

氏名(本籍)	とみ え まさ や 富江雅也(滋賀県)		
学位の種類	博士(理学)		
学位記番号	博甲第4900号		
学位授与年月日	平成21年3月25日		
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当		
審査研究科	数理解物質科学研究科		
学位論文題目	A generalization of Chebyshev polynomials and nonrooted posets (Chebyshev 多項式の一般化と rooted でない poset について)		
主査	筑波大学教授	理学博士	森田 純
副査	筑波大学教授	博士(理学)	青嶋 誠
副査	筑波大学教授	理学博士	木村 達雄
副査	筑波大学教授	理学博士	竹内 光弘

論文の内容の要旨

半順序集合というものは、数学のいたる所で現われ、しばしば重要な役割を果たし、その組合せ論的な構造を解明することが、本質的であることも多い。その構造を解明する上で、メビウス関数と呼ばれる重要な不変量があり、様々な設定で具体的にその形が決定されてきているが、まだまだ未解決の部分も少なくない。本論文では、メビウス関数についての「セーガン予想」を一般化した上に、それを完全に解いている。また、その研究の遠因となった、ループ群のシュアー乗法因子群の群表示を決定した研究成果についても詳しく述べられている。

ここに、局所有限半順序集合の上でのメビウス関数とは、

$$\mu([x,x]) = 1 \quad \text{かつ} \quad \sum_{x \leq y \leq z} \mu([x,y]) = \delta_{x,z}$$

により定義されるものである。

セーガン予想とは、文字の集合 $\{a, b, c\}$ に $a < c$ と $b < c$ という大小関係を設定し、その3文字から作られる単語全体に、誘導される部分単語順序により順序を導入し、半順序集合とみなしたものに対し、そのメビウス関数がチェビシエフ多項式の係数で書けるというものである。

それに対して本論文では、文字の集合を $\{a_1, a_2, \dots, a_s, c\}$ とし、そこに $a_1 < c$ という大小関係を設定し大幅に一般化して考察がなされている。そして、チェビシエフ多項式もパラメータ s に応じて、より一般的な漸化式により定め、メビウス関数が一般化されたチェビシエフ多項式の係数で記述できるということを示している。これは、セーガン予想を一般化して解決したことになる。

ここで、チェビシエフ多項式の一般化は

$$T_0^{(s)}(X) = 1, \quad T_1^{(s)}(X) = (s-1)X, \quad T_{k+2}^{(s)}(X) + T_k^{(s)}(X) = sXT_{k+1}^{(s)}(X)$$

で与えられる。

さらに、本論文では、ループ群と呼ばれている重要な群に対して、群論的に非常に大切な不変量であるシュアー乗法因子群の構造を、群表示の立場から完全に決定している。シュアー乗法因子群というものは、基本群に相当するホモロジー理論的には極めて重要なものである。カツツ・ムーディ群では決定されていたが、

ループ群の場合には未解決であった。それを、かなり複雑な計算をしながら解決した。証明では、代数的 K 理論などで用いられる関連する完全系列を用いて解明しており、幅広い数学構造に貢献できる成果を得ている。

審 査 の 結 果 の 要 旨

ループ群のシュアー乗法因子群の群表示を決定し未解決な代数構造を明らかにしたこと。セーガン予想を一般化し、それを定式化するために一般型チェビシェフ多項式を導入し、そしてそれを完全に解決していること。これらは非常に優れた研究成果であり、国際的にも高く評価されており、学術的な貢献が著しい研究業績である。

よって、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。