Department of Social Systems and Management

Discussion Paper Series

No. 1220

企業価値変動モデルとCVaRを用いた信用リスク最適化問題とその解法

後藤順哉、高野祐一、山本芳嗣、和田保乃

Nov. 2008

UNIVERSITY OF TSUKUBA
Tsukuba, Ibaraki 305-8573
JAPAN

企業価値変動モデルとCVaRを用いた信用リスク最適化問題とその解法[1]

後藤順哉[2]、高野祐一[3]、山本芳嗣[3]、和田保乃[4]

平成 20 年 11 月 17 日

概 要

本論文では、東証業種別株価指数の推移データに因子分析を施した結果を用いて企業価値変動モデルを構築し、それに基づいてデフォルトのシナリオを発生させ、リスク尺度として条件付き Value-at-Risk を用いて、与信の最適化を行った。これにより経済動向を示す共通因子の影響を、共通因子の個数と個別因子の影響との比を決めるパラメータの両者を変化させて観察した。解くべき最適化問題の規模はシナリオの個数に影響を受けるため、多数のシナリオを用いて問題を解くことは易しくないが、問題の構造を利用して、簡単な前処理と解法の工夫によって 10 万シナリオの問題を 10 秒程度で解くことに成功した。

1 はじめに

2 企業価値変動モデルと株価指数の因子分析

本論文で考察する与信ポートフォリオは、みずほ第一フィナンシャルテクノロジー（株）からのアドバイスに基づき、標準的な銀行の与信ポートフォリオを参考にして仮想的に構成したものである。簡単のために地方公共団体と個人を除き、与信先企業数は $1,127$ 社である。これらの与信先は表 1 にあるように製造業 1 (G01) から物品賃貸業 (G13) までの 13 の業種に分類され、さらにデフォルト発生の可能性に応じて 10 の格付が付与されている。以降、与信先 j の業種を $g(j)$、格付けを $r(j)$ で表す。また、業種 g 格付け r の与信先総数を $n(g,r)$ と書き、これを表 1 に示した。

与信先 j のデフォルト発生については、R. Merton [3] によって提唱され、その後、複数の研究者や実務家によって展開が行なわれた（多因子）企業価値モデルを用いる。このモデルでは、与信先 j の現在の資産価値を E_j、1 年後の資産価値を示す確率変数を $\tilde{E}_j$ としたと

[1]本論文は信頼できると思われる一般情報に基づいて作成しているが、その情報の正確性、完全性を保証しているものではない。利用に際してはご自身の判断でお願いする。本論文に書かれた意見および予想は著者の個人的な判断のよるものであり、いかなる場合においても著者の所属する大学および会社はなんら責任を負うものではない。また、本論文に書かれた意見および予想は予告なく変更されることがある。

[2]中央大学経営システム工学科

[3]筑波大学大学院システム情報工学研究科

[4]みずほ第一フィナンシャルテクノロジー（株）

表 1: 業種・格付け別与信先数

業種 g		格付け r 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
G01	製造業 1	3	5	6	15	26	30	13	7	10	1	116
G02	製造業 2	1	4	5	9	17	13	10	9	3	1	72
G03	農林魚鉱業	0	2	0	3	2	2	5	2	0	1	17
G04	建設業	4	7	15	24	39	39	24	23	8	8	191
G05	電気・ガス・水道・熱供給	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2
G06	情報通信業	0	0	2	1	2	6	4	2	0	0	17
G07	運輸業	0	1	2	4	4	8	5	2	2	0	28
G08	卸売業	3	6	13	24	21	21	21	11	8	2	130
G09	小売業	0	6	12	19	22	30	18	8	5	6	126
G10	金融・保険業	0	0	1	1	4	2	1	1	0	1	11
G11	不動産業	1	9	15	16	21	26	17	8	5	3	121
G12	サービス業	6	12	25	46	57	53	35	31	18	6	289
G13	物品賃貸	0	0	0	1	3	2	0	0	0	0	6

き、1 年間の資産価値変動を以下のようにモデル化する。

$$\log\left(\frac{\tilde{E}_j}{E_j}\right) = \gamma \sum_{k=1}^{m} \delta_{g(j),k}\tilde{\varepsilon}_k + \sqrt{1-\gamma^2\sum_{k=1}^{m}\delta_{g(j),k}^2}\,\tilde{\omega}_j \tag{2.1}$$

ここで $k=1,\ldots,m$ について、$\tilde{\varepsilon}_k$ は共通因子と呼ばれ、各与信先に共通に影響する経済動向を表す確率変数である。また、$\tilde{\omega}_j$ は与信先 j 固有の要因を表す確率変数である。いずれも標準正規分布に従うものとし、相互に独立と仮定する。共通因子 $\tilde{\varepsilon}_k$ は、同一業種の与信先には同様の効果を与えると仮定し、その係数を $\delta_{g(j),k}$ とする。γ は経済動向の影響 $\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2,\ldots,\tilde{\varepsilon}_m$ と与信先固有の影響 $\tilde{\omega}_j$ の比を決める係数である。係数の決め方から $\log(\tilde{E}_j/E_j)$ は標準正規分布に従う確率変数となる。与信先 j がデフォルトを起こす確率はその格付けによって決ると仮定し、格付け r の与信先のデフォルト確率を p_r で表し、標準正規分布の p_r パーセンタイル点を π_r とする。以上の設定と (2.1) から、与信先 j は

$$\gamma\sum_{k=1}^{m}\delta_{g(j),k}\tilde{\varepsilon}_k + \sqrt{1-\gamma^2}\,\tilde{\omega}_j < \pi_{r(j)} \tag{2.2}$$

のときデフォルトを起こすこととする。表 2 に東京商工リサーチ [5] のデータにある各格付けのデフォルト確率を示す。なお、同表の 3 行目の利鞘率 Ψ_r については後述する。

表 2: 格付けのデフォルト確率と利鞘率

格付け	r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
デフォルト確率 (%)	p_r	0.20	0.30	0.35	0.45	0.48	0.52	0.67	1.07	2.55	5.70
利鞘率 (%)	Ψ_r	0.70	0.70	0.70	0.80	0.80	0.80	0.90	1.10	1.50	1.50

経済動向の影響と与信先固有の影響の比を決める係数 γ は、バーゼル II [1] では $\gamma^2 \approx 0.2$ とされ、また国内企業のデフォルト率の推移から算定した結果では $\gamma^2 \approx 0.02$ である。すなわち $0.1414 \leq \gamma \leq 0.4472$ の水準であり、本論文で報告する計算では、0.14, 0.30, 0.45 の 3 種の値に γ を設定し、その影響を見た。

業種毎に定める係数 $\delta_{g(j),k}$ を求めるため、1991 年第 1 四半期から 2005 年第 2 四半期までの 58 期の東証業種別株価指数の推移データに対して因子分析を行なった。東証業種別株価指数で 33 業種に分類されている与信先をここでは前述したように 13 業種にまとめ直して分析したが、詳細は割愛する。業種 g、時点 t $(t = 1, 2, \ldots, 58)$ の業種別株価指数を $s_g(t)$ とし、$S_g = (s_g(1), \ldots, s_g(58))$ を多変量データと考えて、 $g = 1, 2, \ldots, 13$ について S_g について次のように因子分析を実施した。

$$S_g = a_{g,1}F_1 + \cdots + a_{g,5}F_5 + \Omega_g$$

ここで、$k = 1, 2, \ldots, 5$ について $F_k = (f_k(1), \ldots, f_k(58))$ は共通因子、$\Omega_g = (e_g(1), \ldots, e_g(58))$ は残余項である。分析結果の各因子の固有値と寄与率を表 3 に、業種別感応度を表 4 に示す。

表 3: 固有値と寄与率

因子 k	固有値	寄与率	累積寄与率
1	20.19	0.612	0.612
2	6.50	0.197	0.809
3	2.28	0.069	0.878
4	1.43	0.043	0.921
5	0.68	0.020	0.942

表 4: 業種別感応度

	因子 k				
業種 g	1	2	3	4	5
G01 製造業 1	0.942	0.097	-0.001	-0.103	0.096
G02 製造業 2	-0.181	0.946	-0.200	0.093	0.021
G03 農林魚鉱業	0.971	-0.146	-0.145	-0.002	-0.021
G04 建設業	0.963	-0.195	-0.132	0.014	-0.013
G05 電気・ガス・水道・熱供給	0.866	-0.290	0.059	0.027	0.211
G06 情報通信業	-0.064	0.888	-0.404	0.106	-0.053
G07 運輸業	0.860	0.061	0.125	-0.212	0.247
G08 卸売業	0.657	0.659	-0.120	0.162	-0.218
G09 小売業	0.525	0.729	-0.302	-0.161	-0.081
G10 金融・保険業	0.963	-0.018	-0.196	-0.094	-0.050
G11 不動産業	0.845	0.134	0.404	-0.025	0.083
G12 サービス業	0.132	0.873	-0.435	-0.041	0.000
G13 物品賃貸	0.932	0.265	0.124	0.011	-0.079

第 1 因子に対する感応度の大きい順に業種を並べ、感応度の近い業種をまとめると

第 1 業種群={G03, G10, G04, G01, G13}
第 2 業種群={G05, G07, G11}
第 3 業種群={G08, G09}
第 4 業種群={G12, G06, G02}

のようになる。第 1 業種群は第 1 因子に対する感応度が 0.9 を超えており、第 2 因子に対する感応度が低い。第 1 業種群とと第 2 業種群との相違は僅かであるが、第 1 因子に対する感応度が低く第 2 因子に対する感応度が高い第 4 業種群とは明瞭な相違を見せている。第 3 業種群は第 2 と第 4 の中間である。

3 損失関数

与信先のデフォルトは、その業種と格付け毎に決まると仮定して、業種 g 格付け r の与信先のデフォルト件数を $\tilde{d}_{g,r}$ と記す。個々の与信先 j について

$$\tilde{d}_j := \begin{cases} 1 & \text{デフォルトの場合} \\ 0 & \text{デフォルトでない場合} \end{cases}$$

と確率変数 $\tilde{d}_j$ を定義すれば

$$\tilde{d}_{g,r} = \sum_{j \in N(g,r)} \tilde{d}_j$$

である。ここで、$N(g,r)$ は業種 g 格付け r の与信先の集合で、含まれる与信先数は表 1 に示した $n(g,r)$ である。さらに、融資総額を T、業種 g 格付け r への与信比率を $z_{g,r}$、デフォルト発生時の回収率を 1 から引いた値を $\phi_{g,r}$、行列 $\tilde{D}$ を $\tilde{D} = \left[\tilde{d}_{g,r}\right]_{(g,r)\in G\times R}$ とすれば、回収不能な額は

$$L(z,\tilde{D}) := \sum_{(g,r)\in G\times R} z_{g,r} T \frac{\tilde{d}_{g,r}}{n(g,r)} \phi_{g,r}$$

と表現できる。与信の利鞘率は与信先の格付け r だけに依存するとして、その値を表 2 の利鞘率 Ψ_r ように設定した。そうすると損失は

$$\begin{aligned} f(z,\tilde{D}) : &= L(z,\tilde{D}) - \sum_{(g,r)\in G\times R} z_{g,r} T \Psi_r \\ &= T \sum_{(g,r)\in G\times R} z_{g,r} \left(\frac{\tilde{d}_{g,r}}{n(g,r)} \phi_{g,r} - \Psi_r \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

となる。

与信比率 $z_{g,r}$ は

$$\sum_{(g,r)\in G\times R} z_{g,r} = 1, \quad z_{g,r} \geq 0 \quad (g \in G, r \in R) \tag{3.2}$$

を満たす必要がある。これ以外に与信比率には上下限の制約などがあるが、本研究では上記の制約だけを考慮した。今後条件 (3.2) を満たす $z = (z_{g,r})_{(g,r)\in G\times R}$ の全体を Z で表す。

課題は、この損失関数を基礎にリスク尺度を作り、そのリスク尺度の意味で最適な与信比率 $z = (z_{g,r})_{(g,r)\in G\times R}$ を決めることであり、得られた $z = (z_{g,r})_{(g,r)\in G\times R}$ の値やリスク尺度の値が、共通因子数、経済動向の影響と与信先固有の影響の比を決めるパラメータ γ の値にどのように影響されるかを観察し、有用な示唆を導くことである。

4　CVaR モデルとシナリオ

本研究ではリスク尺度として条件付き Value-at-Risk(CVaR) を用いる。与えられた信頼水準 β と与信比率 $z \in Z$ に対して Value-at-Risk (VaR) は

$$\alpha(z,\beta) := \min\left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \Pr[f(z,\tilde{D}) \le \alpha] \ge \beta \right\}$$

であり、CVaR は、

$$\frac{1}{1-\beta}\int_{f(z,X)\ge\alpha(z,\beta)} f(z,X)dP(X)$$

で定義され、この最小化が CVaR を用いての最適与信比率の決定問題である。ここで、$P(\cdot)$ は確率変数 $\tilde{D}$ の累積密度関数である。

前節のモデルに従って確率変数 $\tilde{D}$ の ν 個のシナリオを発生させる。個々のシナリオは行が G、列が R で番号付けられた行列であり、i 番目のシナリオを $H^i := \left(h^i_{g,r}\right)_{(g,r)\in G\times R}$ と書くと、その (g,r) 要素 $h^i_{g,r}$ は、業種 g 格付け r に属する与信先のこのシナリオでのデフォルト件数である。

このシナリオを用いて $\tilde{D}$ を近似すると CVaR 最小化問題は

$$(P) \qquad \left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \alpha + \dfrac{1}{\nu(1-\beta)}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}[f(z,H^i)-\alpha]^+ \\ \text{subject to} & (\alpha,z) \in \mathbb{R}\times Z \end{array}\right.$$

となる。詳細は例えば [4] を参照してほしい。ここで、$[\cdot]^+$ は $[a]^+ := \max\{0,a\}$ で定義される関数である。良く知られているように、個々のシナリオ H^i に対応して変数 λ_i を導入すると目的関数の非線形項 $[\cdot]^+$ を削除できて、問題 (P) は以下の等価な問題に変形できる。

$$(P) \qquad \left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \alpha + \dfrac{1}{\nu(1-\beta)}\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i \\ \text{subject to} & (\alpha,z) \in \mathbb{R}\times Z \\ & \lambda_i \ge f(z,H^i)-\alpha \quad \text{for } i=1,\dots,\nu \\ & \lambda_i \ge 0 \quad \text{for } i=1,\dots,\nu \end{array}\right.$$

損失関数 f は与信比率を示す変数 z の線形関数であるので、これは線形計画問題となる。しかし、その変数個数と制約本数はシナリオの個数に依存して増大する。信頼性のある与信比率を得るために多くのシナリオが必要であり、現場からはその個数として 1 万から 10 万が要求されている。一方、信頼水準 β は非常に 1 に近いため、最適解が等号で満たしている制約 $\lambda_i \ge f(z,H^i)-\alpha$ は少数であることも容易に予想できる。そこで、以下の部分シナリオと部分問題を導入する。

ν 個のシナリオの初めの μ 個のシナリオ（これを <u>部分シナリオ</u> と呼ぶ）を選び、この部分シナリオだけを用いた問題（シナリオの個数を明示するために $(P(\mu))$ と書く）は

$$
(P(\mu))\quad \left|\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \alpha + \dfrac{1}{\nu(1-\beta)}\displaystyle\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i \\
\text{subject to} & (\alpha, z) \in \mathbb{R} \times Z \\
 & \lambda_i \geq f(z, H^i) - \alpha \quad \text{for } i = 1, \ldots, \mu \\
 & \lambda_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, \mu
\end{array}\right.
$$

となる。この問題を <u>部分問題</u> と呼ぶ。ここで目的関数の第 2 項目の分母が $\mu(1-\beta)$ ではなく $\nu(1-\beta)$ である点に注意して欲しい。部分問題は単に少ないシナリオ個数の問題とは異なる。

定義 4.1. 部分問題 $(P(\mu))$ の実行可能解 $(\alpha, z, (\lambda_i)_{i=1,\ldots,\mu})$ に対して、$i = \mu+1, \ldots, \nu$ について $\lambda_i = 0$ と置いた解 $(\alpha, z, (\lambda_i)_{i=1,\ldots,\nu})$ を、その <u>ゼロ完成解</u> と呼ぶ。

補題 4.2. $(\alpha', z', (\lambda'_i)_{i=1,\ldots,\mu})$ を部分問題 $(P(\mu))$ の最適解とする。もしも $i = \mu+1, \ldots, \nu$ について

$$f(z', H^i) - \alpha' \leq 0 \tag{4.1}$$

であれば、そのゼロ完成解は (P) の最適解である。

証明
問題 (P) から $i = \mu+1 \ldots, \nu$ について制約 $\lambda_i \geq f(z, H^i) - \alpha$ を削除した問題を $(\overline{P}(\mu))$ と書く。さらにそれぞれの問題の最適解の目的関数値を、その問題を表す記号の前に v を付けて表すことにする。

$(\alpha', z', (\lambda'_i)_{i=1,\ldots,\mu})$ のゼロ完成解は問題 $(\overline{P}(\mu))$ の実行可能解であり、目的関数の λ_i の係数 $1/\nu(1-\beta)$ が正であることから、最適解である。問題 $(\overline{P}(\mu))$ は問題 (P) から幾つかの制約を取り除いた問題であるから、その最適解の目的関数値 $v(\overline{P}(\mu))$ と $v(P)$ の間に $v(\overline{P}(\mu)) \leq v(P)$ が成り立つ。補題の条件より、ゼロ完成解が問題 (P) の実行可能解であるので、補題の主張が得られる。 証終

5　解法

前節の補題により以下のアルゴリズムの妥当性が保証される。

アルゴリズム

手順 $\langle 1 \rangle$ （前処理）シナリオを何らかの順序で並べ替えたものを $\{\, H^i \mid i = 1, \ldots, \nu \,\}$ とし、ν より小さな μ を決める。

手順 $\langle 2 \rangle$ （部分問題の解）部分問題 $(P(\mu))$ を解き、部分問題の最適解 $(\alpha', z', (\lambda'_i)_{i=1,\ldots,\mu})$ を得る。

手順 $\langle 3 \rangle$ （最適性の判定）(α', z') が $i = \mu+1, \ldots, \nu$ について

$$f(z', H^i) - \alpha' \leq 0$$

を満たしているかを判定する。

手順 $\langle 4 \rangle$ （シナリオの追加）$i = \mu+1, \ldots, \nu$ の中に $f(z', H^i) - \alpha' > 0$ となっているシナリオ H^i が見つかれば、初めの μ 個のシナリオの後ろにそれを付け足して、付け足されたシナリオ数だけ μ を増やし、手順 $\langle 2 \rangle$ に戻る。

部分問題のシナリオの個数 μ は反復を繰り返すに従って増加し、最悪の場合でも ν まで増加すれば部分問題 $(P(\mu))$ は元の問題 (P) そのものとなるので、このアルゴリズムが問題 (P) を解くことは明らかである。要点は、ν と比べてどの程度小さな μ で最適性の条件 (4.1) を満たしてアルゴリズムを終えることができるかである。μ の増加を抑えるためにどのようなシナリオの並べ替えが適当で、初期の μ は ν と比べてどの程度の大きさとするのが適当であるかが興味のある点である。

そこでシナリオの好ましい並べ替えを探すために以下のような計算実験を実施した。シナリオ H^i に含まれるデフォルト件数を $d(H^i)$ で表そう。つまり、$d(H^i) = \sum_{(g,r) \in G \times R} h^i_{g,r}$ である。10,000 個のシナリオを 5 セット作り、それぞれのシナリオから

(1) シナリオをその生成された順番に並べる

(2) シナリオをそのデフォルト件数の降順に並べ直す。つまり、$d(H^1) \geq d(H^2) \geq \cdots \geq d(H^\nu)$

(3) デフォルト件数の最も多いシナリオ 1,000 件からなる部分問題を解いた解を $(\overline{\alpha}, \overline{z})$ とし、各シナリオ H^i について

$$f(\overline{z}, H^i) - \overline{\alpha}$$

の値を計算し、この降順にシナリオを並べ直す

ことによってシナリオの 3 種の並びを作り、合計 15 の問題 (P) を解いた。ただし $\beta = 0.99$ とした。その最適解で正である変数 $\hat{\lambda}_i$ に対応するシナリオ H^i が、並べ替えたシナリオのどの位置に現れているかを観察した。

図 1 に 3 種の並べ替えそれぞれについて、正の $\hat{\lambda}_i$ の累積個数の平均値のグラフを示す。正の値を取っていた変数 $\hat{\lambda}_i$ の個数は平均 146 個、全シナリオのわずか 1.46%であった。グラフは上から順に上記の (3),(2),(1) の並べ方に対応する。$1,000$ シナリオの問題を解く前処理の計算負荷を無視すれば、明らかに (3) の並べ替えが好ましい。しかし、アルゴリズムの手順 $\langle 4 \rangle$ でもシナリオの並べ替えを実行していることを考慮すれば、(2) の単純な並べ替えでも十分であると考えられる。また、$\beta = 0.99$ であるため、初期のシナリオの個数 μ は全体シナリオ数 ν の数パーセントで十分であると考えられる。以降の実験では (2) の並べ替えを用い、ν に対する初期の μ の割合を 5% に固定した。

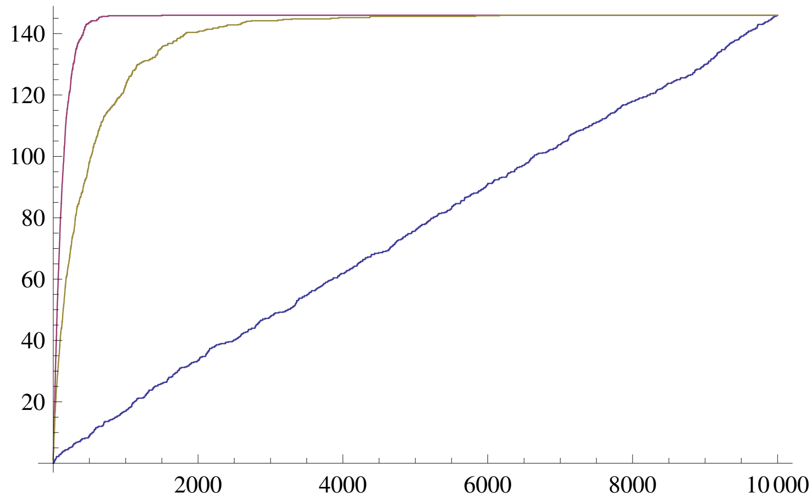

図 1: 正の変数 $\hat{\lambda}_i$ の出現の様子：上から順に (3),(2),(1) の並べ替えに対応

6 計算環境、計算時間など

計算環境は、Dell Precision PWS390, CPU が Intel Core 2 (2.66 GHz)、メモリが 2 GB、OS は Windows XP である。また、ソルバーは Dash Optimization 社 [2] の Xpress-MP release 2007B を使用した。以下では共通因子数 $m = 5$、$\gamma = 0.45$ として作成した $100,000$ 個のシナリオを例にとって説明する。

計算が終了すると最適な与信比率に先立って以下が出力される。

```
Scenario
----------------------------------------------------
number of factors :           5
gamma :                    0.45
scenario size :          100000
max number of defaults :     55
beta :                   0.9900

Computation
----------------------------------------------------
ite     mu  lam+      obj    alpha   time_LP   time_opt
----------------------------------------------------
  1   5000   975    0.009    0.005     1.703      3.391
  2   5105   975    0.010    0.005     1.797      3.344
----------------------------------------------------
                                       3.500      6.735
----------------------------------------------------
                                                 10.235
```

number of factors はシナリオ生成に用いた共通因子の個数、gamma は企業価値モデル (2.1) のパラメータ γ、scenario size はシナリオの個数 ν、max number of defaults はシナリオ中の最大のデフォルト件数 $\max\{\, d(H^i) \mid i = 1, \ldots, \nu \,\}$、beta は CVaR の信頼水準

β である。表の列の `ite` は反復回数、`mu` は部分問題のシナリオ個数 μ、`lam+` は部分問題の最適解で正の値を取った変数 λ_i の個数、`obj` と `alpha` はそれぞれ部分問題の最適解での目的関数値と変数 α の値である。`time_LP` と `time_opt` は部分問題 $(P(\mu))$ を解くのに費やした時間と部分問題の最適解が元の問題の最適解であるかを判定する（条件 (4.1) 参照）ために費やした時間を秒単位で示している。

初期の部分問題に用いたシナリオは、100,000 個のシナリオをデフォルト件数 $d(H^i)$ の降順に並べ、その上位の 5% すなわち 5,000 個を用いて作っている。出力の表の 1 行目を見ると、1.7 秒程で部分問題が解かれ、3.4 秒後にこの部分問題の最適解は元の問題の最適解ではないことが見つけられていることが分かる。さらに、部分問題の最適解が満たしていない条件 (4.1) が 105 個あることが見つけられ、次の反復では、シナリオ個数が 5105 個となった部分問題が解かれている。そうして得られた解が元の問題の最適解であることが 3.3 秒ほどで判定され、総計算時間 10.235 秒で問題が解かれている。

初期のシナリオ個数 μ を 2,000 から 100,000 まで変化させたときの総計算時間は以下の図 2 のようになった。横軸は初期シナリオの個数を $1,000$ を 1 単位として示している。折れ線グラフは上から順に総計算時間、線形計画問題を解くのに費やした総時間、部分問題の解の最適性を判定するのに費やした総時間を秒単位で示している。右端の初期のシナリオ個数 $100,000$ は全シナリオの問題 (P) を直接解いていることに対応する。その場合上記の環境で 94.906 秒かかっており、提案した解法は $\mu = 5,000$ でおおよそ計算時間を 1/9 に短縮していることが分かる。μ を小さくすれば、個々の部分問題を解く時間は若干短くなるが、最適性の判定時間と反復回数は増加し、逆に μ を大きくすれば、反復回数と最適性の判定時間は減るが、個々の部分問題を解く時間は増加する傾向にあり、両者の総和として得られた計算時間は、この例では $\mu = 4000$ で最小の値 9.500 秒となっている。

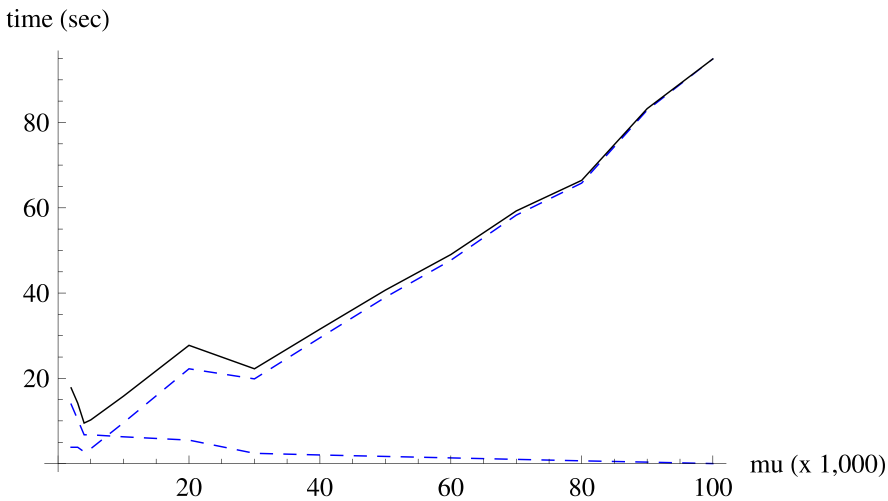

図 2: 初期シナリオ個数と計算時間

7　計算結果

共通因子の個数 m を $0,1,3,5$ と変化させ、経済動向の影響と与信先固有の影響の比を決める係数 γ を 0.00, 0.14, 0.30, 0.45 と変動させ、それぞれについて、100,000 個のシナリオを 5 組ずつ発生させた。なお、$\beta = 0.99$, $\phi_{g,r} = 0.5$ に固定した。業種 g 格付け r 毎に得られた最適与信比率 $z_{g,r}$ の 5 組のシナリオに渡る平均値と標準偏差を、その業種格付けに属する与信先数 $n(g,r)$ で除した値を、パラメータ毎に表に示す。各表の左上隅の括弧内に m,γ を、欄の上段に平均値、下段に標準偏差をそれぞれ与信先数で除した値を示す。なお、欄中の $-$ は該当する与信先が存在しない事を示す。

ここで、デフォルトの条件式 (2.2)

$$\gamma \sum_{k=1}^{m} \delta_{g(j),k} \tilde{\varepsilon}_k + \sqrt{1-\gamma^2}\, \tilde{\omega}_j < \pi_{r(j)}$$

を再録し、係数 γ について考察してみる。γ がゼロに近い場合にはこの式は近似的に

$$\tilde{\omega}_j < \pi_{r(j)}$$

となり、デフォルトの発生の可能性は与信先 j の業種 $g(j)$ には依存せず、その格付け $r(j)$ だけに依存することになる。したがって最適与信比率も業種間差異はなく、格付けだけに依存するはずである。一方、γ が大きくなると格付けに加えて経済動向の影響がデフォルト発生を左右するようになり、共通因子に対する業種別感応度の相違が最適与信比率に影響を表すようになると予想できる。

まず $\gamma = 0$ としたときの 1 与信先あたりの最適与信比率を表 5 に示す。同じ格付けにある与信先にはほぼ同じ与信比率が与えられていることが読み取れ、前述の考察が妥当であったことがわかる。与信先のデフォルト発生がなんら経済動向の影響を受けず、相互に独立である場合には以下のような極めて大づかみな考察も可能である。つまり、与信先 j についてデフォルト発生時の回収率を 1 から引いた値 $\phi_{g(j),r(j)}$ とデフォルト発生確率 $p_{r(j)}$ との積は、与信先 j のデフォルトによる損失の期待値である。よって、

$$\phi_{g(j),r(j)} p_{r(j)} > \Psi_{r(j)}$$

であれば、その与信先への与信を回避することが望ましい。計算では $\phi_{g(j),r(j)} = 0.5$ と設定したので、表 2 の Ψ_r の値から格付け 10 の与信先がこの条件を満たし、よってこの格付けの与信先への最適与信比率はゼロとなることが予想されるが、表 5 に示した計算結果はこれとよく符合している。

表 5: 共通因子なし：1 与信先あたりの最適与信比率

$(0,0)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0019	0.0012	0.0013	0.0011	0.0009	0.0008	0.0008	0.0007	0.0001	0.0
	0.0004	0.0005	0.0004	0.0003	0.0001	0.0003	0.0001	0.0005	0.0001	0.0
G02	0.0018	0.0016	0.0012	0.0009	0.0011	0.0010	0.0008	0.0007	0.0003	0.0
	0.0008	0.0007	0.0006	0.0001	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003	0.0003	0.0
G03	–	0.0016	–	0.0007	0.0013	0.0012	0.0010	0.0006	–	0.0
	–	0.0007	–	0.0008	0.0005	0.0004	0.0003	0.0004	–	0.0
G04	0.0014	0.0013	0.0011	0.0011	0.0010	0.0008	0.0008	0.0005	0.0001	0.0
	0.0005	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0
G05	–	–	–	0.0012	–	0.0008	–	–	–	–
	–	–	–	0.0007	–	0.0008	–	–	–	–
G06	–	–	0.0007	0.0007	0.0010	0.0011	0.0009	0.0006	–	–
	–	–	0.0006	0.0006	0.0008	0.0002	0.0003	0.0004	–	–
G07	–	0.0018	0.0012	0.0014	0.0010	0.0011	0.0011	0.0008	0.0002	–
	–	0.0009	0.0007	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0004	0.0003	–
G08	0.0015	0.0012	0.0009	0.0010	0.0010	0.0009	0.0008	0.0005	0.0001	0.0
	0.0003	0.0004	0.0003	0.0001	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0001	0.0
G09	–	0.0017	0.0011	0.0012	0.0012	0.0011	0.0007	0.0006	0.0002	0.0
	–	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0001	0.0
G10	–	–	0.0013	0.0011	0.0009	0.0009	0.0006	0.0007	–	0.0
	–	–	0.0012	0.0004	0.0005	0.0006	0.0005	0.0008	–	0.0
G11	0.0022	0.0013	0.0009	0.0009	0.0010	0.0009	0.0009	0.0006	0.0	0.0
	0.0005	0.0005	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0003	0.0001	0.0	0.0
G12	0.0018	0.0013	0.0011	0.0009	0.0010	0.0010	0.0008	0.0007	0.0001	0.0
	0.0002	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0
G13	–	–	–	0.0010	0.0007	0.0011	–	–	–	–
	–	–	–	0.0007	0.0005	0.0004	–	–	–	–

続く表 6 から表 8 に、γ を 0.14 に維持して、共通因子数 m を 1,3,5 と変化させた場合の 1 与信先あたりの与信比率を示す。これらの表から、上で述べた傾向は γ が小さければ共通因子を導入した場合でも維持され、共通因子の個数には余り影響を受けないことが観察される。ただし、格付け 9 の多くの業種への与信がゼロである点が目に留まる。

表 6: 共通因子数 $m = 1, \gamma = 0.14$：1 与信先あたりの最適与信比率

$(1, 0.14)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0017	0.0007	0.0011	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0003	0.0	0.0
	0.0003	0.0004	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0002	0.0003	0.0	0.0
G02	0.0011	0.0014	0.0017	0.0015	0.0014	0.0015	0.0010	0.0010	0.0003	0.0
	0.0007	0.0009	0.0008	0.0003	0.0001	0.0004	0.0003	0.0002	0.0004	0.0001
G03	−	0.0011	−	0.0004	0.0011	0.0007	0.0009	0.0002	−	0.0
	−	0.0008	−	0.0006	0.0004	0.0005	0.0004	0.0002	−	0.0
G04	0.0016	0.0007	0.0011	0.0006	0.0008	0.0006	0.0006	0.0002	0.0	0.0
	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0	0.0
G05	−	−	−	0.0010	−	0.0010	−	−	−	−
	−	−	−	0.0009	−	0.0007	−	−	−	−
G06	−	−	0.0012	0.0019	0.0014	0.0014	0.0014	0.0008	−	−
	−	−	0.0007	0.0003	0.0006	0.0004	0.0002	0.0007	−	−
G07	−	0.0018	0.0009	0.0005	0.0005	0.0008	0.0004	0.0004	0.0	−
	−	0.0008	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0	−
G08	0.0024	0.0014	0.0012	0.0011	0.0008	0.0010	0.0006	0.0003	0.0	0.0
	0.0009	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001	0.0
G09	−	0.0015	0.0011	0.0010	0.0008	0.0010	0.0009	0.0005	0.0	0.0
	−	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0002	0.0004	0.0001	0.0
G10	−	−	0.0012	0.0009	0.0005	0.0010	0.0008	0.0004	−	0.0
	−	−	0.0008	0.0011	0.0005	0.0006	0.0008	0.0004	−	0.0
G11	0.0015	0.0011	0.0012	0.0007	0.0008	0.0006	0.0006	0.0003	0.0	0.0
	0.0008	0.0002	0.0003	0.0002	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0	0.0
G12	0.0024	0.0018	0.0016	0.0014	0.0014	0.0012	0.0009	0.0008	0.0001	0.0
	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0
G13	−	−	−	0.0006	0.0008	0.0009	−	−	−	−
	−	−	−	0.0008	0.0006	0.0006	−	−	−	−

表 7: 共通因子数 $m = 3, \gamma = 0.14$：1 与信先あたりの最適与信比率

$(3, 0.14)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0023	0.0012	0.0010	0.0011	0.0008	0.0010	0.0006	0.0003	0.0	0.0
	0.0006	0.0005	0.0007	0.0002	0.0002	0.0001	0.0003	0.0002	0.0	0.0
G02	0.0034	0.0024	0.0016	0.0012	0.0013	0.0010	0.0009	0.0006	0.0	0.0
	0.0012	0.0006	0.0004	0.0003	0.0003	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0
G03	−	0.0021	−	0.0013	0.0006	0.0007	0.0004	0.0008	−	0.0
	−	0.0012	−	0.0009	0.0006	0.0007	0.0003	0.0006	−	0.0
G04	0.0024	0.0016	0.0017	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009	0.0004	0.0	0.0
	0.0006	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0003	0.0001	0.0	0.0
G05	−	−	−	0.0012	−	0.0011	−	−	−	−
	−	−	−	0.0011	−	0.0009	−	−	−	−
G06	−	−	0.0011	0.0008	0.0019	0.0011	0.0009	0.0005	−	−
	−	−	0.0009	0.0011	0.0005	0.0004	0.0002	0.0007	−	−
G07	−	0.0018	0.0009	0.0012	0.0008	0.0012	0.0007	0.0001	0.0001	−
	−	0.0012	0.0009	0.0002	0.0005	0.0003	0.0006	0.0001	0.0002	−
G08	0.0025	0.0014	0.0010	0.0011	0.0009	0.0006	0.0005	0.0001	0.0	0.0
	0.0007	0.0005	0.0003	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0	0.0
G09	−	0.0012	0.0012	0.0009	0.0009	0.0007	0.0005	0.0003	0.0	0.0
	−	0.0007	0.0005	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0002	0.0	0.0
G10	−	−	0.0009	0.0009	0.0013	0.0013	0.0007	0.0002	−	0.0
	−	−	0.0008	0.0009	0.0006	0.0009	0.0007	0.0003	−	0.0
G11	0.0035	0.0013	0.0012	0.0015	0.0010	0.0009	0.0009	0.0004	0.0	0.0
	0.0008	0.0005	0.0006	0.0004	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0	0.0
G12	0.0025	0.0014	0.0014	0.0011	0.0009	0.0010	0.0006	0.0003	0.0	0.0
	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0	0.0
G13	−	−	−	0.0006	0.0012	0.0009	−	−	−	−
	−	−	−	0.0009	0.0007	0.0008	−	−	−	−

表 8: 共通因子数 $m=5,\gamma=0.14$：1 与信先あたりの最適与信比率

$(5,0.14)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0026	0.0011	0.0016	0.0010	0.0009	0.0009	0.0007	0.0002	0.0	0.0
	0.0008	0.0001	0.0004	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0	0.0
G02	0.0015	0.0021	0.0016	0.0015	0.0016	0.0012	0.0010	0.0006	0.0001	0.0
	0.0007	0.0004	0.0007	0.0005	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0001	0.0
G03	−	0.0019	−	0.0011	0.0008	0.0010	0.0007	0.0004	−	0.0
	−	0.0003	−	0.0007	0.0006	0.0010	0.0003	0.0005	−	0.0
G04	0.0018	0.0014	0.0011	0.0012	0.0012	0.0010	0.0007	0.0004	0.0	0.0
	0.0006	0.0006	0.0003	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0002	0.0	0.0
G05	−	−	−	0.0020	−	0.0004	−	−	−	−
	−	−	−	0.0009	−	0.0006	−	−	−	−
G06	−	−	0.0015	0.0016	0.0009	0.0010	0.0005	0.0005	−	−
	−	−	0.0004	0.0009	0.0009	0.0004	0.0003	0.0004	−	−
G07	−	0.0021	0.0017	0.0014	0.0014	0.0010	0.0011	0.0008	0.0	−
	−	0.0013	0.0008	0.0004	0.0010	0.0005	0.0006	0.0007	0.0	−
G08	0.0020	0.0011	0.0012	0.0008	0.0008	0.0008	0.0006	0.0003	0.0	0.0
	0.0010	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0004	0.0002	0.0	0.0
G09	−	0.0016	0.0008	0.0010	0.0008	0.0008	0.0006	0.0003	0.0	0.0
	−	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0003	0.0003	0.0	0.0
G10	−	−	0.0010	0.0018	0.0011	0.0011	0.0001	0.0005	−	0.0
	−	−	0.0014	0.0017	0.0005	0.0008	0.0002	0.0007	−	0.0
G11	0.0028	0.0013	0.0013	0.0011	0.0010	0.0011	0.0010	0.0002	0.0	0.0
	0.0007	0.0002	0.0004	0.0002	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0	0.0
G12	0.0019	0.0014	0.0014	0.0011	0.0009	0.0008	0.0008	0.0003	0.0	0.0
	0.0007	0.0003	0.0004	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0	0.0
G13	−	−	−	0.0010	0.0008	0.0014	−	−	−	−
	−	−	−	0.0014	0.0003	0.0008	−	−	−	−

次に、$\gamma = 0.45$ に固定して、共通因子数 m を $1,3,5$ と変化させたときの 1 与信先あたりの最適な与信比率を、表 9 から表 11 に示そう。$\gamma = 0.3$ の場合も概ね同様の結果であったので割愛する。

与信比率がゼロである与信先が下位の格付けに多く存在する様子がまずは見て取れるが、その広がり方は共通因子数に関して必ずしも単調でない上、業種によっても異なった振る舞いを見せている。例えば、建設業（G04）は、共通因子数が小さいときには殆ど与信を受けていないが（表 9）、共通因子数の増加に伴ってその与信比率は増加傾向にある（表 10、表 11）。それと似通った動きをしている業種として製造業 1 （G01）、農林魚鉱業（G03）、電気・ガス・水道・熱供給（G05）、金融・保険業（G10）、不動産業（G11）、物品賃貸（G13）があり、いずれも業種別感応度の観察から第 1 あるいは第 2 業種群に分類された業種である。参考資料として、分析期間を含む 1984 年 1 月から 2005 年 6 月の業種株価指数を図 3 に示す。不動産バブル崩壊のあったこの時期には、公共事業の削減と、バブル崩壊による民間の建設需要の減退により、建設・不動産業界の経営悪化が進み、建設・不動産関連企業の大型倒産が相次いだことから、表 9 の建設業（G04）や不動産業（G11）への与信比率は納得のいく値である。経済動向の大きな動き示す第 1 因子に加えて第 2 因子以降が加わると、これらの業種の与信比率が増加する（表 10、表 11）ことについては更なる分析が必要であろう。一方、サービス業（G12）は上の業種とは反対の動きを見せ、小売業（G09）がそれに続いている。いずれも第 3 あるいは第 4 業種群とされた業種である。

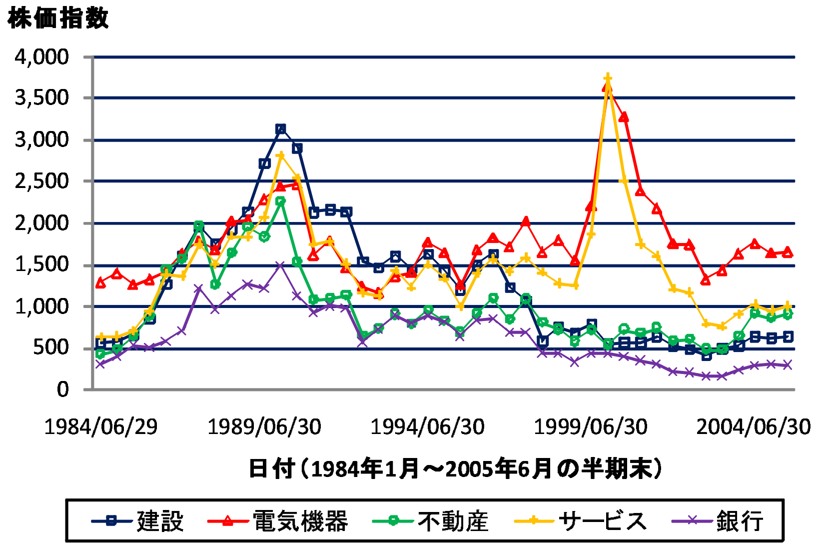

図 3: 業種別株価指数：1984 年 1 月-2005 年 6 月

表 9: 共通因子数 $m = 1, \gamma = 0.45$：1 与信先あたり最適与信比率

$(1, 0.45)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0005	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0007	0.0004	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G02	0.0052	0.0030	0.0038	0.0033	0.0031	0.0029	0.0025	0.0016	0.0009	0.0002
	0.0013	0.0010	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0001	0.0003	0.0004
G03	–	0.0005	–	0.0001	0.0	0.0003	0.0002	0.0	–	0.0
	–	0.0006	–	0.0002	0.0	0.0003	0.0004	0.0	–	0.0
G04	0.0007	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0007	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G05	–	–	–	0.0004	–	0.0	–	–	–	–
	–	–	–	0.0006	–	0.0	–	–	–	–
G06	–	–	0.0035	0.0030	0.0031	0.0023	0.0029	0.0020	–	–
	–	–	0.0008	0.0014	0.0004	0.0006	0.0008	0.0006	–	–
G07	–	0.0006	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0	–
	–	0.0007	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0	–
G08	0.0014	0.0010	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0007	0.0007	0.0004	0.0003	0.0003	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0
G09	–	0.0015	0.0013	0.0010	0.0011	0.0009	0.0007	0.0002	0.0	0.0
	–	0.0004	0.0004	0.0001	0.0002	0.0001	0.0004	0.0003	0.0	0.0
G10	–	–	0.0007	0.0008	0.0	0.0001	0.0003	0.0	–	0.0
	–	–	0.0011	0.0006	0.0	0.0002	0.0006	0.0	–	0.0
G11	0.0007	0.0001	0.0002	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0007	0.0002	0.0002	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G12	0.0038	0.0028	0.0027	0.0023	0.0022	0.0021	0.0018	0.0012	0.0003	0.0
	0.0006	0.0003	0.0002	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0002	0.0002	0.0
G13	–	–	–	0.0002	0.0	0.0003	–	–	–	–
	–	–	–	0.0004	0.0	0.0005	–	–	–	–

表 10: 共通因子数 $m = 3, \gamma = 0.45$：1 与信先あたり最適与信比率

$(3, 0.45)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0056	0.0035	0.0008	0.0010	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0037	0.0023	0.0010	0.0011	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G02	0.0083	0.0055	0.0058	0.0028	0.0027	0.0020	0.0007	0.0	0.0	0.0
	0.0060	0.0020	0.0032	0.0016	0.0009	0.0008	0.0008	0.0	0.0	0.0
G03	–	0.0039	–	0.0011	0.0047	0.0010	0.0	0.0	–	0.0
	–	0.0031	–	0.0018	0.0029	0.0022	0.0	0.0	–	0.0
G04	0.0078	0.0029	0.0025	0.0012	0.0004	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0026	0.0021	0.0020	0.0009	0.0003	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0
G05	–	–	–	0.0065	–	0.0062	–	–	–	–
	–	–	–	0.0063	–	0.0045	–	–	–	–
G06	–	–	0.0044	0.0044	0.0009	0.0017	0.0006	0.0	–	–
	–	–	0.0033	0.0021	0.0009	0.0014	0.0010	0.0	–	–
G07	–	0.0014	0.0054	0.0044	0.0029	0.0009	0.0003	0.0	0.0	–
	–	0.0016	0.0024	0.0016	0.0031	0.0008	0.0007	0.0	0.0	–
G08	0.0076	0.0024	0.0007	0.0004	0.0	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0030	0.0012	0.0009	0.0006	0.0	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0
G09	–	0.0020	0.0020	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	–	0.0016	0.0011	0.0008	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G10	–	–	0.0018	0.0043	0.0011	0.0022	0.0	0.0002	–	0.0
	–	–	0.0025	0.0038	0.0013	0.0027	0.0	0.0005	–	0.0
G11	0.0091	0.0056	0.0044	0.0014	0.0014	0.0008	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0059	0.0015	0.0020	0.0010	0.0009	0.0009	0.0	0.0	0.0	0.0
G12	0.0069	0.0032	0.0030	0.0008	0.0003	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0008	0.0019	0.0010	0.0005	0.0004	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0
G13	–	–	–	0.0011	0.0	0.0	–	–	–	–
	–	–	–	0.0016	0.0001	0.0	–	–	–	–

表 11: 共通因子数 $m=5, \gamma=0.45$：1 与信先あたり最適与信比率

(5, 0.45)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G01	0.0068	0.0036	0.0008	0.0004	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0039	0.0019	0.0010	0.0004	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G02	0.0104	0.0068	0.0056	0.0033	0.0023	0.0016	0.0006	0.0	0.0	0.0
	0.0044	0.0044	0.0014	0.0023	0.0012	0.0005	0.0008	0.0	0.0	0.0
G03	–	0.0048	–	0.0003	0.0022	0.0009	0.0003	0.0	–	0.0
	–	0.0027	–	0.0006	0.0016	0.0010	0.0007	0.0	–	0.0
G04	0.0093	0.0046	0.0032	0.0013	0.0007	0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0038	0.0025	0.0009	0.0012	0.0005	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0
G05	–	–	–	0.0071	–	0.0054	–	–	–	–
	–	–	–	0.0030	–	0.0018	–	–	–	–
G06	–	–	0.0050	0.0017	0.0011	0.0021	0.0011	0.0	–	–
	–	–	0.0037	0.0017	0.0016	0.0021	0.0010	0.0	–	–
G07	–	0.0036	0.0052	0.0027	0.0009	0.0017	0.0	0.0	0.0	–
	–	0.0030	0.0025	0.0024	0.0011	0.0020	0.0	0.0	0.0	–
G08	0.0046	0.0024	0.0014	0.0	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0029	0.0024	0.0011	0.0	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G09	–	0.0029	0.0016	0.0	0.0002	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	–	0.0031	0.0012	0.0001	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G10	–	–	0.0023	0.0007	0.0007	0.0006	0.0012	0.0	–	0.0
	–	–	0.0024	0.0017	0.0016	0.0013	0.0020	0.0	–	0.0
G11	0.0088	0.0039	0.0029	0.0023	0.0013	0.0006	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0067	0.0021	0.0024	0.0010	0.0010	0.0007	0.0	0.0	0.0	0.0
G12	0.0081	0.0042	0.0018	0.0007	0.0007	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0015	0.0018	0.0003	0.0005	0.0003	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
G13	–	–	–	0.0022	0.0011	0.0002	–	–	–	–
	–	–	–	0.0027	0.0014	0.0004	–	–	–	–

8　結論

本論文では、株価データから経済動向を示す因子を抽出し、企業価値変動モデルによりデフォルトをシミュレートし、そうして得られたシナリオを元に CVaR リスク尺度で最適な与信比率を計算した。その結果、対象とした時期の経済動向をある程度反映した与信比率を導き出すことができた。得られた与信比率の信頼性は計算に用いたシナリオの大きさに依存するため、なるべく多くのシナリオを用いて計算を実行するのが望ましい。しかし、CVaR 最適化問題の変数個数と制約本数のいずれもシナリオ個数の増加に伴って増加し、問題規模の増大を抑えることができない。提案した解法はシナリオの簡単な前処理と解法の工夫により計算時間の短縮を実現している。

参考文献

[1] Basel Committee on Banking Supervision (2006) “Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework - Comprehensive Version.” (http://www.bis.org/publ/bcbs128.htm)

[2] http://www.dashoptimization.com/

[3] R.C. Merton, “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance*, Vol. **29**, No. 2, (May 1974), pp. 449-470.

[4] R.T. Rockafellar and S. Uryasev, “Optimization of conditional value-at-risk,” *Journal of Risk* **2** (2000) 21–41.

[5] http://www.tsr-net.co.jp/service/riskscore/index.html