＜解　説　3＞

公共施設の立地に関するＯＲ的接近

谷　村　秀　彦*

1. はじめに

人口の都市化が進行し，教育・医療・保安・社会福祉・廃棄物処理などの都市的行政サービスに対する要請がこれに伴って高度化してくる中で，公共施設の立地問題に対する研究が近年増加している。これらの都市的行政サービスは一般に地方自治体の責任とされているが，その財政資源には限度があり，かつての様に住民の要望に応じて水準を次々と向上させることは不可能になってきている。また，これらのサービスは一般に公共事業として行われることが多く，民間事業のような採算性の認識が少なく，十分な合理化努力がされていないのも事実である。しかし，一方でこれらのサービスの多くは極めて労働集約型であることもあって，その経費は増加して財政を圧迫している。このような背景の中で公共施設の立地問題に対する関心が世界的に高まって来ているのである。

そこで，ここではこれらの都市的行政サービスの拠点となる公共施設の立地問題をとり上げて，この分野における研究の現状について解説することとしたい。もちろん，公共施設に対する研究は立地問題に限られる訳ではなく，経済学・財政学の立場からマクロ的に公共投資のあり方を対象とする研究や，社会学的にこれらのサービスに対する住民の意識や行動を対象とする研究，建築学の立場から施設の使われ方を対象とする研究など様々な分野で研究が行われている。しかし，ここでは，公共施設を与えられた人口分布に対していかに対応させて配置すれば良いかという方法論的側面に限定してとり上げる。

2. 施設立地問題の枠組

ここでいう施設立地問題は一般に次のような枠組で展開される。

与件として：

① 施設に対する需要を生み出す人口の分布（一般に連続分布として解析するのは困難であるので点負荷として考えることが多い）

② 人口分布に対応する需要の大きさ（ここでは，需要はサービスの価格そのものではなく，擬似的な価格である施設までの移動費用・施設におけるサービスの水準などによって変動するものとして理解される）

③ 需要を発生する点から施設までの移動費用（一般化された費用であって，時間距離，地理的距離などを代用として用いる場合もある）

* 社会工学系

決定事項として：

① 心要な施設数

② その位置

③ その規模

言い換えれば，施設立地問題とは，移動費用の定義されている距離空間において，需要の位置と大きさが与えられた時に，心要な施設の数・位置・規模を決定する問題である。このような問題を解くには，判断基準となる目的関数と制約条件が明らかになっていなければならない。そこで，これからの解説はどのような目的関数と制約条件に対しては，どのような解法が用意されているか，また，どのような目的関数を用いるべきかといった点が焦点になることになる。

施設立地問題は，このように比較的単純な枠組を持っているのであるが，その解法は以下に述べるように意外な程複雑で困難なことが多い。これは理論的にそうであるばかりでなく，数値計算においても同様であり，比較的簡単な問題に対しても電算機の手を借りなければ解が求められないことが多いのである。このために，施設立地問題はＯＲ研究者の学術的な「パズル」として扱われて，実際面に応用されることは稀であった。しかし，近年の電算機の普及によりこの面での障害は取払われつつあり，現実問題へ応用される機会は増加するものと思われる。

施設立地問題の解法は，第１に住民が施設をどう選択するかという施設選択行動，第２に施設立地可能点が連続的な面であるか，不連続な有限の点の集合であるかという立地可能点の空間特性によって分類される。

第１の施設選択行動については，ＯＲの分野では住民は最も近い施設を択一的に選択すると仮定するのが一般的であるが，近年地理学の分野で発展した「空間相互作用モデル」（Spatial Interaction Model）を用いて住民の施設選択行動を確率的に記述することにより現実に近いモデルが開発されている。

立地可能点が面であるか有限の点の集合であるかは，都市計画的に考えれば重要な考慮点ではない。というのは，現実においては施設立地は自然地形や既存の土地利用に制約されるからである。しかし，数学的な取扱いにおいては，微分可能な面空間と不連続な有限な点の集合は全く異なり，前者が微分的な最適化問題であるのに対し，後者は組合せ計画法的なアプローチをする必要がある。

そこで以下では，施設立地問題を①択一選択で連続空間の場合，②択一選択で非連続空間の場合，③空間相互作用モデルによる確率的選択の場合に分類して解説する。なお，人口分布は有限の点の集合に対する点負荷として（すなわち有限のベクトル量として）与えられているものとする。

3. 択一選択で連続空間の場合

それでは，住民は最も近い施設を択一的に選択し，施設の立地可能点が連続な面として与えられている場合をまずとり上げよう。

２次元空間に需要の発生するmコの点があり，i番目の点の需要をo_iとし，その座標を(x_i, y_i)とする。また，施設点はnコあり，j番目の施設の規模をd_jとし，その座標を(u_j, v_j)とする。

このクラスの問題としては，ウェーバー問題，ロールズ問題，およびその複合問題である。

a）ウェーバー問題（Weber problem）

立地問題のパイオニアであるウェーバー（1909）が定式化したことで，ウェーバー問題として知られている。今，施設の数が1つであり，距離費用がユークリッド距離で求められるとすれば，施設への総移動費用Φは，

$$\Phi=\sum_i o_i\sqrt{(x_i-u)^2+(y_i-v)^2}$$

で与えられる。ウェーバー問題とは，Φが最小になるように（u, v）を決定する問題である。Φを最小にするためには，Φをu, vで偏微分してそれぞれを0とおき，連立方程式を解けば良いのであるが，この連立方程式の解は解析的には求められず，漸近的方法で反復計算しなければならない。すなわち，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\sum_i o_i\frac{(x_i-u)}{\sqrt{(x_i-u)^2+(y_i-v)^2}}=0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\sum_i o_i\frac{(y_i-v)}{\sqrt{(x_i-u)^2+(y_i-v)^2}}=0$$

は陽には解けない。しかし，計算により

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}>0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\right)^2>0,$$

であり，Φはグローバルに凸であるので，最小値が唯一つあることは保障される。

これを解くには次の反復解法がある。

①初期値として重心（$u^{(0)}$, $v^{(0)}$）を求める。

$$u^{(0)}=\sum_i o_i\,x_i/\sum_i o_i$$

$$v^{(0)}=\sum_i o_i\,y_i/\sum_i o_i$$

②第k回目の近似点を（$u^{(k)}$, $v^{(k)}$）とするとき，次の式を用いてo_iを修正して$o_i^{(k)}$とする。

$$o_i^{(k)}=o_i/\sqrt{(x_i-u^{(k)})^2+(y_i-v^{(k)})^2}$$

③近似点を修正する。

$$u^{(k+1)}=\sum_i o_i^{(k)}x_i/\sum_i o_i^{(k)}$$

$$v^{(k+1)}=\sum_i o_i^{(k)}y_i/\sum_i o_i^{(k)}$$

④（$u^{(k)}$, $v^{(k)}$）と（$u^{(k+1)}$, $v^{(k+1)}$）が同一とみなせるまで②，③を反復する。

このアルゴリズムは，Weiszfeld（1936）に依るが，その後 Miehle（1958），Kuhn and Kuenne

(1962), Cooper (1963) により独立に再発見されている。この反復解法の収束はかなり速いが，点の数がわずかであっても電算機を用いないで計算をするのは困難である。

ウェーバー問題の変化形としては，距離メトリックにユークリッド距離でなく，いわゆるマンハッタン距離

$$d = |x_i - u| + |y_i - v|$$

を用いたり，l_p 距離

$$d = (|x_i - u|^p + |y_i - v|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqq 1)$$

を用いて一般化することが可能である。

求める施設点が複数である問題は，一般化ウェーバー問題，または立地・配分問題として知られている。複数点のウェーバー問題を解くには，需要点を分割する全ての組合せについて前述の方法でウェーバー点を算出し，その中から最小値を選ぶのが最も確かな方法である。反復解法をクーパー (1967) は提案しているが，最適解に達することは保障されていない。空間の分割に際しては，ある施設の属する需要点の凸包 (Convex hull) は互いに重ならない性質を用いると組合せの数を減少することができる。

b) ロールズ問題 (Rawls problem)

ウェーバー問題は移動費用の総和を最小にすることを目的としており，その分布は問題にしていない。従ってウェーバー問題では，人口の多い中心的な立地が優利になり，周辺部の人口の少ない所は不利になる傾向がある。そこでロールズ問題においては，最も施設から遠い人の移動距離を最小にするというミニマックス問題を目的とする。

需要点の重み o_iが一様であるときには，このミニマックス問題の解は需要点を全て含む最小の円の中心である。これを求める効率の良いアルゴリズムとしては，Elzinga and Hearn (1972) の方法がある。また，重みが一様でない場合には，Drezner and Wesolowsky (1980) のアルゴリズムが効率が良いとされている。

ロールズ問題についても，距離メトリックとしてマンハッタン距離や l_p 距離を用いて一般化することが可能である。また，複数点のミニマックス点を求める問題に拡張することもできる。

ゴミ処理場などについては，ミニマックス基準でなく，最も近い人の移動距離を最大にするマクシミン基準を用いるのが適切である。これについても Dasarathy and White (1980) などの研究がある。

c) ウェーバー・ローズ問題

ウェーバー問題は効率性，ロールズ問題は平等性を目標としている。そこで，この２つの目的関数にある重みづけをして，ひとつのパレート最適解を求めることができる。計画する施設が１つの場合には，どちらの目的関数も凸であるので反復解法で最適点を求めることができる。〔Hansen, Peter and Thisse (1981)〕

4. 択一選択で不連続空間の場合

次に住民は最も近い施設を択一的に選択し，施設の立地可能点が有限な点の集合として与えられている場合を次にとり上げよう。この場合，立地可能点をグラフのノードと考え，ノード間の移動距離はグラフのブランチの重み，需要はグラフのノードの重みとすることによってグラフ理論を応用することができる。

グラフ上のノードの間の最小距離s_{ij}はあらかじめ与えられているとするか，ブランチの重み行列h_{ij}から最小径路問題によって算出しておくものとする。

a）メディアン問題・マルチメディアン問題

連続空間における1施設のウェーバー問題に対応するものが，メディアン問題である。今，i番目の点の需要をo_i，i番目の点とj番目の点の間の移動距離をs_{ij}，i番目の点の需要がj番目の点の施設で充足されたときに1，そうでなければ0であるような変数をx_{ij}とする。このとき，重みつきの移動距離の総和Φは次のようになる。

$$\Phi=\sum_i\sum_j o_i\,s_{ij}\,x_{ij}$$

この問題については，Hakimi（1965）がそのようなメディアンの少くともひとつは，グラフのノード上にあることを明らかにしていて，ハキミの定理として知られている。従って，メディアンを1つ見つけるには重みつきの距離行列$o_i\,s_{ij}$を求めておき，その列和が最小になるようなノードを見つければ良い。

複数のメディアンを見つける問題は，マルチメディアン問題，またはP－メディアン問題と呼ばれている。これは，整数形の線形計画問題であり，次のように定式化できる。

最小化　$\sum_i\sum_j o_i\,s_{ij}\,x_{ij}$

制約　$\sum_j x_{ij}=1 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$

$$x_{jj}\geqq x_{ij} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\quad i\neq j$$

$$\sum_i x_{ii}=n$$

$$x_{ij}=1\ \text{or}\ 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

ただし，施設数をnとする。

Revelle and Swain（1970）は最後の整数条件を$x_{ij}\geqq 0$として一般の線形計画として解けば，特殊な場合を除いて整数解が得られることを示した。またこの線形計画は特殊な形をしているので，双対性を用いてより効率の良いアルゴリズムが提案されている〔Erlenkotter（1978)。〕

マルチメディアン問題の反復解法としては次のような方法がある〔Larson and Ocloni (1981)〕。

① 重みつき距離行列から列和の最小値をとってメディアンを求める。

② 他の全てのノードの中から目的関数が最小となる点を1つ選び，新しいメディアンの候補とする。

③ これ迄に選ばれたメディアンの候補点を1つずつ入れ替え，もし目的関数が向上すれば②に戻る。向上しなければ，④にすすむ。

④ メディアンの数が定められた数であれば終了。さもなければ②に戻る。

マルチメディアン問題の変化形としては，施設の規模に上限，下限を設定すること，あるいは施設の建設単価を与えて総建設費用に上限を設定することなど色々の制約を加えることが可能である。また，投資の現在価値評価の考え方を用いて，施設建設の時系列上の順番を求める問題なども研究されている。

b）センター問題・マルチセンター問題

メディアン問題がウェーバー問題に対応しているように，センター問題はロールズ問題に対応している。すなわち，センターは，最も遠くになる人の移動距離が最小になるようなミニマックスを与える点である。メディアンと違って，センターはノードの上に必ずしも存在するとは限らないので全てのブランチとノードについて検討してみなければならない。両端のノードを含む全てのブランチのひとつひとつについて，ミニマックス点を求めその中で最小の値となる点を選べば，それが求めるセンターである。この時，センターから最も遠くにあるノードまでの距離をグラフの半径と言う。

メディアン問題に対するマルチメディアン問題と同じ様に，センター問題に対するマルチセンター問題を考えることができる。マルチセンター問題には，Minieka (1970) の解法がある。

ブランチ上でミニマックス点を求めるには，フィボナチ探索法や黄金分割探索法のような1次元探索法を用いると効率が良くなる。

マルチセンター問題に類似した問題として，センターの数を与件とせずにミニマックス値を条件として与えてこれを満足する最小の施設数とその位置を求める問題がある。例えば，小学校までの徒歩距離に許容最大値があるとすればこれを条件として学校の数と位置を求める場合などである。これと逆に，迷惑施設のときに許容最小値を，マクシミン値に与える問題も考えることができる。このような種類の問題は，カバリング (covering) 問題と呼ばれている〔Toregas et al (1971)〕。

ウェーバー問題とロールズ問題とを合わせて，パレート最適解を求めた様に，メディアン問題とセンター問題とを合わせてパレート最適解を求めることもできる。

5. 空間相互作用モデルによる施設選択の場合

今までは，住民は最も近い施設を択一的に選択するとしてきたが，多くの施設においてこの前提は必ずしも正しくない。例えば，医療施設や商業施設などでは，近くの施設を選ぶという傾向はあるがかなりの相互乗入れがあり，圏域の境界線をはっきり引くことは難しい。このような場合の施

設選択行動を記述するモデルが，空間相互作用モデルである。

a）空間相互作用モデル

空間相互作用モデルは，重力の法則のアナロジーから導かれたけれども，現在ではランダム効用理論〔Williams(1976)〕，エントロピー最大化〔Wilson(1970)〕，判別情報量最小化〔谷村(1983)〕，費用効率性〔Smith(1978)〕などの様々な方法で同一のモデルが導けることが明らかになっている。

ここでは判別情報量を用いる方法を簡単に紹介する。Kullback(1959)によれば事前分布$\{q_k\}$と事後分布$\{p_k\}$を判別するための最小判別情報量Iは次の通りである。

$$I=\sum_k p_k \ln\frac{p_k}{q_k} \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

ただし，分布は離散的であるとする。この考え方を用いて，住民が総移動距離を制約としてこの最小判別情報量Iを最小にするように行動するものとすると空間相互作用モデルを導くことができる。

i番目の需要点で発生し，j番目の施設で充足された需要の量をt_{ij}と表し，これを相互作用と呼ぶ。i番目の需要点の需要の総量をo_i，j番目の施設で充足された需要の総量をd_j，i番目の需要点からj番目の施設に移動するための費用をc_{ij}，総移動費用をcとする。

相互作用マトリックス$\{t_{ij}\}$の行和がo_i，列和がd_jであるから，分割表の考え方によればこのマトリックスの$(i,\ j)$要素の事前分布としては$o_i d_j$に比例するある量をとるのが自然であろう。定数としてe（自然対数の根）をとり，事前分布として$eo_i d_j$とおくと，最小判別情報量Iは次の通りとなる。

$$I=\sum_i\sum_j t_{ij}\ln\frac{t_{ij}}{eo_i d_j}$$

制約としては，総移動費用が一定であること，行和がo_iであること，列和がd_jであることであるから，

$$\sum_i\sum_j c_{ij}t_{ij}=c$$

$$\sum_j t_{ij}=o_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$\sum_i t_{ij}=d_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

ラグランジュの未定乗数を，β，λ_i，μ_jとすると，ラグランジュ形式は次の通りである。

$$L=\sum_i\sum_j t_{ij}\left(\ln\frac{t_{ij}}{o_i d_j}-1\right)+\beta\left(\sum_i\sum_j c_{ij}t_{ij}-c\right)+\sum_i\lambda_i\left(\sum_j t_{ij}-o_i\right)+\sum_j\mu_j\left(\sum_i t_i-d_j\right)$$

一階の条件から，

$$\ln\frac{t_{ij}}{o_i d_j}=-\beta c_{ij}-\lambda_i-\mu_j$$

が得られ，

$$t_{ij}=o_i d_j \ \exp(-\beta c_{ij}-\lambda_i-\mu_j)$$

が導かれる。ここで，

$$a_i=\exp(-\lambda_i),\ b_j=\exp(-\mu_j)$$

とおくと

$$t_{ij}=a_i o_i b_j d_j \exp(-\beta c_{ij})$$

という空間相互作用モデルの一般形が求められる。

このモデルのパラメーター $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, β は次のようにして $\{o_i\}$, $\{d_j\}$, c から算出することができる。

① β に任意の初期値 $\beta^{(0)}$ を与える。

② $\{a_i\}$ に初期値 $\{a_i^{(0)}\}$ を与える。

③ $b_j^{(k+1)}=1/\Sigma\, a_i^{(k)} o_i \exp(-\beta^{(n)} c_{ij})$ を計算する。

④ $a_i^{(k+1)}=1/\sum_j b_j^{(k)} d_j \exp(-\beta^{(n)} c_{ij})$ を計算する。

⑤ $a_i^{(k+1)}\approx a_i^{(k)}$, $b_j^{(k+1)}\approx b_j^{(k)}$ になるまで③，④を反復する。一致すれば，⑥へすすむ。

⑥ $f(\beta)=\sum_i\sum_j a_i o_i b_j d_j \exp(-\beta c_{ij})\, c_{ij}-c=0$ を，ニュートン・ラフソン法で数値的に解く。

(a) $f'(\beta)^{(n)}=-\sum_i\sum_j a_i o_i b_j d_j c_{ij}^2 \exp(-\beta^{(n)} c_{ij})$ を計算する。

(b) $\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\dfrac{f(\beta^{(n)})}{f'(\beta^{(n)})}$ を計算する。

(c) $\beta^{(n)}\approx\beta^{(n+1)}$ になるまで(a)，(b)を反復する。

⑦ ステップ②に戻り，β が収束するまで反復する。

この手順で観察された総移動費用 c を与えるようなパラメーターを算出することができる。

これまで述べてきた空間相互作用モデルは $\sum_j t_{ij}=o_i$, $\sum_i t_{ij}=d_j$ という2つの制約を入れているので始終点制約型と呼ばれている。前者の制約のみを含むものを始点制約型，後者の制約のみを含むものを終点制約型，両方の制約の無い場合を無制約型とそれぞれ呼び，始終点制約型と併せて空間

相互作用モデルの４つのタイプと言っている〔Wilson (1971)〕。

このようにしてパラメーターを決めた空間相互作用モデルは現実の住民による施設選択行動をかなり正しく表現している。例えば，茨城県内の入院患者の病院選択行動に対して適用した結果，相関係数は0.976であった〔谷村(1981)〕。

b）目的関数の設定

さて，空間相互作用モデルで住民の施設選択行動が表現されると，次の問題は何を目的関数とするかである。近年，交通経済学の分野で研究されている目的関数として消費者余剰の最大化がある〔Agnello (1977〕。

マーシャル流の消費者余剰Sは，価格がp_1からp_2に変化した時，次の線積分で与えられる。

$$S = -\int_{p_2}^{p_1} d_p D(p)$$

ただし，pは価格，Dは需要である。空間相互作用モデルにおける相互作用t_{ij}を需要，移動費用c_{ij}を価格とみて，この考え方を適用するのである。相互作用マトリックスの要素の数だけ，異なる財があるとすれば，複数財の価格変動に対する消費余剰を算出すればよい。

Williams (1976)は，このような考え方にたって，消費者余剰の最大化は結局，次の効用を最大化することになることを明らかにした。

$$U = -\frac{1}{\beta} I - c$$

ただし，Iは前述した最小判別情報量である。この式の第１項は集中のメリットを表し，第２項は集中による移動費用であり，集中のデメリットを表していると解釈できる。パラメーター$1/\beta$はこの２つの目的関数の重みづけをしている。

上記の効用Uを最大化する問題は，非線形計画問題となり，空間相互作用モデルのどのタイプを適用するかによっていくつかの解法が提案されている〔谷村(1983)〕。特に，始点の制約が無い場合には，非線形の項が消えて線形計画問題として取扱うことができる〔谷村(1982)〕。

空間相互作用モデルを用いた立地計画モデルの研究については，Leonardi (1981)が参考になる。消費者余剰ではない目的関数を用いた例としては，谷村（1981)，Mayhew and Leorardi (1982)，Hodgson (1978)などがある。

6. おわりに

以上，施設立地問題に対するＯＲ的研究の現状について解説した。この分野の最近のレビューとしては，Hansen et al (1983)が恐らく唯一のものであり，この解説を書くに当って大変参考になった。文献リストもしっかりしている。しかし，空間相互作用モデルを用いたものについては，取扱いに不充分なところがある。これはレビューの欠点というよりは，現在の時点で次々と新しい研究の成果が発表されていることの証拠であるかもしれない。

施設立地問題への経済学的接近としては，前述のHarsen et al (1983)の掲載されている

Thisse and Zoller (1983) が挙げられる。このような書物が登場してくることは，施設立地問題が経済学・OR・施設計画にまたがる学際的研究領域として確立してきたことを示すものであろう。

参　考　文　献

谷村　秀彦：1981，″地域施設の最小移動距離配置計画″，日本建築学会論文報告集305，137－146.

谷村　秀彦：1982，″空間相互作用モデルの線形双対性と施設配置計画への応用″，日本建築学会論文報告集319，98－108.

谷村　秀彦：1983，″施設配置計画の便益指標と最適化の方法に関する理論的考察″ 地域施設計画（日本建築学会）1，15－20.

Agnello, Richard J., 1977, "Economic evaluation of highway system benefits", Transportation Research 11, 365–369.

Cooper, Leon, 1963, "Location-allocation problems", Operations Research 11, 331–343.

Cooper, Leon, 1967, "Solution of generalized locational equilibrium problems", Journal of Regional Science 7, 1–18.

Desarathy, B. and L.J. White, 1980, "A maximin location problem", Operations Research 23, 1385–1401.

Drezner, Z. and G.O. Wesolowsky, 1980, "Single-facility lp distance minimax location", SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 1, 315–321.

Elzinga, J. and D.W. Hearn, 1972, "Geometrical solutions for some minimax location problems", Transportation Science 6, 379–394.

Erlenkotter, D., 1978, "A dual-based procedure for uncapacitated facility location", Operations Research 26, 992–1009.

Hakimi, S.L., 1965, "Optimum distributions of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems", Operations Research 13, 462–475.

Hansen, P., D. Peeters and J.F. Thisse, 1981, "Constrained location and the Weber-Rawls problem", Annals of Discrete Mathematics 11, 147–164.

Hansen, P., D. Peeters and J.F. Thisse, 1983, "Public facility location models: A selective survey", Locational Analysis of Public Facilities (North-Holland, Amsterdam).

Hodgson, M.J., 1978, "Towards more realistic allocation in location-allocation models: An interaction approach", Environment and Planning A 10, 1273–1285.

Kuhn, H.W. and R.E. Kuenne, 1962, "An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized Weber problem in spatial economics", Journal of Regional Science 4, 21–33.

Kullback, S., 1959, Information Theory and Statistics (John Wiley, New York).

Larson, R.C. and A.R. Odoni, 1981, Urban Operations Research (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.).

Leonardi, G., 1981, "A unifying framework for public facility location problem", Environment and Planning A 13, 1001–1028, 1065–1108.

Mayhew, L.D. and G. Leonardi, 1982, "Equity, efficiency, and accessibility in urban and regional health-care systems", Environment and Planning A 14, 1479–1507.

Miehle, W. 1958, "Link length minimization in networks", Operations Research 6, 232–243.

Minieka, E., 1970, "The m-center problem", SIAM Review 12, 138–139.

Revelle, C. and R. Swain, 1970, "Central facilities location", Geographical Analysis 2, 30–42.

Smith, T., 1978, "A cost-efficiency principle of spatial interaction behavior", Regional Science and Urban Economics 8, 313–337.

Thisse, J.–F. and H.Z. Zoller ed., 1983, Locational Analysis of Public Facilities (North-Holland, Amsterdam).

Toregas, C., R. Swain, C. Revelle and L. Bergman, 1971, "The location of emergency service facilities", Operations Research 19, 1363–1373.

Weber, A., 1909, Ueber den Standort der Industrien, English translation, 1929, The theory of the location of industries (Chicago University Press, Chicago).

Weizsfeld, E., 1936, "Sur lè point pour lequel la somme des distances de n points donnes est minimum", Tohoku Mathematical Journal 43, 355–386.

Williams, H.C.W.L., 1976, "Travel demand models, duality relations and user benefit analysis", Journal of Regional Science 16, 147–166.

Williams, H.C.W.L., 1977, "On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit", Environment and Planning A9, 285–344.

Wilson, A.G., 1970, Entropy in Urban and Regional Modelling (Pion, London).

Wilson, A.G., 1971, "A family of spatial interaction models and associated development", Environment and Planning A 3, 1–32.