筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第37集　1998年３月

創造的な教材・指導法とカリキュラムの実践的な研究
中・高６カ年における数学的能力等の発達・変容の分析
（５年計画の１年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
井上　正允・熊倉　啓之・駒野　　誠
城野　正彦・鈴木　清夫・深瀬　幹雄
牧下　英世

創造的な教材・指導法とカリキュラムの実践的な研究
中・高6カ年における数学的能力等の発達・変容の分析
（5年計画の1年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
井上　正允・熊倉　啓之・駒野　誠
城野　正彦・鈴木　清夫・深瀬　幹雄
牧下　英世

1．はじめに

公立の中高一貫校の設置を盛り込んだ16期中教審の答申が出され，それに向けての法改正の準備も進められていると聞く。東京都立大学では中高一貫・高大連携を掲げた附属校の設置が検討されており，今後，各都道府県でも設置に向けて検討・準備がされて行くであろう。こうした背景には，現在の日本の中等教育がその接続の仕方を含めて必ずしもうまくいってはいないという認識がある。

大都市部を中心に私立の中高一貫校がますます拡がりつつある（東京都ではおよそ1／4の生徒が私立中学校に通う）が，その背景には東大・京大を筆頭とする有名大学の合格者が私立や国立の中高一貫校の出身者で占められているという事実がある。そこでは，カリキュラムが大学受験に有利に働くように作られている等，ある種の偏った「中高一貫校の優秀さ」が強調される。

受験にわずらわされずに試行錯誤を重ねながら「自分探し・自分つくり」にエネルギーを費やすことが人間として成長・自立していく過程では不可欠なもので，現在の中学校3年—高等学校3年に区切られた学校階梯が，子ども達の成長・発達，「学び」の発展・深化にとって必ずしもプラスには作用していないのではないかという判断がわたし達にはある。

ところが，これまで中高一貫のカリキュラム研究についてはほとんど取り組まれてはこなかった。本校も例外ではなく，大学受験を最優先化して学校の諸活動を組織してきてはいないが，これまでの研究が各教科毎の実践研究や教務部・研究部・生徒指導部といった分掌内のプロジェクト，あるいは個人の研究に閉じてしまっていた感は否めない。

本研究はこうした現状把握にもとづいて立ち上げた本校の「中高一貫校のカリキュラム構成に関するの基礎的研究」（3年計画1995.4～1998.3）に連動させながら，数学科プロジェクトとしてスタートしたものである。

中高の6カ年で，生徒の「数学観がどのように変容していくのか」「問題解決にあたっての個人的な思考や技能・方法などの広がり・深化はどうなっていくのか」などに焦点を当てて，1995年入学の本校49期生を対象に全体調査・個人標本調査の両面から調査分析を進めてきた。

今年は，調査問題C，Dの結果の分析と標本として選んだ生徒の数学観の変容（中学1年入学時と中学3年6月に書いた「数学と私」という作文をもとにした）についてのプロフィールを作成し，分析を試みた。

2．数学科が取り組んだ調査の内容

①作文調査（中1，中3，高2で行う）

「算数・数学と私」という題で，生徒個々がもっている数学に対するイメージ，数学への興味や関心，数学を学んで感じたこと，数学と日常生活の関わり，今までに読んだ数学の本で印象に残っているものなどについて，各自それぞれの数学観を自由に書かせた。中学1年の時点では全生徒を調査対象として作文を書かせたが，今後はさらに2年ごとに作文を書かせ，その中から特定の何人かを選び出してその生徒の数学観やものの考え方にどのような変化が見られるかを追跡調査し，その特徴を分析する。

②意識調査（中1，高1，高3で行う）

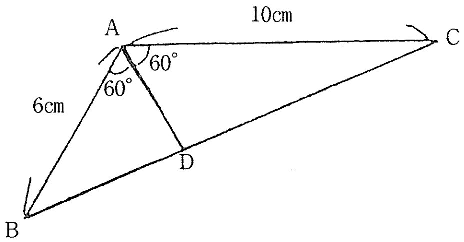
中学1年の終りに数学の好き嫌い，数学を学習する意味，数学がどのような点で役に立つと思うか，数学に対するイメージなどについてアンケート形式により調査した。これについても2年ごとに同様のアンケート調査を行い，数字がどのように変るかを調べる。どの項目で大きく数字の変化が見られるのか，どの項目で数字の変化があまりないのかに注目し，生徒の成長過程にともなう数学についての意識・数学観の変容を調査する予定である。

③解答調査

同じ問題を異なる学年で解答させ，その問題の解き方の変化を調査する。A～Dの4つの問題について中学の時と高校の時で解き方にどれだけの違いが見られるのかを全体と個人の両面から調査する予定である。次項にその内容と出題のねらい，調査の実施予定を記しておく。なお調査にあたっては，中学3年生と高校2年生で予備調査をし，本調査に臨んだ。

★解答調査の調査問題とそのねらい

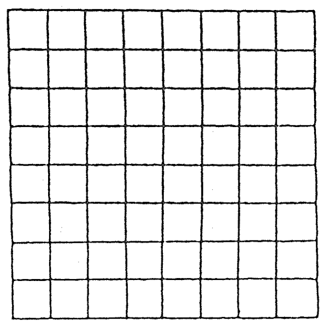
調査問題Ａ：下図のように，ＡＢ＝６cm，ＡＣ＝10cm，∠ＢＡＣ＝120° の△ＡＢＣで，∠Ａの２等分線とＢＣの交点をＤとする。ＡＤの長さを求めよ。
<u>また，別の求め方があればそれも答えよ。</u>



出題のねらい　この問題では相似の平行線と比，ピタゴラスの定理，60度・30度の直角三角形の三辺比，面積の利用，解析幾何（座標軸の設定），三角比，余弦定理などさまざまな解法が考えられる。生徒が今までに学んだ数学の知識や技能をどのように用いて解答しているか，中学と高校で解法の広がり・深化がどう違うかを調べる。
（中２，高１で行う）

調査問題：Ｂ（１）右の図の中に正方形は大小合せて全部で何個あるか。

（２）右の図を用いた「問題」を作り，その解答を書け。（１つでなく，できるだけたくさん作れ。）



出題のねらい　（２）の作問により，作る問題に中学と高校でいかなる違いがあるのかを調べる。生徒の発達段階によって生活経験，社会的関心，数学的知識などが当然異なるので，それらが作問の中にどう活かされているかを見たい。また，本問の（１）にどれだけ引きずられているかも注目される。（中２，高１で行う）

調査問題C：適当な正の整数を考える。各位の数の和を求め，それが2桁以上だったらさらに同じことを繰り返し，1桁になったら止める。

例　5678→5＋6＋7＋8＝26→2＋6＝8

1234→1＋2＋3＋4＝10→1＋0＝1

（1）もとの数と，求めた1桁の数にはどんな関係があるか。

また，それはなぜか。

（2）例にある2つの正の整数の1桁の数の和は，8＋1＝9

また，2つの正の整数の和について1桁の数を求めると，

5678＋1234＝6912→6＋9＋1＋2＝18→1＋8＝9

となり，1桁の数は一致する。このことはいつでも成り立つか。

また，和ではなく差や積ではどうか。

出題のねらい　類推や帰納的思考によって法則が発見できるか。また，それをいかに証明することができるかを調べる。とくに，中学と高校の証明についての理解の深化に注目している。（中3，高2で行う）

調査問題D：A，B，C，D，E，F，G，Hの8人が，自分自身を含む8人のことについて，それぞれつぎの様に言っている。

A：僕たちの中で少なくとも1人は正しいことを言っています。

B：僕たちの中で少なくとも2人は正しいことを言っています。

C：僕たちの中で少なくとも3人は正しいことを言っています。

D：僕たちの中で少なくとも4人は正しいことを言っています。

E：僕たちの中で少なくとも1人は間違ったことを言っています。

F：僕たちの中で少なくとも2人は間違ったことを言っています。

G：僕たちの中で少なくとも3人は間違ったことを言っています。

H：僕たちの中で少なくとも4人は間違ったことを言っています。

間違ったことを言っているのは誰か。（いない時はいないと答えよ。）

間違ったことを言っている人をどのように考えて求めたのかも答えよ。

出題のねらい　この問題も多様な解決法が考えられる。いかなる手順で答えを導き出すのか。さらにそれをどう記述するか。数学で学んだ知識や技能がいかに論理的思考に活かされるかを調べる。（中3，高2で行う）

３．今回の発表内容

昨年の研究会では，中学１年で実施した意識調査（アンケート集計結果）および中学２年で実施した解答調査（調査問題Ａ，Ｂについての解答分析と考察）の分析結果の発表を行った。

今回は，作文調査（同じ生徒の中学１年と中学３年での比較）の分析結果および中学３年（今年度）で実施した解答調査（調査問題Ｃ，Ｄについての解答分析とその考察）について報告する。

①作文調査

作文の内容から読み取ることができた数学に対する好感度，意欲，有用感に成績を付け加えて，その４つの観点から分析した。いずれの項目も４段階で評価し，そのプロフィールとして座標軸の上に四角形で表してみた。中学１年と中学３年を点線と実線で比較している。今回サンプルとして選んだ生徒は，学校全体で選び出した本プロジェクトの調査対象生徒（Ａ君～Ｉ君）と数学科が選んだ生徒（Ｊ，Ｋ君）の計10名である。

②解答調査

予備調査との比較，解答の傾向についての考察，代表的な解答例の紹介をして中学３年生段階における考え方，解き方をまとめてみた。

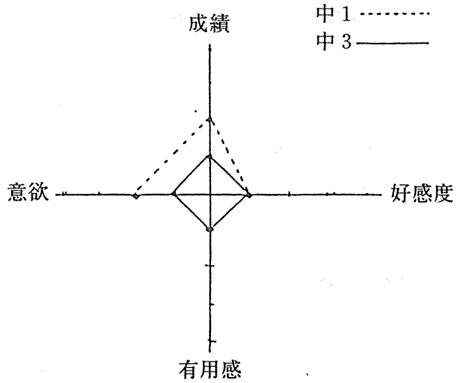
①. 作文調査

A君

中１：塾では算数の成績が一番悪かったという。他の教科ほどには勉強しなかったし，嫌いだったから。とくに応用力が無かったと自己分析する。しかし，運良く筑駒に合格できた。高校卒業時には数学が得意になれるように頑張りたい。

中３：数学が嫌いだ。テスト前にはほとんど強制的にやらされるが，期末が終わったら少しも覚えていない。それでも僕が数学を勉強するのは，入試に出るからだ。数学は役に立たない学問で，音楽や美術と同じ趣味の分野であり，強制的に学ばせるのは間違っている。実生活に奴だつのは算数まで。大学入試が終わるまでの我慢だ。

分析：「数学嫌い」の典型的な例。「だからといって，数学の存在は否定しないし，数学を好きだという人を批判するつもりはない」が，全ての人間が数学を学ぶ必要があるかどうかについては否定的である。

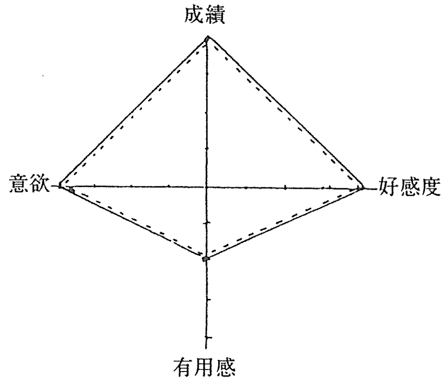


B君

中１：私立小出身。小さい頃から「算数」でなく「数学」に親しんできたという。算数オリンピックに出場したり，円周率の計算をパソコンで１万桁まで求めたり，独学で微積もかじったし，カオスとフラクタルにも興味を持つ。解けたときの気持ちの良さは何とも言えず，数学は私にとって気分転換のものであり，好きなものである。

中３：日本の「学校数学」は「発想力」を問うものではなく「機械的求解」になっており，解いたときの達成感，解く過程の華麗さといった「面白さ」とは無縁なものだ。だから，数学は大好きだが授業は嫌いだ。授業でやる内容は受験にしか役立たない。生活に必要なのは算数ぐらいなもの。「家計簿をつけるのに２次方程式を使う人がいますか」とのたまう。好きな分野は，フラクタル，円周率の計算，整数・組み合わせ論などで，わたしは「達成感」発想力」を求めて止まない数学オタクである。

分析：数学オタクである。数学の本をかなり読んでいるし，その問題解決にあたってコンピュータも自在に駆使する。発想力が大事だといい，解く過程の華麗さを求め，達成感に浸る。
学年内でも際だった存在。

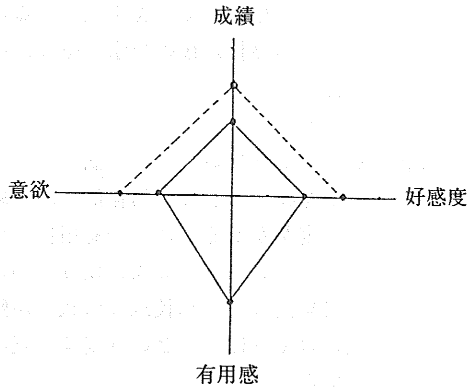


C君

中１：算数はおもしろくて，好きだった。
算数は表面的な計算や考えだが，数学は数や計算の実質的な所を考えていると思う。
数学が，僕に新たな感動や喜び，疑問を与えていく。数学はとても不思議で面白い。
数学を，不思議だと思う気持ちを持ち続けて，勉強していきたいと思う。

中３：数学が嫌いというわけではないが，苦手科目になってしまった。
数学は面白い。数学は考えて自分で解くことが主体である。数学は謎解きである。
数学は様々な学問に役立つ。
数学は複雑でよくわからないものを扱う。数学に力を入れて勉強しなければいけないとは思うが，それでもややずさんになっている。

分析：小学校では，算数が好きだったが，中１でも，算数との違いに多少の不安を感じながらも，数学に対してよい印象を抱いている。さらにいくつかの記述からも，数学に対するプラスのイメージが読み取れる。数学に学習に対しても，前向きな姿勢が見られる。
　一方，中３になって，数学に対する印象は，中１のときと変わらず，プラスのイメージを持ち続けている。また数学の有用性を認める記述もある。しかし一方では，数学の学習に不安を感じており，数学に対しての苦手意識が表れている。

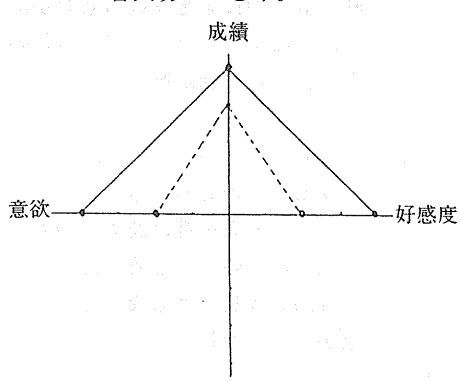


D君

中１：算数は簡単だったが，数学は難しい。代数はとてもややこしい。幾何はものすごい頭を使う。解けたときの喜びは格別である。
数学がわからなくなったら算数を思い出してみよう。数学を難しいと思わずに，解いていこうと思う。

中３：代数は，問題を解くのが機械的で，学習する喜びがなくなった。
幾何は考えることが多いので楽しくなった。テーマ学習は，２時間考えてもわからなかったりするが，班で話し合って答えを出せるので，感動はすることもある。
数学はやる気があるかないかで楽しさが違うと思う。数学はおしつけられるのが一番だめだと思う。数学は，考えて，発見して，感動することが一番大切だと思う。

分析：中１の段階では，数学に対して不安を抱いている。しかし，数学学習への前向きな姿勢も見られる。
　一方，中３になると，数学への不安は完全に消えたようである。成績がよく，数学に対して自信を持ったようだ。いくつかの記述からも，数学に対するプラスのイメージが読み取れる。一方いくつかの学習の取り組みについての記述から，精神的な成長の跡も感じられる。



E君

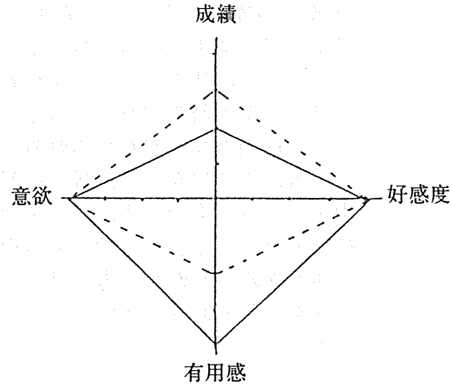
中１：算数はあまり得意でなかった。

規則性の勉強することを通じて算数がおもしろく感じるようになった。

それで難しい問題もあきらめないで解くようになった。難しい問題を解いた満足感からますます算数が好きになった。数学は算数より奥が深く，満足感も大きいと思っている。だから，満足感を得られる問題にさらに取り組みたい。

中３：小学校のころ算数は子供，数学は大人がやるイメージがあったが，方程式を学習して数学のイメージが変わった。0.3＝1/3を授業でよく分からなかったので，早く微分積分を勉強したい。昔は算数レベルで十分で数学は無駄であると思っていた。数学がなければほとんどのものが作れない。生産者には必須である。

むりやりやらせても将来役立てることができないから高校以後の数学はやりたい人のみすれば良い。



分析：算数・数学に対して解く満足感から良いイメージを持っており，積極的に取り組みたいという姿勢がある。数学の有用性についても認めてきているが，実際に使うための数学だけに目を向けて，高校以後の数学が勉強したい人だけやればよいという姿勢は気になるところである。

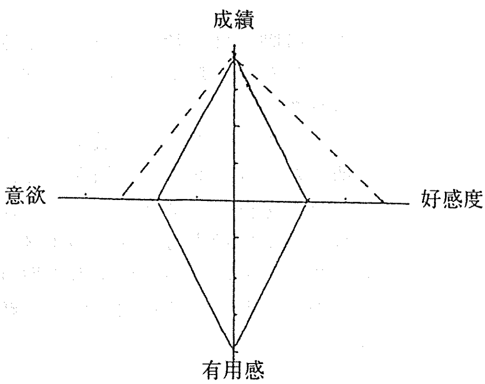
F君

中１：算数は図形を中心として好きだったが，時間に追われて解くのは嫌だ。

今，数学の本を読んでいるし授業も好きだが，努力不足。これから，毎日は無理と思うが，ぼちぼち努力して行きたい。

中３：数学の源は「数次を適当にいじくって遊んでいた」こと。自然科学は人類の至福のための手段であり，それを発見する手段が数学。数学を日常生活に関連づけることは難しいと思う。

将来理系に進む者はともかく，文学や演劇などに進む者にとって，退屈で理解し難い無意味な数学の授業を受ける必要があるのか。画一的でなく，我々にも自己責任の下で，授業を選択する権利が欲しい。



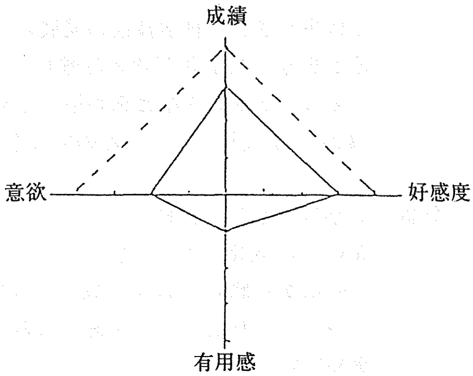
分析：中１時は好きであり，中１らしい素直さで，取り組みへの努力を考えていた。中３になると，数学の有用性は認めつつも，画一的である授業については意義を認めていない。

精神的な成長にともなって，数学に対する印象が大きく変化している。

H君

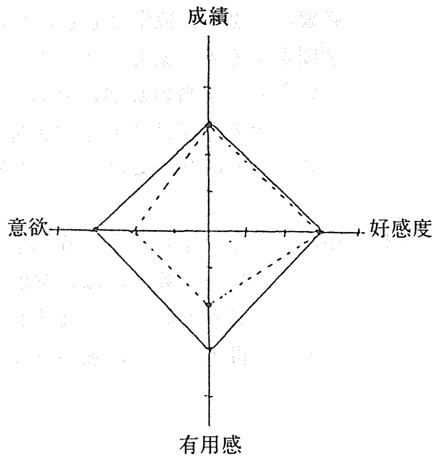
中１：数学が一番好きな教科。入試の勉強をしている時は，解くのが大変で苦労した。場合の数や規則性の問題は面倒で苦手，速さなどは方程式が使えるので簡単で楽。
中学で文字を使うようになり楽になった。数学が得意科目になるように努力したい。
中３：数学・理科は得意で，国語が駄目なので，将来は理系に進みそう。
数学は長い時間かけても解けた時の充実感がある。代数は計算が面倒なので，幾何の方が好き。
数学者，科学者にならない限り数学は不必要。しかし，大学入試があるので諦めて勉強する。

分析：数学への印象は悪くはないが，中１の「好き」・「努力する」から，中３の「諦めて勉強する」へ変化した。問題を楽に解くこと，解けたときの充実感のみに意義を感じており，学年が進むにしたがってそれが得にくくなったことが原因であろう。



Ｉ君
中１：僕の生活で一番身近な算数・数学は「計算」である。
そろばんを習ったが，そろばんは便利でおもしろく，楽しかった。
暗算を習い，頭と指だけ計算することがすごいと思った。暗算能力は残った。
買い物の合計金額や消費税まで暗算でき，自分には大切な能力である。これからもなくさないように使っていきたい。
中３：そろばんの影響で，数学というと「計算」をイメージすることが多い。
計算が得意だが，文章題などの複雑なものが苦手だった。
中学の授業を通して，答えにたどり着くまでにいろいろな方法があるという点で数学が好きだ。
自分の持っている知識を使って，解けた時の喜びは格別なものだ。

分析：中１までの経験では，算数・数学と「計算」とを同一視している。
それは，そろばんや暗算の影響が強い。特に，暗算に対するこだわりが強いことが記述からもわかる。生活経験からこの暗算能力に対するいやな面も伺われるが，暗算能力は役に立ち自分には大切なものであるという考えが備わっている。
　中３でも，数学を「計算」でイメージしている。しかし，算数が数学に変わり，計算すること中心から数学の事象をじっくりと考察することが中心になり，答えにたどり着くまでの途中をいかに考えるかという点に興味・関心が変容している。
　コンピュータが進歩し，「将来数学は役に立つのかどうか」と思い，数学よりもパソコンの技術を身につけた方が大切だとも考えているが，喜びを得られるように数学に努力したいとも考えている。

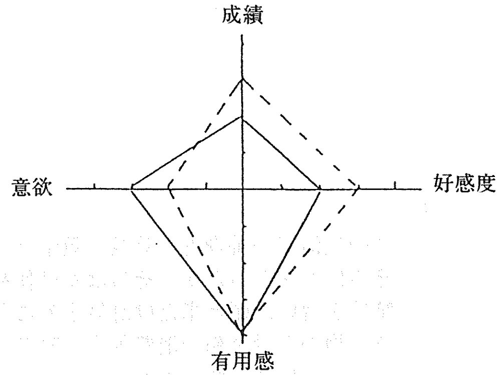


J君

中１：数学は，算数と異なり考える時間が多く楽しい教科である。しかし，直接役立つ事柄という実用的なものではなく，将来のためという感じ。数学をしっかりやっててよかったと思うように一生懸命努力したい。数学は，世の中の全ての基本，しかもこれから先のコンピュータ時代に重要になるのでしっかり学習すべきである。

中３：数学は好きな方ではない。理由は，実生活に直接役に立たないから。現在の生活の中で数学は生かされ，科学技術の発展のために不可欠である。数学には「楽しむ」という面もあると思う。数学者が考える難しい・遠い世界のものに対し，「身近な側面」があると思う。例えば，トランプなどを利用した数列，宝くじの当選確率など。身近なことを基本にして「数学」が成り立っているのではないかと思う。

分析：数学は「楽しい教科」から「好きな方ではない」に変化した。「考える楽しさ」を中１の頃から感じており，数学の有用性は認めつつも，身近でそれを感じられる数学を求めている。

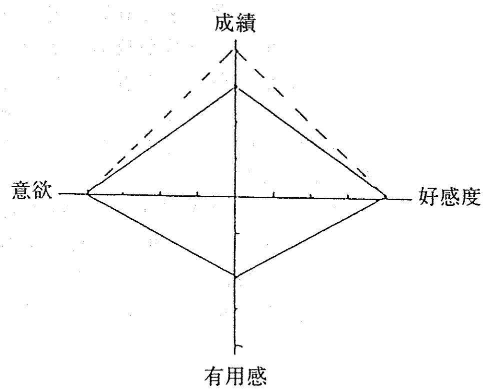


K君

中１：一番好きな科目である。算数の問題を美しく解く（問題と答をストレートに結ぶ）ことに生きがいを感じていた。算数も数学もあまり区別していない。区別しているのは「数楽」と「計算」。算数数学が大好きだが，計算は大の苦手。美しい解き方だと計算が減り正答率が上がる。美しい解き方の最大の理由は，達成感である。難しければ難しいほど達成感も高いし面白い。これからも精一杯数学を楽しみたい。

中３：数学は頭を使う学問であると思う。計算は，数学をするための手段に過ぎない。数学は習うものではなく創るものだと思う。初めから定理を覚えるのではなく自分で考えることが必要だと思う。数学は楽しいものだ。生きていく上でほとんど役に立たないのにこういう学問があるのは楽しいからだ。数学が嫌だという人は本当の数学にであっていないからだ。その責任はニセ数学を押しつけた教育者だ。大切なのは頭を使うことだ。

分析：中１の好き，楽しいという印象が中３でも変っていない。数学には日常的な有用性はないが，思考すること，又それを通して達成感を体得することに強い意義を感じている。



②解答調査

調査問題Cについて

調査実施時期：1997年６月

調査学年，数：中学３年（49期）　118名

問題

適当な正の整数を考える。各位の数の和を求め，それが２桁以上だったら，さらに同じことを繰り返し，１桁になったら止める。

例　5678→５＋６＋７＋８＝26→２＋６＝<u>８</u>

1234→１＋２＋３＋４＝10→１＋０＝<u>１</u>

（１）もとの数と，求めた１桁の数にはどんな関係があるか？

<u>またそれはなぜか？</u>

（２）例にある２つの正の整数の，１桁の数の和は８＋１＝<u>９</u>

また，２つの正の整数の和について，１桁の数を求めると

5678＋1234＝6912→６＋９＋１＋２＝18→１＋８＝<u>９</u>

となり，１桁の数は一致する。

このことはいつでも成り立つか？

また，和ではなく差や積ではどうか？

設問（１）の解答結果：不正解44％（52名），正解56％（66名）

［内訳］

不正解	①白紙	：16％（19名）
	②解なし	：26％（31名）
	③元の数が特別な場合の関係のみ	：２％（２名）
正解	④９で割った余り（説明なし）	：14％（16名）
	⑤９で割った余り（文章で少し説明）	：８％（９名）
	⑥９で割った余り（帰納的に類推）	：14％（16名）
	⑦９で割った余り（３，４桁で説明）	：12％（15名）
	⑧９で割った余り（ｎ桁で証明）	：８％（10名）

設問（２）の解答結果

設問（１）の解答結果	和		差		積	
	成　立	不成立	成　立	不成立	成　立	不成立
①（16％）	５％	０％	５％	１％	５％	０％
②（26％）	4	0	3	1	3	1
③（２％）	0	0	0	0	0	0
④（14％）	2	0	2	0	1	0
⑤（８％）	5	0	3	1	3	1
⑥（14％）	8	0	6	2	5	2
⑦（12％）	6	2	5	2	3	3
⑧（８％）	7	1	6	2	6	1
合計	37％	３％	30％	９％	26％	８％

[参考] 予備調査結果

調査実施時期：1996年４月末

調査学年，数：中学３年生　37名，高校２年生　61名

（注）高校生は希望者（21名）を含む。

解答時期は中高で異なる。

設問（１）の解答結果

	中学３年生	高校２年生
①不正解 （白紙）	62% (29%)	26% (13%)
②３で割った余り	８%	２%
③９で割った余り （具体的な桁で説明）	30% (16%)	72% (41%)

設問（２）の解答結果

１．上の表の①のうちの正解者は高校で１名。

２．上の表の②，③の中学38%，高校74%のうち，

差または積で不成立としたものが，それぞれ５%

解答なし（白紙）のものが，中学13%，高校８%

考察

１．予備調査と比較すると正解が多い。中学１年生の整数の性質の授業で，剰余の性質（合同式）について扱ったか否かが大きく影響したと考えられる。設問（１）の⑥の解答（資料参照）は，具体例から１桁の数が９ごとに循環することに気が付いたものであるが，このような解答が予備調査と比較して多いと思われる。また，④のような答のみの解答も予備調査では無かった。予備調査の解答を再分析したい。

２．設問（１）の⑥の解答者同様，②の解答者も多くはいろいろな数で具体的に調べている。具体例の集め方に違いがあるか詳細に検討したい。

３．設問（１）で⑤，⑥，⑦，⑧と答えた多くの者が（２）を解答しているのは，（１）を解決したと考えたからであろう。これが高校２年生でどのように変るか注目したい。

４．設問（１）の⑧の解答者は（２）をほぼ全員がきちんと説明している。（不成立と答えたものも問題文の説明不足などに注目したためであり，「１桁の数の和」も１桁にすれば成り立つ，などと解答している。）これに対し⑤，⑥，⑦の解答者は，解答数も少なく，またその内容にも不備がある。特に⑥の者にその傾向が強い。

５．設問（２）の全体の解答数は和，差，積の順に小さくなっている。特に積と和は６%違う。設問（１）の事（剰余）を積につなげるのは難しいようだ。

［ 資 料 ］

設問（1）の解答②の例

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

1235 → 11 → 2
1236 → 12 → 3
1237 → 13 → 4
1238 → 14 → 5
2456 → 17 → 8
2457 → 18 → 9
2458 → 19 → 0
3684 → 21 → 3
3685 → 22 → 4
3686 → 23 → 5
9999 → 36 → 9
1111 → 4 → 4
2222 → 8 → 8
3333 → 12 → 3

設問（1）の解答⑥の例

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

1 → 1	10 → 1	19 → 1
2 → 2	11 → 2	20 → 2
⋮	⋮	⋮
9 → 9	18 → 9	27 → 9

1桁になるまでやりつづけるので、最後に残った数は1〜9までしかない。
つまり9コずつ数は循環している よって
その数を9でわり、その余りが1桁の数である。
またわりきれた場合 0というのはありえないので
わりきれた時 1桁の数は9である

設問（1）の解答⑦の例

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

もとの数を9で割った余りが
求めた1桁の数になる

$abcd = a\times999 + b\times99 + c\times9 + a+b+c+d$

$a\times999 + b\times99 + c\times9$ は9で割ることができるので

$abcd$を9で割った余りが
もとの数を9で割った余りになる

設問（1）の解答⑧の例

(1) もとの数と、求めた1桁の数にはどんな関係があるか？
またそれはなぜか？

任意の正の整数は次のように表わされる。

$$a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^n a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

ここから各位の数の和、

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を引くと、

$$9(a_1 + 11a_2 + \cdots + \overbrace{11\cdots11}^{n\text{桁}}a_n) \longrightarrow 9\text{の倍数}$$

よって各位の数の和を9で割った余りと最初の正の整数を9で割った余りは等しい。そのため問のような計算を繰り返せば最終的に1桁になり、9以下になるので求めた1桁の数は最初の整数を9で割った余りになる（ただし9とでたら余り0ということ）

設問（1）の解答⑧の、（2）の解答例

(2) 例にある2つの正の整数の、1桁の数の和は　8＋1＝9
また、2つの正の整数の和について、1桁の数を求めると
5678＋1234＝6912　→．6＋9＋1＋2＝18　→　1＋8＝9
となり、1桁の数は一致する。
このことはいつでも成り立つか？
また、和ではなく差や積ではどうか？

反例：）36と27
9と9＝18
36＋27＝63→6と3＝9
18≠9

同様に　$9n$．$9m$（$n, m \in \mathbb{N}$）でも成立しない。

差、積も同様に反例が存在する。

※ただし、2桁になったら再び和をとるとすると、成立する

$A \equiv a \pmod{x}$
$B \equiv b \pmod{x}$
であれば
$A+B \equiv a+b \pmod{x}$
$AB \equiv ab \pmod{x}$
$A-B \equiv a-b \pmod{x}$
であるため成立する。

調査問題Dについて
1．調査実施時期：平成９年６月
2．調査学年，数：中学３年生121名

問題

A，B，C，D，E，F，G，Hの８人が，自分自身を含む８人のことについて，それぞれ次の様に言っている。
A：僕たちの中で少なくとも１人は正しいことを言っています。
B：僕たちの中で少なくとも２人は正しいことを言っています。
C：僕たちの中で少なくとも３人は正しいことを言っています。
D：僕たちの中で少なくとも４人は正しいことを言っています。
E：僕たちの中で少なくとも１人は間違ったことを言っています。
F：僕たちの中で少なくとも２人は間違ったことを言っています。
G：僕たちの中で少なくとも３人は間違ったことを言っています。
H：僕たちの中で少なくとも４人は間違ったことを言っています。
間違ったことを言っているのは誰か。（いない時はいないと答えよ。）
間違ったことを言っている人をどのように考えて求めたのかも答えよ。

3．設問の解答結果

	中学生（%）	中（人）
正　答	76.9%	93人
誤　答	13.2%	16人
白　紙	9.9%	12人
合　計	100.0%	121人

解　法	中学生（%）	中（人）
A仮定から導く	68.8%	64人
B人数から導く	21.5%	20人
Cその他	9.7%	9人
正解者合計	100.0%	93人

4．設問の正答分析
【正答例】正答：93人
正答例（1）：～（～君の）の否定：37人
考え方；否定することによって正答例（2）の人数に矛盾が起こる。
もしAが，・・28人
A→E；16人，A→B→C・・；12人
もしEが，・・；9人で，全員がE→Aと流れる。
正答例（2）：～（～君が）が正しいとすると：19人
内訳：Hが；9人，Dが；3人，Fが；2人，Gが；2人，Aが；1人，Eが；1人
A，Eが；1人
正答例（3）：～人（人数が）が正しいとすると：18人
1人が正しいとして，つぎに2人が正しいとして
正答例（4）：～人が間違っていない場合；2人
0人が間違っていない・・・；1人
正答例（5）：表を作成した；8人
正答例（6）：理由無し，考察過程無し；8人
いつのまにか成立して答えがわかった；1人
適当に当てはめた；1人
理由無し；2人
直接的に；3人
H，Gは違う，Fは正しい・・1人
A，B，C，D，E，F，G，H
○　○　○　○　○　○　×　×；2人
正答例（7）：1人
A，Eが正しいことは自明であるよってB，C，Dは正しいがH，Gはうそ

［参考］予備調査結果

1．調査実施時期：平成８年４月末

2．調査学年，数：中学３年生39名，高校２年生82名

3．設問の解答結果

	中３生（%）	高２生（%）	中（人）	高（人）
正　答	59%	43%	23人	35人
誤　答	41%	52%	16人	43人
白　紙	０%	５%	０人	４人
合　計	100%	100%	39人	82人

4．設問の正答分析

解　　法	中学生（%）	高校生（%）	中（人）	高（人）
Ａ仮定を否定し，矛盾を導く	36%	22%	14人	18人
Ｂ人数から導く	15%	17%	６人	14人
Ａ，Ｂ双方から導く	７%	４%	３人	３人
正解者合計	58%	43%	23人	35人

（１）正解者の割合が，中学生の方が高校生より15%も高いこと。

（２）高校生の正解者が半数を下回ったこと。

（３）中学生の白紙答案がないこと。高校生は５%（４人）いたこと。

【考察】

1．予備調査と比較すると正解が多い。約18%アップしている

2．正答にいたる思考過程は，仮定を否定して矛盾を考える方法が多い。次に，仮定を肯定して考える方法が多かったが，これは，人数を肯定して考える方法とほぼ同じぐらいの生徒がいた。

3．正答例（７）の方法は，１人だけであったが，非常に合理的な思考方法である。

4．【誤答例】誤答：16人

誤答例（１）Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，が間違ったことを言っている。；１人

誤答例（２）Ｄ，Ｆ，Ｇ，Ｈが間違ったことを言っている。；１人

誤答例（３）いない。；１人

誤答例（４）（Ｆ）か（Ｇ，Ｈ）；１人

誤答例（５）ＤとＥ；１人

誤答例（６）解答が中途になっているもの：11人

例

・Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ・・・・を否定して考えている。；３人

・人数で考えているもの。；３人

・Ａが本当だとすると；１人

・不明；３人

・表；１人

調査問題D　解答例1

Aが間違えているとすると全員が間違えていなければならない。しかし、この状態では、E〜Hの言っていることが正しいので、矛盾している。よって、Aは正しい。

次に、Bが間違っているとすると、Aを除く7人が間違えていなければならない。しかし、この状態では、E〜Hの言っていることが正しいので、矛盾している。よって、Bは正しい。

次に、Cが間違っているとすると、A・Bを除く6人が間違えていなければならない。しかし、この状態では、E〜Hの言っていることが正しいので、矛盾している。よって、Cは正しい。

次に、Dが間違っているとすると、A〜Cを除く5人が間違えていなければならない。しかし、この状態では、E〜Hの言っていることが正しいので、矛盾している。よって、Dは正しい。

次に、Hが正しいとすると、E〜Hの言っていることが間違っていることになるが、これは矛盾しているので、Hは間違っている。

次に、Eが間違えているとすると、全員が正しいということになってしまうので、これは矛盾している。よって、Eは正しい。

次に、Gが正しいとすると、F〜Hの言っていることが間違っていることになるが、これは矛盾しているので、Gは間違っている。

最後にFだが、G・Hが間違っているので、Fの言っていることは正しい。

よって、G・Hの2人が間違っている。

調査問題D　解答例2

① "全員正しい" という場合
E〜H で矛盾

② "全員間違っている" という場合
E〜H で矛盾

③ "1人正しい" とき
A○ B× C× D× E○ F○ G○ H○ . . ×

④ "2人正しい" とき
A○ B○ C× D× E○ F○ G○ H○ … ×

⑤ "3人正しい" とき
A○ B○ C○ D× E○ F○ G○ H○ . . ×

⑥ "4人正しい" とき
A○ B○ C○ D○ E○ F○ G○ H○ … ×

⑦ "5人正しい" とき
A○ B○ C○ D○ E○ F○ G○ H× …. ×

⑧ "6人正しい" とき
A○ B○ C○ D○ E○ F○ G× H× …. ○

⑨ "7人正しい" とき
A○ B○ C○ D○ E○ D× G× H× …. ×

以上より
正しいのは　6人
間違っているのは　よって、G，H

調査問題D　解答例3

・A～Dにおいてどれかが×だった場合
それよりD側は必ず×になる.
・E～Hにおいてどれかが×だった場合
それよりH側は必ず×になる

○＝本当
×＝ウソ

○＝しない
×する

A	B	C	D	E	F	G	H	ムジュン
×	×	×	×→	×	×	×	×	×
○	×	×	×→	×	×	×	×	×
○	○	×	×→	×	×	×	×	×
○	○	○	×→	×	×	×	×	×
○	○	○	○→	×	×	×	×	×
○	○	○	○→	○	×	×	×	×
○	○	○	○→	○	○	×	×	○
○	○	○	○→	○	○	○	×	×
○	○	○	○→	○	○	○	○	×

答　GとH

調査問題D　解答例4

Aがうそをついているなら　みんなうそつきのはずだが、
E～Hはみんなうそつきがいるといっているのであっていることになり矛盾
＜Aは本当である＞

Bがうそついているなら　Aだけ本当のはずだが、Eがあっていることに
なり、矛盾。
＜Bは本当である＞

Cがうそをついているなら　A・Bだけ本当のはずだが、やはりEがあっていることに
なり矛盾
＜Cは本当である＞

Dも同様
＜Dは本当である＞
Eがうそをついているなら、全員本当を言っていることになるが、E自身がうそをついているので
矛盾
＜Eは本当である＞
Fがうそをついているなら、自分をのぞいてみんな本当をいっていることになるのだが、Gが
3人うそをついているということも本当になり矛盾する。
＜Fは本当である＞

Gがうそをいっているなら自分のもう一人がうそをついていることになる。Gがうそなら
Hもうそなのでこれは正しい。

よって　G、Hがうそをついている

調査問題D　解答例5

まずAとEが正しいのは自明。
よって
Bは正しい
よって
Cは正しい

よって
Dは正しい
よって
Hはウソだ!

よって
Gはウソだ!
よって
Fは正しい

G, H

４．今後の取り組みについて

このプロジェクト研究も前半の中学段階が終了した。来年度以降高校生になった49期生に対しても全体，個人の両面から継続して調査，分析を続けていく予定である。それぞれの調査から，中高６年間における生徒の成長，発達の特徴が見出せることを期待し，それをもとにして６年間を見通した数学カリキュラムの検討を行っていきたい。

①作文調査

プロフィールの四角形の大きさが中１から中３にかけて大きくなる傾向にある生徒と逆に小さくなる傾向にある生徒について，何がその主な要因になっているかを探ってみたい。また，サンプル以外の生徒に対しても同様の四角形を作成して全体の傾向を調べたい。この作文は，高校２年でもう１度書かせて分析する予定である。

②意識調査

中学１年の時に実施したものと同じアンケート調査を高校１年で行い，全体の数値の変動についての考察を行う。

③解答調査

高校１，２年で再び調査問題Ａ～Ｄを解答させ，数学的思考の変容を全体と個人の両面から分析と研究を行う。