筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第26集　1987年３月

数学学習における数学史の利用に関する一考察

筑波大学附属駒場中・高等学校
礒　田　正　美

数学学習における数学史の利用に関する一考察

礒　田　正　美

はじめに

「数学史を数学教育に利用しようという計画は，戦前には，かなり具体的なところまで進められていた。ところが戦後は，めまぐるしい科学技術の進歩発展に即応する数学教育の研究のかげにかくれて，ほとんどかえりみないままとり残されている。」と片野善一郎氏は1964年に述べている。この状況は問題解決がとなえられる今日においてもあまり変わっていないと言えよう。数学史の利用の有効性を感ずる筆者にとっては，残念な状況である。このような状況を鑑みて数学史の利用を考える時，数学教育おける数学史の利用の意義とその利用法および実践について今日的な視野から再考察する必要があると考える。本報告では，その試みの端緒として，数学史利用に関する新たな視点を諸説をふまえて設定し，その実践的な可能性を検討する。本報告の構成は以下の通りである。

構成

Ⅰでは，数学史の利用と意義について考察し，筆者の立場及びその方法を設定する。
数学史の利用の意義は，利用の仕方から考察される。まず(1)で戦前における数学史利用の第一認者である片野氏の主張を取り上げ，検討すべき課題を明確化する。続いて，その主張を反省，発展させる目的で(2)で数学史の研究の立場について中村幸四郎氏，ピアジェ，フロイデンタール等の主張に学び，数学史に対する認識を深める。そして(3)で筆者なりの立場である追体験の立場を設定する。そして，(4)で利用と意義についてふれる。Ⅱでは微分法の導入の指導事例を述べる。結びでは本報告の結論を述べる。

Ⅰ．数学教育における数学史の利用とその意義

ここでは，数学史とその利用法，意義について検討し，筆者の立場とその方法を設定する。

Ⅰ－(1) 片野氏の主張

考察の視点を得るにあたり片野氏の主張を参考にしよう。片野氏は数学史の利用の仕方および意義として次の２点をあげている（傍線，括弧内，筆者)。

① 教材についての理解を深めるため，それが，いつ，どこで，誰によって，どのように創造されたかを知らせる（意義）ことである。つまり，いま学習していることが，数学発達史のうえでどのような意義をもっているか，それが将来どのように発展してゆくかといったこと（意義）を明らかにすることである。この場合は説話形式の授業（利用の仕方）となろう。もちろん，説話形式をとるといっても，ただそのことについての歴史をまとめて物語るというのではなくて，授業の導入や途中にうまく組み入れなければならないから，そういう工夫が必要になってくることは言うまでもない。

② 歴史的な問題を素材として（利用の仕方)，数学の学習をかねながら，それを通して数学発達史の一こまを理解させる（意義）ことである。この場合にも，歴史的問題をそのまま与えるのではなく，教育的見地から多少改変しなければならないし，またその歴史的解説が加わらなければ理解は不完全になるから，①の方法を併用することになろう。

（以上引用）

片野氏の主張において筆者は数学の発達史という語に注目したい。数学の発達史の中で当面する教材を学ぶ時，また，当面する問題に着目する時，生徒は，その学習の意義を感じ，動機付けられるところに意義があるということであろう。そこでは，数学史ではなく発達史という語がもちいられている。数学史とは何か？それに対して数学の発達史とは，何を意図した言葉なのであろうか？それが本稿のひとつの考察課題である。

数学史とはという課題に続く問題はそれが教育においてどのような利用可能性をもつのかという問題である。片野氏は利用の仕方について①は説話形式の授業，②は教材としてと述べている。教師，教材，子供という授業の三角形モデルからみれば，いわば①は教師の立場からの説明にかかわるものであり，②は教材の提示にかかわるものである。子供にかかわった利用の仕方はないのであろうか？さらには他の利用の仕方はないのであろうか。この利用法がもう一つの課題である。この２つの課題，特に前者の課題に関連して，つぎに数学史とはどのようなものかについて考える。

Ⅰ－(2) 数学史の研究の立場

ここでは数学史研究の２，３の立場を見ることで，数学史とはどのようなものかを考察する。

中村幸四郎氏は著書「近世数学の歴史－微積分の形成をめぐって－」を書き始めるにあたり次のように述べている。「私はこれから16，17世紀にわたる西欧数学の歴史を，その形成と構造をとに着目しつつ述べてみようと思います。しかし数学の歴史を叙述するといっても，いわゆる数学の来歴を物語る「はなし」を書くことは，私としては，まず第一に採れない立場であります。………中略………あるいは数学史は数学を創った人々の伝記であるという考え方もかなり広くいきわたり，またよく受け入れられている考え方です。………中略………ここでも不服を申し立てねばなりません。」中村氏はここで数学史が，お話や伝記とはことなるものであることを強く主張している。氏は数学史のあるべきすがたを次のように述べている。「数学的事実をたんに年代順にならべていっても，それだけでは歴史にはならない。あるいは種種の数学の問題の来歴を記述してみても，それは歴史ということができない。名所旧跡の説明は，かならずしも，歴史とは言い難いのである。数学がそこにみられるようなものになるまでの過程を明らかにすること，すなわち数学を，たんにそこにあるものとしてではなく，数学を形成において考え，その形成のメカニズムを明らかにすることが，数学史の主眼であると私は考えるのである。」（傍線筆者）

中村氏によれば数学史の記述には，お話と伝記そして氏の主張する数学の形成の立場という3つの立場があることがわかる。特に形成の立場は，今日的な数学史の研究法である。一方，片野氏等の時代（戦前）では，歴史の話や伝記が数学史の著作の大勢をしめていたと聞いている。（注；ただし，欧米の資料が取得しにくかった事を考慮する必要がある。国内にある和算の研究においては，かなり今日的な原典主義による研究がなされていた。三上義夫「文化史上よりみたる日本の数学」）その意味で，先に問題にされた発達史という考えは，ここで言う形成史の意味と同一のものとは考えにくい。実際，教師でもあった（その意味で中村氏と立場の異なる）片野氏は教育での利用においてお話も歴史に入れており，中村氏の否定する年代史をもふくんで議論している。このような数学史の記述の立場の食い違いは，今日の数学史に関する様々な著作において，数学史研究の著作と一般教養としての著作の目的上の差異と見ることもできる。

今日の数学史研究が形成の観点が重視されていることはJ. PiajetやH. Freudenthal, J. Dieudonne等の主張にも見ることができる。認知科学者ピアジェは，数学史の歴史科学における位置を指摘している。普通，歴史科学が具体の再現を主にめざして研究されるいるのに対して，科学史，特に数学史が発達研究としての特徴をもつと言う。「数学史はだんだんと進歩していく，各発達段階の構造の内的特性を記述する。」彼の主張において，形成史の研究は資料から具体を再現するだけでなく発達段階の構造の内的特性を記述することであるがわかる。中村氏は，形成のメカニズムとしての研究を数学史の「内部理論」の記述として特徴付けており，軌を同じくした主張と言える。

教養書的な意味も含んだ片野氏の著作では，この内部理論の記述というよりも文化史的観点での記述もみられる。ブルバキの主要構成員であったデュドネは文化史的観点の記述を批判している。「一部の人々が数学の理論の起源に関して与えようとしている社会学的〈説明〉は説得力に欠けるように思われる。むろん〈抽象的〉思弁の発達の為に一定の文化水準が必要であることは

明らかである；しかしこうした月並みな文句を並べたところで，本当に〈説明した〉ことになるのであろうか。18世紀末のドイツの小さな宮廷における社会環境が，何故不可避的に若いGauseを定規とコンパスによる正17角形の作図の研究へ導いたのかはまず分からない。………数学の発達の主要な原動力は内的起源から，つまり解こうとしている問題の性質への深い配慮にあるのであって，問題の起源そのものはあまり大きな影響をおよぼさないと考えるのがおおむね数学の発達についての妥当な見方のようである。」（数学史，岩波）社会学的な説明が説明にならないという主張や，文化的観点の記述は必要であったとしても内部理論の研究が現在の数学史の研究の主題であるという主張は，中村氏の主張と軌を同じくするものとみることができる。

数学，数学史，数学教育において世界的な仕事を進めているフロイデンタールは，数学史の研究に対して「数学的創造の所産より過程を研究すべきである」と言っている。過程の研究とは形成過程の研究であり中村氏の主張に通じている。また，所産を研究するとは歴史的事実を前提にして例えば年代順にならべるというような作業を進める立場であると理解される。フロイデンタールは，所産の研究が学習においてお話や伝記にみられるように暗記に特徴付けられることを示唆している。彼はお話が最初の歴史記述の形態としながらも，それが作り話や，誤った歴史を記述してきたことを指摘する。特に，歴史では暗記することは必要である。しかし暗記しただけの構造化されていない知識は無益であると言う。過去は我々にとって無定形なものであり構造化することが重要である。そこでは，数学史を形成過程からとらえることが，大切であると指摘する。たとえば，つい最近までは，ｆ（ｘ）という記号をもちいていて最近はｆを使うようになったのはどうしてかというようにして，歴史をたんに事実を並べるのではなく形式過程の立場からとらえ組織化しようするのである。このような２つの立場は，フロイデンタールが日ごろ主張するところの所産としての数学と活動としての数学という２つの数学観に通じる観点である。

以上，ここでの議論を整理すると次のような図式が成立する。

記述形態の特徴	数　学　史　観
お話，伝記，文化史的記述	所産としての数学史
形成の内部理論，発達段階の論考	形成過程としての数学史

むろんこの図式は，完全な区分ではない。しかし，形成過程としての数学史が数学の発達段階の構造の内的特性（内部理論）を記述しようとするのに対して，所産としての数学史の記述では，それが産まれる際の不確かなゴシップや出来事につつまれてしまう可能性があるのとはおおきな違いがある。中村氏もフロイデンタールも形成過程の研究ではまず第一に原典にあたることを要求している。数学史研究における原典主義は今日的な方法論である。もちろん，所産としての立場でも原典にあたった正確な記述は求められる。ただ，その記述は事実を並べただけの退屈なものになり，暗記をするだけのものとなる。歴史の記述家が，そこで歴史を，本質的でない観点から興味本位に記述して結果的に事実から離れて変えてしまうことを，形成過程の立場では問題視

するのである。

以上２つの立場が数学史研究の類型である。先に「数学史」と「発達史」の言葉の意味について筆者は問題にした。筆者は「数学史」とは上記の２つの立場を区別せずにもちいた数学の歴史全般にあてられる言葉と考え，「発達史」とは形成過程の立場にあてられる言葉と考えている。続く課題は教育へ利用である。特に興味深いのは形成過程としての立場からの利用である。形成過程としての数学史の教育への利用を考える時，フロイデンタールの主張は示唆に富んでいる。子供の学習の立場から彼は次のような形で述べている。「人類もまた一人の学者である。その学習過程を観察することは，我々が歴史とよんでいることである。人類の大きな学習過程についての知識から，個々の学習者はどのような利益を得ることができるであろうか。数学の発達の各段階は，次のことを示している。洞察によって得られた知識は図式化 (schematization) と記憶（それをコード化とよぶ）によって，より高次な技能や洞察力に変換される。」フロイデンタールはここで個体発生と系統発生の類比から子供の認知発達への示唆をえている。これは，こどもの立場からの数学史利用への示唆として，先のピアジェの主張をさらに進めるものである。

Ｉ－(3)　教育における利用の立場

ここでは，上記の数学史の２つの立場をもとに，教育への利用を考察する。数学史の教育における利用を考えるとき，上記の数学史の二つの立場から２つの両極の存在が明確になる。

一つの極は数学の学習の為の教育的配慮を主眼にし，数学の形成史を意識しない立場である。教育は文化の修得も大切な観点である。たとえば，数学学習を動機づける目的の，ある子供向けの本に次のような記述がみられる。「デカルトは座標を使って図形の問題を代数的に解いた最初の人なんだ。その意味ではデカルトは生きた座標を用いた人といえるだろうね。」このお話は，数学史についての記述ではあるが，座標のアイデアはデカルトよりフェルマーによるものという説もあり，直交座標の表現になるまで時間のかかったことを考えると，どこかで歪められた不十分な事実にもとづいているかさもなくばそう受け止められる可能性があると言える。これは，所産としての立場とみることができよう。実際，授業で座標の話をする場合，哲学者としても著名なデカルトが座標を考え出したと指摘するのが一般的であるようだ。これは，教育が歴史に先行して，すなわち教育の観点が結果的に歴史をゆがめたり，事実を不鮮明にしてしまった例である。そこでは子供の動機付けというねらいが優先し，そのために子供にわかるような形式で記述されたのである。

もう一方の極は，形成の立場からの数学史の学習が数学自身の理解に結びつくという立場である。フロイデンタールは数学史の授業時間の設定の意義の主張の中で次のように指摘している（オランダでは大学の数学科に数学史研究室が設けられている）。「私は過去の教育により，人間が，彼の種の，地球の，宇宙の過去の，構造化した理解をえるようなことを信ずる。私は，この目標に貢献する試みをしたい。その試みとは，数学およびその周辺の歴史の利用である。その利用とは，数学よりもむしろ歴史を利用することであり，数学の理解よりも歴史の理解を促すこ

とである。その利用のボーナスとして数学に対する助成もできる。………中略………（特に，歴史の好きな大学生の場合では）彼は学科の歴史に対する活動の機会が与えられるぶきだ。……中略……歴史は，他の人が読んだり，孫引きしたことを学ぶよりも，原典で学んだ方が価値がある。」この場面で彼は，過去の教育を目標にして，教科の教育より歴史を優先させている。そこでは，数学史の数学学習に対する寄与は数学の形成過程の学習に伴うものである。

この両極は異なる目的に基づくものである。そして，授業においては，数学の授業のために所産としての数学史を扱うのか，それとも形成過程としての数学史を扱うことで数学の理解を促すかに依存して採られる立場と言える。この両極は，単純には数学教育における数学史の利用に際しての問題状況を作り出す。利用はどの立場で，もしくは両極の間のどのへんでなされるべきかというような議論である。例えば先の片桐氏の議論は，数学史を発達史と考えてつつも，数学学習への寄与を念頭にして，お話という記述方法を採るものと理解される。そこでは，形成過程とみる立場と所産とみる立場が共存しているようにみえる。しかし実際には，教育で扱うのは常に所産であり，それをいかに過程で扱うかという点に我々は苦労しているのである。そのような作業で明確なことは，２つの極もしくはその間のどこならばよいかという発想では，歴史的所産を我々の教育の過程へと転化できないということである。目的が異なるものの間を単に方法論で結びつけるからである。

この問題の克服には，教育における数学史利用の考察にあたっての新たな立場の設定が必要であると筆者は考えている。筆者の立場は，数学学習の過程を，数学創造の過程の追体験（同じ体験を意味しない）の場として構成するために数学史を利用しようとする立場である（その目的は，数学のもつ創造的な人間活動を通じての人間形成にある）。これはフロイデンタールの言う再発明の過程という考えに基づくもので，学習過程を検討する際の観点に数学の形成過程を視野に入れようとする立場である。この立場と形成史としての数学史の学習による数学の理解という立場の違いは，所産を過程へと転化するに際して，形成史を視点に含めようとする点にある。また，この立場と先に述べた学習の為の教育的配慮の立場との違いは，数学の形成過程を強く意識する点である。

カジョリの次の言葉は，追体験という立場が，所産の立場から生まれる誤りを教育実践において許容し得ることに示唆している。「ピタゴラスが彼の名を負える幾何学の定理の証明を発見した喜びに，供物として牛百頭を犠牲にしたとの話は，若い生徒を面白がらせるだろう。たとえこの話が信じがたいものであるとしても，少し深く反省するなら，それは矢張り真理を伝えているのであることが知れよう。即ち，この話を本元たるピタゴラスあるいは後継者が，幾何学上その定理の重要さを十分に実現したのだと生徒に信服させ得る」ただし，どんな話でも許容することを意味するものではない。許容し得るか否かは先の２つの立場を参考に，事例に応じて考察されるべきである。事実に反する作り話を真なるものとして扱うのは教育上明らかな誤りと考える。例えばピタゴラス定理の発見のすばらしさを強調して上記の話をするのであれば，これは「言伝えではっきりしないが」程度の前置が必要であろう。さらに，その話よりこどもにとってのその

定理の実際的な有効性を実感として示すことの方が意義が在ろう。

しかし，このような場当り的に追体験の立場を使うのであれば，それは単なる授業構成にあたっての視点に過ぎない。追体験の立場をさらに明確に打出すためには，追体験の立場からの学習指導を考察するための方法を明らかにしてゆくことこそ必要である。そこで次に追体験の立場からの数学史の利用法と意義について考察する。

Ⅰ－(4)　教育における利用と意義

数学史の利用法として，次のような利用の仕方と意義があると考える。

数学史を扱う立場からは，所産にふくまれると考えられるが，目的として追体験をねらうものとして片野氏の主張から次の２つを上げる。

① お話による利用

その概念の生まれた必然性や文化的背景，意義について知らせる意義

例「なぜギリシャ人は証明をするようになったか」

理由　ギリシャの社会的文化的状況

ギリシャ人の摂取したオリエント諸国の数学の成果が不統一であったこと

② 教材を捜し出すための教材集としての利用

教材を歴史的事例から探る。歴史的問題を解くことを通じて追体験をする意義

例「パスカルの三角形」

数学史を形成過程としてみる立場から，追体験をねらうものとして(2)のフロイデンタールの議論を参考に次の２つをあげる。

③ 学習過程への利用；学習過程の構成に際して，数学の発達の段階，そこでの内部理論を探り参考にすることによる利用

これは，文字どおり数学の創造過程の追体験である。そこでは追体験の仕方こそが問題であろう。河田敬義氏は次のように述べている。「数学を現代風にやるのは当然ですが，やはり歴史の発達の段階をなるべく体得するような道順を踏んでやる方がよいのではないか」このような「歴史的順序を参考に……」という主張は，古くから指摘されていたことと思われる。しかし，教授活動にどのように参考にすべきかという点について十分な考察がなされてこなかったのではないだろうか。もしくは，教授学習過程の構成に際しての明確な方法論を欠いていたのではないだろうか。実際，歴史とおなじ過程をたどるのは不可能である。フロイデンタールはこの点を次のように述べている。「数学の歴史は，漸進的な図式化の学習過程である。子供が，人類の歴史を繰り返す必要がないのではなくて，先祖が立ち止まった現実の事柄からはじまることを予想すべきでない。実際に起こったこととしてではなく，我々が幸運にも知る歴史を祖先が知っていたとして，たぶん起こったであろうと思われる歴史を繰り返すべきである。」たぶん起こったであろうという部分を我々が授業の中で具体化してゆく必要のある点である。この方法の利用の仕方のレベルは多様に存在すると思われるが，おおまかには次の３つのレベルがあろう。

③－１　ある学問領域の成立史を参考にその領域に対する子供の学習過程を考察するというものである。幾何を例にする。たとえば，幾何の歴史と，学習過程に認めることができるファンヒーレ夫妻による思考水準は，次のように対応している。

時代区分	具体的内容	水準	具体的内容
原　始	物の形を描く時代	0	物の形を考察する
エジプト	測量の時代	1	形の性質を考察する
ギリシャ	ターレスが初めて命題として証明した時代	2	性質を命題で考察する
	ユークリッド幾何の時代	3	命題を論理で考察する
近　代	ヒルベルトの時代	4	論理体系を形式論理で考察する

この幾何の思考水準は，夫妻や教授経験から得られたものであるが，それが数学史と対応していることは，夫人やフロイデンタールが指摘している。これは個体発生と系統発生，数学学習に際しての生徒の発達と数学の発達史との対応を示す顕著な事例である。

また，仲田紀夫氏も次のような教育過程との対応を示している。

図形の発達史		学校の図形学習体系
B.C.4000～古代エジプト 縄張師の測量術	⟶	小１～小４ 図形の名称，作図，操作
B.C.600　古代ギリシア ターレスの初歩論証	⟶	小５～中１ 図形の性質の説明
B.C.300　ユークリッドの 体系論証の一部	⟶	中２～中３ 三角形，四角形，円の性質の証明
A.D.1700 デカルトの座標幾何学	⟶	高１～高２ 図形の代数化

③－２　ある事柄の創造の，変遷の歴史を参考に，こどもの学習過程を考察する立場である。例えば，神長幾子氏は接線のアイデアの変遷の歴史と現行の教育過程を類似していて評価できることを述べている。図は氏の主張を参考に筆者が構成した。

この利用の仕方で注意すべきことは，前で指摘したように歴史とおなじ学習過程を構成しようとするものではないことである。追体験として利用の仕方の目的は，子供の立場から学習過程を構成しようという考えにある。その一つの方法として，個体発生と系統発生の類比により子供の認識の過程を探ろうとするこの利用法があるのである。子供の認識にそうものであってこそ意義がある。子供の認識と歴史は，状況が異なるため一致するとは限らないから，その利用はさらに子供を意識した立場で考察してゆく必要があろう。

時代区分	歴史的アイデア	学年	指導内容
ギリシャ	円と一点のみ共有する直線という幾何的なアイデア	中 3	円と直線
微積分前夜	十分近い2点を結ぶ解析幾何的な記述	高 1	放物線と接線
ニュートン	一方の点を限りなく他方に近づける	高 2	微分法による接線

③－3　形成史の分析から数学の発見・創造のダイナリズムを学び，数学的活動の一般的な特徴を探ることで，その特徴を学習指導に実現しようとする立場である。この領域の研究は，むしろ数学的な活動そのものを研究するために数学史に注目するものであり，多数上げることができ，研究の視点は多彩である。ここではその研究事例を上げるにとどめる。基礎的な研究としては，Ｊ.ポリアやＥ.ラカトス，Ｊ.コンフリー，Ｈ.フロイデンタールの著作をあげることができる。実践されているものとしてはオープンエンドアプローチや問題の発展的取り扱いもこの利用法としてみることが可能である。また，今日の問題解決の研究もこの範疇でみることが可能である。筆者が研究課題としている「数学化」もこの立場である。

④　数学史自身の考察

これは「どうしてこういうことを考えたのか？」というように，子供自身が疑問符による活動を通じて数学の形成過程を追体験することを指す。このような活動は，数学史に対する真の理解をもたらすとともに，創造的な活動としての数学に対する理解，数学的な思考方法の理解を深めるものとして意義がある。もちろん，学校教育の中で数学史の研究をすることは，時間的制約から困難である。しかし，このような活動が数学史および数学の追体験による理解に通ずることはん確かである。例えば，ユークリッド原論にみられるピタゴラスの定理は，正方形の面積に関して記述されており，証明は等積変形という観点でなされている。「どうして…」という問いは，当時の人々の思考法の特徴を明らかにすることから，等積変形による証明の補助線を引くための観点までを見出す契機となるのである。

この追体験としての利用のさらなる意義は，数学（教材）の正しい認識にたって授業を進めることがより可能になる点である。教育において必要上提示される数学的な配慮や誤りを例に述べよう。数学的配慮の例として，定義の問題をあげることができる。教科書で定義は数年後の学習で矛盾や問題が起こらないような配慮がなされる。子供はどうしてそう定義するのかを知らせることはあまりなされないようだ。それは数学の形成史から考えるなら順序が逆である（この順序をフロンデンタールは「反教授学的な逆転」と呼んでいる)。定義は最初からあるものではなくて，数学的な知識成長の中でなされた概念達成の結果である。必要な教育的な配慮は，単なる定義の練習ではなくてどうしてそのような定義をするかということであろう。誤りの例として認識

論的に不適切な造語を例としよう。数学史でもさまざまな造語がなされているが，それが認識と離れていればいくら数学的に適切でも不適切と言える。例えば，ヒルベルトが公理で使われる用語を机，椅子と置き換えてよいと指摘したのは有名な逸話であるが，その言葉の意味を解する事ができるのは，公理とはいかなるものかを知っている者のみであり，そうでない子供にこの話は無意味であるかさもなくば理解し難い。

これらの４つの利用法はもちろん相互に関連しているものであって，独立したものではない。また，すでに指摘したきたように，これらの利用法だけで指導計画を作成することはできない。歴史的な順序と指導要領の配列の違い，また，大数学者等の苦心の歴史と生徒の学習過程の違いなど歴史と学習とはかなり異なる要素をもっているからである。授業はあくまでも所産を過程へと転化する教師と生徒相互間の作業である。

Ⅱ．学習指導事例；微積分の形成史の利用～関数概念の歴史に注目して～

ここでは，これまでの議論をふまえ高等学校の事例について考察する。事例は，微積分の形成史の利用である。利用の仕方は大きくは③の方法に属するが，具体的には他の方法も併用する。

微積分の形成史は，複雑であり，利用するには現行教育過程との違いがめだつ。ここでは微分法の導入に際して，形成史を自分なりにとらえなおすことにした。具体的には，関数指導の最終段階としての立場からの再検討であり，関数の歴史を参考にするものである。関数の歴史として一般に指摘されるのは，関数の定義の変遷である。しかし，ファンクティオという用語の誕生そのものが微積分の成立に伴っているため，ここでの考察には不適切である。実際，関数概念の歴史は太古に遡ることが可能であるからである。そこでは関数概念の解釈によって多様な歴史を見ることができよう。ここでは解釈の視点として，関数概念の一つの本質的な側面である変化の記述に焦点を当てる。変化の記述の典型は，運動を記述するモデルとしてどのような記述方法を用いたかということである。歴史的には，運動を記述するモデルとして次の様な層（時代区分と言えるほど厳密ではない）が認められよう。

層	歴 史 的 記 述 事 例
0．変化の関係の認知	「～と～は伴に変化している」「～のせいで～かわる」等の記述すべて
1．変化の特徴の認知 方法：数，表，図示	日時計のように太陽（地動説では地球）の運動を数字に対応させて時間の変化を知る。数や視覚を用いたモデルを用いている。古代から天体の運動の観察でなされてきた。典型例はB.C.5Cごろには知られていた惑星の黄道におけるジグザグ運動の記述。水時計などもその事例である。 ここでは表も使われる。たとえばヒッパルコスやプトレイマイオス等(A.D.２Ｃ頃）は三角表を作っている。 ここで関数は主として現象に依存して用いられている。

2. 変化の特徴の式，グラフによる認知 方法；式 グラフ	式やグラフによるモデルは歴史的には近世であるが，言葉の式やユークリッド幾何を用いたモデルは古くから存在した。ガリレオの落体の記述が典型である。「放射体の曲線が既にアポロニウスによって論じられたパララに外ならぬことは何人も指摘していない」(ガリレオ)。アポロニウスは，2次曲線を幾何的に分類したのであり，そのモデルを落体に適用したのがガリレオといえる。今日的には既知の関数で運動を表現することであり，式やグラフによる認知と言えよう。 ここで関数は実際の現象と独立して存在している。関数は現象への適用として利用される。この適用により，適用された関数の既知の性質が同時に適用可能である。
3. 式，グラフの特徴の認知 方法；微分積分法	既知の関数に限らず未知の関数の性質を探るモデルとして微分積分法が利用される。微小変化から全体の変化の実態を知り全体の変化から，微小変化の実態を知ることができる。ニュートン・ライプニッツが始めた方法と言える。

この歴史的変遷について各層は前の層の関数についてのメタ理論を構成している。すなわち，高位の層の関数に関する理論は下位の層の関数に関する扱いを説明することのできる理論である。微分法積分法の歴史的位置を③の発想をもとに考えるとき，微分積分の形成過程は，おおまかには層2から層3への数学化として考えることができよう。運動の記述の立場で微積分史をみると，ニュートン以前の運動の記述の第一人者はガリレオであることがわかる。ガリレオは，等加速度運動や衝突について扱い，落体の運動が放物線で表わされることなど今日の力学の基本的な考えを既に示している。それを極限の考えて再構成し発展させたのがニュートンであると言えよう。ここでは結果的に教材としてガリレオの「新科学対話」を選び授業へ活用することにした（②の利用法の発想)。

微分法の導入を授業を企画するに際して，生徒の実態を知るために事前調査として，1秒間隔の落下時間と落下距離を示す表を与え，落体の変化の様子を記述させる課題を出した。生徒の解答は次の2つに類型できた。

α．表，グラフ，式からわかることを述べたもの（2／3の生徒）

β．特に数列の考えを利用し，落下距離の第2階差が9.8であることを用いて，$y=4.9x^2$ であることを導こうとするもの（1／5の生徒）

特にβの考え型は差分法・和分法の考え方であり，極限の考えが加われば微分積分法に通じる考え方である。筆者はαとβの解答の違いを見ていてガリレオとニュートンの違いとの類似性を強く意識した。もちろん歴史的な記述と現在の生徒の学習の進度とは異なっている。素朴な実験とその数値化，そして幾何的説明というガリレオの記述は，こちらの解釈の仕方によっては極限発想をかいまみる部分が含まれている。しかし，その記述はニュートンの導入した極限による微分積分と異なるというのが通説である。ここでαよりβが運動をより一般的に記述していることに加え，βは極限のアイデアが加われば微分積分法になる。αからβへの発展，そしてβから微分積分法への発展，この流れが，状況やそこでの題材は異なるものの，ガリレオからニュートンへの歴史的発達（中村；近世数学の歴史参照）と類似性が認められる。この発想から授業は，生徒の差文法の発想を微分の考えに改めることを目指して，考察の場面にガリレオの「新科学対

話」を利用して進められることにした。

授業では次の点をねらった。

ア．生徒の考え方から出発してその考え方を極限の考えで乗り越える。

イ．数列による記述を扱い，微分積分の考え方の一端を示す。

ウ．現象を考察する一つの方法として微分法を示す。

エ．微分法の必然性を示す。

この視点から次のような導入の授業を設定した。

A．落体の運動の記述の仕方　　　　（1時間目）

B．微分法の導入　　　　　　　　　（2時間目）

Aでは子供のもつ運動の記述の仕方をできるだけ出させて，数列の記述の仕方について議論する。ガリレオによる「新科学対話」の運動の記述の意味を探るという形式（④の利用法）で，関数の変化の考察の必然性を設定した。Bでは数列による記述の仕方の限界を指摘し，極限の発想をもとに微分係数を導く。数列による落体の変化の記述が平均変化率の考え方であることを示し，生徒のもつ考え方を基に平均変化率が関数の変化を記述することを指摘する。さらに，数列による記述が実際の運動とかなり異なるものであることを指摘し，極限の考え方による運動の記述の仕方の刷新によって，極限の考えを印象付けた。

<table>
<tr><th>流　れ</th><th>授　業　展　開，　生　徒　の　反　応</th></tr>
<tr><td>1時間目
学習内容の提示
プリントを配り
場面設定

問</td><td>「落体の運動の記述の仕方の検討」
2時間で微分法の考え方を学んでゆく。今日は運動の記述の仕方について考察する。ガリレオは落体の運動を次のように記述した。「静止状態から落下する物体の等しい時間間隔毎に通過する距離が，1にはじまる奇数の比を成すということは未だ何人も証明していない。……放射体の曲線が既にアポロニウスによって論じられたパラボラに外ならぬことは何人も指摘していない」ガリレオはここにある記述をどのように見いだしたのであろう？　運動の記述の仕方（変化の考察の仕方）をまず探ってみよう。

<table><tr><td>落下時間(秒)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>………</td></tr><tr><td>落下距離(m)</td><td>0</td><td>4.9</td><td>19.6</td><td>44.1</td><td>78.4</td><td>122.5</td><td>………</td></tr></table>
この表から，物体の落下運動をできるだけいろいろな仕方で記述せよ。</td></tr>
</table>

生徒の解答

その１）　関数で表わす（式を使う）。
その２）　グラフに表わす。
その３）　表を使う（階差をとる）。

落下時間(秒)	0	1	2	3	4	5	………
落下距離(m)	0	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5	………

（速　さ）　4.9　14.7　24.5　34.3　44.1
（加速度）　9.8　9.8　9.8　9.8　（一定）

その４）　数列を使う。加速度，速さ，距離を階差数列とみて $y=4.9x^2$ を導く。

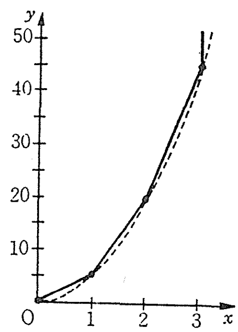
生徒の記述の仕方を取り上げ（４は後から取り上げた），関数で現象が記述できることを確認する。
ガリレオが言う「奇数の比」（これは関数の変化の一つの記述法である）とはここではどの記述に関係するか？
　　　生徒；表で 4.9 : 14.7 : 24.5 : ……＝ 1 : 3 : 5 : ……
ところでガリレオの時代に時計はあったのかな？
　　　生徒；正確な時計はない。
ではガリレオはどのようにしてこのことを確認したのだろう？

数列による記述

ガリレオは水で時間を測った。さらにガリレオは加速度・速さ・距離の数学的な関係について幾何的に面積を利用して証明している。これらの数学的な関係を考えた人はいるか？
その４をとりあげる。
その３，その４に見るように，幾何的な考察の代りに数列の考えにより，落体の運動における加速度，速さ，距離が統一的に記述できるのである（歓声）。
ところが，数列による運動の記述には運動を記述しきれない限界がある。その限界とはなんであろうか？　次回までに考えてみよう。

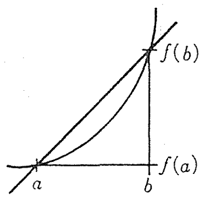
２時間目
数列による記述の限界

「微分法の導入」
数列による運動の限界は見つかったか？
数列による記述では
　0.9秒後の速さは？　　生徒；4.9m/s
　1.1秒後の速さは？　　生徒；14.7m/s
１秒を境に速さが突然 9.8m/s 増えている。
これで運動を記述したといえるのか？
このことをグラフで表わすと右のような折れ線になる（速さはグラフの傾きに相当）。
数列は離散的な量を扱う。連続量は記述できない。
運動（関数）の連続的な変化はどのようにすれば考察できるのか？



限界の克服

この限界を乗り越えるにはどうしたらよいか？　問題を一般的に考える。



数列による記述で速さは次の意味である。

速さ：平均の速さ（平均変化率とも言う）

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

この速さは (a, f(a)), (b, f(b)) を結んだ直線（割線）の傾きである。グラフにみるようにこの直線とグラフはずれて隔たっており，その速さも平均したものとなっている。

極限の発想

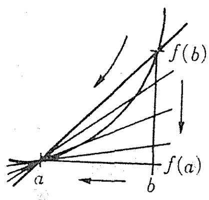
どうすればこの直線（割線）をグラフに近づけることができるか？

bがaに限りなく近づくなら割線はグラフに近くなるから，bをaに近づければよい。このとき図のように割線は接線になる。

適　　用

この考え方を利用しよう。

$$\frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a}$$



a＝1 でbが次のように変われば平均の速さはどうなるか？

b＝1 .1，1.05，1.03，1.02，1.01

0.9，0.95，0.97，0.98，0.99

生徒；9.8に近づく（これが1秒後の瞬間の速さか）

ところで

$$\frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a} \qquad \frac{4.9(b+a)(b-a)}{b-a}$$

bがaに近づけば，最終的にbはaに等しくなる。

$4.9(a+a)=9.8a$

$a=1$　では　9.8　（歓声）

この9.8は，限りなくbがaに近づいた時の平均の速さの値である。この値を瞬間の速さという。２秒後の瞬間の速さは？　$9.8\times2=18.6$

何秒後でも上式からわかる。この式は，a秒後の瞬間の速さを表す関数である。一般にbをaに限りなく近づけた時の平均変化率の値が存在すればその値を「変化率」又は「微分係数」，割線の傾きに対しては接線の傾きと言う。

ま　と　め

数列が離散量しか扱えないのにたいし，限りなく近づくという発想をすることでどの値でも扱うことができる。すなわち，落体の運動の瞬間の変化にあたる瞬間の速さを知ることができる。微分積分の成立史においても，この限りなく近づいてゆくという発想がネックになっている。あのガリレオでさえ新科学対話においてこの発想を基に考察していない。かのニュートンがこの発想を取った結果，微分積分学が構成されるのである。

次回は，この「限りなく近づく」ということについてさらに検討する。

歴史的な過程を飛び超える駆け足の授業であったが生徒の反応は非常に良かった。歴史的記述の考察は生徒の動機付けとなったし，数列による記述は印象的であったようだ。特に極限の考えでの変化の記述が一変することは強い印象を残したようで，追体験としての数学史の利用はかなり効果的であったと考えている。ここでは微分係数までを述べたが，メタ理論としての層３に至るにはさらに継続的な学習が必要であると言えよう。

歴史的な過程は非常に参考になる視点である。しかし，一方で生徒のおかれた状況や能力に応じたという前提が，歴史的な過程を利用した追体験の授業には必要であると授業から再度感じた次第である。

Ⅲ．結び

本稿では，数学史の理解と学習指導における利用法について考察を進めた。筆者の考えは，本文で述べた通りであるが結論をまとめておく。片野氏も指摘しているように，数学史の利用についての研究は戦前においてかなり進められていたようだ。しかし，中村氏の指摘によれば，戦前の数学史の研究の多くは，所産としての研究が主流であったようだ。フロイデンタールの主張にも，過程からの数学史が本来の数学史であることが繰り返しみられる。そして，所産としての数学史の利用は，間に第二次大戦が入ったこともあってうまくいかなかったようだ。中村氏は，次のように指摘している。

「昭和30年頃，数学教育界の一部に数学史を数学の教科の中で教えてはどうかという意見が，「流行」したことがあった。しかし数学史の数学教育への導入ということは，ほとんど進展を示さず，著しい成果がみられなかった。それは単なる思いつきにとどまった。」この思いつきを乗越えるための検討が本稿の課題であったし，同時に将来的な問題である。そのために筆者が設定した立場は追体験という立場であった。また，中村氏は形成の立場で数学史を正しく理解する必要を説き，次のように述べている。「数学では非歴史的で，不必要に過去にとらわれことを（ママ）避けようとする。それは自ら創造する学問であるからである。数学教育では歴史を十分に考慮して方向に誤りのないことがもとめられていると私は考える。」中村氏の指摘は，筆者の考えでは③を中心とした利用法である。③のような扱いが，従来指摘されてきた「歴史的順序を参考に」という標語をさらに厳密な方法へと転化する扱い方であると考える。

主要参考文献

片野善一郎	問題形式による数学史	（富士短大）
	数学教育の数学史の意義について	（数学教育　日本数学教育学会誌）
中村幸四郎	近世数学の歴史	（日本評論社）
	数学史	（共立）
仲田紀夫	図形のドレミファ	（黎明）

河田敬義　　講演記録　（埼玉県高等学校数学教育研究会誌）
神長幾子　　高等学校における微積分の背景　（筑波数学教育研究）
礒田正美　　数学化に関する一考察（Ⅰ～Ⅲ）（筑波数学教育研究）
関数のメタ認知と微分法の導入　（数学教育　明治図書，1986，7）
関数の思考水準とその指導に関する研究
（数学教育　日本数学教育学会誌，1987．3）
ピアジェ　　人間科学序説　（岩波）
フロンデンタール
'Majour problems of mathematics Education.'
Educational Study in Mathematics Vol. 12
'Shoud Mathematics Teacher know something about history mathematics'
For the Learning of Mathematics 1981 July
Mathematics as Educational Task.　D. Leidel 1973
Didactical Fenomenology of Mathematics Structures　D. Leidel 1983
ファンヒーレ
English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M.van Hiele 1983
ボイヤー　　数学史　（朝倉）
デュドンネ　数学史Ⅰ　（岩波）
ラカトス　　数学的発見の論理　（共立出版）