【93】

氏　名（本籍）	土　橋　大　介（山 梨 県）
学 位 の 種 類	博　　士（理　　学）
学 位 記 番 号	博　甲　第　4556　号
学位授与年月日	平成 20 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
審 査 研 究 科	数理物質科学研究科
学 位 論 文 題 目	**Groups and Lie algebras associated with one dimensional tilings** （1 次元タイル張りに付随する群と Lie 代数）

主　査	筑波大学教授	理学博士	森　田　　純
副　査	筑波大学教授	理学博士	宮　本　雅　彦
副　査	筑波大学教授	理学博士	伊　藤　光　弘
副　査	筑波大学准教授	博士（数学）	増　岡　　彰

論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文では，1 次元のタイル張りに対する代数構造が考察されている。通常は，典型的なタイル張りをいくつか選び，それらに特化して理論を展開する場合が多いが，ここでは，可能な全てのタイル張りを扱える設定にしてある。また，代数構造に関しては，双代数を用いる理論は先行研究にあったが，ここでは群とリー代数という，非常に重要な代数系に着目し，そこでの構造を詳しく調べている。

特殊なタイル張りだけではなく，全てのタイル張りに対応するために，仮想的に 3 分割するという新しい視点が導入されている。このお陰で，群やリー代数が非常に扱いやすくなり，統一的な結論が導かれている。具体的には，群は無数の SL_2 で生成され，リー代数は無数の sl_2 で生成されている。これら SL_2 や sl_2 の理論は現代代数学や現代数理物理学では無くてはならない基本的なものであるが，それらで生成されているという形で群やリー代数が構成できているのは強みである。3 分割というアイデアは，先行研究には全くなかった独自のものである。

さて，前半ではタイル張りに対して，仮想的 3 分割を行い，そこから群とリー代数を構成している。タイル張りに登場する有限単語と，そこで 2 文字を指定し，それらの 3 つ組みを考え，新たな演算を導入し，それにより多元環を定める。この多元環の乗法群の中に群 G を定義し，またこの多元環の中にリー代数 L を定義する。すると，それらは，それぞれ SL_2 と sl_2 によって生成される形となることが分かる。

前半の主定理では，G と L が，それぞれガウス分解と加法的ガウス分解をもつことを証明している。現代代数学に登場する代数群やリー代数の多くが，この性質を持っていて，構造や表現を調べる上で，非常に有力な武器となることが知られている。ここで扱っている群やリー代数も，それらのよい代数系の仲間入りが出来たことになる。群 G の上半部分，対角部分，下半部分をそれぞれ G_+，G_0，G_- とすると，ガウス分解は $G = G_+ G_0 G_- G_+$ となる。リー代数 L の上半部分，対角部分，下半部分をそれぞれ L_+，L_0，L_- とすると，加法的ガウス分解は $U(L) = U(L_+) U(L_-) U(L_+)$ となる。ここに，$U(\cdot)$ は包絡代数を与えるものとする。

本論文の後半では，ガウス分解を用いて，群表示による特徴づけを試みている。群の中で SL_2 がどのように貼り合わされているかどうかの問題の一つの答えが導き出されている。ここではスタインバーグ型の群表

示が採用されていて，スタインバーグ型の基本関係で定まる群を $\widetilde{G}$ とおけば，この $\widetilde{G}$ が G の中心拡大であることが示されている。さらに，G と $\widetilde{G}$ の関係を解明したが，自明でない中心の元が存在する可能性を潰し切れず，また中心の元を生成元で明確に記述するということまでは行われてはいない。$\widetilde{G}$ の中心を $Z(\widetilde{G})$ とし，$Z_{\pm}(\widetilde{G}) = Z(\widetilde{G}) \cap \widetilde{G}_{\pm}$ とすると，後半の主定理では，群の同型 $\widetilde{G}/Z_{+}(\widetilde{G})Z_{-}(\widetilde{G}) \cong G$ が示されている。その証明には，前半で示されたガウス分解の存在が非常に効果的に用いられている。

最後に，タイル張りの例として，フィボナッチ型タイル張りの例が記載されている。その他の例は余り詳しくは記載されていない。

審 査 の 結 果 の 要 旨

今までにない試みとして，タイル張りに対応する群とリー代数を構成して，その代数構造を解明したのは評価できる。また，群表示を用いているので，そこにタイル張りの様子が反映されていて，不変量としての側面も持っているので重要である。タイル張りの違いが，どういう形で群やリー代数の違いに現れてくるかという視点で，もっと具体例が提示されていてもよかったのではないか。群やリー代数がそれぞれ SL_2 と sl_2 で生成される形になっている点に今後の発展性が期待できるが，そういう意味でも，現在研究されている他の無限次元の群やリー代数との比較検討もなされていれば，より良かったと思われる。また，タイルの3分割により議論をスムースに進めるというアイデアは，先行研究にも全く前例の無いもので，その独創的な視点が評価できる。

以上，斬新なアイデアのもとに，今までにない代数系を構成して，新しい結果を導いているので，そのオリジナリティの高さを評価したい。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。