INSTITUTE OF POLICY AND PLANNING SCIENCES

Discussion Paper Series

No. 989

第四曲：意思決定とナッシュ均衡

by

金盛 長（金子 守）

June 2002

UNIVERSITY OF TSUKUBA
Tsukuba, Ibaraki 305-8573
JAPAN

第四曲：意思決定とナッシュ均衡

作：金盛　長

登場人物：新月 位　：経済学教授
間占 通　：経済学講師
森々 元気：大学院生
半川 生：某大学若手研究者

２００２年6月7日

[状況設定：某大学の半川 生（はんかわ しょう）がセミナーのためやってくる。セミナーは４時半からだが、半川は間占とゲーム論の最近の話題を議論したいと午後１時半に来た。第一幕は、間占が半川を連れて研究室に現れるところから始まる]

第一幕：最近の話題

（新月と森々がいる研究室に間占が半川を連れて現れる）

間占：こんにちは、新月先生、森々君。こちらはセミナーのため東京からいらっしゃった半川さんです。半川さんは、昨年の夏にアメリカのＡ大でPh.Dをとり、一年間、ヨーロッパで研究をして、この９月から東京に移りました。おもに、ゲーム論と産業組織論を研究しています。Ａ大での僕の４年後輩にあたります。

半川：はじめまして半川です。

間占：こちらが新月先生で、あちらが大学院生の森々君です。

半川：アノ新月さんですか、昔は随分と期待されていたと聞いています。そういう人が目の前にいるんですか。面白いですね。間占さんと僕はＡ大で勉強しました。新月さんはどこに留学したんですか。

新月：いや、私は日本のある大学の大学院で勉強しました。

半川：そうですか。それは残念です。アメリカの大学院での話をできませんね。ところで、

森々君はトーフルで何点ぐらいとっていますか。

間占：半川君、少し失礼ですよ。森々君はアメリカに留学する気が無いので、トーフルは受けていないと思います。

森々：僕はあまり英語が得意じゃないので、アメリカに留学することなんて考えていませんでした。やはり、考えたほうが良いのでしょうか。

間占：うん、どっちでもいいんじゃないのかな。

半川：でも、ゲーム論の中心はやはりアメリカにあるので、アメリカで勉強したほうが効率的ですよ。ただ、あっちの勉強についていくのは大変ですよ。どの授業でもリーディング・アサインメントがいっぱいありますから。

（半川、わざとらしく）

そうか、森々くんはトーフルも受けていないのか。

間占：それで半川君、今日はセミナーの前に何を議論したいと思っているのですか？ それともセミナーの準備をするために早く来たのですか？

半川：いやセミナーの準備は大丈夫です。特に何を議論したいというわけでなく、間占さんならあっちでの最新の話題を知っているだろうと思い、それを教えて貰うため時間より早く来ました。なにしろ、Journal に出る論文はもう何年も前に書かれているから、最新のワーキングペーパーを知っておかないと流行遅れになります。

間占：そうか、半川君は特に議論したい話題があるわけではないのか。セミナーまでの時間、どうしましょうか。

森々：間占さんと半川さんが来る前に、新月先生にナッシュ均衡をどう考えるのかを聞き始めたのですが。

半川：ナッシュ均衡をどう考えるのかって、オーマンの interactive epistemology アプローチのことですか、[1] それともナッシュ均衡の進化論的安定性のことですか。[2]

---

[1] R. J. Aumann, Interactive Epistemology I and II, *International Journal of Game Theory* 263－314、(1999)。

[2] 岩佐 庸、「生物進化とゲーム理論」、『ゲーム理論の新展開』の第２章、今井晴雄、岡田章編。勁草書房。(2002)。

森々：いや、ナッシュ均衡概念そのものについてです。

新月：プレイヤーの意思決定とナッシュ均衡との関係を明確にしておきたいと思いまして、こういう問題をたてたんです。

半川：アー、意思決定理論からゲーム理論を考え直すことですか。それは誰かが主観確率を使って研究していましたよね。誰だったかな？

新月：半川さんは良く勉強しているんですね。ただ、いろんな論文が書かれていますが、その中には優れたものもあり、どうしようもないものも含まれています。どうしようもないものは初めから無視するべきなんですよ。

半川：新月さんは主観確率を使っての研究を無視しろと言うのですか？

新月：少なくともゲーム論的状況における意思決定を考察するのには無視する方が良いと思います。

経済学でいう意思決定理論というのは、殆ど効用理論と同義です。主観確率は効用理論の部分として取扱われます。そもそも効用理論というのは、個人の嗜好の問題を議論しています。そこでは主観確率も嗜好の問題にしてしまう。[8]

意思決定論の専門家は背景にいろんなもの考えて理解しようとしていますが、結局のところ、選択肢の集合上の 2 項関係を実数値関数の順序で表現する表現理論に過ぎません。それゆえ、意思決定理論あるいは効用理論は、ゲーム論的状況における意思決定を考えるのに役に立つとは思えません。

ゲーム論的状況における意思決定の重要な問題は、各プレイヤーの嗜好の問題でなく、思考の問題ですからね。

（新月、3 人の顔を覗き込む）

間占：確かに意思決定にとって重要なのは嗜好でなく、思考だと思います。ただ、その駄洒落はちっとも面白くありません。もっと真面目な議論を志向して頂けると至高の幸いです。

森々：間占さん、素晴らしい。それじゃ僕もひとつ試行を思考してみるか。それとも思考

[8] 主観確率論については、L．J．Savage, *The Foundations of Statistics,* Dover Publication Inc, New York, (1954). を参照。

とも思考を試行してみるか …。歯切れが悪いな、歯垢でもたまっているのかな。

半川：な、なんていう人達だ。

新月：脱線させてすいません。それで、ここでは、ゲーム論的状況における意思決定そのものを考えたいと思いましてね。それで森々君にまずノイマンのミニマックス定理から議論しようと言ったのです。

（半川、驚いて）

半川：効用理論が役に立つかどうかは分かりませんが、ノイマンのミニマックス定理を議論したいですって！ それはもう５０年も昔の話でしょ。あっちでは誰もそんな昔の話を議論しませんよ。まだ何か問題が残っているのですか。

間占：ミニマックス定理は１９２８年に発表されたノイマンの論文で証明されたのですから、もう７５年近くになります。

森々：それで、半川さん、「あっち」ってアメリカのことですか？ アメリカじゃ、ミニマックス定理なんて話題にしないんですか。それで何を話題にするんですか。

半川：そりゃ、ミニマックス定理なんて教科書でちょっと出てくるだけで、まあ歴史的価値ぐらいしかないでしょ。

「あっち」っていうのは、もちろん、アメリカのことです。それから、イスラエルとかヨーロッパの幾つかの大学かな。それ以外にあります？ あっちでの話題は、東部の一流校や西海岸でのA大での最新の研究の話とか、イスラエルでの研究の動向とかですね。例えば、僕の先生のスキャロップスとか有名なラーメンスタインなんかが何を研究しているかとかを話題にするんですよ。有名な人達の最新の仕事を知るのには、Journal に載っている論文では遅いので、最新のワーキングペーパーを見る必要があります。そうしないと流行遅れになる。

間占さんなら、最新のワーキングペーパーを知っていると思って、セミナーの時間より早く来たんです。

間占：確かに僕は最新のワーキングペーパーにある程度目を通していますが、取り立てて新しい動きがあるわけではありません。必要ならば、僕の所に来ているワーキングペーパーをお見せします。

まあ、今日は最新のワーキングペーパーとか有名な人達の噂話は忘れて、ナッシュ均衡をどう考えるかについて議論しましょうよ。でも確かにミニマックス定理は少し

古すぎるので、関係してきたら議論することにしましょう。その議論を僕から始めてもよろしいでしょうか。

新月：結構ですよ。始めてください。

半川：まあ僕もそれで結構です。たまには昔の話を聞くのも悪くないでしょう。

間占：それじゃ僕から問題点を指摘してみます。ナッシュ均衡の解釈は二つあると思います。それらを黒板に書いておきます。

（1）：ゲームが一回だけプレイされるところで、ゲームが行われる前に各プレイヤーが意思決定を行う。その意思決定を表現しているのがナッシュ均衡である。
（2）：ナッシュ均衡はゲームが繰り返しプレイされる状況での戦略的に安定な定常状態を表している。

どちらの解釈でも結局のところ、数学的には同じ均衡概念であるナッシュ均衡に集約されてしまう。実は、その（1）と（2）はもっと細かく分類されると思います。例えば、ナッシュ自身の論文は（1）の立場で書かれています。[4] ただ、ナッシュの博士論文は（2）の解釈を考察しているという話です。それで、（2）のほうは古典的な経済学での均衡の解釈や、進化的ゲーム論にでてくるナッシュ均衡の解釈などはこの類型に含めてよいと思います。

半川：二つの解釈があるんですか。あっちじゃナッシュ均衡を考えるときは、Common Knowledge を仮定していますが。

間占：さっき、半川君は「オーマンの interactive epistemology アプローチのことですか、それとも、ナッシュ均衡の進化論的安定性のことですか」って言ったじゃないですか。前者は（1）に含まれ、後者は（2）に含まれます。

それから、「あっち」って言うのは止めたほうがいいんじゃない。実際のところ、それは「半川君がアメリカで知っている人達」ぐらいの意味しかないんでしょ。

半川：そりゃそうですけど。他に何があるんでしょうか。

それで、オーマンの interactive epistemology アプローチやナッシュ均衡の進化論的アプローチでは Common Knowledge を仮定しないんですか。

---

[4] J. F. Nash、Non - cooperative Games, *Annals of Mathematics* 54（1951）、286－295。

間占：おいおい、半川君、A大で何を勉強してきたのですか。

半川：僕が何か変なことを言いましたか？

間占：だって、進化論的アプローチで共通認識（Common Knowledge）を仮定しないのは当たり前でしょ。だって、そこでは個々のプレイヤーは遺伝子のタイプとして分類され、その遺伝子によって行動様式が完全に決定されている。ただ、世代が交代するときに、より生存に適したタイプが少し大きな確率で生き残る。それで時間が経過して、十分に大きな世代数を経た後にはナッシュ均衡に近づくだろう。ここでは、そもそもプレイヤーは、知識を獲得したり意思決定をする主体ではない。だから、共通認識なんて問題にならない。

これに対して、オーマンの interactive epistemology は（1）の立場を取ります。そこで、（1）のことですが、普通はゲームの構造が共通認識であると仮定します。ただ、新月先生風に言うと、明確にその仮定をせず、そういう解釈をしているだけだということです。

半川：そうなんですか？ でも僕は数学的理論の解釈ではなく、数学的に明確に定式化されているものに興味があるんです。ですから、未解決な数学的問題を解いたり、特殊な場合に証明されている定理を一般化していくつもりです。でも、もちろん、応用にも興味があります。なんかうまい現実問題を見つけて、ゲーム論を応用するんです。まあ、これは余技ですけど。

（間占、いらついて）
間占：半川君、共通認識って何を意味しているか分かっているのですか？

半川：共通認識って、Common Knowledge のことですか？この大学では「共通認識」って訳すのですか。他では「共有知識」と訳しているようですよ。

それで Common Knowledge について、もちろん、知っていますよ。オーマンの情報分割モデルで定義するんでしょ。その論文をA大でのゲーム論のコースで読みましたから。[5] 数学的定義はその論文を見れば思い出します。

間占：確かに「共有知識」と訳す人達もいますね。ここでは「共通認識」を使いましょう。
（間占、森々を見て）

[5] R. J. Aumann, Agreeing to Disagree, *Annals of Statistics* 4, (1976), 1236－1239.

森々君は「共通認識」が何を意味しているのかを言えますよね。

森々：言えると思います。ある命題が共通認識であるというのは、そのことをどのプレイヤーも知っていて、それを知っていることをどのプレイヤーも知っている、さらに、そのことも各プレイヤーは知っている。この繰り返しが無限回繰り返す状況です。

半川：そんなことなら僕も知っていますよ。僕はもっと厳密なことを訊いているのかと思いました。

新月：マアマア、もう少し具体的問題を議論しましょう。やはりゲームの定式化から簡単に復習しておきましょう。半川さんは少し違う定義を使っているかもしれないので。それじゃ森々君、ナッシュ均衡の一般的定義を黒板に書いてください。

森々：えーと、どのくらい一般的に書けばよいのでしょうか。

新月：標準形のn人有限ゲームのナッシュ均衡を書いてください。

森々：それなら簡単です。まず

(3)：$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},\{g_i\}_{i\in N})$を$n$人ゲームとする、つまり、
(3a): $N=\{1,\ldots,n\}$はプレイヤー達の集合；
(3b): S_i はプレイヤー i の純粋戦略の集合；
(3c): $g_i : S_1\times\ldots\times S_n \to R$ はプレイヤー i の利得関数。
ここでRはすべての実数の集合。

次に、ナッシュ均衡を次のように定義します。一応、黒板に定義をかいておきます。

(4)：戦略の組$s^*=(s_1^*,\ldots,s_n^*)$ が次の条件を満足するとき、それをナッシュ均衡と呼ぶ：

for all $i\in N$, $g_i(s_i,s_{-i}^*)\le g_i(s^*)$ for all $s_i\in S_i$。

ここで、$s_{-i}=(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$、そして$s=(s_{-i},s_i)=(s_1,\ldots,s_n)$とします。

新月：それで簡単な例を幾つか書いておいてください。えーと、「囚人のディレンマ」、「逢引のトラブル」ですね。ただ今日は戦略まで詳しく書いてください。

森々：分かりました。「囚人のディレンマ」は黒板の形式では次のようになります。まず、プレイヤーの集合は$N=\{1,2\}$で、戦略の集合は$S_1=\{s_{11},s_{12}\}$と$S_2=\{s_{21},s_{22}\}$となります。利得関数はg_1^1とg_2^1は表1で与えられています。

1 \ 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	5 , 5	1 , 6
s_{12}	6 , 1	3 , 3

表1：囚人のディレンマ $g^1=(g_1^1,g_2^1)$

1 \ 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	2 , 1	0 , 0
s_{12}	0 , 0	1 , 2

表2：逢引きのトラブル$g^2=(g_1^2,g_2^2)$

「囚人のディレンマ」でのナッシュ均衡は（s_{12},s_{22}）で与えられます。これが黒板のナッシュ均衡の定義を満足することは、二つの不等式、

$$g_1^1(s_{12},s_{22})\geq g_1^1(s_{11},s_{22}) \text{ and } g_2^1(s_{12},s_{22})\geq g_2^1(s_{12},s_{21})$$

を確かめればよいわけです。これはもちろん成立します。「逢引きのトラブル」では、（s_{11},s_{21}）と（s_{12},s_{22}）の二つがナッシュ均衡になります。

（半川、森々の説明が終るの待ちきれないで）

半川：ナッシュ均衡は純粋戦略の範囲においては存在を証明することができません。それゆえ、混合戦略に拡張する必要があります。その存在証明には、ブラウワーの不動点定理あるいは角谷の不動点定理を使います。純粋戦略の空間が無限集合の場合は、不動点定理をさらに拡張する必要があります。このときは、関数解析のテクニックを使うんですよ。バナッハ空間を考えて、そこで弱位相をとるとか。マスエコンでは、こういうのが常套手段ですよ。[6] でも、最近はもう流行らなくなったかな。

間占：半川君、だけど、いま問題にしようとしているのは、ナッシュ均衡概念をどう考え

[6] マスエコンは Mathematical Economics の省略形。

るかであって、その存在証明なんかじゃないんですよ。でも、ついでなので、ナッシュ均衡が存在しないゲームの例を黒板に書いておいて下さい。

半川：えーと、利得関数が、連続でないか擬凹でない場合ですよね。利得関数が連続でない場合の均衡の存在についての論文が何年か前の Journal of Theoretical Economics に載っていました。それを思い出せば均衡を持たないゲームをつくれると思います。

間占：何を言っているんだい！ 森々君はすぐ出来ますよね。

森々：2人ゼロ和ゲームで良いのなら、「コイン合わせ」ゲームは純粋戦略の範囲ではナッシュ均衡を持ちませんが。

半川：そんなのは知っていますよ、"Matching Pennies" でしょ。

間占：森々君、一応、黒板に「コイン合わせ」を書いておいて下さい。

1 \ 2	s_{21}(表)	s_{22}(裏)
s_{11}(表)	1 ,−1	−1 ,1
s_{12}(裏)	−1 ,1	1 ,−1

表3：コイン合わせ $g^3=(g_1^3,g_2^3)$

1 \ 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	1	−1
s_{12}	−1	1

表4：プレイヤー1の利得表 g_1^3

森々：分かりました。それは表3となります。つまり、二人のプレイヤーがコインを同時に示す。それらのコインの両方が表か裏で一致していれば、プレイヤー1が勝ち、相手のコインを獲得する。 もし、それらのコインの表裏が一致してない場合は、プレイヤー2がコインを獲得する。

このゲームでは、例えば (s_{11},s_{22}) では、プレイヤー1が戦略を s_{12} に変化させれば、彼の利得は−1から1になります。ですから、(s_{11},s_{22}) はナッシュ均衡ではありません。同様に他のどの戦略の組もナッシュ均衡になりません。従って、このゲームは純粋戦略の範囲ではナッシュ均衡を持ちません。

これはゼロ和ゲームですから、プレイヤー２は１の利得を最小化すると仮定するとして、プレイヤー１の利得だけに着目すれば十分です。それが表４です。

半川：僕が考えようとしたのはそんな Trivial な例でなく、もっと数学的知識を必要とするものです。

間占：半川君が考えているのは随分と難しそうなので、時間があったら説明してもらうことにしましょう。

それで「コイン合わせ」では、純粋戦略の範囲ではナッシュ均衡が存在しないのですが、混合戦略まで許すとナッシュ均衡の存在証明ができる。そのとき、半川君の好きな不動点定理を使うわけです。いや、半川君はもっと難しいのが好きなのかな？

新月：ははは、まとめてくれてありがとう。簡単な準備ができたので、そろそろ本論に入りましょう。では「ナッシュ均衡を成立させるのには、ゲームの構造が共通認識であることが必要だ」とよく言いますが、これについての議論から始めましょう。

半川：だって、新月さん、みんなそういうじゃありませんか。A大でだって、みんな、そう言っていましたよ。みんなが受け入れていることをわざわざ考えるのですか？

（間占、大分いらついて）

間占：だから、そういう意見は本当に正しいのかを考えようと言っているんですよ！ A大で皆がどう言うかなんて関係ないでしょ。ここでは、自分達で納得するまで議論しようとしているんだ。全く！ A大でどういう教育を受けて来たのですか。

新月：マーマー、半川君はこういう議論にはあまり慣れていないようなので、ゆっくりやりましょう。実は、この問題を考えるのにゼロ和ゲームのミニマックス定理が重要なんですよ。

半川：何を問題にしようとしているのかが今一つ分かりませんが、もう少し聞いてみます。

新月：まずはお茶でも飲みましょう。

第二幕：ナッシュ均衡の事前的解釈

[東京の某大学所属する半川生が間占に招待されセミナーに来た。間占は半川を新月と森々に紹介する。セミナーまでの時間があるので、３人は半川といっしょに議論することになった。半川は米国での最新の話題を間占から聞きたいというが、間占はナッシュ均衡とその解釈を議論したいという。今回は、事前の立場からの意思決定としてのナッシュ均衡の解釈から議論が始まる]

間占：先程の議論で「事前的立場からナッシュ均衡を考えるには、ゲームの構造が共通認識（Common Knowledge）と仮定することが必要か」を問題にすることにしました。新月先生はこの問題を考察するためにも、ミニマックス定理を考えておいた方が良いと言いましたが、僕はナッシュ均衡の解釈をもう少し明確にしておきたいと思います。いかがでしょうか？

新月：そうだね、確かに問題を明確にする必要があるね。じゃそれから始めまよう。

間占：黒板に僕が書いたように、ナッシュ均衡には二つの解釈があります。まず、事前の立場からの解釈です。それは自己強制的性質（self-enforcing property）として理解すると聞いています。つまり、$s^* = (s_1^*,...,s_n^*)$ が ナッシュ均衡であるとすると、各プレイヤーは戦略を変化させるインセンティブを持たない。だから、一度、ナッシュ均衡に到達したら、そのナッシュ均衡そのものが各プレイヤーに戦略を変化させないように働き、各人の決定はナッシュ均衡に留まる。このような意味で、ナッシュ均衡は自分自身の安定性を強制する構造になっている。

新月：その自己強制的性質としての解釈は 1980 年代に流行ったものです。しかし、間占君、良く考えて下さい。その解釈は「$s^* = (s_1^*,...,s_n^*)$がプレイヤー達にプレイされるとすると、どのプレイヤーもそれから逸脱するインセンティブを持たない」ぐらいとしか言っていません。これは黒板に書いてあるナッシュ均衡の数学的定義（４）を言葉で言い直しているだけです。だから、その解釈は、（１）の事前的解釈にも（２）の繰り返し状況における定常状態の解釈にも適用できる。この解釈では$s^* = (s_1^*,...,s_n^*)$の各戦略がどのように選ばれるのかについて述べていない。もしそれらの戦略が選ばれるとすると、それらの戦略の組は安定になると言っているだけだ。
　今問題にすべきは、（１）と（２）の状況をまずもっと明確に区別することでしょう。

間占：分かりました。ただ僕はこれ以上問題を明確に出来ないので、先生が（1）と（2）の違いを説明して下さい。それで、二つをいっしょにすると、議論が何処に脱線するか分からないので、まず（1）の事前的解釈からにしてください。

新月：分かりました。それじゃ（1）を説明します。ただ、ナッシュ均衡を解釈しようとするというのは、正確な問題設定とはいえませんね。考えるべきは、ナッシュ均衡をいかに解釈することではなく、事前の立場からプレイヤーの意思決定がいかに行われるかを分析することです。そこでは確かにナッシュ均衡概念が中心的役割を果します。しかし意思決定の問題をナッシュ均衡の解釈の問題にしてしまうのは、ゲーム論がいかに未発達であるかの証しでしょう。

（半川、驚き）

半川：ゲーム理論が未発達だなんて！ 現在では経済学の主要学術誌の多くの論文でゲーム論が使われています。例えば、一流学術誌の Journal of Theoretical Economics の大半の論文は多かれ少なかれゲーム論と関係しています。

間占：半川君、確かに新月先生の「ゲーム論は未発達」はイヤミな表現だけどね、だからと言って、「欧米の多くの論文でゲーム論が使われている」は反論になりませんよ。

半川：それじゃどう反論すれば良いのですか。だって、ゲーム論や経済学が進んでいるのは欧米であって、そこでの一流学術誌でゲーム論がどう扱われているかは重要じゃありませんか。

間占：だけどね、欧米の学界そのものが停滞しているのが現状でしょ。この場合、問題を我々自身の頭で考えるべきだと思います。

新月：どうも私は結論を急ぎすぎたようだ。もう少し基本に忠実に行きましょう。

まず、我々の考え方を１８０度転回します。多くのゲーム論家はナッシュ均衡概念が既に与えられたものとして、それをどのように考えれば良いかを議論しようとしている。しかし、ゲーム論の本来の対象は、ナッシュ均衡概念でなく、社会における個人の行動や意思決定であるはずだ。ナッシュ均衡はこの行動と意思決定の数学的考察で重要な部分を占めていますが、本来の問題はナッシュ均衡の分析ではありません。本来の問題を忘れないように板書しておきましょう：

（5）：「ナッシュ均衡をどう解釈するか？」ではなく、

（6）：二人以上の意思決定者がいる状況においての、戦略の選択が如何に行なわれるのか ？

それで、ナッシュ均衡概念が（6）の問題をどの程度捉えているかを問題にしたい。

（半川、首をふりながら）

半川：僕は新月さんの意見に反対です。ナッシュ均衡を解釈するというのは、最終的にはナッシュ均衡を数学的に分析することに他なりません。実は、僕は解釈と呼びたくはないんですが。ゲーム理論家の仕事は経済学研究の為の道具を作ったり、それを精緻化することです。ですから、我々理論家の仕事は（5）の括弧「…」の部分を数学的に分析することだと思います。だから、応用なんてことを考えないで、純粋にこういう問題を研究するのが、純粋理論なんですよ。このような純粋研究が出来てから、応用の人が（6）を研究すれば良い。

（森々、感心して）

森々：へー、ゲーム論は経済学のための道具を用意しているのですか。それに純粋理論は純粋でなきゃ純粋理論でなくなってしまうのか。

（森々、すこし考えて）

でも、使うあてを考えないで道具だけ一生懸命作ったって、どうしようもない道具になってしまい、不必要な道具がいっぱい出来てしまいそうです。それに応用を考えないのが純粋理論だっていうのもおかしいと感じます。新月先生はどう思いますか。

新月：うーん、そういうことは理論家がよく言いますね。理論にどのような応用がありますかと訊かれて、理論はこれから現実問題に応用するのだと応え、それは原理的には可能なはずだとも言います。実際は、そのような応用を考えるのは一段下の仕事として、自分達は純粋理論を研究していて、応用はいつでも可能だと信じている。あるいは信じたいのです。ところが、実際は彼らのいう応用まで行かないので、道具を作っていて、それを使うのは応用の人にまかせるなんて答える。

半川：新月さんは否定的な感じで話していますが、僕はそれで良いと思います。だって、理論の人と応用の人の分業を必要としますから。

間占：うーん、何だか今日は入り口での議論が多すぎるので少し先に進みましょう。（5）と（6）の違いも段々分かってくるかと思います。

それで、先生の言いたいことをまとめると、我々が問題にすべき対象は二人以上プレイヤーがいるゲーム論的状況おける各プレイヤーの意思決定である。そして、その問題の数学的表現として、ナッシュ均衡が出てくる。新月先生、これでよろしいでし

ょうか。

新月：そのとおりです。間占君。

森々：先生、ひとつ分からない点があるのですが。先生は「ある概念を議論するとき、それが何の属性であるのかを考えるのが基本だ」とよく言われます。先生は授業で、「ナッシュ均衡はn人ゲームではn人の戦略の組$s=(s_1,\dots,s_n)$の属性であり、一人の戦略s_iの属性ではない」と何度も強調したと思います。

ところが、間占さんの今の話しでは、各人の意思決定を考え、それをナッシュ均衡で表現すると言いました。各人は自分の戦略を選択するのだから、意思決定の結果というのは、戦略の組$(s_1,\dots,s_n)$でなく、自分の戦略s_iじゃありませんか。

新月：森々君、鋭いね。間占君、これはどう考えるのですか？

間占：森々君の質問を理解しているかどうか考えさせて下さい。えーと、意思決定するのは各プレイヤーである。プレイヤーiの意思決定というのは最終的には彼のひとつの戦略である。すると、ナッシュ均衡を形成している他プレイヤー達の戦略$s_{-i}=(s_1,\dots,s_{-i},s_{i+1},\dots,s_n)$は何であろうかという問題ですか？

森々：その通りです。問題がより明確になりました。それで$s_{-i}=(s_1,\dots,s_{-i},s_{i+1},\dots,s_n)$をどう考えれば良いんですか。

新月：間占君、多分、これは君の問題だよ。随分とレベルの高い問題だし、もともと、この問題を考えようと言い出したのは君自身なんだから。もう一度、いま私たちが問題にしようとしている状況を明確にする必要がありますね。

間占：分かりました。それじゃ、もう一度、問題にしている状況を明確にしてみます。ゲーム$g=(g_1,\dots,g_n)$が与えられて、ゲームの各プレイヤーはそこで何を選択するかを考える。事前的立場の問題としては、ゲームは一度だけプレイされるとする。そこでゲームが行われる前に、各プレイヤーは戦略を選択する。だから、各プレイヤーは他プレイヤーの意思決定を考える必要がある。この部分がs_{-i}になるのでしょう。

新月：そうです。強調すべきはこれがゲーム的状況だということです。それは他人の戦略の決定が個人の利得に直接影響する。つまり、数学的には利得関数$g_i(s_1,\dots,s_n)$に他人の戦略が直接は入っている。だから、各プレイヤーの利得最大化は単なる目的関数最大化にならない。これが市場均衡理論での各主体の意思決定と大きく異なる点です。

例えば、表3のゲームでプレイヤー2がs_{21} を選ぶ場合はプレイヤー1にとっての最適戦略はs_{11} である。2がs_{22} を選ぶ場合は1の最適戦略はs_{12} だ。

半川：そんなことゲーム論では当たり前ですよ。だから、Common　Knowledge が必要になるんじゃありませんか。

新月：そうだねえ。ただ、当たり前のことを明らかにしておくのは重要なんですよ。例えば、半川さんは、その当たり前のことから、「だから、共通認識が必要になる」と結論しているけど、それを説明できる？

半川：ウーン、だってみんなそういう風に議論していると思いますが。

新月：それじゃまず、ゲーム的状況でなぜ共通認識が必要になるかを考えてください.

半川：えーと、他人の選択が自分の意思決定に直接影響するので、自分の意思決定のために他人の意思決定を知る必要がある。状況はどの個人にとっても同じなので、ゲームが Common Knowledge であるとすると、他人の選択を予測することができる。

（半川、威張り）

だから、ゲーム論的状況では Common Knowledge が必要なんです。

新月：最後の「だから共通認識（Common　Knowledge）が必要だ」というのは飛躍が大きすぎますね。ここは「Common Knowledge を仮定すれば十分だ」としておいて下さい。

半川：確かにそうでね。そうします。

森々：先生、それで共通認識は必要でないんですか。

新月：その質問も短絡的過ぎます。この問題を考えるのにミニマックス定理がヒントになります。正確に言うと、ミニマックス定理でなく、マックスミン意思決定基準です。

森々：マックスミン意思決定基準は先生の授業で少し議論したと思います。それを思い出してみます。まず考えるのは2人ゼロ和ゲームである。ゼロ和というのは、プレイヤー達の利得の和が常にゼロということです、つまり、

（7） $g_1(s_1,s_2)+g_2(s_1,s_2)=0$ for all $(s_1,s_2)\in S_1\times S_2$ 。

表3の「コイン合わせ」はゼロ和2人ゲームの例です。それでマックスミン行動基準というのはなんでしたっけ？

間占：じゃ僕が思い出してみます。マックスミン意思決定基準はまず、プレイヤー1に関してですが、自分の各戦略s_1に対して最悪の場合を対応させます。つまり、それは

$$s_1 \mapsto \min_{s_2} g_1(s_1,s_2)$$

と書けます。$\min_{s_2} g_1(s_1,s_2)$ は s_1の関数と見なせるので、s_1を動かしてこの関数を最大にする。これがマックスミン意思決定基準と呼ぶものです。

新月：それで結構です。ここで、「プレイヤー2は各s_1に対して本当に$g_1(s_1,s_2)$を最小にする」とプレイヤー1が考えるとする必要はありません。むしろ、プレイヤー1はs_2に関しての最悪の可能性でs_1 を評価するのだと考えてください。そして、その評価に基づいて、最良のs_1 を選ぶ。

この議論の中では、プレイヤー1はプレイヤー2の行動を予測しません。プレイヤー1はプレイヤー2の意思決定を考える必要もないわけです。

半川：だけど、それはマックスミン決定基準であって、ナッシュ均衡ではありません。

間占：いやマックスミン意思決定基準とナッシュ均衡との間にはある関係があったはずです。思い出してみます。

マックスミン意思決定基準をプレイヤー1と2に適用すると、$\max_{s_1}\min_{s_2} g_1(s_1,s_2)$

と $\max_{s_2}\min_{s_1} g_2(s_1,s_2)$ と書けます。それで、プレイヤー2の意思決定基準はゼロ和の

条件（7）から $\min_{s_1}\max_{s_2} g_1(s_1,s_2)$ と書き直せます。そして、一般に

（8） $$\max_{s_1}\min_{s_2} g_1(s_1,s_2) \leq \min_{s_1}\max_{s_2} g_1(s_1,s_2)$$

が成立します。この不等式が等号になるための必要十分条件が、このゼロ和ゲームがナッシュ均衡を持つことでした。[7]

ゲームがナッシュ均衡を持つことを証明するには、純粋戦略の範囲では無理で、混

[7] 鈴木光男著『ゲーム理論入門』、第2章、共立全書、(1981)。

合戦略の範囲まで拡張する必要があります。ノイマンは混合戦略の範囲でゼロ和２人ゲームのナッシュ均衡の存在を混合戦略の範囲で証明しました。それで、混合戦略の範囲では、（8）が等号で成立します。この事実をもって、ノイマンのミニマックス定理と呼ぶわけです。

森々：あれ、ナッシュの均衡の存在証明より前にノイマンが混合戦略の範囲でナッシュ均衡の存在証明をしているんですか？ それでなぜナッシュ均衡って名前がついているんですか？

聞占：いや正確に言うと、ノイマンはゼロ和ゲームでの鞍点の存在を混合戦略の範囲で証明したのです。ゼロ和ゲームでは、(s_1, s_2) がナッシュ均衡であることと (s_1, s_2) が g_1 の鞍点であること、つまり

（9） $g_1(t_1, s_2) \le g_1(s_1, s_2) \le g_1(s_1, t_2)$ for all $(t_1, t_2) \in S_1 \times S_2$

が同値です。これは混合戦略の範囲でも成立します。

ナッシュはノイマンの鞍点の存在証明を、一般の n 人ゲームでナッシュ均衡の存在証明まで拡張したのです。ですから、もちろんノイマンの先行業績に大きく依存しているのは確かですが、ナッシュ均衡の存在証明は他に大きな影響を与えたので、ナッシュの名前を取ってナッシュ均衡と呼ばれるわけです。

森々：ナッシュの存在証明にはそういう背景があったんですか。

新月：そのころノイマンもナッシュもプリンストンにいたので、ナッシュはそういう問題に気が付いたのでしょうね。そういう学問的環境は羨ましいですね。

半川：アメリカの大学院はそりゃアカデミックですよ。アカデミックと言えば、ナッシュの話を映画化した『ビーティフルマインド』が今年のアカデミー賞を受賞しました。あの映画でアメリカの大学院の雰囲気が出ていて懐かしかったな。

新月：実は私もあの映画を見に行きました。大学の新入生オリエンテーションで何か話さなければならないので、私の専門の偉い先生の話だと、学生に紹介するつもりだったのですが。しかし、映画を見てガッカリしまいました。まるっきり深みがない。アダム＝スミス以来の経済学を書き変えるといたって、ナッシュ均衡はノイマンのミニマックス定理があって出来たもので、ノイマンとの関係がまったく描かれていない。

半川：ナッシュ均衡の存在証明はミニマックス定理の一般化でもあるわけでしょ。あの一般化でその後のゲーム論と数理経済学ははいろいろ進展したと思いますが。

新月：ナッシュの仕事がつまらないと言っているのではなく、『ビーティフルマインド』がつまらないと言っているんです。何年か前の映画『グッドウィルハンティング』と同様で、天才数学者というのはその辺に転がっている問題を見つけて、ヒラメキで解く人間と取り扱われている。その問題を解くための苦労とか、それがいかに重要であるかを理解すること、あるいはそれを他人に理解してもらうための苦悩があると思うんだけど、それが映画には殆どない。

1950年ごろのプリンストンはアインシュタイン、ノイマン、ゲーデルなんて、とんでもない怪物が何人もいたんですよ。ナッシュだって、こういう怪物達がいる雰囲気のなかで、ノイマンの仕事の延長として、ナッシュ均衡の仕事をしたんですよ。こういう人達との関係が出てれば、映画にもう少し深みが出てきた。

間占：僕の知っている限りでは、ナッシュの均衡の存在証明をノイマンはあまり高く評価していなかった。あの存在証明はブラウワーの不動点定理と殆ど同じだと。だけど、ナッシュの交渉理論は随分とオリジナルなものだし、極めてビーティフルなものですよね。

新月：そのとおりだと思います。そうだ、もう一つ映画の問題点は、映画の中のナッシュは自分が天才であることを認めてもらいたいと言うばかりで、彼の心は全然ビーティフルともピュアとも思えない。

半川：それは新月さんの好みの問題でしょう。僕は良く出来た映画と思ったし面白かった。

間占：僕も一応『ビーティフルマインド』を見ておきます。
それでミニマックス定理と鞍点としてのナッシュ均衡の存在まで話が行きましたが。

新月：そうですね。ゲーム論の問題に戻りましょう。ミニマックス定理は、マックスミン決定基準に関しての定理であり、また、ナッシュ均衡に関しての定理でもある。強調すべきは、マックスミン意思決定基準にしたがって行動するプレイヤーにとっては、自分の戦略の評価が重要であり、相手がどのように意思決定するかは必要でない。それゆえ、ゲームの構造が共通認識である必要はない。相手の思考すら考えない。

特に（8）が等号で成立する場合は、この決定基準が非常にうまく働くんです。相手のプレイヤーも同一の基準で来たときは、等号が成立するので、どちらのプレイヤーにとってももう改善の余地がない。

しかし、（8）が等号で成立するときは、二人のプレイヤーがマックスミン決定基準によって選ばれた戦略の組みはナッシュ均衡になる。

森々：ということは、ナッシュ均衡を導出するのに共通認識なんて必要ないじゃありませんか。それで共通認識を必要とする決定基準もあるんですか？

新月：あります。ある意思決定基準を採用するとどうしても共通認識が必要になる。
ところで、セミナーの時間が近づいていますよ。半川さん、準備した方が良いと思いますが。

（半川、ほっとした表情で）
半川：そうですね。準備します。

新月：今日の議論の続きは明日にしましょう。

（半川、セミナーの準備を始める）

第三幕：予測の無限背進と共通認識

[前回までのあらすじ：昨日、セミナーのために来た半川をいれて、ナッシュ均衡をどう考えるかについて議論した。ナッシュ均衡は大きくわけて、事前の立場からの意思決定としての解釈と定常状態としての解釈の二つに分かれると議論した。そして、事前の立場からは「ゲームの構造が共通認識であるとする仮定が必要か」という問題に行きつく。この問題を考えて行くうち、実は必ずしもこの仮定が必要でないことが分かってくる。では、今回はどこでそれが必要とされるかが議論される]

（半川が新月と間占と森々のいる研究室に現れる）

半川：おはようございます。ところで、昨日の僕のセミナーはいかがでしたか？ 間占さんからのを除くとあまり質問が出なかったし、セミナーの後食事に行ってセミナーについて誰も何も言わなかったので気になるのですが。

新月：おはよう。昨日のセミナーですか、ウーン正直のところ良くなかったね。 セミナーの初めのところで、間占君が「なぜそのケースを考えるのですか」と訊ねました。それに真ともに答えないですぐに技術的な話になってしまった。それで、皆さん興味を失ってしまったようです。でも間占君がいろいろ質問してくれたじゃありませんか。

反川：「このケースが未解決なので、それを解決したい」じゃいけないのですか？

間占：でもねー、ケース分けの行列を書いて、「ここは誰がやっていて、あそこは違う人がやっていて、このケースはまだ誰も考察していない。だから、それについて論文を書く」ってセミナーを始めたでしょ。まずそのケースが重要であることを説明すべきです。セミナーでは関連文献についての説明は詳しかったけど、そのケースの重要性についての説明は最後までなかった。

半川：誰もやっていないケースを探して論文を書くというのはまずいんですか？これは「そこに山があるから登るんだ」といっしょと思うのですが。

新月：ハハハ、それは登山家マロリーの言葉でしょ。その意味は「誰も登っていない最高峰の山を登るんだ」でしょ。マロリーの言葉には「最高峰とか」とか、「素晴らしい」とかをつけるべきなんですよ。産業廃棄物の山で未踏峰のものがあるからって、そこに登る価値はありませんよ。

学問の世界でも同様です。ひとつひとつの問題は有限の言語で表現されますが、その組み合わせは無限個あります。その殆どは価値のない組み合わせです。あるケース

を考察するには、まずそれが価値があるかどうかを議論すべきなんだ。

半川：僕の問題が産業廃棄物の山の一つと言うのですか。

新月：ごめんごめん。それは喩えです。ど一もK氏の悪い言葉がうつってしまった。

半川：確かに組み合わせで考えれば無限個の問題が存在します。その中で、ある問題が重要であって、ある問題は重要でないか、はどうしたら分かるのですか？ 文献サーベイをして、誰もその問題をまだ扱っていないことを示すしかないのでは思いますが。

間占：それでは産業廃棄物の山でも誰も登っていなければ価値があるになってしまいます。うーん、結局、問題を基礎から応用まで視野にいれて考察することでしょう。新月先生みたいな言い方になってしまった。昨日の問題に戻りましょう。

新月：半川さんもそのうち理解しますよ。それで、今朝は何から議論するんですか？

間占：共通認識を必要とする場合の考察です。先生は、昨日ある意思決定基準を採用すると共通認識がどうしても必要となると言いました。

新月：そうか、その問題か。それを説明するのはチャレンジングだ。話を簡単にするため、2人ゲームに限定します。

プレイヤー1はプレイヤー2の意思決定を予測して、その予測に対して自分の利得を最大にするように戦略を選択する。問題はプレイヤー2の意思決定に関してのプレイヤー1の予測です。プレイヤー1は、2が1自身と同じ方法で意志決定を行うと仮定する。そして、実際2も1と同じ方法で予測と意思決定を行う。

森々：先生、それじゃ何だかさっぱり分かりませんが。

新月：うん、黒板に書いたほうが簡単だ。

(a)：プレイヤー1は、プレイヤー2が下の (b) に従って決定すると予測して，その予測に対する最適戦略を選ぶ；

(b)：プレイヤー2は、プレイヤー1が上の (a) に従って決定すると予測して，その予測に対する最適戦略を選ぶ。

森々：ちょちょっと待って下さい、先生。(a) の中に (b) が出てきて、(b) の中に (a) が

出てきます。(a)の中の (b)に (a) を入れ、その中にまた(b)を入れるというのを続けると、(a)の中にも、(b)の中にも、(a)と(b)が無限回に出てくることになってしまいます。えーと、図式的には、プレイヤー１とプレイヤー２から出発する二つのケースがあるから、

（１０）$(a) \to ((b) \to ((a) \to ((b) \to \ldots)\ldots)$
$(b) \to ((a) \to ((b) \to ((a) \to \ldots)\ldots)$

と書けるのかな。こんな無限列が出てきてしまって良いんですか？

新月：それで良いのです。一つをもう一つに繰り込む。しかし、その繰り込みはもう一つの繰り込みを必要とする。この繰り込みを何回行っても、さらに繰り込みを必要とする。この繰り込みで出来る無限列が予測と決定の無限背進（Infinite Regress）です。

間占：理解のため（１０）を言い直してみます。文章(a)の意味を明確にしようとすると、(b)を仮定する必要があり、その文章(b)の意味を明確にしようとすると (a)を仮定する必要がある。そして、この(a) を再び明確にしようとすると、再び(b)を必要とする。以下同様。この無限回の繰り返しが無限背進になる。これで良いのでしょうか？

新月：そうです。意味あるいは知識の追求が無限背進を導く。無限背進なんてものが出てきたら、問題が解けないと考えるのが普通なんだけど、実はこの無限背進こそが「共通認識」なんだ。

これをはっきりさせるのには、信念の繰り返しと説明したほうが良いでしょう。さて、B_1とB_2という記号を用意し、次の無限列を考えます。

（１１）
$$a \wedge b, B_1(a \wedge b), B_2(a \wedge b), B_1B_1(a \wedge b), B_1B_2(a \wedge b),$$
$$B_2B_1(a \wedge b), B_2B_2(a \wedge b), B_1B_2B_2(a \wedge b), \ \ldots$$

ここでB_1はプレイヤー１が括弧( )の中を信じていることを意味します。[8]（１１）の$B_1(a \wedge b)$は「１が$a \wedge b$ を信じている」ことを意味しています。初めに$a \wedge b$自身を仮定しているから、この信念は客観的にも正しく、この意味で信念は知識になる。第５項の$B_1B_2(a \wedge b)$ は、「１が『２が$a \wedge b$ を信じている』ことを信じる」ことを意味し、そしてこの繰り返しが無限回続きます。この意味で（１１）は「$a \wedge b$が共通認識

[8] 記号$\wedge$は``and" を意味する。従って、$a \wedge b$はaとbの両方が成立することを意味する。

である」ことを意味している。

森々：もう少し詳しくお願いします。

新月：もう少し詳しく説明します。(a)と(b)はプレイヤー1と2の意思決定の仕方を記述している。それゆえ$a \wedge b$を仮定します。プレイヤー1は自分がどう決定するかを知っているとする。これは$B_1(a)$と書ける。予測のためには、プレイヤー1はプレイヤー2のことも知っている必要がある。これが$B_1(b)$だ。これらをまとめると、$B_1(a \wedge b)$になる。同様に$B_2(a \wedge b)$も仮定する必要がある。

この$B_1(a \wedge b)$の中にはプレイヤー1も2も現れます。これはプレイヤー1の心の中に現れるプレイヤー1と2であり、本当の1と2とは区別します。しかし、これらの想像上の1と2も意思決定を(a)と(b)に従って行うとします。それで、$B_1B_1(a \wedge b)$および$B_1B_2(a \wedge b)$を仮定する必要がある。対称的に$B_2B_2(a \wedge b)$および$B_2B_1(a \wedge b)$をします。以下同様にして、（１１）の各々の式が導出される。

森々：大体分かりました。（１０）の矢印に従って、$B_1B_2(a \wedge b)$という風にB_1とB_2の繰り返しが増えていくのか。それで（１１）はプレイヤー1と2の意思決定と予測の仕方を規定しているんですね。

新月：そのとおり。

森々：B_iが繰り返し出ているやつは、一つにまとめては行けないんですか？

新月：実は、各B_iにどういう条件を仮定するかで、一つにまとめて良いかどうかが決まるのです。それについては随分と考えたんですが、結局は自分が考える自分自身も異なるものとして、B_iB_iを一つにつぶさないほうが概念的にも技術的にも良いことが分かってきました。それでは（１１）ではB_iを繰り返したのもいれているんです。

半川：だけど、(a)と(b) を良く見るとそれらは不動点を定義しています。だから、それらがナッシュ均衡を決定するんだ。

新月：知識と信念の部分を無視すれば、概ねそうなんだけど、（１１）の大事な部分は知識と信念が追加されていることです。既存のゲーム論の議論がナッシュ均衡の解釈に終始しているのは、こういう部分を明確にしないからなんだ。

それで、（１０）を完全に解こうとすると、共通認識を導入する必要がある。共通認識の導入無しには（１０）を完全に解くことが出来ないことを証明できます。ここで

初めて共通認識の必要性が出てくる。これを厳密に議論するのには、認識論理が必要になる。より厳密に言うと、共通認識まで許した認識論理です。そこでは、（１１）は

（１２）　$C(Nash(s_1,s_2))$

という意思決定基準を与えます。$C(Nash(s_1,s_2))$は、「(s_1,s_2)がナッシュ均衡である」が共通認識であることを意味します。（１１）から（１２）を導出するのには結構大変な作業になるので、これはいつかということにしましょう。[9]

森々：$C(Nash(s_1,s_2))$は、どちらのプレイヤーも「(s_1,s_2)がナッシュ均衡である」ことを知っていて、両プレイヤーはさらに「それが各プレイヤーに知られている」ことを知っている、そしてこの繰り返しが無限回繰り返すで良いのですね。

新月：そうです。そして、どちらのプレイヤーにとっても状況が完全に対称的になっている。従って、(a)と(b)のどちらも成立する。そして、実はこれらの(a)と(b)を成立させるのは、$C(Nash(s_1,s_2))$だけである。

間占：先生、（１０）の (a)と(b)を、　あるいは（１１）を成立させる決定基準は$C(Nash(s_1,s_2))$だけであると言うのはある程度理解できます。しかし、先生はまだ「ゲームが共通認識であることが必要になるか」と言う問題に答えていないと思いますが。

新月：うーん、確かにその通りだ。今までの議論は意思決定の仕方についてであり、そこから導かれた（１２）の $C(Nash(s_1,s_2))$は意思決定基準を与えている。問題はこの決定基準が与えられ、具体的のゲームの中でそれに従い意思決定するためには、「ゲームが共通認識であることが必要になるか」だ。

実は、戦略の組(s_1,s_2)に対して$C(Nash(s_1,s_2))$が成立するためには、仮定として「ゲームの利得関数$g=(g_1,g_2)$ が共通認識になる」が必要だ。

半川：十分でなく、必要ですか？

新月：あれ、半川さんもいい質問をするじゃないですか。実は十分なだけでなく、必要だとも言いたい。

---

[9] この議論に必要な認識論理と（１１）の公理的導出に関しては、以下の論文を参照せよ：金子 守「認識論理とゲーム理論」数理科学 1999 年１０月号、69－75. より詳しい取り扱いにかんしては、M. Kaneko (2002)、 Epistemic Logics and their Game Theoretical Applications: Introduction, *Economic Theory* 19, 7-62 を参照せよ。

まずは、「ゲームの利得関数$g=(g_1,g_2)$ が共通認識になる」が$C(Nash(s_1,s_2))$の
ための十分条件です。黒板に書くと、

（１３） $\vdash C(g) \rightarrow C(Nash(s_1,s_2))$。

初めのシンボル $\vdash$ はその後全体が証明可能であると言うことです。つまり、「ゲーム$g=(g_1,g_2)$ が共通認識であるとき、『(s_1,s_2)がナッシュ均衡である』が共通認識になる」 が証明可能である。ただ、この証明可能性も論理の問題ですが、ここでは、やはりスキップしましょう。

半川：それで必要性のほうはどうするんですか？

新月：必要性をきちんと議論するのはやはり大変ですね。うーん、やはり、スキップしようか。

（半川、勝ち誇って）
半川：それで結構ですが、みんなスキップしてしまうのですね。

間占：うん、もう少し基礎からぎろんしましょう。 昨日の森々君が質問した「s_{-i}は何か」の問題に戻ると、プレイヤー１にとってのs_2 は、プレイヤー２がs_2に決定することをプレイヤー１が予測しているものを表わしている。１はそれに対する最適戦略s_1を選ぶ。そして、この決定の仕方そのものをプレイヤー２が予測する。

さらに（１３）では、ゲーム$g=(g_1,g_2)$が共通認識であり、二人が完全に同じ決定基準に従う場合、自分の考えていることも相手の考えていることを互いに共有している。だから、自分の意思決定も相手の意思決定も分かり、それが予測になるだけでなく、共通認識にもなってしまう。

これが共通認識を仮定した場合の議論だと理解して良いのですか？

新月：そうです。いま問題になっている状況が全部個人の心の中にあり、それが二人のプレイヤーに共有されている。そして二人が全く同じものを共有し、それらは客観的にも正しい。

間占：それから、二人にとっての意思決定基準が$C(Nash(\cdot,\cdot))$であることも共通認識のはずですね。でも、それは（１３）の何処にあるのですか？

新月：それは（１３）には書いてありません。書こうとするともう少し長い式になってし

まうので、それは書きませんでした。この場合は書かなくても良いことが証明できるのです。

間占：なんか、いろいろ隠しているように聞こえますね。

森々：先生、僕は少し違う質問があるのですが。共通認識をいろいろ仮定するのは、それらをプレイヤー間で同じことを考えていることでも有りますよね。でも普通は、自分と相手とは同じことを考えているとは思えません。例えば、僕が想像する新月先生と、本当の新月先生は随分と異なると思います。

新月：そのとおりだ。実はそれが前に議論した「蒟蒻問答」なんだよ。[10]

森々：うん、関係すると思った。で、どう関係するのですか？

半川：ははは、森々君は分からないのに分かったような返事をするんだ。

新月：それが森々君のいいところなんだよ。さて「蒟蒻問答」との関係だ。

黒板の（１１）式がプレイヤー１の心の中だけで起きるとする。信念オペレーターで書いた場合は（１１）の各項に B_1 をかぶせたものです。つまり、

$$(14)\quad \begin{array}{l} B_1(a \wedge b), B_1B_1(a \wedge b), B_1B_2(a \wedge b), B_1B_1B_1(a \wedge b), B_1B_1B_2(a \wedge b), \\ B_1B_2B_1(a \wedge b), B_1B_2B_2(a \wedge b), B_1B_1B_1B_2(a \wedge b), \ \ldots \end{array}$$

この場合、前に議論したプレイヤー１と２との間の問題がすべて、プレイヤー１の心の中で起きる。ですから、プレイヤー１の意思決定基準は $C(Nash(s_1, s_2))$ でなく、$B_1C(Nash(s_1, s_2))$ となる。つまり、今までの共通認識の議論をプレイヤー１は信じているだけかも知れない。それで（１３）は

$$(15)\quad \vdash B_1C(g) \rightarrow B_1C(Nash(s_1, s_2))$$

---

[10] ここの議論により興味がある人は、M. Kaneko and J. J. Kline, False Beliefs and Game Theory: Implications from the Japanese Comic Story Konnnyaku Mondo, IPPS-WP No.970, University of Tsukuba. (2002) を参照せよ。 ここでは Shinzuki が英語で Jan Hummer と議論します。.

となる。つまり、（１３）の式の成立がプレイヤー１の心のなかで起きている。

森々：まだ「蒟蒻問答」との繋がりは出てきませんが。

新月：もう少しはっきりさせよう。いま、プレイヤー１はプレイしているゲームがg^1、つまり「囚人のディレンマ」であり、そのゲームが二人の間で共有知識になっていると信じている。 しかし、プレイヤー２はプレイしているゲームはg^2 、つまり「逢い引きのトラブル」であり、それが二人の間で共有知識になっていると信じている。 この場合、「『戦略の組(s_{12}, s_{22})がナッシュ均衡である』ことが共通認識になる」と信じる。つまり、

$$（１６）\vdash B_1C(g^1) \wedge B_2C(g^2) \rightarrow B_1C(Nash(s_{12}, s_{22})) \wedge B_2C(Nash(s_{12}, s_{22}))$$

間占：二人の各々が違うゲームをプレイしていると誤解している。さらに、それが共通認識になっているとも誤解している。間違えた共通認識の信念から二人とも同じ信念を導出する。この状態はまさしく「蒟蒻問答」ですね。ただ、本当のゲームはどこにあるんですか？

新月：本当のゲームですか？ それは確かに必要だ。 それを表５の$g^4 = (g_1^4, g_2^4)$ で与えられているとしよう。すると、ゲーム g^4で$Nash(s_{12}, s_{22})$ が成立するので、（１６）の右辺は客観的にも正しくなる。それで、実は次の（１７）が成立します。

$$（１７）\vdash g^4 \wedge B_1C(g^1) \wedge B_2C(g^2) \rightarrow C(Nash(s_{12}, s_{22}))$$

1 \ 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	0 ,0	0 ,1
s_{12}	1 ,0	3 , 3

表５：$g^4 = (g_1^4, g_2^4)$

間占：二人とも客観的ゲームと違うゲームが共通認識になっていると信じている。しかし、それらの間違えている信念でたまたま(s_{12}, s_{22})がナッシュ均衡になっている。そしてそれは客観的ゲームで成立する。したがって、(s_{12}, s_{22})がナッシュ均衡になるのは正しい事実である。

あたかも、それは「蒟蒻問答」で二人が誤解しているにもかかわらず、六兵衛が旅僧に禅問答で勝ったのは事実であるようにですね。

森々：面白いな。二人で違うゲームをしていると勝手に思い込んでいる。しかし、出てきた結果は本当のゲームでの結果と同じナッシュ均衡だ。

うーん、それで二つ疑問があるのですが。一つは戦略の数についてですが、今までの議論では、各プレイヤーが考えているゲームの戦略の数だって違ってもいいんですよね。すると、何がなんだかさっぱり和からなくなってしまいます。もう一つは「蒟蒻問答」において本当のゲームg^4に対応するのは何なんですか？

新月：一つ目は質問で戦略の数についてはそのとおりです。それを同考えるかは自分で考えるんだな。

もう一つの方は難しい。ウーン、何だろう。「蒟蒻問答」においては、各人のジェスチャーに各人が意味を与えているが、そもそもジェスチャーには本当の意味なんて存在しない。そうか、「蒟蒻問答」とゲーム論の（１４）とは少し違うのかな？

待てよ、それは言語一般の問題じゃないか。これは真面目に考えなきゃいかんね。

森々：僕も考えてみます。それでもう一つ質問があるのですが。

新月：ただ私はお腹がすいてきてしまった。これで最後にしましょう。

森々：簡単なことです。 各人が勝手に思い込みをしたり、勝手に意思決定基準をつくるのなら、もっと簡単に何も考えずに第１戦略を取るというのも意思決定基準の特殊ケースになりそうですか？

新月：それも決定基準と考えられます。それはディフォールト意思決定基準と呼べると思います。他人のことなど考えないで、何しろ第１戦略を選ぶ。自分の効用すら考えない。共通認識も必要としないし、利得最大化も必要としない。

森々：やっぱりそうか。ディフォールト決定基準では、どう行動すべきかなんて面倒くさいことを考えないで済む。こういう行動基準を持っていると楽でいいですよね。僕は

これからいつもディフォールトで行くかな。

半川：それじゃアホじゃないですか。試験もそれでやってきたんですか？

森々：いくらなんでもそれはありませんよ。

新月：確かに、いつもディフォールトで行動していたら、みんなにアホと呼ばれそうですね。

（新月、思い出すように）

エート、宮澤賢治は「… ミナニデクノボートヨバレ ホメラレモセズ クニモサレズ ソウイフモノニ ワタシハナイタイ」と言っているけど、森々君は「デクノボートヨバレ ホメラレモセズ クニモサレズ」で大丈夫かい？

森々：「クニハサレ」ないの方が良いと思いますが、僕はやはり少しはホめられたいと思います。

新月：ハハハ、確かに「クニサレル」ではマズイね。それから宮沢賢治は同じ詩のなかで、「アラユルコトヲ ジブンヲカンジョウニ入レズニ ヨクミキキワカリ…」とも言っていますよ。

間占：そんなこと言っているのですか。それは驚きですね。

新月：良く見もせず、良く聞きもせず、自分の勘定だけで行動する人があまりに多い。ただ、自分の勘定だけで行動するのは経済学の基本のような気もしますが。

（半川、イライラして）

半川：そりゃそうですよ。経済学の基本は、アダム＝スミスに従って「各人は自分の勘定だけ考えて、主観に忠実に行動する」なんですよ。

それに、ディフォールト決定基準なんて、そんなバカな話聞いたことがありません。ゲーム論は合理性を追究する学問ですよ。もちろん、プレイヤーも合理性を追究することが、効用関数の理論や主観確率の理論の前提ですから。宮澤賢治なんて大昔の人の話はまるっきり合理的でない。こんな話ばかりしていると、外国のゲーム理論家に日本人のゲーム理論家はDeadwoodとバカにされますよ。

新月：ハハハ、そりゃそうだ。私なんか、Deadwoodかデクノボーの代表だ。

半川：ゲーム論は合理性を追究する学問なんだから、もう少し高級な数学を使わないといけないと思います。昨日、ゼロ和２人ゲームにおいての混合戦略を許すとナッシュ均衡が存在することと議論しました。これからもっと一般的なゲームに関しての存在証明を議論しませんか？

存在を言わなきゃ、均衡戦略だって選べるどうか分かりません。だから、まず混合戦略の範囲まで考えての存在証明を議論するべきですよ。

新月：それは難しい問題だ。でも、なにしろお腹がすいたのでお昼にしましょう。半川さん、まだ東京に帰るまでの時間があるんでしょ。午後は半川さんに混合戦略と均衡の存在について議論してもらいましょう。

半川：結構ですよ。3 時頃帰るつもりですので午後はまだ時間はあります。じゃ午後は混合戦略と均衡の存在について議論します。

新月：さて昼飯だ。

（4 人、退場）

第四幕：混合戦略

[前回までのあらすじ：東京からきた半川生をいれて意思決定とナッシュ均衡をどう考えるかの議論が続いた。そして、半川はナッシュ均衡の存在証明をしておかねば、意思決定を行うことも出来ないと主張した。今回は存在証明とそのときに使われる混合戦略の問題点についての議論が行われる]

（4人が昼飯から帰ってくる）

半川：ここの大学の食堂は東京と比べると随分と安いですね。味は味ですが。

新月：でも、そんなに悪くないでしょ。それで午後は半川さんが混合戦略とナッシュ均衡の存在について話をするんですよね。

半川：そうです。えーと、昨日議論に出ましたが、ナッシュ自身がナッシュ均衡の存在証明をしています。僕はナッシュの原論文をみていないので、その論文のついては良くは知りません。しかし、教科書をみると大概初めの方に載っていますので、それについて話します。

まず、有限ゲーム、つまり、プレイヤーの数を有限に限定して、なおかつ、各プレイヤーは有限個の純粋戦略を持つ。その範囲では、ナッシュ均衡は必ずしも存在しない。森々君が与えた"Matching Pennies"はそういうゲームの例です。

間占：その通りですね。それで存在証明はどうなるんですか？

半川：それで、純粋戦略の集合を混合戦略の集合まで拡張します。各プレイヤーが混合戦略を使うとしたとき、各々のプレイヤーの利得は期待利得を考えます。ここまで拡張して、ナッシュ均衡の存在証明をブラウワーの不動点定理あるいは角谷の不動点定理を使って証明するんです。

間占：ここまでは標準的教書に載っています。

新月：でも、ちょっと確認させてください。ひとつの混合戦略は純粋戦略の集合上の確率分布である。各プレイヤーが利得の期待値を考えるというのは、戦略を実際プレイする前の時点で各結果の起きる確率を計算して、その計算に基いて利得の期待値をとる。

半川：そーだと思います。何か問題がありますか？

新月：いや問題はないと思いますが自分の理解のため確認しているのです。それで混合戦略は実際どういうふうにプレイするんですか？

半川：どういう意味でしょうか？

（間占、笑いながら）

間占：新月先生も人が悪い。替わりに僕が答えます。各人が混合戦略に対応する純粋戦略上の確率分布に従って、一つの純粋戦略をえらぶ。例えば、表 2 の「逢引のトラブル」でプレイヤー 1 が (2/3,1/3) という混合戦略をプレイすると言うのは、こういう確率分布にしたがって純粋戦略を選ぶことです。

新月：もう少し明確にして欲しいのですが。えーと、最終的には純粋戦略をプレイするんですね。純粋戦略 s_{11} と s_{12} を確率各々 2/3 と 1/3 で取るんですよね。それで確率 (2/3,1/3) はどう発生すればよいのですか？

半川：確率をどう発生させるかだって？ 問題の意味が分からないのですが。

間占：サイコロを使って、1 から 4 の目が出れば第 1 戦略で、5 か 6 の目が出れば第 2 戦略を選ぶ。もちろん、プレイヤー 1 は相手が見てないところでサイコロを振らねばならない。次に新月先生は、もっと複雑なケース、例えば、(2/13,11/13) をどう発生させるかなんて訊くと思うのですが。

新月：その通りです。

半川：13 面のサイコロを振るんですか？ でも正 13 面体なんてあるのかな？

間占： 2/13 は例として出しただけで、13/23 でも良いし、23/100 でも良いのです。

半川：そうですね。サイコロで考えるはまずいのか。

間占： 13 個の同じ形のボールを壷のなかに入れて、2 個を当たりと書いて、そこから一つ取り出せば良い。ですから、こういう分数の場合はボールの数を増やせば、要求されている確率を発生させることが出来ます。

森々：そうすると、12341/100000 なんて確率を発生させるのには 10 万個のボールを必要とするんですか？

間占：12341/100000は約分できないので必要でしょうね。

（半川、肩をつぼめて）

半川：ボールが幾つになっても原理的には問題ないでしょ。それで混合戦略まで許せばナッシュ均衡の存在が証明できます。純粋戦略の集合が連続体で利得関数が擬凹であれば混合戦略を考えなくとも、ナッシュ均衡の存在を証明できます。ですから、10万個のボールを用意しなくとも大丈夫です。ただ、利得関数が擬凹でない場合や連続でない場合はやはり混合戦略の範囲まで拡張しておかないと存在は証明できません。このときに昨日言ったマスエコンのテクニックが必要になります。

森々：でも、戦略の集合を連続体にすれば、今度は利得の支払で同じような問題が出てきてしまいそうですが。 例えば、売上が12341/100000 円であるとすると、この利得の支払はどうやるんですか？

半川：嫌なこと訊く人だ。

新月：その通り。ただ「嫌なこと訊く人だ」に納得したんではなく、森々君の問題の方に納得したんですよ。

（半川、小さな声で）

半川：全くイヤミな人達だ。

新月：半川さん、何か言いましたか？

半川：いや特に。

新月：そうですか。それで、そもそも戦略の集合を連続体にするのは、理想的な近似を行っているので、本来は有限の問題が基本なんですよ。その場合は均衡が存在しないケースなどがあって、分析を進めるのに不便が生じるので、連続体を仮定してしまう。

半川：あれ、連続体の場合が現実ではないのですか？ 普通、財の空間は連続であると仮定します。それで、いろんな目的のため、その連続の空間を有限の空間で近似したりしますが、財空間は本来連続と思います。

新月：半川さんは教科書通りに勉強しているんですね。えーと、貨幣にも財にも基本単位

があり、それをそのまま考えれば、財空間などはすべて有限集合となります。しかし、それでは、数学的技術、特に解析学が使えなくなるので、財空間を連続であるとするわけです。

ただ、こう仮定しても問題が起きない範囲で考察している場合はそれで良いのです。例えば、貨幣の支出総額は普通の家計では 10 万円以上になります。一方、円の最小単位は 1 円ですが、10 万分の 1 までを正確に考える必要はない場合、この最小単位は忘れてしまって、貨幣も連続量で表現してしまう。

間占：確かに、経済学の教科書でも多くの論文でも、連続体が基本で有限の場合が近似としていると読めますね。

新月：ところが、財空間を連続に仮定しないほうが良い例も考えられます。例えば、住宅市場などです。住宅市場では、財空間を連続体とせず、むしろ、0 か 1 の選択の問題と考えるべきなんだ。しかし、もちろん、合成財としての貨幣は連続体を仮定してしまって良い。

半川：それなら、財空間を連続体でも離散でも良いよう一般化すれば良いじゃありませんか。

新月：その辺でやたらと一般性を重視する研究者がいます。その場合、均衡の存在とか、パレート最適性が成立するとか、抽象的な命題しか得られません。こういう命題がどれだけ仮定を落としても成立するかなんて、どうでも良いことです。この当たりの問題に関しては実は大分前に議論しましたよね。

森々：「経済学における一般と特殊の逆転」ですね。[11]

新月：そうです。私はこの辺ではむしろあっさりと仮定をして、どれだけ研究対象を捉えられるかを考えるべきだと思います。 その意味でシャープレイ・シュービックの「割り当てゲーム」は優れたものだと思います。[12]

間占：またまた大分脱線し始めた。均衡の存在についての議論に戻りましょう。

もともと、この議論は半川君が「存在を言わなきゃ均衡戦略だって選べるどうか分かりません」といって始めたのです。ただ、均衡の存在証明は理論家がゲームの外で行

[11] 第 1 曲。

[12] L. S. Shapley and M. Shubik、 The Assignment Game I: the Core, *International Journal of Game Theory* 1、(1972)、111－130.

うことであり、均衡戦略を選ぶのはゲームのプレイヤーが行うことです。

半川：そうですが、ゲームのプレイヤーは理論家と同じ立場に立って均衡の存在証明をして、そして存在する均衡の戦略を選ぶのだと思います。

間占：それはゲーム論では標準的な考え方ですが、ここ新月研究室ではその二つはなるべく分離しようと考えているわけです。

半川：だって、均衡の存在証明が出来れば、均衡はあるんだから、その内の一つを選べば良いはずで、それをわざわざ区別するというのは分かりませんね。財空間の場合は完全に分割的とするのは問題かもしれません。しかし、確率の場合、初めから実数となっているんだから、全然問題がないと思います。

森々：半川さん、12341/100000って確率はどうするんですか？ ボールを10万個用意するんですか？

森々：また同じことを訊く。

新月：ははは、まず問題を整理してみよう。まず、存在が言えたからといって、すぐ具体的に均衡を見つけることができるわけではありません。次に、均衡が見つかったとして、その均衡が与える確率を発生させることが出来るかという問題が出てきます。

半川：ゲームのプレイヤーは理性的と仮定しているので、均衡が存在すればそのプレイヤーは当然均衡を見つけることができると考えてはいけないんですか？

新月：「理性的」という言葉が、存在すれば見つけることが出来るということまで含んでいれば別です。その場合、その「理性的」という内容が問題になります。ここでは、その「理性的」でなんでも出来る人というのでなく、なにが出来て何が出来ないかを議論したいわけです。

半川：それで具体的にはどう考えるのですか？

新月：実は、私自身はゲーム論研究で混合戦略そのものの使用を止めようという立場だということを忘れないでください。ここでは混合戦略の使用を認めたとして、その問題点を述べます。

半川：僕は何でも便利なものは使って良いと思っていますが、ここは新月さんの議論を聞いてみます。

新月：分かりました。それで、まずは、存在が証明されたからと言って、均衡を具体的に求めるのにはアルゴリズムが必要です。まず、2 人ゼロ和ゲームで混合戦略が許されている場合、線形計画法の単体法でナッシュ均衡を求めることが出来ます。それは四則演算と大小関係の比較が出来れば、有限回のステップでナッシュ均衡が求められる。だから、このアルゴリズムを知っているプレイヤーはナッシュ均衡を求めることができる。

間占：確か、レムケー・ホウソンのアルゴリズムとかいうのがあって、2 人の非ゼロ和ゲームでも同じように有限回のステップでナッシュ均衡を求めることができる。[13] このアルゴリズムは 3 人以上のケースには拡張されたという話は聞いていませんが。

半川：既に存在証明が出来ているのだから求められるはずですよ。

新月：それがね、3 人以上の場合、ナッシュ均衡を求めるアルゴリズムは存在しないことが簡単に証明されるんですよ。

間占：本当ですか？ そんな話、初めてですが。

新月：実は 3 人ゲームでこの場合の困難はすべて出てくるんですが、まず簡単な問題から議論します。下の二つの行列で示された 3 人ゲームを考えます。各プレイヤーは二つの戦略を持ち、利得は表 6 と表 7 で当たれられます。プレイヤー 3 の選択に依存して二つの表のどちらかで 3 人の利得が与えられる。例えば、3 人が (s_{11}, s_{21}, s_{32}) と戦略を選ぶと、3 人の利得は (2,0,9) となります。

[13] レムケ・ホーソンのアリゴリズムに関しては、*The Theory of Games and Markets*, J. Rosenmüller, North-Holland (1981) が詳しい。

1＼2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	0, 0, 1	1, 0, 0
s_{12}	1, 1, 0	2, 0, 8

表６：$s_3 = s_{31}$

1＼2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	2, 0, 9	0, 1, 1
s_{12}	0, 1, 1	1, 0, 0

表７：$s_3 = s_{32}$

森々：それでこの３人ゲームの均衡はどういうものなんですか？

新月：この３人ゲームは混合戦略の範囲で一意のナッシュ均衡を持ちます。それは次のように与えられます。プレイヤー１が第１戦略s_{11}をとる確率をpとし、プレイヤー２が第１戦略 s_{21}を取る確率をqとし、プレイヤー３が彼の第１戦略 s_{31} を取る確率をrとします。すると、これらの確率は

（１８）$p = (30 - 2\sqrt{51})/29$、 $q = (2\sqrt{51} - 6)/21$、 $r = (9 - \sqrt{51})/12$

と与えられます。

森々：先生、それはどう計算するんですか？

間占：それが計算できないとそのゲームをプレイできませんね。

新月：これを計算するのは結構大変なんですよ。まずどのプレイヤーも純粋戦略でなく本当に混合戦略を使うと仮定します。すると、均衡においては各純粋戦略からの期待効用が等しくなる。この事実を使うと３元２次の方程式が３つ出てくるので、それを解くと上の（１８）が求められる。

ただ、これだけが均衡であることを示すのには、純粋戦略と混合戦略の混ざった他のケースも考えて、その他のケースでは均衡がないことをいわねばならない。それが結構大変なんですよ。

半川：でもそう計算できるのでしょ。だから各プレイヤーが理性的ならば（１８）が求

まるので何の問題も起きませんね。だから、問題は存在証明なんですよ。

新月：それがね、この例が教えるのは、線形計画法の単体法などのアルゴリズムによってはナッシュ均衡を計算できないという事実なんですよ。

半川：でも、（１８）と計算したじゃありませんか。

新月：少しずつ議論しましょう。 まず、単体法のようなアルゴリズムですが、それは四則演算と大小関係の比較だけを許します。 利得表には整数しかないので、それらを四則演算を繰り返しても、出てくるのは有理数である。それを何回繰り返しても有理数しか出てこない。（１８）の各確率は無理数である。従って、ナッシュ均衡を有限回のステップで求めるアルゴリズムは存在しない。

間占：その議論は確かにそのとおりと思います。では、無限回のステップを許せばよいのでしょうか？ ただ、その場合、厳密には均衡の確率を計算できませんね。

半川：でも、新月さん本人が均衡は（１８）であると計算したじゃありませんか。

新月：実は（１８）では四則演算のほかに根号$\sqrt{\ }$を許したのです。代数学の方ではこれを代数的に解くなんて言います。

間占：有名なアーベル・ガロアの定理というのは、有理数係数の5次方程式は一般的には代数的には解けないことを主張します。ただ、（１８）は代数的には解けていますが。

新月：実は3人ゲームでも純粋戦略の数を増やせば、5次方程式で出てくるものよりもっと複雑な無理数がでてくることが証明できます。

それでも原理的には、有限ゲームの均衡をすべてみつけることは可能なはずですが、これはとんでもないものを仮定しているんですよ。

それを示すため、二つの議論をしてみせます。 まずは半川さんは存在することと、計算できることが同義であると思っているようなので、ある存在定理を証明してみせます。それが終ったら、もう一つの問題に行きます。

半川：やっと存在定理がきけるのか。角谷の不動点定理でも使うのですか。

新月：いやそういう難しいのは使いません。その定理も板書しておきます。

定理 A：ある二つ（等しくともよい）の正の無理数aとbが存在し、a^bが有理数である。

この定理を４行で証明してみせます。

半川：なんとなく怪しげだな。でも、定理の主張そのものは問題ないのか。

間占：それをたったの４行で証明するんですか？ じゃさっそく見せてください。

新月：証明も黒板にかきましょう。

まず、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$を考える。

ケース１：$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$が有理数であるとする。このときは$a=b=\sqrt{2}$とすれば良い。

ケース２：$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$が無理数とする。このときは $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$、$b=\sqrt{2}$とすると、

$$a^b=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2 \text{。}$$

間占：確かに証明になっているようですね。ケース１とケース２は背反ですべてをカバーしている。その各々の場合に定理が主張している無理数aとbを与えている。

半川：引っ掛け問題かと思ったんですが、真ともな証明じゃありませんか。

間占：でも何かおかしいと思うのですが。

半川：でも存在は証明されていますよ。

間占：どこが気になるかというと、ケース１とケース２で与えられているaが違うところですよ。その証明ではケース１かケース２のどっちが正しいかは述べていません。多分、ケース２が正しいのでしょうけど。だって、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$は無理数でしょ。

森々：あっそうか。ケース１とケース２でaが違うのか。でも、存在そのものは言えてい

るんですね。

新月：まさしく、それがこの証明の問題点です。存在そのものは証明されているが、a とb そのものは与えられていない。

ナッシュ均衡の存在証明が与えられても、それが具体的にナッシュ均衡を与えているかは別問題である。具体的にナッシュ均衡が与えられなければ、それをプレイすることも出来ない。

半川：でも、間占さんが言うように $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は無理数なんでしょ。だから、ケース2が正しい。

新月：確かに、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は単に無理数であるだけでなく、超越数であることも証明されています。ここで超越数というのは、有理数係数の n 次方程式の根ではない数を言います。ただ、n は任意の正の整数です。[14]

半川：それならケース2が正しいので、a も b も分かるじゃありませんか。

新月：ところがね、「$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が超越数であるか」は、ヒルベルトが1900年にだした23の数学の未解決問題の一つでもあったんですよ。 その問題が解かれたのは1930年頃ですから、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ の超越性の証明に約30年かかっている。この超越性が $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は無理数であることを含意します。[15]

間占：まず、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ はどのような5次方程式の根にもならない。それから、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が超越数であることの証明に30年かかってしまうというのは、黒板の定理の証明でケース2が正しいことを証明するのにやはり30年かかると理解してしまって良いわけですね。すると、ゲームのプレイヤーが非常に優れた数学者であったとしても、単なる存在証明と構成的証明は異なるのですね。

---

[14] 上の定理については『タレスの遺産』、第23節、W. S. アングラン=J. ラング著、シュプリンガーフェアラーク東京、(1997)、を参照。

[15] ヒルベルトの第7問題に関しては『ヒルベルトの２３の問題』、日本評論者、杉浦光男編、(1997)。

それでその黒板の証明は誰が見つけたのですか？

新月：誰が見つけたかは知りません。その証明は古典論理に基づいた数学と構成的な証明の違いを示すのに使われています。黒板の証明は古典論理では許されていますが、証明が具体的なaを与えていないという点で構成的数学では認められません。直観主義という数学の一派はこの構成的数学を主張しているのです。いつか、この直観主義が使う「直観」と経済学者が使う「直観」の違いを議論しましょうね。

それで、結論ですが、ゲームにおいて実際プレイするためには単なる存在証明では十分ではないのです。

半川：存在証明が構成的である必要性は分かってきました。それでゲーム理論の範囲では存在の構成的証明というのは出来ているんですか？

新月：実は、随分と大変なんですが、それは出来るんです。[16]

半川：なーんだ。原理的に構成的存在証明が出来るのならば問題ないじゃありませんか。

新月：でも、それはゲームのプレイヤーに様々な数学的知識を要請するんですよ。私としては、こういう方向への研究は、如何にゲームのプレイヤーに特殊な才能を仮定するかということになってしまい、あまり健全とは思えないのですが。

半川：でも、原理的に出来るのならば良いと思いますが。

新月：それじゃ、もう一つだけ例を議論してみましょうか？

半川：また、例ですか？ 結構ですが。

新月：それじゃ、さっきの３人ゲームに戻って、$p=(30-2\sqrt{51})/29$ という確率をどう発生させるかを考えましょう。これが出来なきゃ、黒板の３人ゲームでプレイヤー達は混合戦略のナッシュ均衡をプレイできない。

[16] この事実は筑波大学社会工学系のワーキングペーパー, Mere and Specific Knowledge of the Existence of a Nash equilibrium, IPPS-WP No.741, University of Tsukuba, (1997)にまとめてある。この論文を希望する人には郵送いたします。

間占：$p=(30-2\sqrt{51})/29$ は無理数だから分数には出来ません。だから、12341/100000 の場合のようにはいきません。さて、どうするんだろう。

新月：実はね、0から9までの数が書かれた 10 個のボールが入っている壷を用意して、そこから 1 個取り出す。各ボールが出る確率は 1/10 とする。このボールを取り出す試行を繰り返し行うと $p=(30-2\sqrt{51})/29$ という確率を発生させることが出来ます。まず、p を 10 法展開すると、$p=0.54197\ldots$ となります。それで以下の方法で第 1 戦略 s_{11} を取るとします。

まずは、壷の中からボールを一つ取り出します。それが0から4の間にあれば、s_{11} を取り、6から9の間にあれば s_{12} を取ります。もし結果が5の場合は第 2 試行にいきます。この場合分けが図8に描かれています。さて、第 1 試行の結果が5の場合、取り出したボールは壷に戻し、第2試行にいく。第2試行での結果が1から3のときは s_{11} を取り、5から9の間にあれば s_{12} を取ります。第2試行の結果が4のとき第3試行にいきます。ボールを壷に戻し、また壷からボールを一つ取り出す。以下同様です。この方法で s_{11} を取る確率は $p=0.54197\ldots$ となります。

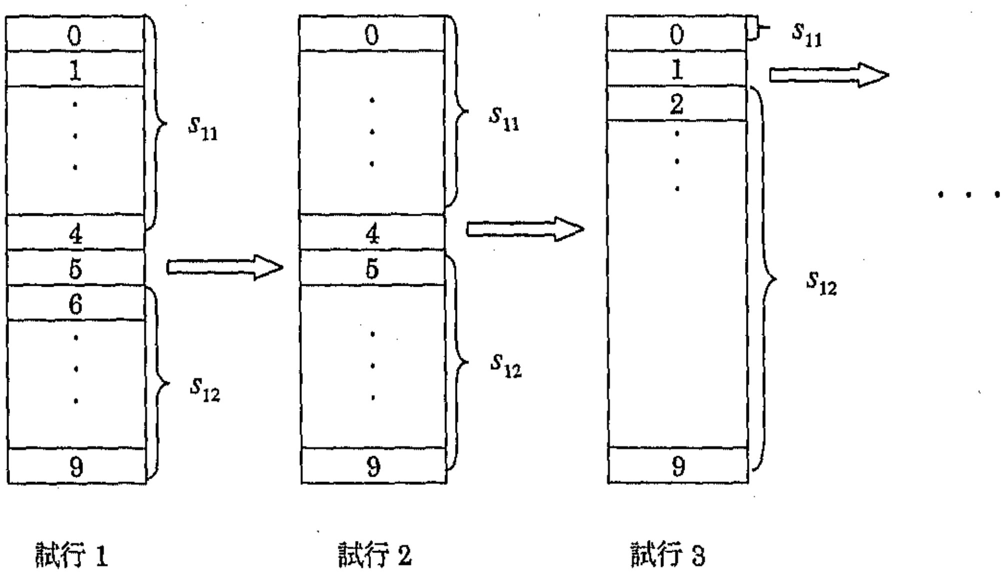

表　8

森々：本当ですか？ それじゃ計算してみます。えーと、第1試行で s_{11} に決まる確率は5/10です。第 2 試行に行く確率が1/10 であり、そこで s_{11} に決まる確率は4/10だから、初めの時点でこれを考えると $1/10\times4/10=4/10^2$ となる。 同様に第 3 試行で s_{11} に決まる確率は $1/10\times1/10\times1/10=1/10^3$ となる。したがって、どこかの試行で s_{11} に決まる確率は

$$\frac{5}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{9}{10^4}\cdots$$

となり、これは正に $p=0.54197...$ です。

間占：えーと、このプロセスが第 $n+1$ 試行に到達する確率は $1/10^n$ ですから、このプロセスが無限まで続く確率は0である。したがって、s_{12} に決まる確率は $1-p$ になる。

だから、$p=(30-2\sqrt{51})/29$ で s_{11} と取り、$1-p$ で s_{12} をとるという混合戦略は図6のプロセスで発生させることが出来る。

森々：あれ、このやり方でやれば、12341/100000 はこの試行を5回行えばよいわけか。

間占：あー、そうですね。それでよいのか。

半川：どのような無理数の確率もこのやり方で大丈夫なんですね。なんだ、それならばあまり問題ないじゃありませんか。

新月：いやー、私はどのような混合確率も使ってもよいことを示すために図8を出したのでなく、原理的に大丈夫でも、こんなものまで考えねばいけないと言いたかったのです。

（新月、時計を見て）

あれ、半川さん、そろそろ3時ですよ。

半川：そうですね。では、そろそろ東京に帰ります。

今日はいろいろ勉強になりました。合理的な個人を仮定すればどのような確率でも問題ないことの合理化も知ったし、それにナッシュ均衡の存在の方だって、結局のところ原理的には構成的にできるんだろうから問題ないことも分かりました。これらは僕のこれからの議論の合理化に使えます。

昨日、今日はお世話になり、ありがとうございました。また、その内、またお伺いします。

（半川、足早に退場）

エピローグ

（森々が幕の前で歩きながら独白する）

昨日と今日、あんな長い議論を延々としたというのに、まだ話の続きをするらしい。ここの人達はどうしてあんなに議論が好きなんだろう。僕はそろそろ家に帰って、彼女とデートのための準備をしようと思っているのに。 新月先生とか間占さんみたいになったら、彼女に振られてしまうんじゃないかな。あれだから、間占さんは今でも決まった人が出来ないだ。随分と頑張っているみたいだけど。新月先生は奥さんに逃げられたりしないのかな。 なんだか、そろそろ危なさそうですよ。だから、僕はデートのときはちゃんと TPO を考えておしゃれをするんです。

（観客席の方をみて）

ところであの『ビーティフルマインド』を見ましたか。あっちこっちのゲーム理論家とかゲーム理論を勉強している大学院生たちは、これでゲーム論が有名になると喜んでいるようです。実は僕も喜んでいるんです。どうしてかというと、ゲーム論が有名になれば、僕の就職も簡単になるでしょ。だけど、あの映画に出てくる秀才達は気持ちが悪いね。狭い世界で本の虫になって勉強していて、他の大学院生を蹴落とそうと一生懸命だ。あの映画を喜んで見ている僕の競争相手の大学院生達も秀才ばかり。いろんなこと知っているけど全然面白くない人達。半川さんもそのうちの一人かな。間占さんとか新月先生も昔はアーだったのかな。新月先生なんか名前までクライだもんね。

半川さんはセミナーもうまくいかなかったし、ここの人達とは議論もうまく噛み合わかったみたい。だけど、僕は半川さんに結構あこがれているんだ。だって、アメリカで勉強して、英語がしゃべれて、格好いいでしょ。ウーン、なんだか、ちょっとシリメツレツかな。

（幕が開き、新月と間占が現れる）

新月：森々君、ぶつぶつ独り言を言っているようだったけど大丈夫だろうね？

森々：もちろん、大丈夫です。実は僕には話し相手が結構いるんですよ。

間占：なんだか分からないことを言いますね。マーいいでしょ。それで昨日と今日は随分と話したわりに、あまり議論が進まなかったような気がします。半川君が余分なことをいろいろ言ったので、なかなか本論に進まなかったのかな。それで、結局、黒板の（２）の戦略的に安定な定常状態としてのナッシュ均衡の解釈は議論しませんでした。新月先生、これはどう考えるべきでしょうか？

森々：あれー、もうそういう話に戻るんですか？

間占：それ以外に何があるんですか？ なんだか、半川君の言葉になってしまった。

新月：でも、ナッシュ均衡の安定な定常状態としての解釈なんて、分かりきったことばかりであまり議論することもありませんよ。

間占：でも、現在の学界では進化論的ゲーム論が盛んに研究されているので、やはり少しはそれについて議論してください。先生が話すのに気乗りしないならば、僕が僕の考えを話してみます。昨日と今日の議論で、大分整理できてきたので。

新月：分かりました。じゃお願いします。

間占：ナッシュ均衡の定常状態としての解釈は、やはり、いろいろあると思います。

森々：いろいろあるというのは、何を指しているのですか？

間占：まず、古典的なクルーノーモデルでのナッシュ均衡は繰り返しの状況での戦略的に安定な定常状態である。一つ重要なのは、市場は繰り返されるので、相手の行動は時間が経てば分かってくる。相手の行動パターンが分かってきて、それに合わせて最適化を行う。相手も同じように考える。このような繰り返しの状況での、戦略的に安定な状況がナッシュ均衡である。

これは一回きりのゲームでの事前の意思決定ではありません。

新月：それには幾つかの注意が必要です。今の話ではゲームの参加主体が一定であること。そこでは、行動パターンが繰り返しのなかで、発生・修正されてくる。それで、ナッシュ均衡はその場合の戦略的に安定な状態の候補にすぎず、ナッシュ均衡が必ず出てくるわけではない。プレイヤーの人数が少ないときには、様々な行動パターンが繰り返しの中で発生してくる可能性がある。例えば、村八分なんていうのもそういうものでしょう。プレイヤーの人数の多いところでは、むしろ、ナッシュ均衡が結果として出てくるのでしょう。これは完全競争や大都市に比較できるわけです。これは前に話しましたよね。

間占：ただ、それは繰り返しのなかの各ゲームでの結果について議論しているわけです。繰り返しの状況を全体として一つのゲームとして考える「繰り返しゲーム」というやり方もありますが。

新月：それがもう一つの注意点です。その理論では、繰り返しの状況全体を一つのゲームとみなします。ここでは、結局、一回きりのゲームでの、事前的意思決定として、ナッシュ均衡を考えるというところに戻ることになります。そこでは、巨大な戦略を各

プレイヤーが計画するということになり、認識論的もどうしようもない構造を仮定することになります。

本来、広い意味での「繰り返しの状況を記述するゲーム」に「繰り返しゲーム」という言葉をのこしておきたかったと思います。ですから、現在学界で言われているものは「スーパーゲーム」と呼んだほうが良いと思いますね。

間占：学界では「繰り返しゲームとフォーク定理」は非常に意味のある理論と思われていますが、実は概念的には問題を含んでいるんですね。

新月：表面上は意味がありそうな現象を捉えているように見えても、はっきり言って、概念的には全くのナンセンスです。概念的にナンセンスな理論はその先の発展性がありません。コペルニクス以前の地動説とニュートン力学は矛盾するように。

間占：先生は繰り返しゲームの話が相当に嫌いなのですね。

新月：これは好き嫌いの問題でなく、つまり、嗜好の問題ではなく、思考の問題なんですよ。

森々：思考の問題を志向しましょう。今度はうまくいったぞ。

間占： 駄洒落はさておいて、繰り返し状況の各ゲームにおける戦略的に安定な定常状態としてのナッシュ均衡は、（1）の「事前の立場からの意思決定」としての解釈とは根本から異なるのですね。

新月：いやー、必ずしもそうとは言えない。 繰り返しの状況で段々と学習が進み、ゲームの構造が分かってくると、事前的状況での意思決定の要素が増えてくる。特に、クルーノーモデルのように、利潤の構造がはっきりしていれば、そこでの意思決定は益々、事前的立場での意思決定のように見える。

間占：先生の言うのは良く理解できます。ただ、ゲーム論の学界の動向では繰り返しの状況を考えることと、進化的ゲーム論は良く似たものだと考えていると思われているようです。僕にはそう思えませんが。

新月：間占君はどう考えるの？

間占：進化論的ゲームの典型では、ゲームの各プレイヤーの遺伝子と戦略を１対１に対応

させて考えます。ですから、一世代のプレイヤーというのは、いつも全く同じ行動パターンを持つ。その遺伝子の分布が突然変異と適者生存の法則によって世代を経るにつれて変化していきます。例えば、利得の平均の高い個体はより適者であり、より多くの子孫を残す。

新月：そうです。そこでは、思考の問題もなく、嗜好の問題もなく、突然変異と適者生存によって戦略の分布が決まる。それで時間が十分に経てばナッシュ均衡になるだろうということです。

間占：この解釈はあまりに生物学的であり、人間が社会のなかで学習していくという側面が全然ありませんが。

新月：そうなんだよ。純粋な進化論的ゲーム論では、間占君の言うように、各個体の行動様式は遺伝子によって決まってしまう。世代が代わるとき、突然変異によって少しだけ遺伝子が変化した個体が現れる。ここで初めて戦略が変化する。それで、進化論的ゲーム論の中での学習というのは、現在の環境に適した遺伝子を持つ個体が増えるという意味しかありません。

間占：より生存に適した遺伝子をもつ個体がより多くの子孫を残すので、幾世代も経った後には、均衡の戦略が個体のなかで支配的になる。これが進化論的安定性の概念になる。それが実はナッシュ均衡だというわけですね。そこでは、個々のプレイヤーが何かを学習することはない。

現在の学界では、繰り返しの状況で、利得を大きくするように戦略を変化させていくのを学習なんて呼んでいるようですが。しかし、そこではプレイヤーという概念が、はっきりしているとは思えません。それに誰も意思決定せず、偶然が戦略の分布を変化させているだけです。これらに普通のゲーム論とは随分と違うように思えます。

新月：確かにね、学習というのを含めて進化論的ゲームと、人間社会を対象にしたゲーム論は概念的には随分と違う。そこでは、プレイヤーの意思決定もなく、行動様式の異なる個体の分布が変化していくだけだ。生物学でこの議論をするのは問題がないが、人間社会に進化論的ゲーム理論をそのまま持ち込むのは無理でしょう。

（新月、頭を抱えて、少し考えながら）

うーん、社会科学の立場から人間社会のことを考えるには、各理論でまず「プレイヤー」という概念を明確にしておくことが必要でしょう。そのためには、各理論においての「個人」と「社会」との関係をみる必要があります。それで、明日はひとつ「方法論的個人主義」について議論しましょう。間占君、森々君、それについて考えて来

てください。

森々：分かりました。「個人主義」ですか。うーん。

新月：昨日と今日は半川さんが議論に加わったので、いつもと一寸違う議論ができました。森々君は大分勉強になったでしょう。我々の学界にはあーいうタイプの人が結構沢山いますので、学界に行くときの訓練にもなったでしょう。
さて、今日は少し早いけどもう帰ろう。では、また、明日あいましょう。
（新月、退場）

森々：確かに、半川さんの来てくれたので、外国の大学のこととが少し分かってきました。ところで、間占さん、僕もトーフルを受けてみた方がいいと思いますか？

間占：うん、受けてみたらどうです。もちろん、少し準備してからですよ。僕はこれから少し論文書きをするので、議論はまた明日ね。

[今回は随分と長い話しでしたね。ゲーム理論にはこんなに多くの問題があるんですね。多分、これはゲーム論が人間社会を研究対象にしているからなんでしょうか。そもそも複雑な人間社会の問題なんて議論できるんでしょうか。最後に、新月が明日は「個人主義」を議論するなんて言っていましたよ。「個人主義」とゲーム論とどう関係するんでしょうね？ 明日の議論を楽しみに待ちましょう。