【85】

氏　名（本籍）	さおとめ　たか　なり 早乙女　飛　成（埼玉県）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	博甲第 4899 号
学位授与年月日	平成 21 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	**Differential Geometric Study of Strongly Pseudo-Convex Manifolds** （強擬凸多様体の微分幾何学的考察）

主　査	筑波大学教授	理学博士	伊藤光弘
副　査	筑波大学教授	理学博士	加藤久男
副　査	筑波大学教授	理学博士	坪井明人
副　査	筑波大学教授	理学博士	山口孝男

論文の内容の要旨

奇数次元強擬凸 CR 多様体は，偶数次元複素多様体の実超曲面や偶数次元複素多様体上の円周束，Riemann 多様体の単位接束などを幾何学的に抽象化した概念である。そのようなことから複素多様体や symplectic 多様体との共通点，類似点をもっている。類似ばかりでなく質的差異もある。通常，接触構造といわれる，各点における 1 次元接触方向場が存在し，そのことが，複素多様体などの研究に比して，局所座標系が使えないなど強擬凸 CR 多様体の幾何を解析する上での固有の困難性となっている。

著者は本論文において，以下に述べる 3 つのテーマについて強擬凸 CR 多様体の微分幾何学的考察を行った。一つは正則ベクトル束の（p,q）-cohomology 群に関するいわゆる Serre 双対性定理の非コンパクト版の証明，二つ目が Monge-Ampere 方程式の CR 版の連続法による解の存在と一意性定理の証明，三番目が強擬凸 CR 多様体間の J- 正則写像の定義と，写像の特異点除去可能性定理の導出である。これらの考察には，強擬凸 CR 多様体上の Dolbeault 作用素に関する調和形式論，CR 版 Monge-Ampere 方程式や CR 多様体間の写像の解析的扱い，さらには強擬凸 CR 多様体に適合した接続，すなわち Levi-Civita 接続とは異なる Tanaka-Webster 接続に熟知習得していることが不可欠である。論文の第 1，2，3 章はこれら強擬凸 CR 多様体の微分幾何学的基礎準備にページを割いている。

Cohomology 群の Serre 双対性定理は複素幾何学において基本的定理のひとつである。コンパクト強擬凸 CR 多様体における類似結果として自明ベクトル束の場合には N. Tanaka の結果がある。著者は修士論文で，非自明正則ベクトル束に対して Serre 双対性定理をコンパクト多様体の場合に示したが，本論文では第 4 章において，この定理を非コンパクトケースへと拡張した。正則ベクトル束値－微分形式に働く Dolbeault 作用素に関する Hodge-deRham L^2 分解定理を成立させるために Carnot-Caratheodory 距離完備性の議論を本質的に用いる。実際 E → M を 2n + 1 次元強擬凸 CR 多様体 M 上の正則ベクトル束とすると，E 値（p,q）-cohomology 群 H^{p,q}（M;E）と双対束 E^* についての E^* 値（n + 1 − p,n − q）-cohomology 群の同型を言明するのが Serre 双対性定理である。（p,q）-cohomology 群と調和形式のなすベクトル空間が同型であることを Carnot-Caratheodory 距離完備性を用いて導いている。

二番目のテーマは，CR 版 Monge-Ampere 方程式の連続法による解法であり，Calabi 予想の強擬凸 CR 多様体版定理の証明である。Kaehler 多様体（M, ω）において第一 Chern 類 c（M）を代表する任意の閉 2 形式が ωとコホモロガスな Kaehler 形式の Ricci 形式として表されるであろうというものである。著者はコンパクト Kaehler 複素多様体に対して有効であった Aubin-Yau による連続法を，局所座標系なしに微分形式をフルに駆使することによって強擬凸 CR 多様体においても有効であることを証明した。本論文第 5，6 章において著者によって得られた定理は，与えられたコンパクト強擬凸 CR 多様体（M, θ, J）に対して M 上の実可微分関数 f が接触方向不変ならば，新たな接触構造（M, θ', J'），$\theta' = \theta + d\hat{}u$ が存在して CR Monge-Ampere 方程式をみたすというものである。アプリオリ評価や楕円正則性などをフルに動員して証明を完成させている。

第 3 のテーマは，Gromov-Witten 不変量や量子 cohomology 論など最近脚光を浴びている symplectic 多様体の J－正則曲線論を強擬凸 CR 多様体の場合について考察したもので，symplectic J－正則曲線論の深い幾何学的考察から J－正則写像に対する CR 版特異点除去可能性定理を示すことができた。ここで，扱う写像 u：Σ → M の定義域を 3 次元強擬凸 CR 多様体Σとすることによって，理論展開が可能になったことを注意しておこう。さて，J－正則曲線のモジュライ空間のコンパクト化が symplectic 多様体に対しては，数学的に定式化されている。そこでの鍵になるものが，特異点除去可能性とモジュライ空間の有限次元性を保証する J－正則曲線がひきおこす無限小作用素の楕円性，Fredholm 性である。楕円性，Fredholm 性については本論文では扱われていないが，第 7 章において除去可能性について，写像の energy や写像の調和性などの道具を駆使して論を展開，証明を付している。除去可能性定理の証明に，写像による点の像の体積単調性命題（命題 7. 3. 3）が本質的である。著者は強擬凸 CR 多様体特有の現象として接触方向に沿った特異点に関して定理を導出している。

審 査 の 結 果 の 要 旨

Serre 双対性定理の非コンパクト版，CR Monge-Ampere 方程式の解の存在と一意性定理，J－正則写像の特異点除去可能性定理の 3 つのテーマのどれひとつをとっても，本論文から強擬凸 CR 構造特有のアイデアが読み取れ，同時に座標系フリーの理論展開が貫かれている。第二のテーマの結果は，既出の A.E. Kacimi-Alaoui による横断的 Calabi-Yau 定理の一部に収まってしまうことが判明して著者にとっては残念な結果となったが，手法やアイデアは強擬凸 CR 幾何学にとって今後強力な道具立てとなるであろう。著者は控えめに述べているが，定理は，強擬凸 CR 多様体上に Sasaki-Einstein 計量の存在を保証するものであり，著者の解析の力量を高く買いたい。同じことは第三のテーマについても言えることであり，著者による J－正則写像論は世界初のものであり，今後の理論的発展が大いに注目される。以上，著者が本論文で得た 3 つのテーマに関する微分幾何学的考察結果はすべて，専門誌に掲載済みまたは投稿中のものであり，オリジナルな結果である。内容的にも専門分野において他の追随を許さない世界的レベルにある。よって本論文は博士の学位のレベルに十分に達している。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。