筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第36集　1997年３月

数学的思考力を高める創造的教材の探求
（その２）

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉　啓之・駒野　　誠・鈴木　清夫
吉田　昌裕

数学的思考力を高める創造的教材の探求
（その２）

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉　啓之・駒野　　誠・鈴木　清夫
吉田　昌裕

（１）研究の目的

授業中での生徒の質問の中に，面白い数学が潜んでいることがある。教師が授業の準備をする際に生ずる素朴な質問の中に，興味深い数学を見い出すことがある。しかし，日常の忙しさの中で，それらの質問や疑問は忘れてしまうことも多い。

そこで上記のことも含めて，数学の教材について，グループ（教材探検の会）で情報交換を行い，それぞれについて検討することを目的に，1994年度より活動を始めた。

現行の指導要領では，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てることにも重点を置いている。これは，指導法の問題が大きいが，一方でやはり，適切な教材を与えることも大切であろう。そのような教材はすでに数多く知られているが，まだ必ずしも十分ではないし，またすぐれた教材は，いくつあっても多過ぎることはないであろう。

そこで，（少なくとも我々にとって）新しいもので，多種多様な教材を開発していこうというのが，本研究のねらいである。

また本研究を通して，我々教師自身も，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を身につけることも，もう一つのねらいである。

（２）研究の方法

教材は，たとえば次のようなものを取り上げる。

・中学，高校の生徒が，興味・関心をもつ教材
・中学，高校の生徒が，理解できる教材
・発展，特殊化，一般化できるような教材
・次の段階（高校，大学）へつながるような教材
・数学的なよさ・美しさがわかる教材
・数学的な考え方を必要とする教材
・操作・活動を伴う教材

・コンピュータ等の教具を活用する教材　　など

取り扱う範囲は，必ずしも現行カリキュラムにとらわれることなく，自由に検討する。

また，教材検討は，発展・特殊化・一般化を考えたり，場面設定や表現など，生徒が取り組み易い形を検討する。

（3）研究の経過

第1年次では，次の教材について報告した。

① 相貫体を作る

② はばたき曲線

③ 円柱を縛る

④ 総当たり戦の成績表

⑤ ランダム・ウォーク

⑥ ランダムドットパターン

今年度も，様々な分野の教材について検討した。以下にその中から5つの教材について報告する。

なお，取り挙げた各教材は，それを全てそのまま生徒に与えることを考えてはいない。生徒の実態に応じて，適宜取捨選択，修正して，提示すべきであると考えている。

（4）研究の内容

以下の5教材について報告する

① 紙のバラ切り

② 三角形の9心

③ 極地探検

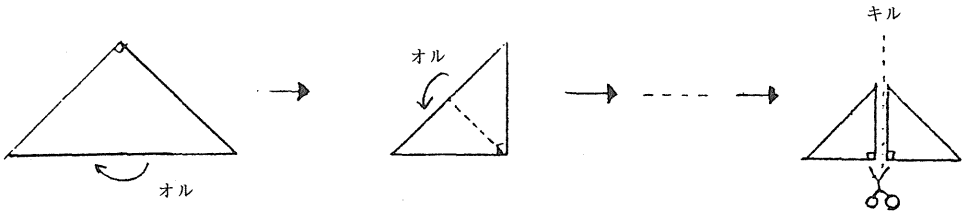
④ 積み木の切断

⑤ 油分けの数理

紙のバラ切り

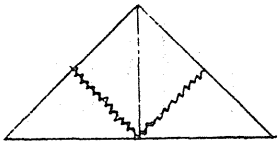
1．課題

図のように，直角三角形の紙を，順に折ることを繰り返した後，切ってバラバラにすると，何枚になるか？



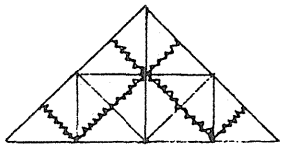
〔解答〕折った回数nが，n＝1，2，3，4，…の場合に，何枚になるかを調べる。図で，実線は折り目を，波線ははさみを入れた線（以下，切り線と呼ぶ）を表す。

n＝1



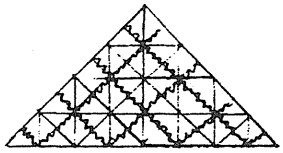
1＋2＝3

n＝3



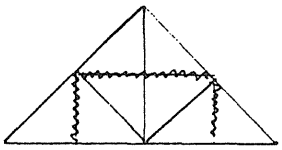
1＋2＋3＝6

n＝5



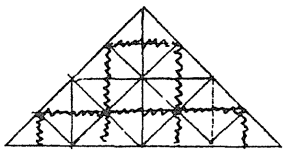
1＋2＋3＋4＋5＝15

n＝2



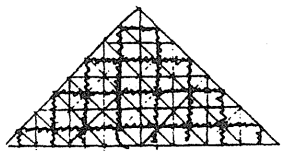
1＋3＝4

n＝4



1＋3＋5＝9

n＝6



1＋3＋5＋7＋9＝25

上の結果から，nが偶数の場合と奇数の場合で異なり，n回折ったときの枚数をa_nとすると，次のようになると予想できる。

$a_1 = 1 + 2$　　$a_2 = 1 + 3$

$a_3 = 1 + 2 + 3$　　$a_4 = 1 + 3 + 5$

$a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$　　$a_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$a_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 9$　　$a_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 17$

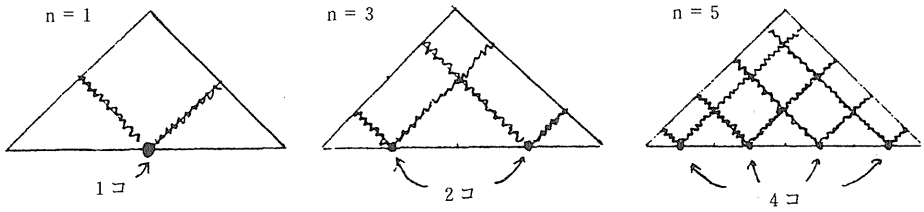
$\vdots$　　$\vdots$

$a_{2n-1} = 1 + 2 + \cdots + (2^{n-1} + 1)$　　$a_{2n} = 1 + 3 + \cdots + (2^n + 1)$

$= (2^{n-1} + 1)(2^{n-2} + 1)$　　$= (2^{n-1} + 1)^2$

予想が正しいことは，次のように説明できる。

（1） nが奇数の場合



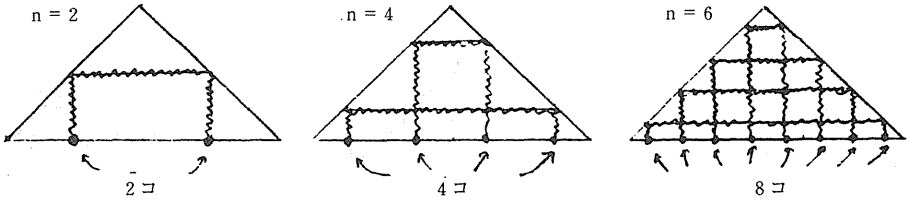
斜辺上の切り線の端点数をb_nとすると，上図からわかるように，２回多く折れば端点数は２倍になる。すなわち，

$$b_1=1,\ b_3=2,\ b_5=4,\ \cdots,\ b_{2n-1}=2^{n-1}$$

このとき，斜辺上の三角形（一番下の段の三角形）は$b_{2n-1}+1$個となり，紙の枚数は１から$b_{2n-1}+1$までの総和とな。すなわち，

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= 1+2+3+\cdots+(b_{2n-1}+1) \\ &= 1+2+3+\cdots+(2^{n-1}+1) \end{aligned}$$

（2） nが偶数の場合



（1）と同様に考えて，

$$b_2=2,\ b_4=4,\ b_6=8,\ \cdots,\ b_{2n}=2^n$$

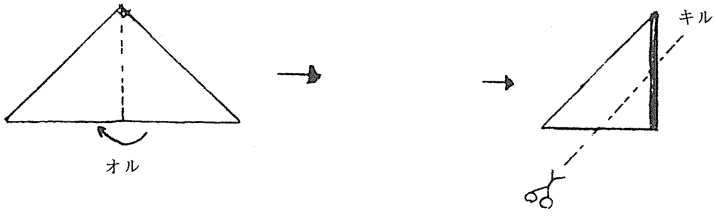
であり，斜辺上の三角形（一番下の段の三角形）は$b_{2n}+1$個だから，紙の枚数は，１から$b_{2n}+1$までの奇数の総和となる。すなわち

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 1+3+5+\cdots+(b_{2n}+1) \\ &= 1+3+5+\cdots+(2^n+1) \end{aligned}$$

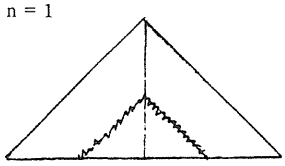
２．課題の一般化・発展

【発展１】　切り方を変える

例えば，次のように切る場合を考える。（図で，太線は最後に折った折り目を表す）

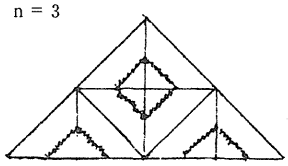


n = 1



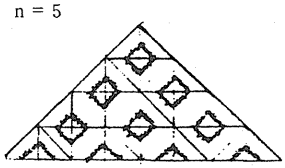
1 + 1 = 2

n = 3



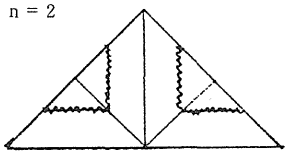
1 + 2 + 1 = 4

n = 5



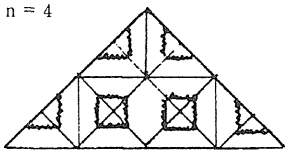
1 + 2 + 3 + 4 + 1 = 11

n = 2



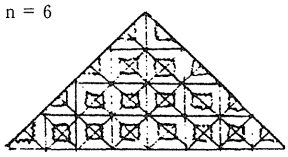
2 + 1 = 3

n = 4



(2 + 4) + 1 = 7

n = 6



(2 + 4 + 6 + 8) + 1 = 21

上の結果から，もとの課題と同様に考えて，次のようになることがわかる。

$a_1 = (1) + 1$　　$a_2 = (2) + 1$

$a_3 = (1 + 2) + 1$　　$a_4 = (2 + 4) + 1$

$a_5 = (1 + 2 + 3 + 4) + 1$　　$a_6 = (2 + 4 + 6 + 8) + 1$

⋮　　⋮

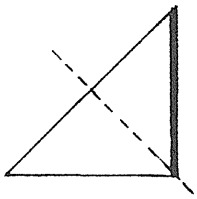
$a_{2n-1} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2^{n-1}) + 1$　　$a_{2n} = 2\ (1 + 2 + 3 + \cdots + 2^{n-1}) + 1$

$= 2^{2n-3} + 2^{n-2} + 1$　　$= 2^{2n-2} + 2^{n-1} + 1$

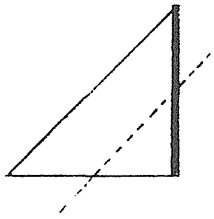
【発展２】最大・最小の切り方を考える

切り方は，次のア～カが考えられる。アが課題であり，イが発展で考えたものである。

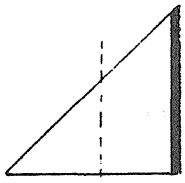
ア



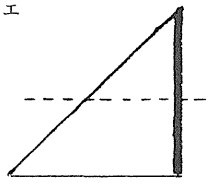
イ



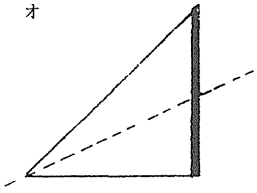
ウ



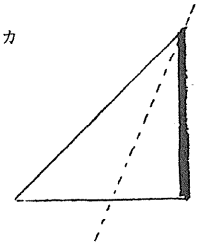
エ



オ



カ



ウ～カについても同様に調べ，すべての場合のa_nを書き並べると次のようになる。

ア　$a_{2n-1}=(2^{n-1}+1)(2^{n-2}+1)$　　$a_{2n}=(2^{n-1}+1)^2$

　　$=2\cdot2^{2n-1}+3\cdot2^{n-2}+1$　　$=2\cdot2^{2n-3}+4\cdot2^{n-2}+1$

イ　$a_{2n-1}=2\cdot2^{2n-1}+1\cdot2^{n-2}+1$　　$a_{2n}=2\cdot2^{2n-3}+2\cdot2^{n-2}+1$

ウ　$a_{2n-1}=1\cdot2^{2n-1}+2\cdot2^{n-2}+1$　　$a_{2n}=1\cdot2^{2n-3}+3\cdot2^{n-2}+1$

エ　$a_{2n-1}=1\cdot2^{2n-1}+1\cdot2^{n-2}+1$　　$a_{2n}=1\cdot2^{2n-3}+1\cdot2^{n-2}+1$

オ　$a_{2n-1}=3\cdot2^{2n-1}+2\cdot2^{n-2}+1$　　$a_{2n}=3\cdot2^{2n-3}+3\cdot2^{n-2}$

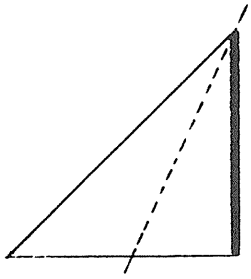
カ　$a_{2n-1}=3\cdot2^{2n-1}+3\cdot2^{n-2}+1$　　$a_{2n}=3\cdot2^{2n-3}+5\cdot2^{n-2}+1$

上の結果を比較すると，nが偶数，奇数にかかわらず，

　カの場合が最大，　エの場合が最小

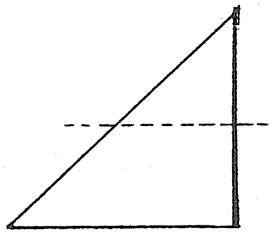
になることがわかる。ただし，n＝1の場合は，最大となるのがカ以外に，ア，ウ，また，最小となるのは，エではなく，イ，ウ，オである。

n≧2で最大となる切り方（カ）



$a_2=5$，$a_3=7$
$a_4=12$，$a_5=19$

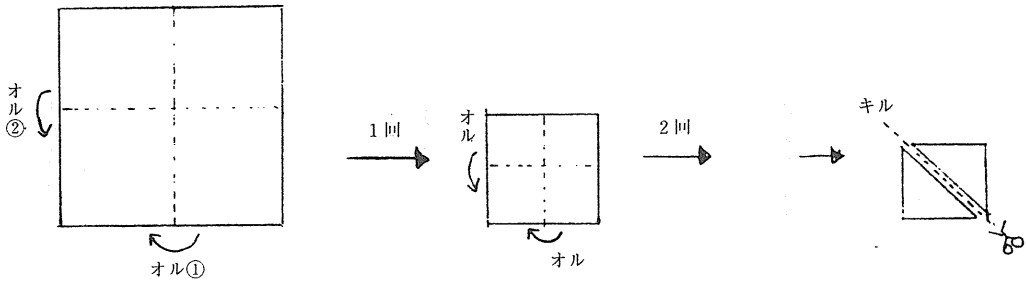
n≧2で最小となる切り方（エ）



$a_2=2$，$a_3=3$
$a_4=4$，$a_5=7$

【発展３】紙の形を変える

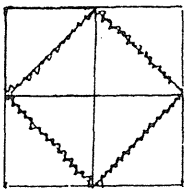
元の紙の形を「正方形」にして，次のように折ってから切る場合を考える。



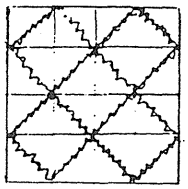
２回折りで，１回の操作と考える。

操作回数nが，n＝1，2，3，4，…の場合に，何枚になるかを調べる。

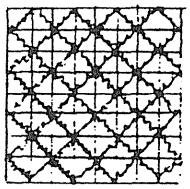
n＝1



n＝2



n＝3



上の結果から，次のようになることがわかる。

$a_1 = 1^2 + 2^2$，$a_2 = 2^2 + 3^2$，$a_3 = 4^2 + 5^2$，…

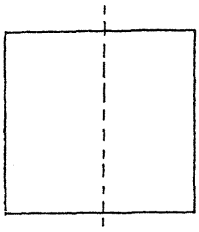
$a_n = (2^{n-1})^2 + (2^{n-1} + 1)^2$

$= 2^{2n-1} + 2^n + 1$

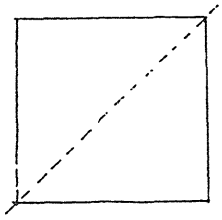
【発展4】「正方形」の場合に最大・最小の切り方を考える

切り方は，次のア～コが考えられる。（ウが発展3で考えたものである。）

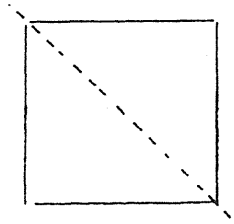
ア



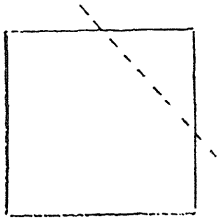
イ



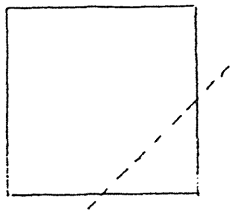
ウ



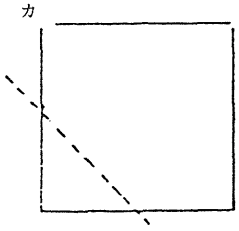
エ



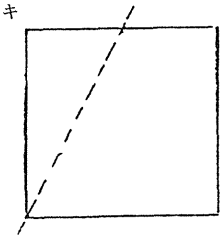
オ



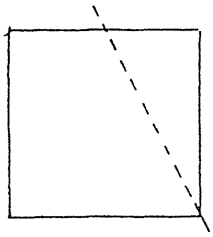
カ



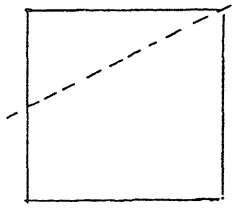
キ



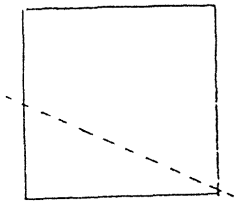
ク



ケ



コ



それぞれの場合のa_nを調べて書き並べると，次のようになる。

ア　$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} + 1$　　カ　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 2 \cdot 2^{n-1} + 2$

イ　$a_n = 2 \cdot 2^{2n-2} + 2 \cdot 2^{n-1}$　　キ　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 2 \cdot 2^{n-1}$

ウ　$a_n = 2 \cdot 2^{2n-2} + 2 \cdot 2^{n-1} + 1$　　ク　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 1 \cdot 2^{n-1}$

エ　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 1$　　ケ　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 2 \cdot 2^{n-1} + 1$

オ　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 1 \cdot 2^{n-1} + 1$　　コ　$a_n = 1 \cdot 2^{2n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} + 1$

ア～コを比較して，次の結果が得られる。

最大となる切り方　～　ウ（ただし，$n = 1$のときウ，カ，コ）

最小となる切り方　～　ア（ただし，$n = 1$のときエ，ク，$n = 2$のときア，エ）

3．授業への活用

（1）分野

中学3年・課題学習（いろいろな関数），高校数学Ⅰ「個数の処理」

数学A「数列」等

（2）留意点

まず，実際に紙を折って切って調べ，いくつかの結果から規則性を予想させたい。

また，元の紙の形は，正方形の方が考えやすいので，正方形の場合から考えてもよいであろう。

三角形の９心

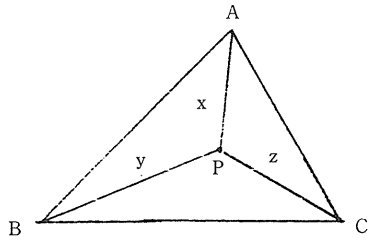
１．課題

図の三角形で，

$x = y = z$

のとき，Ｐは外心である。

外心も含め，三角形には５心があるが，他に心はないだろうか？



〔解答〕１点Ｐから，頂点Ａ，Ｂ，Ｃへの距離をｘ，ｙ，ｚとするとき，三角形の３辺ａ，ｂ，ｃとｘ，ｙ，ｚの間に成り立つ関係から，次の２つの心を発見した。

これを，我々は「双心」，「円心」と名付けた。

（１）双心

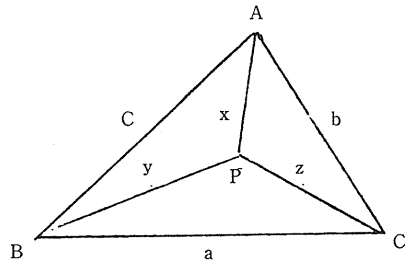
$x - y = b - a$ … ①

$y - z = c - b$ … ②

$z - x = a - c$ … ③

をみたす点は，１点で交わる。

ただし，点Ｐは三角形の内部にあるものとする。



証明）①，②から③が得られるので，①，②をみたす点が交われば，１点で交わる。

①をみたす点の軌跡は，$a \neq b$のとき，

Ａ，Ｂを焦点とする双曲線

であり，これはＣを通り，辺ＡＢと交わる。

（$a = b$のときは，Ｃを通る直線である）

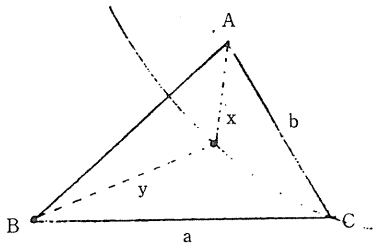
同様に②をみたす点の軌跡は，$b \neq c$のとき，

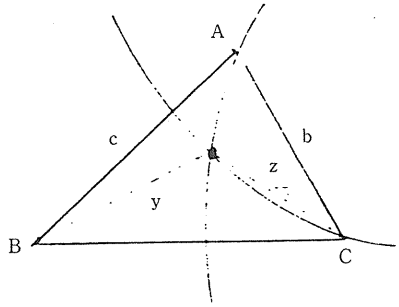
Ｂ，Ｃを焦点とする双曲線

であり，これはＡを通り，辺ＢＣと交わる。

（$b = c$のときは，Ｃを通る直線である）

よって，①，②は三角形の内部で，必ず交わる。





（2）円心

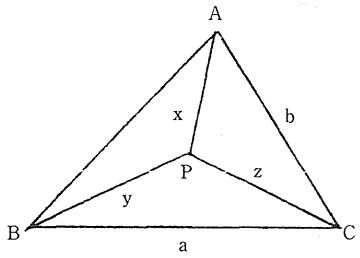
$x : y = b : a$ … ①

$y : z = c : b$ … ②

$z : x = a : c$ … ③

をみたす点は，１点で交わる。

ただし，点Ｐは三角形の内部にあるものとする。



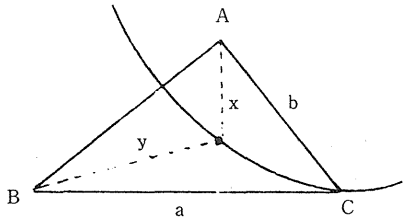
証明）①，②から③が得られるので，①，②をみたす点が交われば，１点で交わる。

①をみたす点の軌跡は，$a \neq b$ のとき，

アポロニウスの円

であり，これはＣを通り，辺ＡＢと交わる。

（$a = b$ のときは，Ｃを通る直線である）



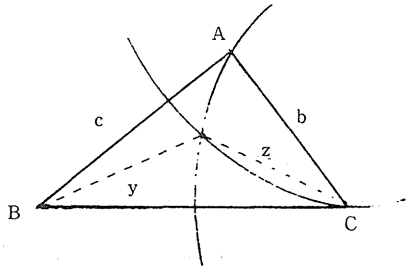
同様に②をみたす点の軌跡は，$b \neq c$ のとき，

アポロニウスの円

であり，これはＡを通り，辺ＢＣと交わる。

（$b = c$ のときは，Ｃを通る直線である）

よって，①，②は三角形の内部で，必ず交わる。



〈補則１〉

上の証明から明らかなように，正三角形の場合は，双心と円心は一致し，それは重心に一致する。

〈補則２〉

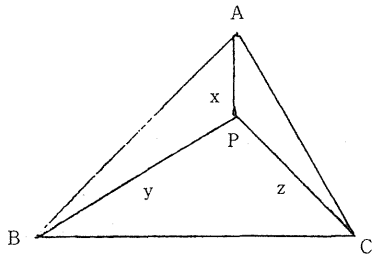
ａ，ｂ，ｃとｘ，ｙ，ｚの間の関係から，次の垂心も得られる。

$x^2 - y^2 = b^2 - a^2$ … ①

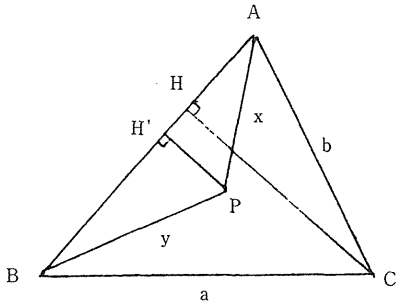
$y^2 - z^2 = c^2 - b^2$ … ②

$z^2 - x^2 = a^2 - c^2$ … ③

をみたす点は，１点で交わる。



証明）①，②から③が得られるので，①，②をみたす点が交われば，１点で交わる。



①をみたす点の軌跡は，

垂線ＣＨ

である。

∵）ＰＨ'⊥ＡＢとすると，

$b^2 - AH^2 = a^2 - BH^2$

$x^2 - AH'^2 = y^2 - BH'^2$

これらと①から

$AH^2 - AH'^2 = BH^2 - BH'^2$ … ④

ところが，

$(AH - AH')(BH - BH') \leqq 0$

だから，④＝０

よって，Ｈ＝Ｈ'となり，ＰはＣＨ上にある。

同様に②をみたす点の軌跡も，Ａから引いた垂線である。

よって，①，②は，必ず交わる。

２．課題の一般化・発展

【発展１】角の関係に着目する

三角形の３つの角Ａ，Ｂ，Ｃと，点Ｐから３辺への見込む角α，β，γの間の関係から，１つの心を発見した。

これを我々は，「弧心」と名付けた。

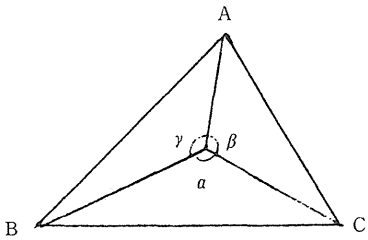
（３）弧　心

$\alpha - \beta = A - B$ … ①

$\beta - \gamma = B - C$ … ②

$\gamma - \alpha = C - A$ … ③

をみたす点は，１点で交わる。



証明）①～②より，

$\alpha - A = \beta - B = \gamma - C$

一方，$(\alpha - A) + (\beta - B) + (\gamma - C) = (\alpha + \beta + \gamma) - (A + B + C) = 180^\circ$

よって，

$\alpha - A = 60^\circ$ … ④

$\beta - B = 60^\circ$ … ⑤

$\gamma - C = 60^\circ$ … ⑥

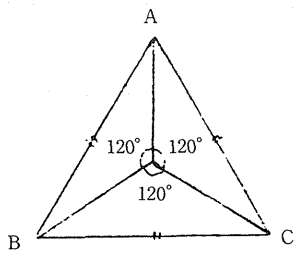
④，⑤から⑥が得られるので，④，⑤をみたす点が交われば，１点で交わる。

A≦B≦Cとする。（このとき，$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$）

1）　C＝60°のとき

A＝B＝60°

このとき，明らかに重心と一致する。



2）　C＞60°のとき

∠ACD＝60°となるDを，辺AB上にとると，

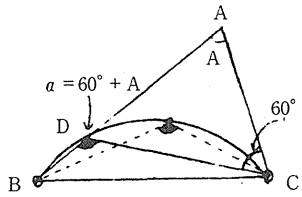
②をみたす点の軌跡は，

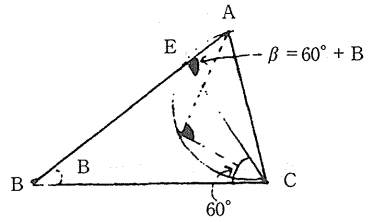
弧BDC（B，Cを除く）

である。同様にして，⑤をみたす点の軌跡は，

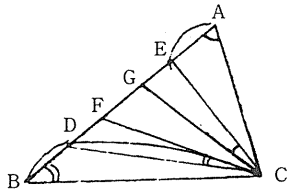
弧AEC（A，Cを除く）

このとき，④，⑤をみたす点は必ず交わる。





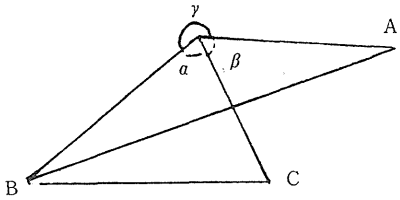
（∵）弧BDC，弧AECのCにおける接線を，
CF，CGとする。
もし，交わらなければ，E，G，F，D
に順に点が並ぶ。このとき，
∠ECG＝A，∠DCF＝B
∴C＝∠ACE＋∠ECB
＝（∠ACD－∠ECD）＋60°
＝60°－（A＋B＋∠GCF）＋60°
＜120°－（A＋B）
∴A＋B＋C＜120°
これは矛盾である。



〈補則３〉

C＝120°のとき，弧心は辺AB上にあり，CPはCの２等分線である。

また，C＞120°のとき，弧心は三角形の外部にあり，γ＞180°である。



〈補則４〉

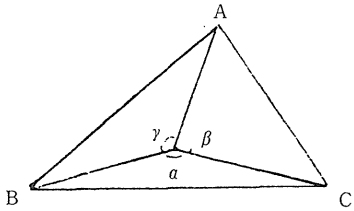
A，B，Cとα，β，γの間の関係から，次の外心も得られる。

α：β＝A：B　…　①

β：γ＝B：C　…　②

γ：α＝C：A　…　③

をみたす点は，１点で交わる。



証明）　①，②から③が得られるので，①，②をみたす点が交われば，１点で交わる。

①の比の値をｋとおくと，

$\alpha = kA$，$\beta = kB$

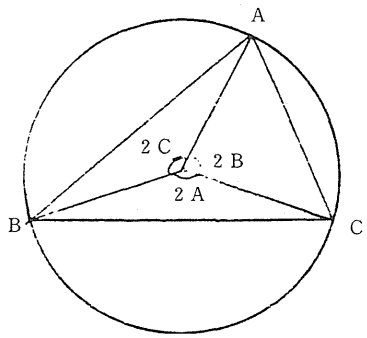
同様にして，②より，$\gamma = kC$

$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = k(A + B + C)$

$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$，$A + B + C = 180^\circ$ だから，

$k = 2$

よって，$\alpha = 2A$，$\beta = 2B$，$\gamma = 2C$となり，この点は外心である。



【発展２】垂線の長さの関係に着目する

三角形の３本の垂線の長さh_1，h_2，h_3と，点Ｐから３辺への垂線の長さｐ，ｑ，ｒの間の関係から，１つの心を発見した。

これを我々は，「線心」と名付けた。

（４）線　心

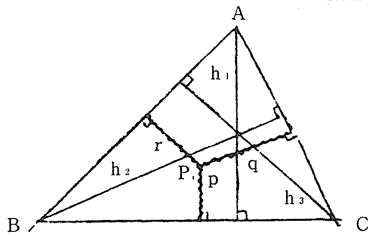
$p - q = h_1 - h_2$　…　①

$q - p = h_2 - h_3$　…　②

$r - p = h_3 - h_1$　…　③

をみたす点は，１点で交わる。

ただし，点Ｐは三角形の内部にあるものとする。



証明）①，②から③が得られるので，①，②をみたす点が交われば，１点で交わる。

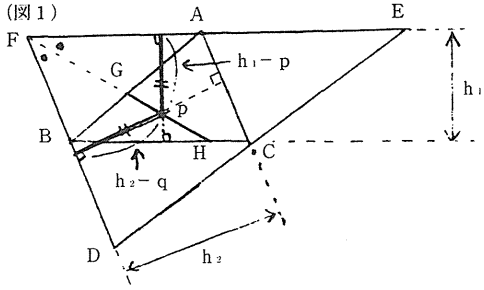
①をみたす点の軌跡は，$h_1 \leqq h_2 \leqq h_3$とすると，図１の線分ＧＨである。

∵）①より，$h_1 - p = h_2 - q$　…　①'

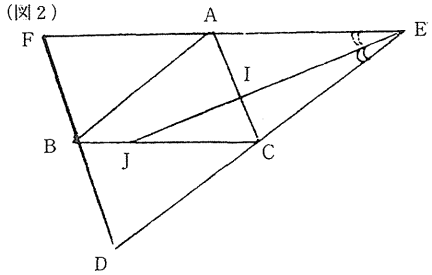
ＡＢ∥ＤＥ，ＢＣ∥ＥＦ，ＣＡ∥ＦＤとなるように，△ＤＥＦをつくり，∠Ｆの２等分線をＧＨとすると，①'をみたす点の軌跡が線分のＧＨである。

同様にして，②をみたす点の軌跡は，図２の線分ＩＪである。

(図１)



(図２)



このとき，ＧＨとＩＪは必ず交わる。

（∵）図３で，∠ＢＦＨ＝∠ＢＨＦだから

ＢＨ＝ＢＦ＝ＡＣ＝ｂ

同様にして，

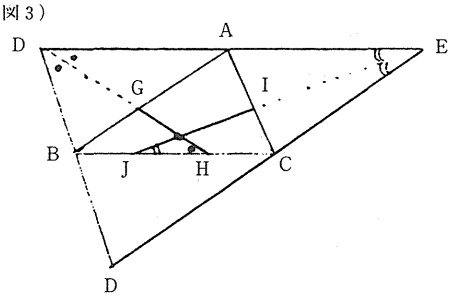
ＣＪ＝ＣＥ＝ＡＢ＝ｃ

∴　ＢＨ＋ＣＪ＞ＢＣ

だから，Ｂ，Ｊ，Ｈ，Ｃの順に点が並び，

ＧＨとＩＪは，三角形の内部で必ず交わる。

（図３）



〈補則５〉

上の証明から，△ＡＢＣの線心は，△ＤＥＦの内心に一致することがわかる。

〈補則６〉

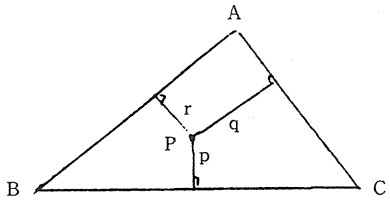
h_1，h_2，h_3と，ｐ，ｑ，ｒの関係から，次の重心も得られる。

$p : q = h_1 : h_2$ …①

$q : p = h_2 : h_3$ …②

$r : p = h_3 : h_1$ …③

をみたす点は，１点で交わる。



証明）①より，$\frac{h_1}{p}=\frac{h_2}{q}k$とおくと，

$h_1 = kp$，$h_2 = kq$

これより，△ＢＰＣ＝ｋ△ＡＢＣ

△ＡＰＣ＝ｋ△ＡＢＣ

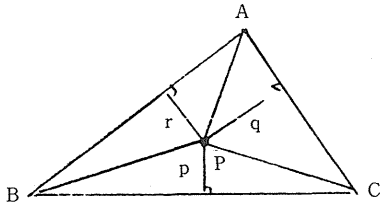
∴　△ＢＰＣ＝△ＣＰＡ

同様にして，②から，

△ＡＰＣ＝△ＡＰＢ

∴　△ＢＰＣ＝△ＣＰＡ＝△ＡＰＢとなり，

Ｐは重心である。



３．授業への活用

（１）分野

高校数学Ａ「平面幾何」，数学Ⅱ「図形と方程式」，数学Ｃ「いろいろな曲線」

（２）留意点

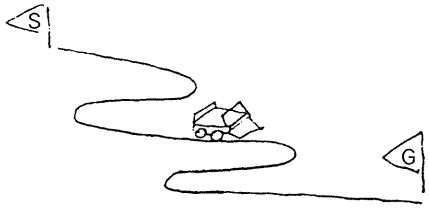
まず自分で，１点で交わるような点を探して，それが本当に１点で交わるかどうかを考えるようにする。その際，着目する視点はヒントとして与えてもよいだろう。

極地探検

1．課題

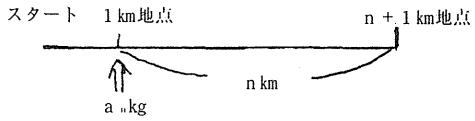
極地の雪上を，雪上車で何kmか先の地点まで，行くのに，最低でどれくらいの燃料が必要か？

ただし，この雪上車は，1kgの燃料で1kmしか進めず，燃料は3kgまでしか積めない。また，1kmごとに燃料の保管場所があるとする。



［解答］ n km先の地点まで行くのに必要な最小燃料を，$a_n$kgとする。

n＋1km先まで行くのに必要な最小燃料を考える。

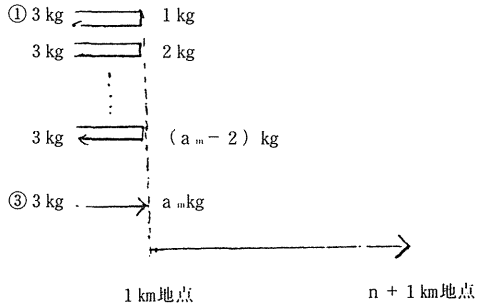


最終的に，1km地点に$a_n$kgの燃料があればよい。そのためには，次の手順を踏めばよい。

① （a_n－2）kgの燃料を1km地点に保管して，スタート地点に戻る。

② 3kgの燃料を積んで出発する。このとき，1km地点に，燃料は$a_n$kgあることになる。

①を実行するためには，1kgの燃料を1km地点に保管して戻るのに3kgの燃料が必要だから，全部で3（a_n－2）kgの燃料が必要になる。



以上から，n≧2のとき，次の漸化式ができる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3(a_n - 2) + 3 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

この漸化式を解いて，

$$a_n = \frac{1}{2}(3^{n-2} + 3) \quad (n \geqq 2), \quad a_1 = 1$$

上の①，②の手順を踏んで使用する燃料が最小であることは，次のように示される。

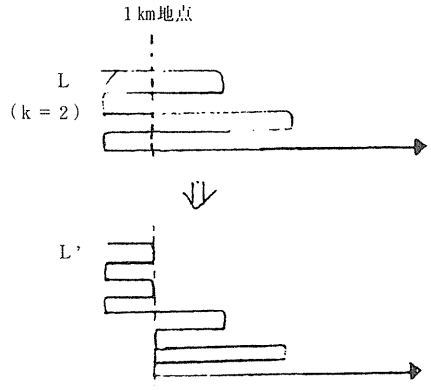
（最小性の証明）

使う燃料が最小になるような行き方Lがあるとする。このような行き方で，スタート地点から1km地点までの往復回数が全部でk回あるとする。

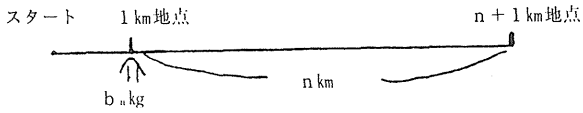
このLの行き方を変更して，まず1km地点までk回往復した後，1km地点より先については，Lと同じになるような行き方L’を考える。

このとき，LとL’で，使用する燃料に変わりはないことは明らかである。

よって，①，②の手順を踏んで使用する燃料は，最小であるといえる。



2．課題の一般化・発展

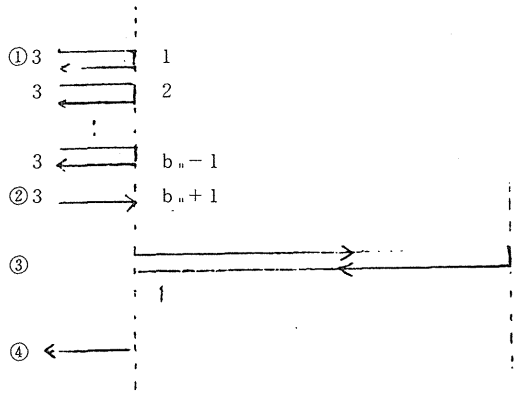


【発展1】往復する場合を考える

nkm先の地点まで往復するのに必要な最小燃料を，$b_n$kgとする。

n＋1km先まで往復するのに必要な最小燃料を考える。

最終的に，1km地点に$b_n$kgの燃料があればよい。そのためには，次の手順を踏めばよい。



① （b_n-1）kgの燃料を1km地点に保管して，スタート地点に戻る。

② 3kgの燃料を積んで出発する。このとき，1km地点に（b_n+1）kgの燃料があることになる。

③ 1km地点からn＋1km地点まで往復する。

④ 1km地点からスタート地点に戻る。

元の課題と同様に考えて，次の漸化式ができる。

$$\begin{cases} b_{n+1}=3(b_n+1)+3 \\ b_1=2 \end{cases}$$

この漸化式を解いて，

$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

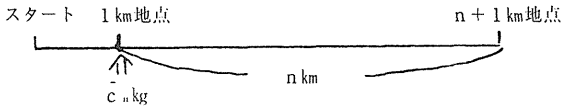
上の①～④の手順を踏んで使用する燃料が最小であることは，元の課題と同様に示される。

【発展2】1kgの品物を運ぶ場合を考える

（1）片道の場合

nkm先の地点まで行くのに必要な最小燃料を，$c_n$kgとする。

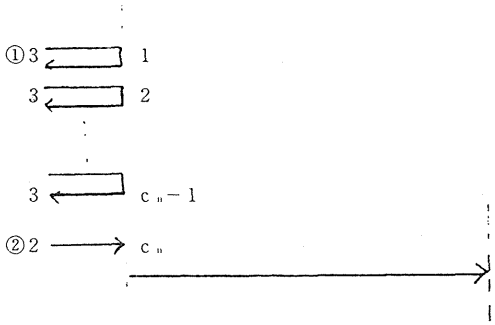
n＋1km先まで往復するのに必要な最小燃料を考える。



最終的に，1km地点に$c_n$kgの燃料があればよい。そのためには，次の手順を踏めばよい。

① （c_n-1）kgの燃料を1km地点に保管して，スタート地点に戻る。

② 2kgの燃料と品物を積んで出発する。このとき，1km地点に$c_n$kgの燃料があることになる。



元の課題と同様に考えて，次の漸化式ができる。

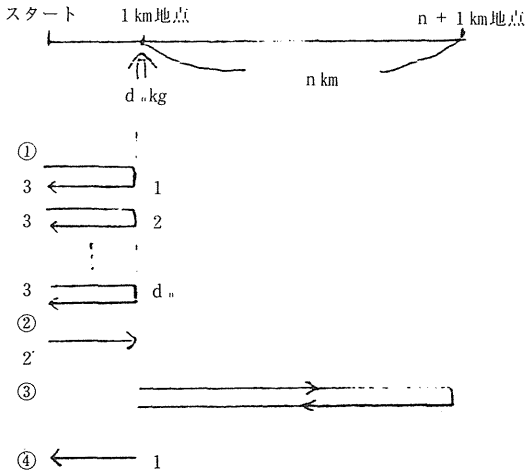
$$\begin{cases} c_{n-1}=3(c_n-1)+2 \\ c_1=1 \end{cases}$$

この漸化式を解いて，

$$c_n = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$$

上の①，②の手順を踏んで使用する燃料が最小であることは，元の課題と同様に示される。

（２）往復の場合



ｎkm先の地点まで往復するのに必要な最小燃料を，$d_n$kgとする。

ｎ＋１km先まで往復するのに必要な最小燃料を考える。

最終的に，１km地点に$d_n$kgの燃料があればよい。そのためには，次の手順を踏めばよい。

① $d_n$kgの燃料を１km地点に保管して，スタート地点に戻る。

② ２kgの燃料と品物を積んで出発する。このとき，１km地点に$d_n$kgの燃料がある。

③ １kg地点からｎ＋１km地点まで往復して，品物を置いてくる。

④ １km地点からスタート地点に戻る。

元の課題と同様に考えて，次の漸化式ができる。

$$\begin{cases} d_{n-1} = 3d_n + 2 \\ d_1 = 2 \end{cases}$$

この漸化式を解いて，

$$d_n = 3^n - 1$$

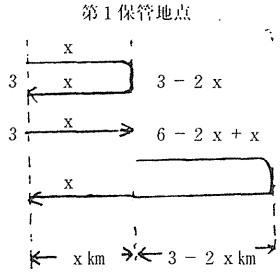
上の①～④の手順を踏んで使用する燃料が最小であることは，元の課題と同様に示される。

【発展３】燃料が与えられたときの往復距離を考える

元の課題とは逆に，燃料が与えられたときは，最大で何km往復できるかを考える。ただし，燃料の保管場所は，１km毎ではなく，自由に保管できるものとする。

まず，燃料が６kgの場合の最大往復距離を求める。

（１）燃料６kgで，最大何km往復できるか？



第１保管地点（スタート地点から最も近い燃料保管地点）までの距離をｘkmとする。スタート地点と第１保管地点の往復回数は，少ない方がよいので，２回である。（∵１回で，６kgすべての燃料は運べない）このとき，第１保管地点に，（６－４ｘ）kg運ばれ，そこから

さらに，

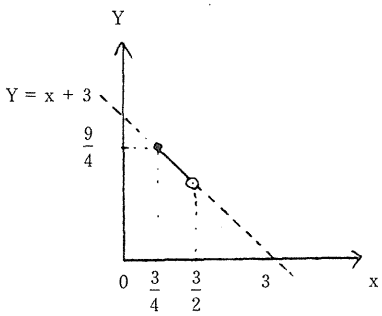
$$\frac{6-4x}{2}=3-2x\ (\mathrm{km})$$

進むことができる。

よって，往復距離L(x)は

$$L(x)=x+(3-2x)=-x+3$$

ただし，$0<6-4x\leqq 3$，すなわち $\frac{3}{4}\leqq x<\frac{3}{2}$ である。



よって，$L(x)\leqq L(\frac{3}{4})=\frac{9}{4}$となり，最大の往復距離は，$\frac{9}{4}$kmである。

（2）燃料Fkgで，最大何km往復できるか？

$3<F\leqq 6$の場合は，6kgの場合とまったく同様に考えることができる。

すなわち，

$$L(x)=x+(\frac{F}{2}-2x)=-x+\frac{F}{2}$$

ただし，$0<F-4x\leqq 3$，すなわち $\frac{F-3}{4}\leqq x<\frac{F}{4}$ である。

よって，$L(x)\leqq L(\frac{F-3}{4})=\frac{F+3}{4}$となり，最大の往復距離は，$\frac{F+3}{4}$kmである。

一般のFの場合については，次に結果のみを示す。#1)

> $3(n-1)<F\leqq 3n$（n；自然数）のとき，
>
> 最大の往復距離は $\frac{F}{2n}+q_n$（ただし，$q_n=q_{n-1}+\frac{3}{2n}$，$q_1=0$）

3．授業への活用

（1）分野

中学校数学「課題学習」，高校数学A「数列」等

（2）留意点

コンピュータ等を利用してシミュレーションを行い，いろいろ自分で調べながら考えるとよいだろう。

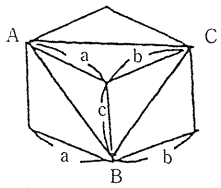
また，発展課題3については，簡単な場合をいろいろ考えさせるだけでも面白いだろう。

＃1　詳細については，別の機会に報告する予定である。

積み木の切断

1．課題

右図のように，一辺１cmの立方体を積み上げて縦ａ，横ｂ，高さｃ個の直方体にする。３頂点Ａ，Ｂ，Ｃを通る平面でこの直方体を切断するとき，何個の立方体が切断されるかを調べてみよう。
ａ，ｂ，ｃは互いに素であるとする。



〔解答〕まず，切り口がどんな形状になるかを作図してみることにする。例えば，積み上げた立方体の３辺の個数を縦５，横４，高さ３のときどうなるだろうか。

平面と平面が交わると線になるので，切り口は直線となる。また，３つの平面が交わるところは１点になる。このことを用いて下図１のように作図できる。

図１

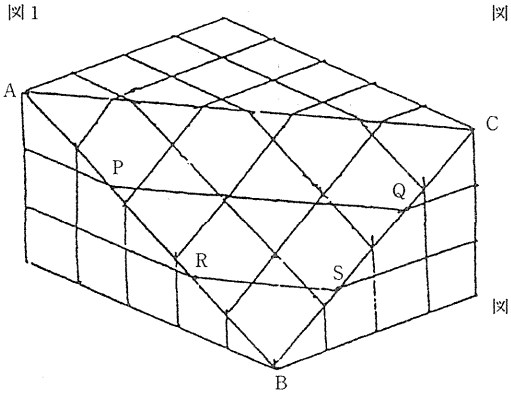


図２

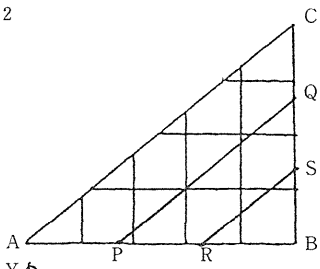
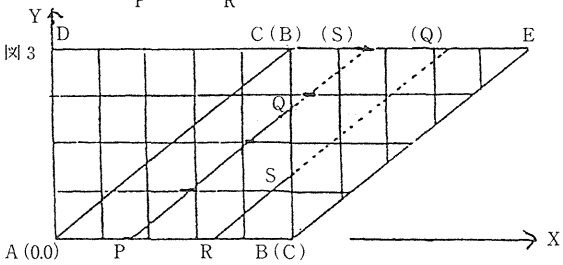


図３



すると，切断された立方体の個数は23個である。切断面を描くことなく，個数を数えやすくできないものだろうか。

これを，上からみるとどうなるだろうか？（これを底面への正射影という。）

直線は直線にうつるので，上図２のようになることが分る。しかも切断された立方体は△ＡＢＣの内部の三角形の個数と１対１に対応しているのでその個数を調べればよいことになる。つまり，領域の直線による分割数を求めればよい。

（１）平面ＡＢＣで切断する以前の状態から上図３へ

Ａ（０，０），Ｂ（ａ，０），Ｃ（ａ，ｂ）と座標を入れ，Ｄ（０，ｂ），Ｅ（２ａ，ｂ）とおくと，長方形ＡＢＣＤ内には，ａｂ個ある。

（２）線分ＡＣを引くことで，線分ＡＣがｘ＝０，１，２，３，…，ａ；ｙ＝０，１，２，３，

…，ｂによって切断される個数だけ（1）より分割数が増加する。ここで，ａ，ｂは互いに素であるから，線分

$$y=\frac{b}{a}x,\ (a,\ b)=1,\ 0\leqq x\leqq a$$

が，格子点を通るか調べる：ｙが整数になるのはｘがａの倍数のときだけであるから，線分ＡＣが格子点を通過するのは端点Ａ，Ｃのみである。よって，増加する分割数は，ａ＋ｂ－１個である。

（３）線分ＡＣに平行な線分によって（2）よりさらに増加する分割数を求める。

線分ＡＣに平行な線分は，

$$y=\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{c}k\right)=b\left(\frac{x}{a}-\frac{k}{c}\right)=b\left(\frac{cx-ak}{ac}\right)$$

$$(0\leqq x\leqq a,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ c-1)$$

ｂはａ，ｃと互いに素であるから，ｘが整数のときにｙが整数となるのは，ｙが０，ｂ以外にない。つまり，ＡＣに平行な線分ｃ－１本はＡＢ上の格子点でない点を始点とし，途中格子点を通過することなくＣＥ上の格子点でない点を終点とする。よって，増加分は，線分１本について，ａ＋ｂ個に切断されるので，（ｃ－１）本では，（ｃ－１）（ａ＋ｂ）個の領域が増加する。

⊿ＥＣＢは⊿ＡＢＣと合同であるので，(1)，(2)，(3) から求める個数はその半分である。ゆえに，求める個数は，

$$\frac{ab+(a+b-1)+(c-1)(a+b)}{2}=\frac{ab+bc+ca-1}{2}\ \text{個}$$

２．課題の特殊化・一般化・応用

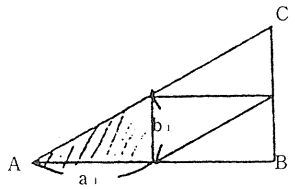
【一般化１】縦ａ横ｂ高さｃのすべてに共通な約数Ｄがある場合

$a=Da_1$，$b=Db_1$，$c=Dc_1$とおく。

a_1，b_1，c_1は互いに素であるから，課題１に帰着され，求める立方体が切断される個数は，△ＡＢＣがD^2個の合同な三角形に分割されるので，

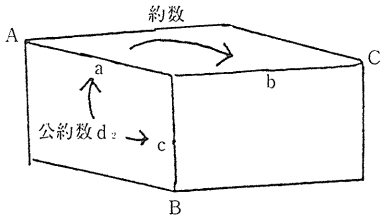
$$D^2\frac{ab+bc+ca-1}{2}\ \text{個}$$

となる。



【一般化２】ａの約数がｂであり，ａとｃに公約数d^2がある場合

平面で切断する以前は課題１と同じく，ａｂ個である。次に，線分ＡＣ上の格子点は，ａ，ｂの公約数がｂであることから，ｂ－１個あるので，線分ＡＣを引くことで，分割数は（ａ＋ｂ－１）－（ｂ－１）＝ａ個増加する。さらに，線分ＡＣに平行な線分をｃ－１



本引くことで，増加する分割数を求める：ａとｃには公約数d_2があるので，線分ＡＣに平行な線分ｃ－１本のうち，線分ＡＢ上の格子点を端点にもつ線分の本数は，d_2-1本であり，
格子点以外の端点を持つ線分の本数は，$(c-1)-(d_2-1)=c-d_2$本である。
d_2-1本の線分については線分ＡＣと同じくａ個に切断され，$c-d_2$本の線分については，線分上に格子点がないことからａ＋ｂ個に切断される。ゆえに，

$(c-d_2)(a+b)+(d_2-1)(a)$ 個

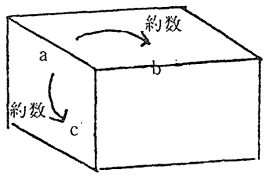
の分割数が増加する。
以上より，

$$\frac{ab+a+(c-d_2)(a+b)+(d_2-1)(a)}{2}=\frac{ab+bc+ca-bd_2}{2}\text{個}$$

【(一般化２の) 特殊化】ａの約数がｂであり，ａの約数がｃである場合

一般化２において，$d_2=c$の場合であるから，

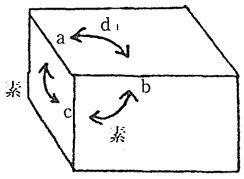
求める個数は，$\dfrac{ab+ca}{2}$個である。



【一般化３】ａ，ｂに公約数d_1があり，ａとｃ，ｂとｃは互いに素である場合

平面で切断する以前は課題１と同じく，ａｂ個である。次に，線分ＡＣ上に格子点は，ａ，ｂの公約数がd_1であることから線分ＡＣ上には，d_1-1個の格子点があるので，線分ＡＣを引くことで，分割数は，

$(a+b-1)-(d_1-1)=a+b-d_1$個増加する。さらに，線分ＡＣに平行な線分をｃ－１本引くことで，増加する分割数を求める：ａとｃ，ｂとｃは互いに素であるから，それらすべての線分上には格子点がない。よって，線分ＡＣに平行な線分をｃ－１本はそれぞれａ＋ｂ個に切断される。



$d_1=1$の場合が課題である。

ゆえに，分割数は，

$(c-1)(a+b)$ 個増加する。

以上から，求める切断される個数は，

$$\frac{ab+(a+b-d_1)+(c-1)(a+b)}{2}=\frac{ab+bc+ca-d_1}{2}\text{個}$$

【一般化４】ａ，ｂに公約数d_1，ａとｃに公約数d_2，ｂとｃは互いに素である場合

平面で切断する以前は課題１と同じく，ａｂ個である。次に，線分ＡＣ上に格子点は，ａ，ｂの公約数がd_1であることから線分ＡＣ上には，d_1-1個の格子点があるので，線分ＡＣを引く

ことで，分割数の増加は，

$(a+b-c)-(d_1-1)=a+b-d_1$個である。

さらに，線分ＡＣに平行な線分をｃ－１本引くことで，増加する分割数を求める：ａとｃには公約数d_2があるので，一般化２で示したように，線分ＡＣに平行な線分ｃ－１本のうち，線分ＡＢ上の格子点を端点にもつ線分の本数は，d_2-1本であり，格子点以外の端点を持つ線分の本数は，$(c-1)-(d_2-1)=c-d_2$本である。d_2-1本の線分については線分ＡＣと同じく$a+b-d_1$個に切断され，$c-d_2$本の線分については，線分上に格子点がないことから$a+b$個に切断される。

ゆえに，増加する分割数は，

$$(c-d_2)(a+b)+(d_2-1)(a+b-d_1)\text{ 個}$$

以上から，求める切断される立方体の個数は，

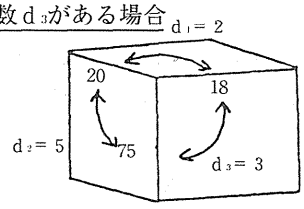
$$\frac{ab+(a+b-d_1)+(c-d_2)(a+b)+(d_2-1)(a+b-d_1)}{2}$$

$$=\frac{ab+bc+ca-d_1d_2}{2}$$

$d_2=1$の場合が一般化３であり
$d_1=1$かつ$d_2=1$の場合が課題である。

【一般化４】ａ，ｂに公約数d_1，ａ，ｃに公約数d_2，ｂ，ｃに公約数d_3がある場合

例　$a=20$，$b=18$，$c=75$の場合（右図）を考えてみる：



線分ＡＣに平行な線分のＡＢ上の格子点の有無	有	無	無
線分ＡＣに平行な線分上の格子点の有無	有	無	無
その代表としての線分	L_1	L_2	L_3

線分ＡＣに平行な線分は，

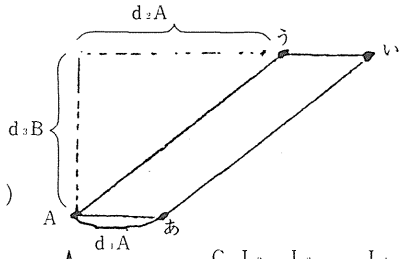
$$y=\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{c}k\right)=\frac{9}{10}\left(x-\frac{4}{15}k\right)=\frac{45x-12k}{50}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 74,\ 0\leqq x\leqq 40)$$

タイプｋ	合同式（mod50）	整数解	タイプｋ	合同式（mod50）	整数解
L_2　1	$45x\equiv 12$	解なし	L_3　20	$45x\equiv 40$	$x=12,\ 22$
L_2　2	$45x\equiv 24$	解なし	21～24		解なし
L_2　3	$45x\equiv 36$	解なし	L_3　25	$45x\equiv 0$	$x=10,\ 20$
L_2　4	$45x\equiv 48$	解なし	26～29		解なし
L_3　5	$45x\equiv 10$	$x=8,\ 18$	L_1　30	$45x\equiv 10$	$x=8,\ 18,\ 28$
L_2　6	$45x\equiv 22$	解なし	31～34		解なし
L_2　7	$45x\equiv 34$	解なし	L_3　35	$45x\equiv 20$	$x=16,\ 26$
L_2　8	$45x\equiv 46$	解なし	36～39		解なし
L_2　9	$45x\equiv 8$	解なし	L_3　40	$45x\equiv 30$	$x=14,\ 24$
L_3　10	$45x\equiv 20$	$x=6,\ 16$	41～44		解なし
L_2　11	$45x\equiv 32$	解なし	L_1　45	$45x\equiv 40$	$x=12,\ 22,\ 32$
L_2　12	$45x\equiv 44$	解なし	L_3　50	$45x\equiv 0$	$x=20,\ 30$
L_2　13	$45x\equiv 6$	解なし	L_3　55	$45x\equiv 10$	$x=18,\ 28$
L_2　14	$45x\equiv 18$	解なし	L_1　60	$45x\equiv 20$	$x=16,\ 26,\ 36$
L_1　15	$45x\equiv 30$	$x=4,\ 14,\ 24$	L_3　65	$45x\equiv 30$	$x=24,\ 34$
		解なし	L_3　70	$45x\equiv 40$	$x=22,\ 32$

図4

$$\begin{cases} a = 20 = d_1 d_2 A = 2 \times 5 \times 2 \\ b = 18 = d_1 d_3 B = 2 \times 3 \times 3 \\ c = 75 = d_2 d_3 C = 5 \times 3 \times 5 \end{cases}$$



$$y = \frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{c}k\right) = \frac{d_3 B}{d_2 A}\left(x - \frac{d_1 A}{d_3 C}k\right) = \frac{9}{10}\left(x - \frac{4}{15}k\right)$$

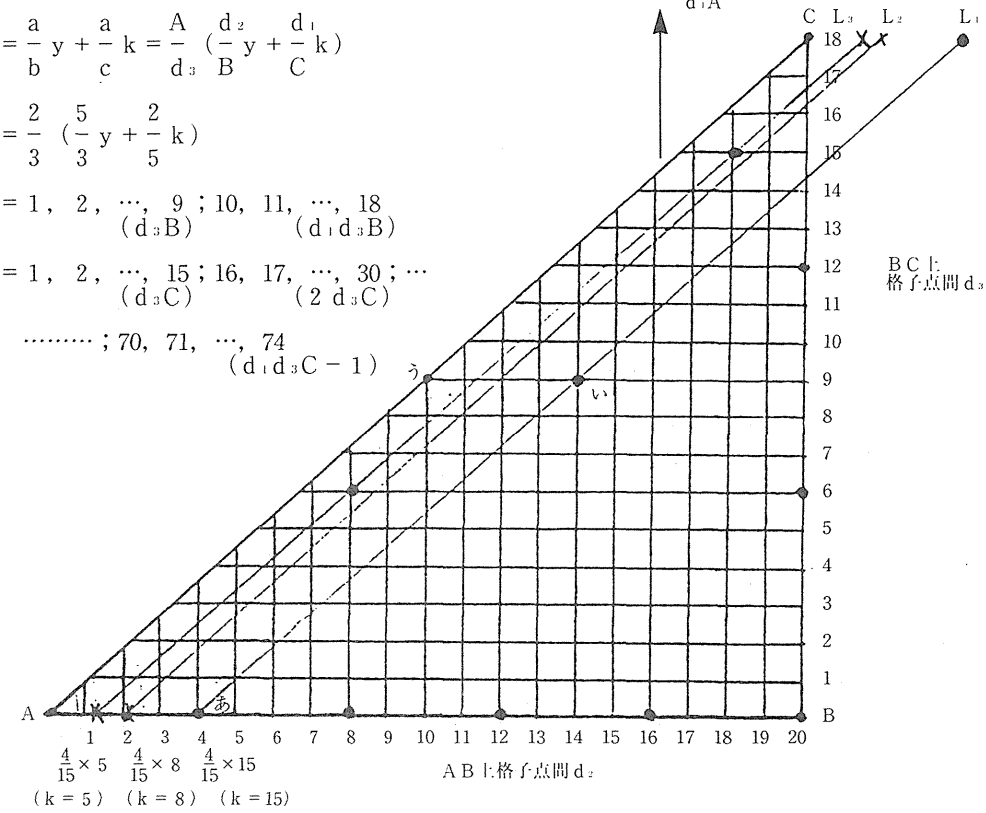
$$x = \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}k = \frac{A}{d_3}\left(\frac{d_2}{B}y + \frac{d_1}{C}k\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}y + \frac{2}{5}k\right)$$

$y = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9\ ;\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 18$
$\qquad\qquad (d_3B) \qquad\qquad (d_1 d_3 B)$

$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 15\ ;\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 30\ ;\ \cdots$
$\qquad\qquad (d_3C) \qquad\qquad (2\,d_3C)$

$\cdots\cdots\cdots\ ;\ 70,\ 71,\ \cdots,\ 74$
$\qquad\qquad (d_1 d_3 C - 1)$



線分ACに平行な線分 $c - 1 = 74$ 本の内訳

L_1が4本　　L_1によって切断される個数は，$20 + 18 - 2 = 36$

L_2が60本　　L_2によって切断される個数は，$20 + 18 = 38$

L_3が10本　　L_3によって切断される個数は，$20 + 18 - 2 = 36$

例の問題で切断される立方体の個数は，$\frac{1}{2}$（20・18＋36＋36・4＋38・60＋36・10）

＝1590個

一般に，

①線分AB上に格子点の端点にもち，線分上にも格子点をもつ線分（タイプL_1）の本数は，$d_2 - 1$ 本である。

②線分AB上に格子点でない端点をもち，線分上にも格子点をもたない線分（タイプL_2）の本

数は，$c-d_2d_3$本である。

③線分ＡＢ上に格子点でない端点をもち，線分上に格子点をもつ線分（タイプL_3）の本数は，$d_2d_3-d_2$本である。

①の線分は，$a+b-d_1$個に切断され，②の線分は，$a+b$個に切断され，

③の線分は，$a+b-d_1$個に切断される。

ゆえに，

$(d_2-1)(a+b-d_1)+(c-d_2d_3)(a+b)(d_2d_3-d_2)(a+b-d_1)$個

$=bc+ca-a-b+d_1-d_1d_2d_3$個分割数が増加する。

以上から，求める切断される立方体の個数は，

$$\frac{ab+(a+b-d_1)+bc+ca-a-b+d_1-d_1d_2d_3}{2}$$

$$=\frac{ab+bc+ca-d_1d_2d_3}{2}\text{個}$$

これが課題を最も一般化した場合の公式である。

【基本】　平面を出来るだけ多くの領域に分割するとき，直線の本数と領域の関係

〔考え方〕　直線を１本増やすことによってそれまでの領域がどれだけ増加するかを調べる。

【応用】　直方体の最も遠い２頂点を結ぶ線分の平行な平面で切断した場合の個数

〔考え方〕　イメージ：直方体のトウフがあったとして，平面が包丁の役割をする。３方向からサイの目に切ることを考える。そのとき，最も遠い２頂点を結ぶ線分としてコンブが線になっていて，そのコンブがいくつに切断されるか。

あとは課題と同様な考え方によって包丁１回毎に切断される個数が増加することを確認していく。直方体の３辺の長さの関係によって，上述のように格子点が重なるかどうかを配慮することになる。

３．授業への活用

（１）分野

中学校数学　空間図形の切断，二元一次方程式のグラフ，「課題学習」

高校数学　　Ａ「個数の処理」，Ｂ「図形と方程式」，「ベクトル」等

「コンピュータ」

（２）留意点

$y=ax+b$のグラフである直線を描く際に，ｙ切片ｂを通過し，ｘが１増加するとｙがａ増加する点を通るだけではなく，傾きａの特徴を捉えて，２つの格子点を通過する描き方を理解させることが必要である。

＃詳細については，別の機会に報告する予定である。

油分けの数理

1．課題

> aリットル，bリットル，（a＋b）リットル入りの容器A，B，Cだけを用いて，容器C一杯に入っている油を2つの量に分けるとき，どのような分け方が可能か？
> またそれは最小何回の移動でできるのか？
> 但し，aとbは互いに素な自然数で，a＜bとする。
> また容器Xから容器Yに油を移動するとき，Xの油を“全部”又は“Yが一杯になるまで”移すことだけが可能で，それぞれ1回と数えることとする。

〔解答〕　全て分け方が可能である。

また，$c = a + b$，kはc／2以下の自然数とするとき，

kリットルと（c－k）リットルに分けるための最小移動回数Nについて次の事が成り立つ。

$a z \equiv k \pmod{c}$ を満たす最小の自然数をz_1とし，

z_1と$c - z_1$の小さい方をrとすると

$N = 2r - 1$　　である。

なお上のrは，x，yの不定方程式（ア）又は（イ）を満たす整数x，yについて，

$|x| + |y|$の最小値でもある。

$ax + by = k$ ――（ア）　　$ax + by = c - k$ ――（イ）

（但し，$c - k > b$　のとき，（イ）は考えないものとする。）

（例）$a = 8$，$b = 13$のとき容器Cに入っている21リットルを1リットルと20リットルに分けることは可能であり，$8z \equiv 1 \pmod{21}$ を満たす最小の自然数は8であることから

$r = 8$　従って最小移動回数$N = 15$

なお，$8x + 13y = 1$を満たすx，yのうち，絶対値の和が最小であるものは

$x = 5$，$y = -3$　であることからも，$r = 8$　を得る。

〔解説〕　これは「塵劫記」にもある有名な問題であり，学校図書中学2年の教科書にも次の様に記載されている。

> **あぶら算**
>
> 江戸時代に数学を勉強する人々に読まれた「塵劫記」という本の中に，次のような問題がのっている。
>
> 「あぶら1斗を2人で分けるときに，3升ますと7升ますをそれぞれ1個ずつ使って，1斗を半分に分けるにはどうすればよいか。」
>
>
>
> ただし，1斗は10升で，約18ℓのことである。
>
> 著者の吉田光由は，2つのますを合わせて5回使って解いているが，3升ますをx回，7升ますをy回使うとして，次の方程式を解き，どのように1斗を半分に分けたかを考えてみよう。
>
> $3x - 7y = 5$

このままだと，

直方体の升を傾けて，例えば1/6だけ計るということを行ってもよいのか？

持ち帰る別の容器があるのか？　その容器の容積はいくつか？

元の油はどのくらいあるのか？　　等々

条件設定に関する種々の疑問を生徒は持つので，上の課題の様に設定した。

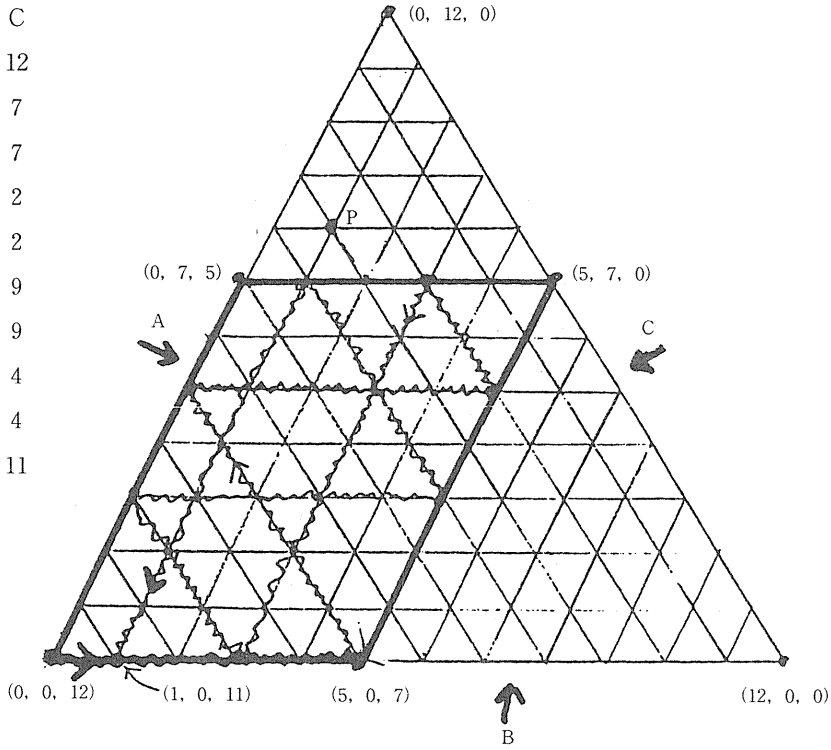
例えば，Ａ５リットル，Ｂ７リットルのときは Ｃに12リットル入っていて，これを１リットルと11リットルに分けることは表１のように９回で出来る。

また図１の様な各辺に平行な等間隔の線を引いた正三角形上の各点を，三辺からの距離をそれぞれ座標として，Ｐ（1,8,3）のように表すことにする。これに用いるとよく知られているように，表１の移動は太線の平行四辺形内を波線に沿って移動することに対応する。ここで太線の平行四辺形はＡ，Ｂの容積で決めたもので，可能な油の移動は線に沿って平行四辺形の辺上の点から辺上の点へ動くことにあたる。

表１

	A	B	C
初め	0	0	12
①C→A	5	0	7
②A→B	0	5	7
③C→A	5	5	2
④A→B	3	7	2
⑤B→C	3	0	9
⑥A→B	0	3	9
⑦C→A	5	3	4
⑧A→B	1	7	4
⑨B→C	1	0	11

図１



いろいろなａ，ｂの値に対して表１又は図１のようにして，ある分け方が何回で出来るかを求められるが，それが最小であるかはわからない。図１の方法で，平行四辺形の辺上の全ての点について，最小の行き方をしらみつぶしに調べ上げることは出来るが大変である。

以上の事からこの課題について検討し，〔解答〕に記した結果を得た。

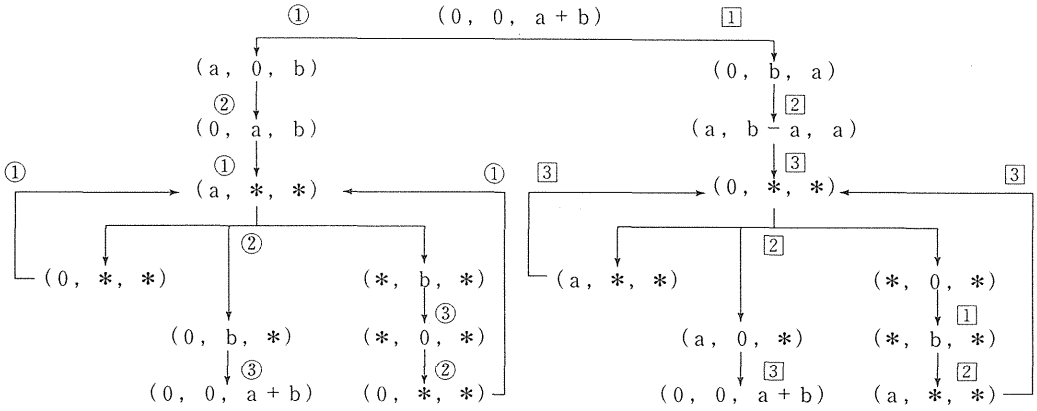
〔解答〕の証明はここでは省略するが，それに関係する幾つかの性質について以下に記し，(☆) を示す。

〔最小回数となる移動〕

CからAへのaリットルの移動を①，AからBへの移動を②，BからCへのbリットルの移動を③又CからBへのbリットルの移動を[1]，BからAへの移動を[2]，AからCへのaリットルの移動を[3]とし，①，②，③だけを組合せた移動を操作Ⅰ，[1]，[2]，[3]だけを組合せた移動を操作Ⅱとする。最小回数となる移動は操作Ⅰ又は操作Ⅱのいずれかである。

（証明）　最小回数となり得る移動を全て書き出すと次の様になる。

但し，＊は0以外の数であり，（a，b，c）はA，B，Cに入っている油の量を表す。



従って最小手数となる移動は，

①＋②＋①＋（(②＋①) 又は (②＋③＋②＋①) の繰り返し）→操作Ⅰ

又は　[1]＋[2]＋[3]＋（([2]＋[3]) 又は ([2]＋[1]＋[2]＋[3]) の繰り返し）→操作Ⅱ

（証明終り）

これにより移動については操作Ⅰ又は操作Ⅱのみを考えればよいことになる。

また，操作Ⅰ及び操作Ⅱはそれぞれ一定方向の単純な移動であり次の事が成り立つ。

〔操作Ⅰ，操作Ⅱの性質〕

操作Ⅰ（又は操作Ⅱ）で移動を2（a＋b）－1回行なうと初めの状態に戻る。

（証明）

操作Ⅰで初めの状態になることが示されれば，それを逆から見ると操作Ⅱでおこなったことになるので，操作Ⅰについて示せばよい。

操作Ⅰで①，③をそれぞれp回，q回行ったとき，

容器A，Bに入っている油の合計は　　ap－bqリットル

初めの状態の戻るのは，ap－bq＝0　となるときであり，aとbが互いに素であるから，

これを満たす最小の自然数p，qは，　　$p = a$，$q = b$

従って，操作Ⅰで①をb回，③をa回行なうことがあれば初めの状態に戻る。

一方，a，bの値が定まれば操作Ⅰによる移動は一通りであり，①をb回行なう前に初めの状態に戻ることはない。b回目の①を行なったときまでに③をX回行なったとすると，この時の容器A，Bに入っている油の合計量に注目して，

$a < ab - bX = b(a - X) \leqq a + b$

$a < b$　であるから　　$a - X = 1$　　$\therefore X = a - 1$回

従ってA，Bに入っている油の合計は　$ab - b(a - 1) = b$　であり，この後②，③を行なうことになり，初めの状態に戻る。

以上により操作Ⅰで①をb回，③をa回行なうことがあり，このとき初めの状態に戻る。移動②を含めて，移動の回数の合計は　$2(a + b) - 1$回である。

（証明終り）

表1又は図1は，$a + b = 12$の場合で，操作Ⅰによる移動を9回行ったものであるので，さらにあと14回移動を続けると初めの状態に戻る。

操作Ⅰで初めの状態に戻るまで移動を行なったとき，その途中に表れる“分けられた状態”が可能な分け方の全てであり，課題の〔解答〕の（☆）は次の様に示すことが出来る。

（〔解答〕の（☆）の証明）

操作Ⅰで①をb回，③をa回行ない初めの状態に戻ったときの移動の様子は，

$$\underline{①}+②+①+\left(\ \underbrace{(\underline{②}+①)}_{b-(a-1)-2\ =\ b-a-1\text{回}}\ \text{又は}\ \underbrace{(②+\underline{③}+②+①)}_{a-1\text{回}}\ \text{の繰り返し}\right)+\underline{②}+③$$

この途中で分けられた状態になるのは＿の所であり，その総数は，

$$1 + (b - a - 1) + (a - 1) + 1 = b\text{回}$$

又これらの時の容器A又はBに入っている油の量は全て異なる。

∵①，③をそれぞれp，q回行なったときと，p'，q'回行なったとき同じ量が入っていたとすると

$ap - bq = ap' - bq$，$a(p - p') = b(q - q')$

a，bが互いに素であるから，

$p - p' = bn$，$q - q' = an$　（nは整数）

$p = p' + bn$，またp，p'はいずれもb以下の自然数だから，$n = 0$

よって，$p = p'$，$q = q'$

従って容器A又はBに入っている油の量はb以下であることから，1からbまでの全ての数が

1度ずつ表れることになり，全ての分け方が可能であることが示された。

（証明終り）

分け方は全部で［(a＋b)／2］通り（［］はガウス記号）しかないわけであるから，b－［(a＋b)／2］　通りは2回表されることになる。

2．課題の特殊化・一般化・発展

【特殊化】

a，bについてさらに条件を付けると次の様な事が成り立つ。

1．互いの素なa，bがともに奇数であるとき，半分ずつに分ける最小移動回数は

$$a+b-1$$

（例）a＝7，b＝13のとき19回で10リットルずつに分けられる。

2．互いの素なa，bが，b＝a＋1とする。

c＝a＋b，kはc／2以下の自然数とする。

kリットルと（c－k）リットルに分けるための最小移動回数Nについて次の事が成り立つ。

$$\begin{cases} k \leqq a/2 \text{ の時} & N=4k-1 \\ a/2 < k \text{ の時} & N=4a-4k+1 \end{cases}$$

（例）a＝10，b＝11のとき，4リットルと17リットルに分ける最小回数は15回

6リットルと15リットルに分ける最小回数は17回

3．互いの素なa，bが，b＝a＋2とする。

c＝a＋b，kはc／2以下の自然数とするとき，

kリットルと（c－k）リットルに分けるための最小移動回数Nについて次の事が成り立つ。

$$\begin{cases} k \text{ が偶数の時} & N=2k-1 \\ k \text{ が奇数の時} & N=c-2k-1 \end{cases}$$

（例）a＝9，b＝11のとき，4リットルと16リットルに分ける最小回数は7回

7リットルと13リットルに分ける最小回数は5回

【一般化】

a，bに最大公約数d（≠1）があるとき，a／d，b／dを課題のa，bとみなして考えればよい。従って可能な分け方はdの倍数の場合のみとなる。

また，容器Cの容積をc（＞a＋b）としても，最小回数となる移動は操作Ⅰ又は操作Ⅱであり，操作Ⅰで移動を2（a＋b）－1回行なうと初めの状態に戻る。従って次の事が成り立つ。

1．a，bが互いに素のとき，

kリットルとc－kリットル（kはc／2以下の自然数で，k≦b）に分けることが可能

2．a，bに最大公約数d（≠1）があるとき，c／2以下の自然数kが，

$$\{k \equiv 0 \pmod{d} \text{ かつ } k \leqq b\}$$

又は $\{c-k \equiv 0 \pmod{d}$ かつ　$c-k \leqq b\}$

を満たすとき，kリットルとc－kリットルに分けることが可能

上記1，2の分割可能なkに対して，その最小移動回数Nは次のようになる。

3．x，yの不定方程式を

$ax+by=k$ ――（ア）　$ax+by=c-k$ ――（イ）　とし，

（ア）又は（イ）を満たす整数x，yについて，$|x|+|y|$ の最小値をrとする。

（但し，$c-k>b$ のとき，（イ）は考えない。）

rに対応するx，及びk又はc－kが

（i）$x>0$ かつ $\begin{cases} a<k<b \\ \quad 又は \\ a<c-k<b \end{cases}$ のときは，$N=2r$

（ii）上の場合以外は，　$N=2r-1$

（例）$a=16$，$b=26$，$c=60$ のとき，3数を公約数2で割った，

$a'=8$，$b'=13$，$c'=30$ の場合は，13通りの分け方が可能だから，

元の場合も，$k=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$ の場合が可能であり，

18リットルと42リットルに分けるための最小回数Nは，

$16x+26y=18$　即ち　$8x+13y=9$ を満たす絶対値の和が最小のx，yは

$x=6$，$y=-3$　従って，$N=2\cdot 9=18$

12リットルと48リットルに分けるための最小回数Nは，

$16x+26y=12$　即ち $8x+13y=6$ を満たす絶対値の和が最小のx，yは

$x=4$，$y=-2$　従って，$N=2\cdot 6-1=11$

（例）$a=9$，$b=13$，$c=23$ のとき，全ての分け方が可能であり，

11リットルと12リットルに分けるための最小回数Nは，

$9x+13y=11$ を満たす絶対値の和が最小のx，yは

$x=7$，$y=-4$　と　$x=-6$，$y=5$

$9x+13y=12$ を満たす絶対値の和が最小のx，yは $x=-3$，$y=3$

従って，$N=2\cdot 6-1=11$

なお，3．で最小値rに対応するxが，$x>0$　と　$x \leqq 0$　の両方のものがある場合は，Nの最小性から，$N=2r-1$ となる。

$b<c<a+b$ の場合については，最小となる移動が操作Ⅰ又は操作Ⅱとは限らない場合があり，検討中である。

3．授業への活用

（1）分野

中学2，3年課題学習，高校数学A「数と式」（論証，整数の性質）等

（2）留意点

この課題は教科書に記載されているものを整理，発展させたものであり，実際に授業で行ないながら検討したものである。

具体的な数値の場合で，表や図を用いて生徒に求めさせ，証明は難しいかもしれないが，いろいろな予想を考えさせたい。特殊化した思わぬ予想や，一般化したものなどがいろいろと出てくるであろう。