

氏名(本籍)	みね 嶺	こうたろう 幸太郎	(栃木県)
学位の種類	博士(数学)		
学位記番号	博甲第4557号		
学位授与年月日	平成20年3月25日		
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当		
審査研究科	数理物質科学研究科		
学位論文題目	Topological Manifolds Modeled on Infinite-Dimensional Spaces (無限次元空間をモデルとする位相多様体)		
主査	筑波大学教授	理学博士	加藤久男
副査	筑波大学教授	理学博士	山口孝男
副査	筑波大学教授	理学博士	若林誠一郎
副査	筑波大学准教授	理学博士	酒井克郎

論文の内容の要旨

無限次元多様体の典型的な例として、Hilbert空間やHilbert cubeをモデルとするHilbert多様体とHilbert cube多様体が良く知られているが、本論文では、絶対Borelクラスの普遍空間およびFréchet空間の帰納極限であるLF空間と呼ばれる局所凸線形位相空間をモデルとする多様体を扱い、関連する巾空間と同相群に関する研究も含まれている。本論文は著者の単著論文1編と5編の共著論文、計6編の論文をまとめたものである。

これまで、非可分な無限次元多様体の特徴付けに関しては、ToruńczykによるHilbert多様体の特徴付け、酒井と矢口によるHilbert空間における3種類の稠密部分空間をモデルとする多様体の特徴付けしか知られていなかった。本論文において、非可分絶対 F_{∞} 空間族の普遍空間が、非可分Hilbert空間の吸収的な稠密部分集合として存在すること示し、すべての非可分絶対Borelクラスに対して普遍空間の存在を示すことができた。これにより、BestvinaとMogilskiによる位相完備でない可分無限次元多様体の特徴付けを、非可分のすべての場合に拡張することが可能となった。さらに、得られた普遍空間の特徴付けを応用して、その普遍空間の空でない有限部分集合全体からなる巾空間が元の空間と同相であることを示すことができた。

LF空間に関しては、Mankiewiczにより、可分LF空間はEuclid空間 \mathbb{R}^n の帰納極限 \mathbb{R}^{∞} か、可分Hilbert空間 l_2 と \mathbb{R}^{∞} の直積 $l_2 \times \mathbb{R}^{\infty}$ のどちらかに同相になることが証明されており、可分なLF多様体は \mathbb{R}^{∞} 多様体と $l_2 \times \mathbb{R}^{\infty}$ 多様体の2種類に限られる。 \mathbb{R}^{∞} 多様体に関しては、十分に研究され分類定理や特徴付けが与えられているが、 $l_2 \times \mathbb{R}^{\infty}$ 多様体に関しては、他の無限次元多様体の基本定理に対応する諸結果は何も知られていなかった。本論文では、 $l_2 \times \mathbb{R}^{\infty}$ の開集合がHilbert多様体と \mathbb{R}^{∞} の直積と同相になることを示すことができた。この結果とHilbert多様体の分類定理を組合せることにより、互いにホモトピー同値である $l_2 \times \mathbb{R}^{\infty}$ の2つの開集合は同相であることが分かる。Mankiewiczは、非可分のLF空間の位相型も2種類に限られることを示しているが、その一方である稠密度 τ のHilbert空間 $l_2(\tau)$ と \mathbb{R}^{∞} との直積空間 $l_2(\tau) \times \mathbb{R}^{\infty}$ の開集合に関しても、上記の結果が成立する。他方は、稠密度が $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ のHilbert空間 $l_2(\tau_i)$ の直和 $\sum_{i \in \mathbb{N}} l_2(\tau_i)$ であるが、この開集合に関しては、距離位相をもつ局所有限次元単体複体と $\sum_{i \in \mathbb{N}} l_2(\tau_i)$ の直積と同相にな

ることを示すことができた。

また、Whitney 位相をもつ \mathbb{R} の同相群の極大連結部分群が $l_2 \times \mathbb{R}^\infty$ と同相になるという Banach の結果を平面 \mathbb{R}^2 の場合に拡張した。これは、コンパクトでない 2 次元多様体 (2 次曲面) へ拡張するきっかけとなった結果である。無限グラフの同相群に関しては、箱積との関連も明らかにし、可算無限連結グラフの同相群とその極大連結部分群の対が $(\square^{\mathbb{N}} l_2, \square^{\mathbb{N}} l_2)$ に同相になることを示した。ここで、 $\square^{\mathbb{N}} l_2$ は l_2 の可算箱積であり、 $\square^{\mathbb{N}} l_2$ は $l_2 \times \mathbb{R}^\infty$ と同相な $\square^{\mathbb{N}} l_2$ の部分空間で、有限個以外の座標が 0 となる点全体からなる弱箱積と呼ばれる空間である。

審 査 の 結 果 の 要 旨

トポロジーの諸分野と同様、無限次元多様体の理論においても、位相的分類と位相的特徴付けは研究の大きな目標の 1 つである。有限次元空間を扱っていても、その上の関数空間や巾空間などを考えるなら、殆どが無限次元となり、多くの場合、無限次元多様体となる。こうしたことを確かめるには、無限次元多様体の位相的特徴付けが必要になる。可分な距離空間であっても、その上の関数空間や巾空間などは非可分になるものも多く、非可分な無限次元多様体の位相的特徴付けも必要となる。そのような意味で、Bestvina と Mogilski の結果を非可分な場合に拡張することには大いに価値がある。この拡張において要となるのが、絶対 Borel クラスの普遍空間の存在定理であるが、絶対 F_σ 空間の可算共通部分とならない非可分絶対 F_σ 空間の存在などが障害となっていた。こうした障害を回避して非可分な場合に拡張できたことの意義は大きい。

LF 空間をモデルする多様体の研究において、コンパクト距離空間の位相的帰納極限にもなっている \mathbb{R}^∞ をモデルとする多様体は扱いやすいが、それ以外の LF 空間をモデルとする多様体に関しては、研究の糸口が見つからず、これまで手が付けられて来なかった。Whitney 位相を持つ関数空間などへの応用も見込まれ、LF 多様体の理論の構築が大いに望まれている。本論文の結果と手法は LF 空間の開集合に関する結果とはいえ、LF 多様体の研究の草分けともいえる価値ある結果と言える。グラフの同相群に関する研究では、LF 空間と箱位相の関係を明確にしており、ここで開発した手法は非常に斬新であり、今後の発展が大いに期待される。

以上述べたように、本論文は非常に優れた結果を含んでおり、本論文の基になった 6 編の論文のうち 3 編は著名な国際学術誌に投稿され論文審査を経て、2 編は既に掲載され、残り 1 編は掲載予定となっているので、国際的な評価も得ているといえる。

よって、著者は博士 (数学) の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。