日常語と数学語

－ 文章の論理的解釈をめざして －

数学科　青木猛正

1．はじめに

必修科目である，数学Ⅰの分野には『個数の処理』や『確率』の単元がある．その中で，たとえば「2人の男子と4人の女子が一列に並ぶとき『男子が隣合わない』場合は何通りあるか」，あるいは「男子4人，女子5人から3人をくじで選ぶとき『少なくとも1人は男子』となる確率を求めよ」などの設問があるが，そのようなときに生徒が思いもよらない反応を示す場面がある．

個数の処理や確率においては数学的な処理以前に「言葉の理解」，すなわち「言葉の論理的な解釈」が重要になる．特に「かつ」「または」「任意の」等の論理語を含む文や「否定」を伴う場合の解釈が不十分であることが原因となっていると思われる．

そこで，本校の1年次生を対象に「日常語と数学語」と題する調査を行い，生徒が論理語を含む文や，論理的にあいまいな文をどのように解釈しているかを「数理論理学（記号論理学）」との関連で調べた．調査対象の生徒は，上記の「個数の処理」および「集合」を指導する前であり，しかも選択科目「数学A」の内容である「論理」についてはまったく指導していない．

調査対象 160名　有効回答 148名である．

2．命題と論理記号

対象の間の関係を述べた文で，正しいか（真）正しくないか（偽）の意味を持つもの，すなわち真偽の判定が可能な文が「命題」である．その命題を形式的に記述するために論理記号が使用される．

以下，実際の設問の解説において，形式的な論理式を利用するため，以下のように論理記号を定義する．なおA，B，P(x) 等は任意の命題を表す．

(1)「命題結語詞」

複数の命題を組み合わせて新たな「複合命題」を作るための結語詞

① $\neg$：否定記号　ex) $\neg A$：Aでない

② $\wedge$：連言記号　ex) $A \wedge B$：AかつB

③ $\vee$：選言記号　ex) $A \vee B$：AまたはB

④ $\rightarrow$：含意記号　ex) $A \rightarrow B$：AならばB

⑤ $\equiv$：同値記号　ex) $A \equiv B$：AとBは同値

(2)「限定作用素」

命題に含まれる「対象（変数と呼ぶ）」に制限を加える（束縛する）記号

① $\exists$：存在記号　ex) $\exists x P(x)$

P(x) が成り立つ x が存在する

② $\forall$：全称記号　ex) $\forall x P(x)$

すべての x に対しP(x) が成り立つ

上記7つの論理記号を組み合わせることにより，以下のような論理式を定義することができる．

① $A \equiv B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

② $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

③ $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$

（※「AならばB」は「AでないかまたはBである」と同値である）

④ $\forall x P(x) \equiv \neg(\exists x(\neg P(x)))$

（※「すべての x においてP(x) をみたす」は「P(x) をみたさない x が存在しない」と同値である）

⑤ $A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A)$ （※ 対偶）

⑥ $\neg\neg A \equiv A$ （※ 二重否定）

⑦ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

⑧ $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

⑨ $\neg(\exists x(P(x))) \equiv \forall x(\neg(P(x)))$

その他

上記は，『$\wedge$と$\vee$』および『$\exists$と$\forall$』を入れ換えても成り立つ．（論理記号の双対性）

「論理」にも様々な立場が存在する．本稿においては『古典論理』，すなわちすべての命題に「真」と「偽」が対応する（その意味で「二値論理」と呼ばれる）論理を前提としている．しかしその他でも『非古典論理』と呼ばれる様々な立場の論理が存在する．

有名な論理としては『直観主義論理』がある．この立場では命題が「真」であることは，その命題を確認する「具体的な手段があるときのみ」を言う．また「否定する具体的な手段があるときのみ」を「偽」とする論理である．

古典論理においては，すべての命題は真か偽のどちらかである．すなわち，排中律『$A \vee \neg A$（AまたはAで

ない)』は常に「真」であるが，直観主義論理では排中律は必ずしも成り立たない．たとえば「1年後の今日は晴れである」と言う命題は，現段階において真とも偽とも確認すべき手段がない．それは神のみぞ知り得るのである．（その意味で古典論理は「神の論理」，直観主義論理は「人間の論理」と言われる）

さらに，真と偽以外の真理値，例えば「半分だけ正しい」も対象にする論理である『多値論理』．あいまいさや主観も対象とする『ファジー論理』．必然性や可能性も論理語として扱う『様相論理』等がある．

3．連言や選言を伴う設問

設問1　次のように人に勧められたとき，何をいただきますか．

(1)「ジュースかコーラをどうぞ」
（『J∨C』の形式）

回答：どちらか一方　98.6%
　　　両方　1.4%

(2)「ケーキとコーヒーか紅茶をどうぞ」
（『Ca∧(Co∨Te)』か『(Ca∧Co)∨Te』かが多少あいまいな形式）

回答：ケーキとコーヒー　17.6%
　　　ケーキと紅茶　31.1%
　　　紅茶　35.1%
　　　コーヒー　5.4%
　　　ケーキ　4.7%

『J∨C』は，JかCのどちらか「少なくとも」一方が真ならば真となる命題である．(1) においては，「ジュースとコーラの両方（わずか4.7%）」も回答としては認められることになる．

(2) に関しては『Ca∧(Co∨Te)』の場合は，「ケーキに対しての飲み物は『コーヒーか紅茶』のどちらにしますか」の質問と解釈でき，回答としては「ケーキとコーヒー」か「ケーキと紅茶」が正しくなる．それに対して『(Ca∧Co)∨Te』の場合の回答としては「ケーキとコーヒー」か「紅茶」が妥当であろう．少なくとも「コーヒーのみ」と「ケーキのみ」の約10%の生徒に関しては，論理的な理解ではないと判断できるが，回答者の好みによる回答も無視はできない．

『Ca∧(Co∨Te)』と『(Ca∧Co)∨Te』の関係では，後者の解釈のほうが若干多いかもしれないが，大差ははなさそうである．

もちろん日常の言葉においては，その背景となる状況や言葉のニュアンス，話し言葉と書き言葉の違い等が解釈に影響を及ぼす場面がある．上記の設問の状況としては前者が常識的な判断であろう．

なお，生徒が正直に回答できるよう，設問の意図は隠している．したがって関連質問は行っていない．

設問2　次の（　）内に接続詞を書いて下さい．

(1)「2次方程式 $x^2-2x-3=0$ を解く．
$x=-1$，3」
これは「2次方程式 $X^2-2x-3=0$ の解は
$x=-1$（　）$x=3$」を意味する．

(2)「連立方程式 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=8 \end{cases}$ を解く．
$x=2$，$y=-3$」
これは「連立方程式 $2x+y=1$，$x-2y=8$ の解は $x=2$（　）$y=-3$」を意味する．

(1)(2)	∨，∧	と，∧	∨，と	と，で	と，と
回答率	11.5%	8.8%	19.6%	14.9%	33.4%
(1)(2)	∨，∧	∧，∧	と，∨	その他	
回答率	0.7%	0.7%	3.4%	2.8%	

ただし「か」「または」等を『∨』に，「かつ」「そして」等を『∧』に判断した．

この設問の回答は，（∨，∧）すなわち，2次方程式では「または」，連立方程式では「かつ」が感覚的な接続詞であろう．（正しくは (1) は「加法的 and」である……7．参照）

「接続詞を書け」との設問であったせいか，『と』を入れる生徒が多かった．一般に『と』は『∧』の意味に使われるであろうが，この回答から見ると「−1『と』3 のどちらか一方」とも使っているようである．『と』の区別があいまいなのであろう．

4．否定に関する設問

設問3　次の文の否定を作って下さい．

(1) この花は赤い．（Rの形式）
(2) この花は赤くない．（¬Rの形式）
(3) 花はどれも赤い．（∀h(R(h)) の形式）
(4) 赤い花もある．（∃h(R(h)) の形式）
(5) クラスのどの男の子にも好きな女の子がいます．
（∀b∃g(L(b,g)) の形式）
(6) クラスのどの男の子にも好かれている女の子がいます．（∃g∀b(L(b,g)) の形式）

回　答	○	×	△
(1)	98.0%	0.7%	0.7%
(2)	73.0%	3.4%	30.3%
(3)	0.0%	83.9%	15.5%
(4)	73.0%	18.9%	4.7%
(5)	1.4%	79.7%	15.5%
(6)	42.6%	50.0%	4.1%

ただし，○は正解．×は不正解．△はどちらとも言えない回答である．

(1) は単純否定で，『R』に対し，『¬R』を作れば良い．ちなみに，△とした回答は「赤いはずがない」であった．

(2) は『¬R』の否定，『¬¬R≡R』すなわち「二重否定＝肯定」である．×の回答は「赤くないとは言えない」等であり，△の回答としては「赤くないわけではない」や「赤くなくない」等であった．

この「赤くなくない」と言う言い方は，いかにも今風な感じで，この使い方で三重否定以上にも「なくなく…ない」と表現することがある．論理的な理解はなされているであろうが，その表現方法としては不充分な点があることが指摘できる．

なお，(1) の「赤いはずがない」(2) の「赤くないわけではない」は，上記の『様相論理』，すなわち必然性（□A：Aでなければならない）と可能性（◇A：Aかもしれない）を命題結語詞として扱う論理として解釈していると判断するのは，考えすぎであろうか．

(3) は限定作用素『∀』を含む文の否定で，上記論理式の例⑨の双対の通り『¬∀h(R(h))≡∃h(¬R(h))』，すなわち「赤くない花がある」が正答である．生徒にとっては最も理解しにくい論理構造である．

×の回答の大部分は単純に否定を加えた「どれも赤くない」，すなわち『∀h(¬R(h))』であった．

△とした回答の大部分は「どれも赤いわけではない」であり，論理的にあいまいな表現となっている．

「否定」＝「〜ではない」と単純に考えがちであるが，「すべて」の否定は「部分否定」，すなわち「例外（数学的には反例）」があれば良いことの論理的考察がなされない傾向がわかる．

特に，数学の論証においては矛盾がないか，部分的にも矛盾するか（反例があるか）が考察される．その点でも論理的な考え方を指導する必要性がある．

同じ限定作用素でも (4) の『∃』を含む文は，論理式の例⑨のように『¬∃h(R(h))≡∀h(¬R(h))』であり，(3) よりも正答率がグッと上がった．それは，部分肯定の否定が全体否定であるため，生徒はストレートに否定を表せるからであろう．

×の回答の例は「赤くない花もある」「赤い花しかない」「赤い花もない」「赤い花があるとは限らない」等であった．これらの回答は，あくまでも「否定」＝「〜ではない」の範疇の回答ではないだろうか．「ある」の反対は「ない」と単純に表現しているものが大部分である．

限定作用素も複合系になるとさらに複雑である．変数 b を「男の子」，変数 g を「女の子」，命題 L(b,g) を「男の子は女の子が好きである」とすれば，(5) に関しては『¬(∀b∃g(L(b,g)))≡∃b∀g(¬L(b,g))』，すなわち「ある男の子が存在して，すべての女の子のことを好きではない（好きな女の子がいないと言う男の子がいる)」である．

(6) は『¬(∃g∀b(L(b,g)))≡∀g∃b(¬L(b,g))』，すなわち「すべての女の子に対してある男の子が存在し，その女の子のことが好きではない（どの女の子に対してもその子を好きではない男の子がいる)」が正しい否定形となる．これは，論理記号の定義・定理から機械的に導かれる．

これらは，上記⑨及びその双対を続けて行えば，(5) は，

$$\begin{aligned}\neg(\forall b\exists g(L(b,g))) &\equiv \exists b\neg(\exists g(L(b,g)))\\ &\equiv \exists b\forall g(\neg L(b,g))\end{aligned}$$

となる．(6) はその双対である．

(5) の回答の×の大部分の回答は「どの男の子も好きな女の子がいない」（これは論理記号によって表現すると『∀b∀g(¬L(b,g))』となる）と「どの男の子にも好きでない女の子がいる」（『∀b∃g(¬L(b,g))』）である．△の回答は「どの男の子にも好きな女の子がいるわけでない」が大多数である．

(6) の回答の×で多かったのは「どの男の子にも好かれていない女の子がいる」（論理記号によって表現すると『∃g∀b(¬L(b,g))』）である．△の回答は「どの男の子にも好かれている女の子はいない」であった．

『∀x(∃y(A(x,y)))』と『∃y(∀x(A(x,y)))』の形式の表現をどのように理解しているか，次の設問を行ってみた．

設問4　次の条件の a と x をみたす数を「2組」書いて下さい.

(1) どんな数 a に対しても，ある数 x が存在し，$a+x=0$ となる　($\forall a(\exists x(A(a,x)))$ の形式)

回答：正解　53.4%　不正解　30.4%

(正解は「どんな数 a に対しても，ある数 $-a$ が存在して $a+(-a)=0$ 」)

(2) ある数 a が存在し，どんな数 x に対しても $a\times x=0$ となる　($\exists a(\forall x(A(a,x)))$ の形式)

回答：正解　40.5%　不正解　47.3%

(正解は「ある数 0 が存在し，どんな数 x に対しても $0\times x=0$ 」)

『$\forall a(\exists x(A(a,x)))$』と『$\exists a(\forall x(A(a,x)))$』の形式は，瞬時に解釈することすら困難な状況が生じる場合もある．前者は「すべての a 個々に対して x が対応する」であり，後者は「ある a（たとえ一つでも）が存在してどんな x でも〜」となる．

上記の設問は（数学的な部分が必要とはなるが）5割程度の理解である．まして否定形では表現がより難しくなるのも仕方のないことであろう．

以下，否定に関する設問と回答率のみを上げる．

設問5　クラスをＡグループとＢグループの２つのグループに分けました．次の人は何グループでしょうか．

(1) 「Ｓ君はＡグループの人？」
「そうだよ」

回答：Ａ 100.0%　　Ｂ　0.0%

(2) 「Ｔ君はＡグループの人？」
「ちがうよ」

回答：Ａ　1.4%　　Ｂ　98.0%

(3) 「Ｕ君はＡグループではないの？」
「ちがうよ」

(「……ではないの？」や「ちがう」をどのように判断するかが文面だけではあいまいな例である)

回答：Ａ　31.8%　　Ｂ　66.2%

(4) 「Ｖ君はＡグループではないグループの人？」
「ちがうよ」

回答：Ａ　97.3%　　Ｂ　2.0%

設問6　「この意見には賛成ですか反対ですか」の問いかけに次のように答えた人は賛成でしょうか反対でしょうか.

(1) 「賛成に賛成」（二重肯定＝肯定）

回答：賛成　95.9%　反対　0.7%

(2) 「賛成に反対」（肯定＋否定≡否定）

回答：賛成　4.1%　反対　92.6%

(3) 「反対に賛成」（否定＋肯定≡否定）

回答：賛成　10.1%　反対　87.2%

(4) 「反対に反対」（二重否定）

回答：賛成　89.9%　反対　6.8%

(5) 「反対に賛成する人には反対」（二重否定）

回答：賛成　85.8%　反対　10.8%

(6) 「反対に反対する人には反対」（三重否定）

回答：賛成　8.8%　反対　87.2%

5．含意に関する設問

設問7　次の文は正しいでしょうか，あるいは正しくないでしょうか.

(1) 今日が土曜日ならば昨日は金曜日.

回答：正しい　98.6%
正しくない　1.4%

(2) 馬が西向きゃ尾は東.

回答：正しい　39.9%
正しくない　53.4%

(3) 私がブタならばあなたはサルよ.

回答：正しい　9.5%
正しくない　83.9%

すべて『$A\rightarrow B$』の形式の文の真偽を問う設問である．上記，論理記号の定義のところで，含意記号に関しては『$A\rightarrow B\equiv(\neg A)\vee B$』であると述べた．その意味においては，(1)(2)(3) のすべてが「正しい」が正解となる．

(1) は「正しくない」と回答した生徒は何かの勘違いをしただけで，特に問題はないであろう．(2)「尾は下を向いてる」あるいは「首だけ西を向いてる」等のコメントがあった．意外とジョークで回答している．(3) に関して，「正しい」と回答した生徒が14名いたが，全員が全員とも論理的な解釈をしているとは言えない．

数学においては，その理論の「無矛盾性」が大きな課題である．矛盾する体系ではいかなる定理も証明可能になってしまう．含意においても前提が矛盾すれば，いかなる結論も正しいと言えてしまうことになる．

「私がブタならばあなたはサル」と言う命題は，日常的には「前提が誤っているから正しくない」と考えがち

であるが，論理学的には「正しい命題」である．

含意条件で，特に「対偶」や「逆」を以下の設問で調査した．

設問８　「今度の日曜日，晴れたら部活をやります」と言われました．（命題『A→B』が真）

(1) 日曜日は晴れませんでした．部活はあるのでしょうか．（裏『¬A→¬B』）

回答：ある　8.9%　ない　81.8%

(2) 日曜日は部活はありませんでした．天気はどうだったのしょうか．（対偶『¬B→¬A』）

回答：晴れ　0.7%　晴れ以外　93.9%

(3) 日曜日に部活はありました．天気はどうだったのしょうか．（逆『B→A』）

回答：晴れ　95.3%　晴れ以外　1.4%

設問９　「今度の試合A君が出場すればきっと勝つ」のは確実です．（命題『A→B』が真）

(1) その試合，A君は出場できませんでした．勝敗はどうだったのでしょうか．（裏『¬A→¬B』）

回答：勝った　12.2%　負けた　35.1%
その他　48.0%

（回答例：勝ったかもしれないし負けたかもしれない．勝・負・引分けの可能性あり．元々実力があり勝つ　等）

(2) その試合は勝てませんでした．A君は試合に出場したのでしょうか．（対偶『¬B→¬A』）

回答：した　12.8%　しない　54.7%
その他　27.0%

（回答例：どっちもある．五分五分．出ても負けたかもしれない．A君に頼りすぎ手を抜いて負け　等）

(3) その試合は勝ちました．A君は試合に出場したのでしょうか．（逆『B→A』）

回答：した　54.7%　しない　6.1%
その他　35.8%

（回答例：どちらともいえない．出場しなくても勝ったかもしれない　等）

命題『A→B』に対してその対偶『¬B→¬A』は真偽が必ず一致するが，逆『B→A』は真偽が必ずしも一致しない．（裏『¬A→¬B』は逆『B→A』の対偶であり，逆と真偽が一致する）

ニュアンスとしては，設問８はAとBは同値，すなわち「晴れたとき，そしてそのときに限り部活がある」ことを．設問９はAとBが同値ではない，すなわち「A君が出場すれば必ず勝つが，出場しなくても勝つかもしれない」ことを期待していた．

設問８に関しては，おおむね理解できているようである．ただし「晴れ」にこだわったため，少数意見として(1)は「曇りならある」「別の場所である」(2)は「天気だけでは決まらない」(3)は「天気に関係ない」等があった．

設問９の(1)では，単純に「負けた」と回答した生徒が35.1%であったのは意外であった．もう少し多いのではないか思った．「その他」の回答で「勝ったかもしれないし負けたかもしれない」「勝・負・引分けの可能性がある」等と半数以上の生徒が「裏は真ならず」と理解している．

(2)は対偶であるから「出場しない」が正解となるが，いろいろな状況を設定しての回答であり，「その他」が意外と多い結果となっている．単独でこの設問をすれば違った状況になると思える．

(3)に関しては，(1)に比べるとやや多く，半数以上の生徒が「逆も真なり」と回答し，その点では理解が薄いのではないだろうか．

設問10　「 $a=0$ ならば $ab=0$ 」である．（命題『A→B』が真）

(1) $ab \neq 0$ ならば「$a=0$」でしょうか，「$a \neq 0$」でしょうか．（対偶『¬B→¬A』）

回答：$a \neq 0$　52.7%　$a=0$　9.5%

(2) $a \neq 0$ ならば「$ab \neq 0$」でしょうか，「$ab=0$」でしょうか．（裏『¬A→¬B』）

回答：確定できない　8.1 %
$ab \neq 0$　38.5%　$ab=0$　15.5%

(3) $a \neq 0$ ならば「$ab=365$」でしょうか，「$ab \neq 365$」でしょうか．

回答：確定できない　8.1%
$ab=365$　25.7%　$ab \neq 365$　27.7%

(2)(3)に関しては「確定できない」が正答となるが，設問の仕方が「確定できない」と回答しにくいこともあると思う．その点が正答率の低さになっていると考えられる．

含意に関する設問をさらに発展して「必要・十分・必要十分条件」に関して，次の設問を行った．

設問11　KさんLさんMさんNさんの4人が理想の結婚相手について話し合っています.

Kさん「結婚相手ならば，ズバリ三高がいいわ」

Lさん「そう，私は三高には全然こだわらないわ」

Mさん「私は三高でなければいやだけど，それだけでは何かが足りないわ」

Nさん「私は三高であれば申し分ないけど，そこまでは要求しないわ」

ここに三高条件を満たす男の人と，満たさない男の人がいます．4人の結婚相手となりうる人には○を，ならない人には×を，判断できない人には△をつけて下さい．（ただし，三高条件については「客観的」な判定基準があるものとする．それがなければ，「ファジー論理」になってしまう）

回　答		三高の人	三高でない
Kさん	○	91.9%	6.1%
	×	3.4%	66.2%
	△	4.1%	21.6%
Lさん	○	52.7%	70.9%
	×	7.4%	3.4%
	△	35.1%	24.3%
Mさん	○	43.2%	4.7%
	×	11.5%	77.0%
	△	43.9%	13.5%
Nさん	○	73.0%	54.7%
	×	3.4%	4.1%
	△	19.6%	37.8%

『S』を三高，『W』を結婚相手とすると，Kさんは『S≡W』の形式，すなわち三高の人が結婚相手になるための「必要十分条件」となる場合であり，三高の人は「○」，三高でない人は「×」．

Lさんは『S』と『W』には含意関係がない場合であり，どちらも「△」である．

Mさんは『W→S』，すなわち三高の人が結婚相手の「必要条件」となる場合で，三高の人は「△」，三高でない人は「×」．

Nさんは『S→W』，すなわち三高の人が結婚相手の「十分条件」となる場合で，三高の人は「○」，三高でない人は「△」が正答となるの設問である．なお，調査対象の生徒は「必要・十分・必要十分条件」についてはまだ未知である．

生徒の回答では，明らかに理解できる設問，すなわちKさんの場合，Mさんの「三高ではない人」，Nさんの「三高の人」については正答率が高くなっているのが注目される．「どちらとも言えない」を回答しにくい場合もあると思われるが，文章を深く読むことまではまだ十分であるとは言えない状況であろうと思われる．したがって，「『S→W』と『W→S』のどちらが「真」であるか」までは解釈がなされていないようである．

6．あいまい語に関する設問

その表現としても，また論理的に見ても「あいまい」であると思われることを言ってしまい，話す者と聞く者とが異なる解釈をする場面がある．そこで，あいまいな表現を生徒がどのように解釈しているかを調査した．

設問12　○を白石，●を黒石とし，下記の条件に合う石の組の番号を選んで下さい．

①　○　○　○　　②　○　○　●

③　○　●　●　　④　●　●　●

(1) 少なくとも一つは黒石

(2) 全部の石が白とは限らない

(3) 全部の石が白というわではない

回　答	①	②	③	④
(1)	0.7%	12.2%	2.0%	1.4%
(2)	4.1%	4.7%	2.7%	5.4%
(3)	1.4%	7.4%	2.0%	3.4%
回　答	②③	①②③	②③④	①②③④
(1)	4.7%	1.4%	77.7%	%
(2)	18.9%	6.8%	40.5%	16.2%
(3)	16.9%	2.7%	57.4%	5.4%

(1) は「順列・組合せ・確率」に必ず出てくる表現であるが，前述の通り意外と理解されていないことが多い．結果から見ると8割程度であり，具体例をもとに指導する必要があろうと思われる結果である．

(2) は「限らない」の表現が曲者である．「白とは限らない」の表現を「白くない『可能性』がある」と解釈すれば，結局は①②③④のすべてが対象になると解釈できるのではないだろうか．

しかし「限らない」を「限る」の否定と解釈すれば状況はかなり変わり，このときは「全部の石」の解釈が影響することになる．「全部」を「3個の石『全部』」と見るか個々の石の総体として『全部』なのか．

前者は「『3個の石全部が白に限る』のではない」こ

とであるから，(1) と同じ解釈で②③④であり，後者は「『3個の個々の石それぞれ全部が白に限る』のではない」ことで，④だけが対象となる。

生徒の解釈では，「『3個の石全部が白に限る』のではない」ことが一番多い．

(3) は (2) と同じ状況であるが，より以上に「3個の石全部が白というわけではない」が強くなっている．それは，結果にも表れていると思う．

（設問12　続き）

(4) 全部の石が白くはない

(5) 石全部は白くない

(6) 石のすべては白くない

回　答	①	②	③	④
(4)	%	3.4%	2.0%	54.1%
(5)	%	2.7%	2.0%	43.2%
(6)	%	1.4%	2.7%	54.7%

回　答	②③	①②③	②③④	①②③④
(4)	6.1%	%	33.1%	%
(5)	12.8%	%	37.2%	%
(6)	2.7%	%	36.5%	0.7%

これらは，(2) (3) より多少はハッキリした表現になっている．少なくとも (4) と (6) については比較的断定的になっていると思われる．

しかし，必ずしも「全部が黒石」とまでは言い切れない表現でもある．まして，(5) にはあいまいさが残されている．

「全部が黒石」と判断し，回答した生徒が約半数であると言うことは，逆に言うと5割前後が迷っている調査結果である．

上記の様々な「あいまいさ」は「全体否定」と「部分否定」の違いをどのような表現にするかによる．日本語では非常に微妙になっているので，はっきりとした表現を使いたいものである．

設問13　1から9までの番号を書いたカードがある．
　　次の設問の条件に合うカードを選んで下さい．

(1) 偶数または3の倍数でないカード

(2) 偶数および3の倍数でないカード

（偶数のカードをG，3の倍数のカードをTと表すと
$G = \{2, 4, 6, 8\}$　$T = \{3, 6, 9\}$ となり，
$G \vee T = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$　$G \wedge T = \{6\}$
$\neg(T) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

したがって，$\neg(G \vee T) = \{1, 5, 7\}$
$\neg(G \wedge T) = \{6以外\}$
また　$G \vee \neg(T) = \{3 \cdot 9以外\}$
$G \wedge \neg(T) = \{2, 4, 8\}$ となる）

回　答	1,5,7	3,9以外	2,4,8	6以外
(1)	49.3%	14.9%	14.2%	2.7%
(2)	54.7%	7.4%	15.5%	4.1%

(1) は『$\neg(G \vee T)$』，すなわち「『偶数または3の倍数』でないカード」とも『$G \vee \neg(T)$』である「偶数または『3の倍数でない』カード」とも読める．結果としては，前者が半数近くであるのに対し，後者は15%に納まっている．

(2) は『$\neg(G \wedge T)$』，すなわち「『偶数および3の倍数』でないカード」とも『$G \wedge \neg(T)$』である「偶数および『3の倍数でない』カード」とも読める．前者がわずか4%でしかないのに，後者も16%でしかない．そればかりか，(1) と大差がない結果になっている．これは，「および」の意味の理解の仕方による．

「および」の意味は感覚的にも，また辞書的にも「かつ（すなわち『連言』）」と同義語であろう．しかし生徒の理解は必ずしもそうではないことが調査結果からわかる．

名古屋大学名誉教授の小野勝次先生は「接続詞は長いものほど結合が強いものと定義したらどうだろうか」と提唱なさったそうである（参考文献3参照）．

例えば，選言で言えば「AまたはBでない」と「AかBでない」の違いについては，「または」の方の接続を「か」より強いものと考える．具体的には「AまたはBでない」は『$\neg(A \vee B)$』として定義し，「AかBでない」を『$A \vee \neg(B)$』と定義しようというものである．

同様に，連言の「AおよびBでない」と「AかつBでない」では「AおよびBでない」は『$\neg(A \wedge B)$』とし，「AかつBでない」を『$A \wedge \neg(B)$』と定義することになる．

しかし，このような「定義」も市民権を得ることは容易なことではない．結果的に一教室内での定義としかなり得ないことが多い．

設問14　両面に色を塗ったカードがあります．次の設
　　問に該当する番号を選んで下さい．

① 裏は赤くなく，表が赤いカード

② 表が赤くなく，裏が赤いカード

③ 表も赤くなく，裏も赤くないカード

④ 表も赤く，裏も赤いカード

(1) 表か裏が赤くないカードを抜き出す．

(2) 表と裏とが赤くないカードを抜き出す．

回　答	①②③	①②	②③	①③
(1)	35.1%	49.3%	0.7%	0.7%
(2)	4.7%	%	·%	0.7%
回　答	①	②	③	④
(1)	1.4%	3.4%	3.4%	1.4%
(2)	%	%	87.2%	4.7%

(1) は「表か裏の『少なくとも一方』が赤くないカード」と理解するか「表か裏の『どちらか一方』が赤くないカード」と理解するかであろう．結果としても後者が多少とも多い程度である．

それに対して，(2) は「表と裏の『両方とも』が赤くないカードを抜き出す」をさらに強調した言い方と理解できる．結果も9割近くがそのように理解している．

これは，「表と裏と～」のように「…と…とが～でない」の言い回しだと『¬(A∧B)』の意味がよりハッキリすることになる．

同様に，(1) でも「表か裏かが赤くないカードを抜き出す」と表現すれば「表か裏の『どちらか一方』が赤くないカード」であることが，より以上に理解できることになるではないだろうか．

設問15　次に合致すると思う数を入れて下さい．

(1) 「ｘは正でｙは0でない」

回答：$x>0 \wedge y\neq 0$　77.0%

$x\leqq 0 \wedge y\neq 0$　2.0%

(2) 「ｘは正で，ｙは0でない」

回答：$x>0 \wedge y\neq 0$　79.1%

$x\leqq 0 \wedge y\neq 0$　0.0%

(3) 「ａ，ｂとｘ，ｙは，それぞれ，正，負の数である」

回答：$a>0\wedge b>0\wedge x<0\wedge y<0$　36.5%

$a>0\wedge b<0\wedge x>0\wedge y<0$　30.4%

(1) では「$(x\leqq 0)\wedge(y\neq 0)$」との理解ができなくもないが，結果的にはそのような理解がほとんどなされていない．

(2) は句読点「，」の存在が (1) よりも明確に「$(x>0)\wedge(y\neq 0)$」と表現していると考えられる．結果的にも迷った様子は見られない．

(3) についても，句読点「，」の位置が影響するのではないかと考えていたが，結果的には同数程度であり，さらに同数程度が「白紙」またはあきらかな「間違え」であった点を考えると，あいまいの度合いの高い設問である．

設問16　Ａ夫くんとＢ子さんはカップルです．いま，Ａ夫くんがＢ子さんをデートに誘いました．

次の場合で2人はめでたくデートできたでのしょうか．

(1) Ａ夫「次の日曜日，時間ある？」

Ｂ子「あるよ．」

(2) Ａ夫「次の日曜日，時間ある？」

Ｂ子「あることはある……」

(3) Ａ夫「次の日曜日，時間ある？」

Ｂ子「ないことはない……」

回　答	で き た	できない	不　明
(1)	82.4%	8.8%	8.1%
(2)	41.2%	35.8%	21.6%
(3)	47.3%	34.5%	16.9%

直接，論理とは関係ないが，日本語の持つあいまいさとして調査した．

ハッキリと「ある」に関しては問題ないが，「あることはある」と「ないことはない」は，言う方と言われる方ではどのようなニュアンスの違いがあるのだろう．

調査結果では，どちらも肯定・否定が大差のない結果になった．一般的なニュアンスとしては「ないことはない」はやや肯定的にとれるが，「あることはある」はどちらかと言うと否定的なのではないだろうか．

このような言い回しは，日本語のあいまいさ（真偽の判定が困難）の一例である．論理的には，「真（真理値1）」と「偽（真理値0）」の中間の真理値として考えれば，真と偽の「二値論理」に対して「多値論理」が成立していることになる．

7．数量概念を含む論理に関する設問

設問17　「私は千円持っている」＆「私は千円持っている」

さて，私はいくら持っていますか．

回答：1,000円　75.0%

2,000円　18.9%

論理的には『Ａ∧Ａ→Ａ』であり，千円を持っていると回答するのは自然である．

しかし「私は左手に千円持っている」＆「私は右手に千円持っている」ならば二千円持っていることになるであろう．これは単なる理屈であり，論理的ではないのだろうか．

設問18　次の設問は正しいのでしょうか，正しくないのでしょうか．

(1) 四角形 ABCD が正方形ならば，４辺の長さはすべて等しい．

回答：正しい　96.6％　正しくない　2.7％

(2) 四角形 ABCD が正方形ならば，４角はすべて直角で等しい．

回答：正しい　92.6％　正しくない　6.8％

(3) 四角形 ABCD が正方形ならば，４辺の長さはすべて等しく，４角もすべて直角で等しい．

回答：正しい　93.9％　正しくない　4.7％

設問19　定価 1,000円の本とＣＤが売っています．次の設問は正しいのでしょうか，正しくないのでしょうか．

(1) 1,000円持っていれば本が買える．

回答：正しい　100％　正しくない　0.0％

(2) 1,000円持っていればＣＤが買える．

回答：正しい　83.8％　正しくない　16.2％

(3) 1,000円持っていれば本が買え，ＣＤが買える．

回答：正しい　6.1％　正しくない　93.2％

設問18，19 はともに (1) が『Ａ→Ｂ』の真偽を，(2)が『Ａ→Ｃ』の真偽を．そして (3)で『Ａ→(Ｂ∧Ｃ)』の真偽を聞いている設問である．

設問18の (3) に関しては「正しい」であり，設問19は「正しくない」のである．この違いは，論理的にどう説明できるのだろうか．

設問17と設問19の特徴は，論理概念のなかに「数量概念」が入っていることである．そして，そのような論理概念を「線型論理」と呼び，最近情報科学の分野でその重要さが認識されている．（参考文献８参照）

通常の論理（古典論理と言われる二値論理）と異なるところは，連言∧(and) に「加法的 and（＆で表す)」と「乗法的 and（×で表す)」を論理語として考える点である．

『Ａ＆Ｂ』は「ＡかつＢのうち任意の一方」を表し，『Ａ×Ｂ』は「ＡかつＢの両方とも」を表す．

したがって，Ｓを「正方形」，Ｔを「４辺が等しい」，Ｕを「４角が等しい」とおけば，

Ｓ→Ｔ，Ｓ→Ｕ，Ｓ→(Ｔ×Ｕ)

が正しいことになる．（設問18 (1)(2)(3)）

Ａを「千円を持っている」，Ｂを「本が買える」，Ｃを「ＣＤが買える」とおけば，

Ａ→Ｂ，Ａ→Ｃ，Ａ→(Ｂ＆Ｃ)

は正しいが，Ａ→(Ｂ×Ｃ) は正しくないことになる．（設問19 (1)(2)(3)）

設問17に関しては，『Ａ＆Ａ』の意味と解釈するならば答えは「1,000円」，『Ａ×Ａ』の意味と解釈するならば答えは「2,000円」となる．

さらにこのことから，設問19(3) においては，

(Ａ×Ａ)→(Ｂ×Ｃ) は正しいことになる．

８．調査を終えて

公理化・形式化された数学的理論を研究する数学の分野として「数学基礎論」があり．数学基礎論の一部門が「数理論理学」である．その数学基礎論の専門家である，筑波大学数学系教授　本橋信義先生は，

「“論理”は決して自然に身につくものではなく，教育によって身につけさせる必要性を感じた．（中略）

いま必要なのは“論理学教育”ではなく，“論理教育”である」

と述べていらっしゃる．（参考文献１）

数学的な論証を行うためには「論理的」に考え，表現することが不可欠となる．本橋先生は大学における数学の基礎的な論理部分を指導したところ，あまりにも論理的な思考が不充分なため，自主教材として参考文献１である「論理教育実践」を作られた．

論理的思考や論証の教材として良く言われるのに「初等幾何」がある．たしかに論理的に考えることには役立つかもしれないが，上記の調査のように必要なことは，「論理的な解釈や論理的な表現」であろう．

生徒も含めて，我々が日常に使用する言語は言うまでもなく「日本語」である．そして，「日本語は論理的でない」と良く言われる．それは，あいまいな表現（～でないとは言えない．～とは限らない．～でないことはない　等）が随所に見られるからであろう．

しかし，このことも「様相論理」や「多値論理」のなかで考えれば決して非論理的ではない（これこそ二重否定）ことになる．

ところが，我々の指導している数学はあくまでも古典論理，すなわち真偽の二つを対象にしており，数学を記述する上でも「論理」を頼りにしている．その数学を語る日本語が，二値論理に対応していなければ，生徒にとって困難極まりないものになってしまう．実際のところ，生徒の書く答案の表現は数式の羅列で終わってしまい，式を結ぶ「言葉」が不足している．その数式ですら論理的な飛躍がいたるところに見られる．その意味でも，決して（古典）論理的ではないのが現状であろう．

今回の調査を行った際の生徒の反応としては「頭が痛くなった」と言うことが一番である．それほどに言葉を論理的に解釈することは疲れることであろう．

前述の本橋先生の言葉のように，論理を教育によって身につけさせなければならないのであろう．これは決して数学だけが背負わなければならないものではないであろうが，少なくとも「数理論理学」の分野があるかぎり，数学の責任は軽いものではないと思われる．それも，数学Aの単元の「論理」だけではなく，あらゆる場面で指導する必要があろう．

この小論のきっかけは，福原満洲雄先生や細井勉先生を中心とする「数学と言葉」に関する研究の書籍（文献２～４）からである．文献１も含めて，設問事項に関しても参考にさせていただいた．特に設問11は文献１をそのまま利用させていただいた．貴重な教材をお送りいただいた本橋先生には，特に感謝申し上げたい．

参考文献

1　本橋　信義(1993)：論理教育実践　（自主教材）
2　細井　　勉(1992)：数学とことばの迷い路　（日本評論社）
3　福原満洲雄他(1981)：数学と日本語（共立出版）
4　福原満洲雄他(1986)：続　数学と日本語　（共立出版）
5　島田　　茂他(1986)：数学教育の周辺から　－言語と歴史－（聖文社）
6　沢田　充茂(1962)：現代論理学入門（岩波新書）
7　福山　　克(1980)：数理論理学　（培風館）
8　竹内　外史(1995)：線型論理入門（日本評論社）
9　ピエール・ギロー(1990)：意味論　（白水社）
10　別冊・数理科学(1988)：ファジー理論への道　（サイエンス社）