^2 (G(t) - F(t))]_0^a - 2\int_0^a t(G(t) - F(t))\,dt \\
&= -2\int_0^a t(G(t) - F(t))\,dt \qquad [\text{性質 (i) の利用}] \\
&= -2[t(\hat{G}(t) - \hat{F}(t))]_0^a + 2\int_0^a (\hat{G}(t) - \hat{F}(t))\,dt
\end{aligned}$$

ところで性質（B）によって $\hat{G}(0) = \hat{F}(0) = 0$，そして性質（C）によって $\mu_g = \mu_f$ は $\hat{G}(a) = \hat{F}(a)$ と同値なのである。したがって，仮定によって次式が導かれるのである。

$$\sigma_g{}^2 - \sigma_f{}^2 = 2\int_0^a (\hat{G}(t) - \hat{F}(t))\,dt \leq 0$$

## III. 確率関数のシフトと確率優位

変数 $x$ の確率関数 $f(x)$ または $F(x)$ がある特定方向にシフトするとき，前節で論じた関数間の順序づけはどのような対応的変化を示すであろうか。かかる問題を考察するさいわれわれがまず念頭に置くべきことは，このような関

数のシフトは確率変数 $x$ そのものを適当に変換したものに対応するという事実である。以下，平行シフト，伸縮シフト，線形シフトなど，簡単なシフトを順次取り上げ，その各々が確率優位・劣位の概念とどのように関係するのかを究明することにしたい。

a．平行シフト

確率関数 $f(x)$ または $F(x)$ が与えられた場合，その最も基本的なシフトは「平行シフト」 additive shift である[3]。かかる平行シフトとは，確率変数の変換 $x \longrightarrow y=x+\alpha$ に対応するシフトであって，$\alpha$ の値がプラスであれば曲線 $f(x)$ または $F(x)$ は右方へ平行移動し，また，それがマイナスであれば曲線 $f(x)$ または $F(x)$ は左方へ平行移動する。

例えば，所与の確率密度曲線 $f(x)$ および累積分布曲線 $F(x)$ が図4(a)，(b)のごとくであるとする。いま変数の変換 $x \longrightarrow y=x+\alpha$ を行うとき，新しい確率密度曲線 $g(y)=g(x+\alpha)$ および新しい累積分布曲線 $G(y)=G(x+\alpha)$ はどのように作図されるべきなのだろうか。(c)図がこのような質問に答を与える。すなわち，第1象限に所与の累積分布曲線 $F(x)$，第2象限に45度線，そして第4象限に $y$ 切片が $\alpha$ で $x$ 軸への勾配がちょうど1に等しい直線 $y=x+\alpha$ を描くならば（$\alpha>0$ と仮定），残りの第3象限に新しい累積分布曲線 $G(y)=f(x+\alpha)$ が求められるのである。次に，変数を $x$ に統一しつつ，この新しい分布曲線 $G$ を古い分布曲線 $F$ に重ね合わせれば(b)図が完成し，また，それに対応する新しい密度曲線 $g$ を古い密度曲線 $f$ に重ね合わせれば(a)図が完成する。

---

3) 術語 “additive shift” を直訳すれば「加法的シフト」となろうが，この訳語は耳ざわりがよくなく適切と思われない。そのためここでは，その意味するところを勘案し，思い切って「平行シフト」と意訳した。次に出てくる術語 “multiplicative shift” を「乗法的シフト」と直訳せず，むしろ「伸縮シフト」と意訳したのも同様な理由からである。

図から明らかなように，$f(x)$ の形状をそのままにして，平均値の差（$\mu_g-\mu_f$）の分だけ右方へ平行移動したものが $g(x)$ に外ならない。(b)図が教えるごとく，すべての $x$ に対して $G(x)\leq F(x)$ であるから，もちろん $\hat{G}(x)\leq\hat{F}(x)$ なる不等関係が成立する。このことは，$\alpha>0$ であれば，$g(x)$ は $f(x)$ より確率優位にあることを意味するものである。

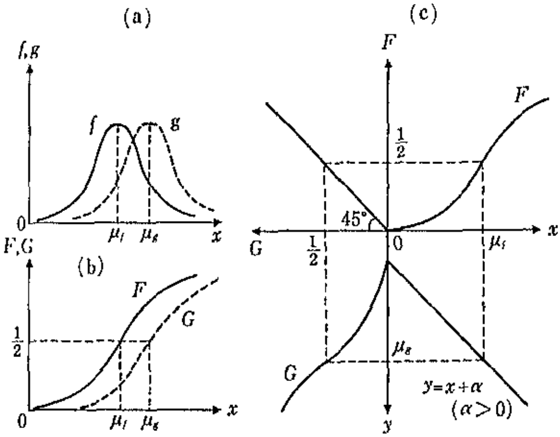


図 4　平行シフトと確率優位

b．伸縮シフト

平行シフトとともに多用されるもうひとつの単純なシフトは「伸縮シフト」multiplicative shift である。かかる伸縮シフトとは，確率変動の変換 $x\longrightarrow y=\beta x$ に対応するシフトであって，$\beta$ の値が1より大であれば分布曲線は原点を基点として右方へ伸長し，また，1より小であれば分布曲線は原点を基点として左方へ縮小する。

所与の確率密度曲線 $f(x)$ および累積分布曲線 $F(x)$ が図5(a)，(b)のようであると想定する。(c)図は，変数の変換 $x\longrightarrow y=\beta x$（$\beta>1$）を行なうときにで

きる新しい分布曲線 $G(y)$ が，元の分布曲線 $F(x)$ からいかに導出されるかを図示する。$G(y)$ の変数 $y$ を $x$ に書きあらためて，それを $F(x)$ に重ね合わせれば(b)図が出来上り，両者のそれぞれに対応する密度曲線間の関係を図示すれば(a)図のごとくになる。原点を固定したままで分布曲線 $F(x)$ を右方に引っ張れば，分布曲線 $G(x)$ が求められるということは(b)図から自明であろう。さらに同じ(b)図から確認できることは，すべての $x$ に対して累積分布曲線 $G(x)$ が $F(x)$ の下方に位置するから，第2次累積分布曲線 $\hat{G}(x), \hat{F}(x)$ を描けば，$\hat{G}(x)$ も必ず $\hat{F}(x)$ の下方に位置するということである。換言すれば，右方への伸縮シフトを実施すれば，シフト以後の関数はシフト以前の関数に対して確率優位に立つのである。

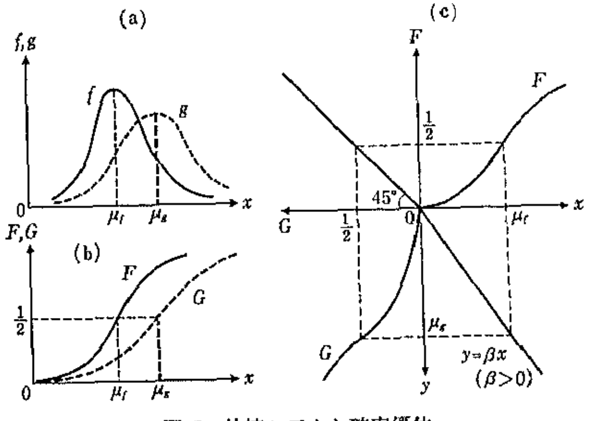


図 5　伸縮シフトと確率優位

c．線形シフト

上述の平行シフトと伸縮シフトを組み合わせたものが「線形シフト」 linear shift である。すなわち，線形シフトとは，確率変数の変換 $x \longrightarrow y=\alpha+\beta x$ に対応するシフトであって，ここで特に $\beta=1$ としたときにそれは平行シフトと

一致し，また，$\alpha=0$ のときに伸縮シフトと一致する。かような線形シフトと確率優位との関係をいくつかの場合に分けて考察しよう。

① もし $\alpha\geq 0$ でかつ $\beta\geq 1$ であれば，線形シフト以後の関数（曲線）はシフト以前の関数（曲線）よりも確率優位にある。

図6は，①の場合における線形シフトの効果を図示する。もし $\alpha\geq 0$ であれば，もとの曲線 $f(x)$ と $F(x)$ はまずそれぞれ $h(x)$ と $H(x)$ へと平行移動する（図4(a), (b)参照)。今の場合は $\beta\geq 1$ でもあるから，これらの曲線はそれぞれさらに $h(x)\longrightarrow g(x)$, $H(x)\longrightarrow G(x)$ へとシフトする（図5(a), (b)参照)。当面の線形シフトとはこれらの平行シフトと伸縮シフトとを合成したものに外ならないから，かかる線形シフトの結果，密度曲線は $f(x)$ から $g(x)$ へと，分布曲線は $F(x)$ から $G(x)$ へとシフトするわけである。分布曲線 $G(x)$ はつねに $F(x)$ の下方に位置するので，シフト以後の密度関数 $g(x)$ はシフト以前の密度関数 $f(x)$ よりも確率優位にある。

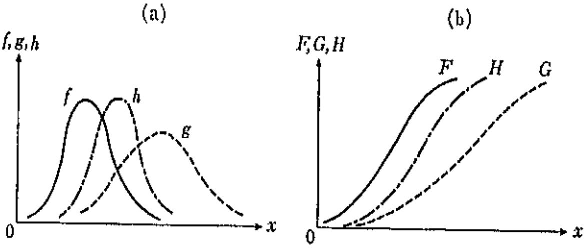


図 6　線形シフト——$\alpha\geq 0$ かつ $\beta\geq 1$ の場合

② もし $\alpha\geq 0$, $0<\beta\leq 1$ でかつ $\mu_g\geq\mu_f$ であれば，線形シフト以後の関数（曲線）はシフト以前の関数（曲線）より確率優位にある。

上に述べたごとく，一方において，確率変数の変換 $x \longrightarrow y=x+\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ を行なうと累積分布曲線は右方に平行シフトし，また他方において，変数変換 $x \longrightarrow y=\beta x$ $(0<\beta \leq 1)$ を行なうと累積分布曲線は逆に左方へと伸縮シフトする。したがって，これら両者の変換が合成されるときには，シフト以後の分布曲線 $G(x)$ とシフト以前の分布曲線 $F(x)$ との位置関係は，以前の①のケースに比べてやや複雑であって，事実，これらの両曲線はある1点で交叉せざるをえないのである。しかし，もし $G(x)$ の平均値の方が $F(x)$ の平均値を上まわる（すなわち $\mu_g \geq \mu_f$）という条件が付加されるならば――図7(b)に見られるように――かような交点は1/2と1との間に位置する（すなわち，この交点の $x$ 座標を $x^0$ と置けば $1/2 \leq F(x^0)=G(x^0)<1$ ということが成り立つ)。このことは，今一度累積オペレーターをとると，第2次累積分布曲線 $\hat{G}(x)$ は $\hat{F}(x)$ より必ず下方に位置することを意味する（(c)図を見よ。特に $\mu_g=\mu_f$ であれば $\hat{G}(a)=\hat{F}(a)$ となることに注意せよ)。それ故に，この②の場合にあっても，シフト以後の関数 $g(x)$ はシフト以前の関数に対して確率優位に立つのである。

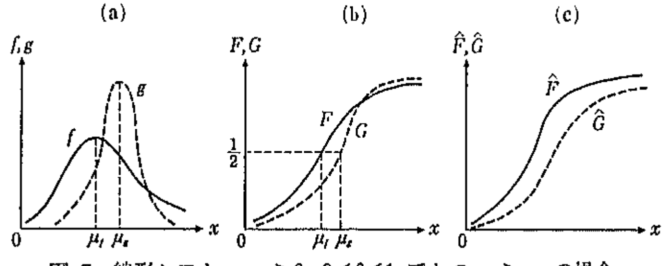


図7　線形シフト――$\alpha \geq 0$, $0<\beta<1$ でかつ $\mu_g \geq \mu_f$ の場合

以上の結果を命題の形にまとめておくと，次のようである。

**命題 3.** 任意の確率変数 $x$ に対して，それに線形変換を施した新しい確率変数 $y$ を $y=\alpha+\beta x$ として定義する。$x$ の密度関数を $f$, $y$ の密度関数を $g$ とするとき，次の条件のひとつが満たされれば $g$ は $f$ より確率優位にある。

(i) $\alpha\geq 0$ でかつ $\beta\geq 1$。

(ii) $\alpha\geq 0$, $0<\beta<1$ でかつ $\mu_g\geq\mu_f$。

以下，命題 3 の数学的証明を与えておこう。まず (i) の証明にあたって，定義そのものから，閉区間 $[0,a]$ 内のどんな $x$ に対しても $G(\alpha+\beta x)=F(x)$ となることに注意を払うべきである。もし $\alpha\geq 0$ でかつ $\beta\geq 1$ であれば，すべての $x$ に対して $\alpha+\beta x\geq x$ であるから次式が成り立つ。

$$F(x)=G(\alpha+\beta x)=\int_0^{\alpha+\beta x}g(t)\,dt\geq\int_0^x g(t)\,dt=G(x)$$

したがって，あらゆる $x$ に対して $\hat{G}(x)\leq\hat{F}(x)$ なる不等関係が成立する。

次に (ii) を証明するため，$\alpha\geq 0$, $0<\beta<1$ でかつ $\mu_g\geq\mu_f$ と仮定する。まず，$0\leq x\leq\alpha/(1-\beta)$ なるあらゆる $x$ に対して $\alpha+\beta x\geq x$ となるから，われわれは $F(x)=G(\alpha+\beta x)\geq G(x)$，したがって $\hat{F}(x)\geq\hat{G}(x)$ を得ることに注意する。次のステップとして，$\alpha/(1-\beta)\leq x\leq a$ なる任意の $x$ を取り上げて固定する。このとき，部分積分法を用いれば次式が導かれる。

$$\begin{aligned}0\leq\mu_g-\mu_f&=\int_0^a t(g(t)-f(t))\,dt\\&=[t(G(t)-F(t))]_0^a-\int_0^a(G(t)-F(t))\,dt\\&=\int_0^a(F(t)-G(t))\,dt\qquad(\text{性質 (A) の利用})\end{aligned}$$

ところが，$\alpha/(1-\beta)\leq x$ は $\alpha+\beta x\leq x$，したがって $F(x)=G(\alpha+\beta x)\leq G(x)$ を意味するから，われわれは次式を得る。

$$\int_0^a (F(t)-G(t))\,dt=\int_0^{\alpha/(1-\beta)} (F(t)-G(t))\,dt$$
$$+\int_{\alpha/(1-\beta)}^{x} (F(t)-G(t))\,dt+\int_x^a (F(t)-G(t))\,dt$$
$$\leq\int_0^x (F(t)-G(t))\,dt=\hat{F}(x)-\hat{G}(x)$$

これより $\alpha/(1-\beta)\leq x\leq a$ なる任意の $x$ に対して $\hat{G}(x)\leq\hat{F}(x)$ となる。かくして，閉区間 $[0,a]$ 内のいかなる $x$ に対しても $\hat{G}(x)\leq\hat{F}(x)$ という不等関係が成立することが証明できたのである。

## Ⅳ．平均保存的拡散

前節までの議論によって，任意の2つの確率関数（確率密度関数または累積分布関数）についてその間の順序づけをするさい，「確率優位・劣位」なる概念が非常に有効であることが十分明らかになったと思う。本節では，小論の主題に立ち戻って，順序づけの対象を平均値の等しい確率関数の族のみに限定する。このような対象の限定を通じて，ある確率関数の「危険度」が他の確率関数のそれよりも大きいとは一体何を意味するのか，ということがおのずから明らかとなるであろう。

平均値の等しい2つの確率密度関数 $f$ と $g$ が与えられたとき，$f$ の方が $g$ より危険度が大きいとは一体どういうことなのだろうか。一寸頭をひねってみれば，この問題に対して次のごとき3つのアプローチが採用可能であることが分かる[4]。

① $f(x)$ は $g(x)$ の「平均保存的拡散」mean-preserving spread である。すなわち $f(x)$ とは，$g(x)$ の平均値を保存しつつ，分布の比重を中央部分か

4) この点の詳細についてはロスチャイルド＝スティグリッツ [13, 14]，ダイヤモンド＝スティグリッツ [3] などを参照せよ。

ら周辺部分へと拡散させることによって得られた関数である。例えば，以前の図１(b)および図２(b)において，$f(x)$ は $g(x)$ の平均保存的拡散となっている。

② 期待効用理論においては，危険回避者とは下に凹な効用関数を持つ個人として定義される。もしすべての危険回避者にとって $f(x)$ の下での期待効用の方が $g(x)$ の下でのそれを下まわるならば，$f(x)$ の危険度が $g(x)$ のそれより大であると考えるのがごく自然である。すなわちこの場合には，あらゆる凹関数 $U(x)$ に対して $\underset{f}{E}[U(x)] \leq \underset{g}{E}[U(x)]$ なる不等関係が成り立っている。

③ 危険度または不確実性の程度を，平均値のまわりの第２次積率，すなわち「分散値」のみによって代表させる。換言すれば，$f(x)$ の分散値 $\sigma_f^2$ および $g(x)$ の分散値 $\sigma_g^2$ を計算し，もし $\sigma_f^2 \geq \sigma_g^2$ であれば $f(x)$ の危険度は $g(x)$ のそれより大きいと判断する。

われわれにとって興味をひく問題点は，これら３つのアプローチが相互間にどのような関係を取り結ぶだろうかという点である。以下，アプローチ①と②とは互いに同値であるけれども，アプローチ③は必ずしもこれら両者と一致しないということを明らかにしてみたいと思う。そのために先ず，確率優位・劣位の概念を援用して，危険度の大小に関し次のごとき定義を導入する。

**定義 2.** 確率変数 $x$ の値域を閉区間 $[0, a]$ とする。任意の２つの密度関数 $f(x)$ と $g(x)$（または分布関数 $F(x)$ と $G(x)$）が与えられたとき，次の２つの条件が満たされるならば，$f(x)$ の危険度は $g(x)$ のそれより大きい（または $F(x)$ の危険度は $G(x)$ のそれより大きい）と呼ぶ。

(i) $f(x)$ は $g(x)$ より確率劣位にある。すなわち，すべての $x$ に対して $\hat{F}(x) \geq \hat{G}(x)$。

(ii) $f(x)$ と $g(x)$ は同一の平均値を持つ。すなわち，$\hat{F}(a) = \hat{G}(a)$。

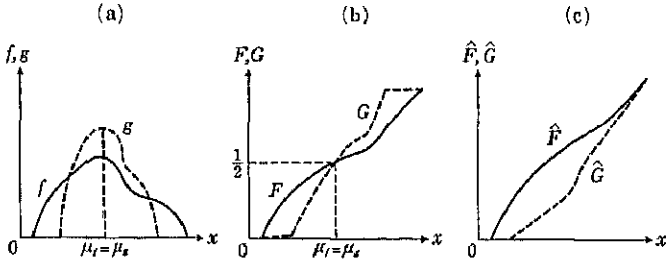


図 8　平均保存的拡散

この定義に言う2条件（i），（ii）を満たす密度関数の組 $f(x)$ と $g(x)$，累積分布関数の組 $F(x)$ と $G(x)$，および第2次累積分布関数の組 $\hat{F}(x)$ と $\hat{G}(x)$ のグラフを描くと，図8のごとくである。その中の(a)図から明白なように，$g(x)$ が与えられたとき，その中央部分から分布の比重の若干を取り去ってそれを周辺部分に加え，なおかつその平均値が変わらないようにすると，われわれは $f(x)$ を得る。かような意味において，$f(x)$ は $g(x)$ の平均保存的拡散なのであり，また $g(x)$ は $f(x)$ の平均保存的縮小なのである。

上述の2つのアプローチ①と②とが実は同値であること，すなわち，確率関数間の平均保存的拡散による順序づけと期待効用による順序づけとが同値であることは，次の命題から明らかであろう。

**命題 4.**　任意の2つの確率密度関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，$f(x)$ が $g(x)$ より危険度が大であるための必要十分条件は，すべての危険回避者にとって——期待効用のタームで——$f(x)$ より $g(x)$ を好むということである。換言すれば，すべての凹なる効用関数 $U(x)$ に対して，$\underset{f}{E}[U(x)] \leq \underset{g}{E}[U(x)]$ なる不等関係が成立するということであ。

命題6.1と比較すれば，命題6.4の意義は一層明らかとなるだろう。定義2に立ち戻れば，関数$f$の危険度が関数$g$のそれより大きいと言えるためには，$f$が$g$より確率劣位にあるというだけでは不十分なのであって，両関数の平均値が一致するという条件がそれに付加されねばならない。危険度の大小比較のさい要求される，かような「条件の強さ」は，上の同値命題4にも反映されている。なぜならば，$f$ の危険度が $g$ のそれより大きくなるための必要十分条件として，期待効用のタームで $f$ より $g$ を好むという選好関係が，単に（限界効用が常にプラスであるという意味で）「正常な」危険回避者の各々に対して成立するのみならず，（限界効用が時にはマイナスとなるという人々を含めて）「すべての」危険回避者に対して成立することが要請されているからである。

命題4の数学的証明を試みれば次のようである。まず第1に，必要条件の方を証明するため，閉区間 $[0,a]$ 内のすべての $x$ に対して $\hat{G}(x)\leq\hat{F}(x)$ でかつ $\hat{G}(a)=\hat{F}(a)$ であると仮定せよ。そうすれば，以前の命題1の証明のときと同様にして，部分積分法を繰り返し適用すれば，われわれは次式を得る。

$$\begin{aligned}\int_0^a U(t)(g(t)-f(t))\,dt &= -U'(a)(\hat{G}(a)-\hat{F}(a))\\ &\quad +\int_0^a U''(t)(\hat{G}(t)-\hat{F}(t))\,dt\\ &=\int_0^a U''(t)(\hat{G}(t)-\hat{F}(t))\,dt\end{aligned}$$

これより，

$$\underset{g}{E}[U(x)]-\underset{f}{E}[U(x)]=\int_0^a U(t)(g(t)-f(t))\,dt\geq 0$$

が導出される。

次に，十分条件の方を証明するため，上とは逆に，すべての凹関数 $U(x)$に対して，

$$\underset{g}{E}[U(x)]-\underset{f}{E}[U(x)]=\int_0^a U(t)(g(t)-f(t))dt \geq 0$$

であると想定せよ。いま特に $U_1(x)=x$ および $U_2(x)=-x$ とおくと，これらの関数 $U_1(x)$ と $U_2(x)$ はいずれも凹関数である。したがって，仮定より次式が成立するはずである。

$$\int_0^a t(g(t)-f(t))dt \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \int_0^a (-t)(g(t)-f(t))dt \geq 0$$

これより部分積分法を適用し，上と同様な手続きを踏めば次式が得られる（ここで $U(x)=x$ のケースを考えると，$U'(x)=1$ かつ $U''(x)=0$ となることに注意せよ）。

$$\begin{aligned} 0=\int_0^a t(g(t)-f(t))dt &= -(1)(\hat{G}(a)-\hat{F}(a)) \\ &\quad +\int_0^a (0)(\hat{G}(t)-\hat{F}(t))dt \\ &= -(\hat{G}(a)-\hat{F}(a)) \end{aligned}$$

これより $\hat{G}(a)=\hat{F}(a)$，したがって $\mu_g=\mu_f$ を得る。さらに，定理1の十分条件の証明の場合のごとく，新しい凹関数

$$h_x(t)=\mathrm{Min}\ (t-x,\ 0)$$

を導入すれば，以前と全く同様にして，閉区間 $[0,a]$ 内のすべての $x$ に対して $\hat{G}(x) \leq \hat{F}(x)$ なる不等関係が成立することが示せる。以上のようにして，命題4が成立することが証明された。

命題4から理解できるように，任意の2つの確率密度関数 $f$ と $g$ について $f$ の危険度の方が $g$ のそれを上まわるということの定義を，$f$ が $g$ の平均保存的拡散であるという事実にもとづいて行なうことには，十分の理論的根拠がある。なぜならば，どんな危険回避者をとっても，その人は危険度の大きい $f$ を回避して，危険度の小さい $g$ をむしろ選好するという帰結がそこから導出

されうるからである。ところで，ある特定の経済モデルの均衡解の性質を検討しようとするとき，われわれは次のような比較静学上の問題にしばしば遭遇する。

「ある確率変数の危険度ないし不確実性の程度が何らかの事情のために変化するとき，他の事情にして等しければ，それはモデルの均衡値に対してどのような影響を及ぼすのであろうか。」

かかる問題に対して解答を与えるためには，ある確率変数 $x$ の危険度の増大ということを，あるパラメータの値の増大ということに翻訳しておくと非常に好都合である。そのため，$x$ の平均値を $\mu$ として，次のような1次変換を考える。

$$y=\mu+\gamma(x-\mu) \qquad (\gamma\geq 1) \tag{9}$$

新しい確率変数 $y$ の平均値はやはり $\mu$ であるから，これは平均値保存の1次変換に外ならない。問題は，パラメータ $\gamma$ の初期値を1として，それの増大は一体何を意味するだろうかということである。結論を先取りして言えば，かかる $\gamma$ の値の増大が $x$ の密度関数の平均保存的拡散，すなわち危険度の増大を表現するのである。図9(d)を見よ。第1象限にはもとの確率変数 $x$ の累積分布曲線 $F(x)$ が描かれている。第4象限にある2つの直線は，$x$ の1次変換直線 $y=\mu+\gamma(x-\mu)$ および $z=\mu+\gamma'(x-\mu)$ を示す（ただし $\gamma'>\gamma\geq 1$）。第2象限の直線はこれまでと同様に45度線にすぎないから，残りの第3象限に導出されるべき2つの曲線とは，明らかに $y$ の累積分布曲線 $G(y)$ および $z$ の累積分布曲線 $H(z)$ なのである。これら3つの累積分布曲線 $F, G, H$ の変数を $x$ ひとつに統一して重ね合わせ，そしてそれらに対応する確率密度曲線相互間および第2次累積分布曲線相互間の関係を図示すると，(a)~(c)図のごとくになる。図から容易に確認できることは，次の一連の関係式がそこに成立しているということである。

$$\hat{F}(x) \leq \hat{G}(x) \leq \hat{H}(x)$$
$$\hat{F}(a) = \hat{G}(a) = \hat{H}(a) \tag{10}$$

したがって，$h$ は $g$ の平均保存的拡散であり，また $g$ は $f$ の平均保存的拡散である。以上の結果は，具体的な経済モデルについて比較静学的分析するさいよく用いられるので，これを命題の形にまとめておこう。

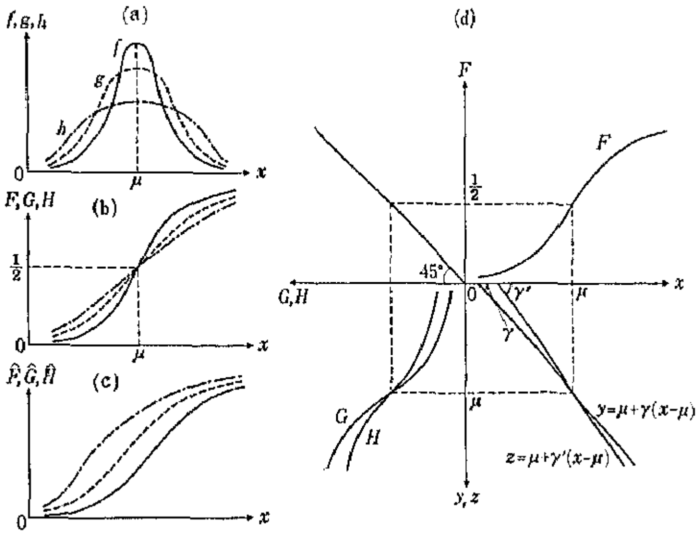


図 9　平均値保存の1次変換と危険度の変化

**命題 5.**　いま $x$ をある確率変数として，その値域を閉区間 $[0, a]$，その平均値を $\mu \equiv E[x]$，かつその確率密度関数を $f$ とする。この $x$ の平均値保存の1次変換として

$$y = \mu + \gamma(x - \mu), \qquad z = \mu + \gamma'(x - \mu)$$

を考え（$\gamma' > \gamma \geq 1$），かく新しく定義された確率変数 $y$ および $z$ の確率密度関数を $g$ および $h$ とする。このとき，$h$ は $g$ の平均保存的拡散であり，そして $g$ は $f$ の平均保存的拡散である。

## V．平均＝分散アプローチについて

平均値の等しい諸々の確率関数の間に順序をいかに入れるかという観点に立てば，平均保存的拡散による順序づけと期待効用による順序づけとが全く一致することは上に見た。この共通の順序づけを「危険度による順序づけ」と呼ぶ。ところで，伝統的にもっと一般に使用されている順序づけとして，平均値のまわりの２次モーメント，つまり分散値にもとづく順序づけがある。すなわち，平均値の等しい任意の２つの確率関数についてその分散値を計算し，分散値の大きい確率関数の方がそうでない確率関数より危険度が大きいとみなす考え方がこれである[5]。本節の目的は，危険度による順序づけと分散による順序づけとが一体どういう関係にあるのか，また両者が一般に異なるとして，それがどのように異なるのかを吟味することである。

いま $f$ と $g$ を平均値の等しい２つの確率密度関数とする。$f$ の危険度が $g$ のそれより大きい（厳密に言えば，小さくない）ということを $f \lesssim_R g$ と書く。このとき，命題４の助けを借りれば，次のごとき同値関係が樹立される。

$$
\begin{aligned}
f \lesssim_R g \underset{\text{def.}}{\equiv}\ & \text{すべての } x \text{ に対して，} \hat{F}(x) \geq \hat{G}(x) \\
\Longleftrightarrow\ & \text{すべての凹関数 } U(x) \text{ に対して，} \\
& \underset{f}{E}[U(x)] \leq \underset{g}{E}[U(x)]
\end{aligned}
$$

これに反して，$f$ の分散値が $g$ のそれより大きい（厳密に言えば，小さくない）ということを $f \lesssim_V g$ と書く。すなわち，$f$ と $g$ の分散値をそれぞれ $\sigma_f^2$, $\sigma_g^2$ と表わすことにすると，

$$
f \lesssim_V g \underset{\text{def.}}{\equiv} \sigma_f^2 \geq \sigma_g^2
$$

---

5) 平的＝分散アプローチは，伝統的に言って，資産選択理論において多用されているアプローチである。この点についてはトービン［16］やマーコヴィッツ［8］を参照せよ。

という風に確率関数間に順序を入れることにする。

問題は，これら2つの順序 $\lesssim_R$ と $\lesssim_V$ との間の関係がどうなるかということである。まず第1に注目すべき点は，分散による順序 $\lesssim_V$ は必ず完全順序であるけれども，危険度による順序 $\lesssim_R$ は部分順序であるにすぎないということである。例えば，当該の密度関数 $f$ と $g$ が図10(a)のごとくであるとせよ。そのとき，それぞれの分散値を計算し比較すると，$\sigma_f^2 \geq \sigma_g^2$ と $\sigma_g^2 \geq \sigma_f^2$ の中の少なくともひとつの不等式は成立するはずである。換言すれば，$f \lesssim_R g$ または $g \lesssim_R f$ という選好関係が成り立つ。ところが，第2次累積分布曲線を図示する(c)図から明らかなように，$\hat{F}(x_1) < \hat{G}(x_1)$ かつ $\hat{G}(x_2) < \hat{G}(x_2)$ を成立させるような $x_1$ および $x_2$ がともに存在するから，$f \lesssim_R g$ でもないし，また $g \lesssim_R f$ でもないのである[6]。

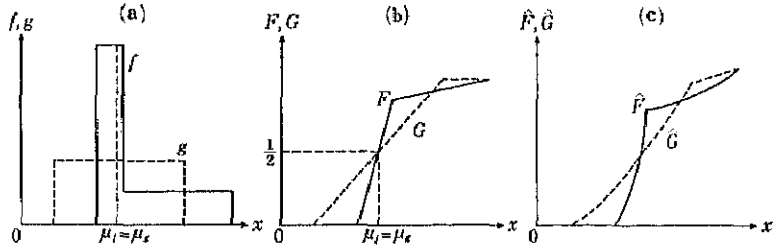


図 10　分散値と危険度

6)　危険度による順序 $\leq_R$ が次のごとき性質を持つことは容易に分かる。

①すべての確率密度関数 $f$ について，$f \leq_R f$ である（反射性）。

②もし $f \leq_R g$ でかつ $g \leq_R f$ であれば，$f = g$ である（反対称性）。

③もし $f \leq_R g$ でかつ $g \leq_R h$ であれば，$f \leq_R h$ である（推移性）。

分散による順序 $\leq_V$ についても，上記の3つの性質が成り立つのは当然であるが，この場合にはそれに加えて，次のごとき第4の性質も成り立つわけである。

④すべての2つの確率密度関数 $f$ と $g$ について，$f \leq_V g$ であるか，あるいは $g \leq_V f$ である（連結性）。

ここで性質④はその特別の場合として性質①を含意するけれども，その逆は必ずしも成り立たないという点に注意を払うべきである。

次に特筆すべき点は，第１の点と大いに関連するけれども，危険による順序 $\leqq_R$ は，一般に，分散による順序 $\leqq_V$ より「細かい」finer 順序を与えるという事実である。実際，任意の２つの密度関数 $f$ と $g$ について，

$$f \leqq_R g \Rightarrow f \leqq_V g$$

なる関係が成立するということは命題２の性質 (ii) より直ちに理解できるだろう。しかしながら，これと逆の関係は必ずしも成立しないのである。というのは，$f$ と $g$ が図10のごとくであれば，$f \leqq_V g$（すなわち $\sigma_f^2 \geqq \sigma_g^2$）は $f \leqq_R g$ を決して意味しないからである。このことは再び命題４を援用すれば，$\underset{f}{E}[U(x)] > \underset{g}{E}[U(x)]$ なる凹関数 $U(x)$ が存在することを意味するから，分散値の増大にもかかわらず，期待効用水準の増加する危険回避者が存在するという風変りな事態が発生するわけである。

このようなわけで分散による伝統的順序づけは，一般に，危険度による順序づけと異なるものである。しかし，このことは伝統的順序づけが全く無意味であるということを決して意味しないであろう。なぜならば，まず第１の理由として，当該の確率関数が階段関数形や正規関数形のような２パラメータ表示の関数である場合には（式(1)および(2)を見よ），分散値の増大そのものが平均保存的拡散と完全に一致してしまうからである。さらに第２の理由として，関数形がもっと複雑になって，パラメータ数が２個以上存在する場合においても，よほど「たちの悪い」関数形を取り扱わないかぎり，分散値が分布のばらつき状態を測る最も有効な分析用具であるという事実は否定できない。したがって，かかる一般的な場合にあっても，分散による順序づけは，おおむね，関数間の危険度の大小を示すものとしてひとつの非常に有力な「近似値」を与えると理解すべきなのである[7]。

7) 平均＝分散アプローチの有効性と限界を理解するためには，アロー [1]，チャーン [17]，ポーター [11]，ポーター＝ゴームニッツ [12] などの文献が有益である。

## 参 考 文 献

[1] Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland, 1970.

[2] Diamond, P. A. and Rothschild, M. (eds.), *Uncertainty in Economics*, Academic Press, 1978.

[3] Diamond, P. A. and Stiglitz, J. E., "Increases in Risk and in Risk Aversion," *Journal of Economic Theory*, 8, 1974, 337–360.

[4] Hadar, J. and Russell, W. R., "Rules for Ordering Uncertain Prospects," *American Economic Review*, 59, 1969, 25–34.

[5] Hadar, J. and Russell, W. R., "Stochastic Dominance and Diversification," *Journal of Economic Theory*, 3, 1971, 288–305.

[6] Hadar, J. and Russell, W. R., "Stochastic Dominance in Choice under Uncertainty," *in* Balch, M. S., McFadden, D. L. and and Wu, S. Y. (eds.), *Essays in Economic Behavior under Uncertainty*, North-Holland, 1974.

[7] Huang, C. C., Kira, D. and Vertinsky, I., "Stochastic Dominance Rules for Multi-attribute Utility Functions," *Review of Economic Studies*, 45, 1978, 611–615.

[8] Markowitz, H. M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, John Wiley & Sons, 1959. (鈴木雪夫監訳『ポートフォリオ選択論——効率的な分散投資法』東洋経済新報社, 1969.)

[9] Meyer, J., "Increasing Risk," *Journal of Economic Theory*, 11, 1975, 119–132.

[10] Meyer, J., "Choice among Distributions," *Journal of Economic Theory*, 14, 1977, 326–336.

[11] Porter, R. B., "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean-Variance Portfolio Choice Criteria," *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 8, 1973, 587–608.

[12] Porter, R. B. and Gaumnitz, J. E., "Stochastic Dominance *vs* Mean-Variance Portfolio Analysis," *American Economic Review*, 62, 1972, 438–446.

[13] Rothschild, M. and Stiglitz, J. E., "Increasing Risk: I. A Definition," *Journal of Economic Theory*, 2, 1970, 225–243.

[14] Rothschild, M. and Stiglitz, J. E., "Increasing Risk II: Its Economic Con-

sequences," *Journal of Economic Theory*, 3, 1971, 66–84.

[15] 酒井泰弘『不確実性の経済学』有斐閣, 1982.

[16] Tobin, J., "Liquidity Preference as Behavior towards Risk," *Review of Economic Studies*, 25, 1958, 65–86.

[17] Tsiang, S. C., "The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preferences, and Demand for Money," *American Economic Review*, 62, 1972, 354–371.