日本の教室におけるオープンアプローチによる算数数学の学習指導

能　田　伸　彦

オープンアプローチへ至る日本の先行研究の流れ

日本の数学教育関係者は，戦前以来，伝統的に，教育研究と教育実践の両面において数学的な側面を強調してきた。特に，最近20年に注目すると，その数学的な側面の強調の伝統とともに，個々の子どもの考えへの着目を深めた指導法の研究がなされてきたといえる。そういった研究成果の一端は，オープンエンドアプローチ，オープンアプローチ，問題から問題へ，多様な考え方といった表題で出版されてきた（島田1977，能田1983,竹内,沢田,1984；古藤1992,沢田,坂井1995,）。ただし，戦前以来の問題設定や問題解決による学習指導の伝統と指導法開発研究の蓄積が，これらの研究の基礎を提供してきていることも確かである。

さて，これら近年の研究の多くは，個の数学的な考えと同等に個の可能性に焦点を当てている。子どもの多様な考え方に帰する算数・数学の指導法の開発も，それら研究の主題となってきている。言い換えれば，子どもの数学的な見方・考え方と指導法の開発とが，それらの研究では統合されてきており，それが近年の日本の数学教育と数学教育研究において注目すべき特徴となっている。

特に，オープンアプローチに関わる研究の直接的起源は，1970年代の初頭に行われた評価法の研究である。その先導的な研究の一つが島田茂等によってなされた数学教育における高次目標の評価方法の開発研究である。

・すでに知っている数学の土俵のなかに，問題の場面をひきずりこんで，扱いやすい形に再構成できること（問題場面に当面してその場面を適切に数学化し，処理できること）（島田，1977）

・共同して問題の解決にあたり創造的な活動ができること（島田ほか，1972）

そして，子どもの活動を評価するために，いわゆるオープンエンドの問題が開発されたのである。オープンエンドの問題は，このような目標が達成されたかどうか評価をするために，考え出された問題である。オープンエンドの問題は，正解が多様に得られるように作られた問題である。島田茂等がオープンエンドの問題として開発した問題には，おはじきの問題（後で例示する）や水槽の問題など，異なる性格を備えた問題群がある。

当時，日本の学習指導要領は，数学教育の現代化の思潮を背景に編成されていた。授業は，一斉指導で行われ，一人の教師が45人の子どもを受け持っている。教師は，新しい数学的な概念を説明し，その概念の範例を示し，例題の解法を示すのである。知識，技能，概念，法則などが段階的に順次子どもに提示された。そういった時代において，オープンエンドの問題は，学習指導の組織を実質的に転換する原動力となると期待された。

その研究は，当初，４人の研究者，島田茂，沢田利夫，橋本吉彦，渋谷憲一によって手がけられ，その後，他の研究者と小中高の先生方が加わった。特に，先生方は，その問題を，学習指導に利用し，事例開発した。その共同研究の成果は「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」として出版された。その本は，最近，米国で The Open ended Approach (Becker & Shimada, 1997) として NCTM から翻訳出版された。その後も，先に例示した著作の他に，多くの著作が出版されている。

今でも，日本の多くの教室には，教師一人に40人の子どもがいる。しかしながら，指導法は，30年前と比較して一層多様になり，伝統的な数学的側面とあいまってそれぞれの個の考えを強調するようになってきている。沢山の図書出版が示すように，指導と評価におけるオープンという考え方は，発展し続けてきているし，また，研究者と先生方との共同研究を通じて，様々な異なる背景から，より今日的な指導法へと拡張され続けている（補遺参照）。

ここでは，オープンアプローチによる学習指導の考えを記し，その指導法で実体化される指導場面を例示する。そして，オープンアプローチによる学習指導を視点に，将来の数学教育研究への展望を検討する。

オープンアプローチによる学習指導

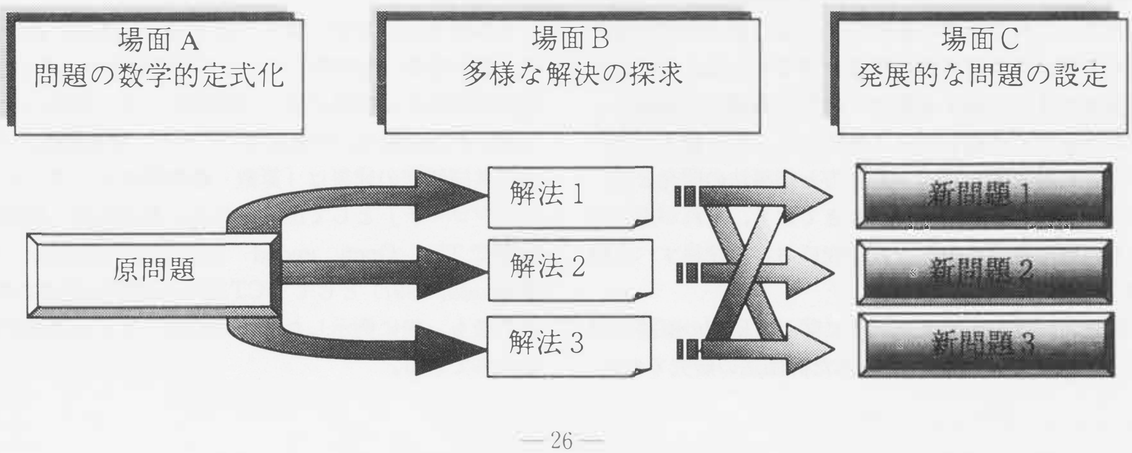
子どもの心を数学へ開くために

教育の本来の姿は，学習が将来の更なる学習に向けて「開かれている」べきものであり，生涯にわたって生きていくための資質を身に付けることでもある。算数・数学科においても，学習の成果として得られる数学的センスや知識・技能，そして数学的な見方や考え方などを基にして，各自が自らの生き方を模索し，見出していく勇気を持つとともに，広く社会に貢献できる健全な心を兼ね備えることが必要である。一人一人の子どもはかけがえのない存在であるから，すべての教育活動において，すべての子どもに対して，学習の適切な機会と環境が原則として保証されなければならない。一方，算数・数学科の場合，理論性・抽象性・規約性などの特性のゆえに，子ども自身によって学習できるものは，小学校低学年の内容ぐらいまでであって，中学年から上になると無理であることが明らかになっている（能田伸彦，1982）。それゆえ，算数・数学科の場合，教師による適切な指導が特に必要である。

教師が子どもに数学を指導するとは，子どもが数学の内容を，各自それぞれの学力，あるいは，関心に応じて理解し，発展させることを支援することである。ところが，教師が前もって準備した内容を，教師の論理で一方的に指導するなら，たとえそれが数学的に価値のある展開であっても，「子どもの心を開く」指導であるとは言えないであろう。また，教師が子どもの理解にのみ合わせて，低次な一面的な数学的活動に終わるなら，それは「数学を開く」指導ではないであろう。

オープンアプローチによる指導は，すべての子どもが自分の興味・学力に応じて，ある程度自己決定していける幅があると同時に，子どもの追求の仕方によっては，一般性や抽象性などの数学的な質を高めることも可能にすることを目的としている。言い換えれば，子どもの発想や考えを取り上げ，それらを集団での洗練と教師の適切な助言によって数学的活動として位置付けながら発展させ，できることならば，子どもが進んで学習し，よりよい数学的活動を行うことができるように支援する指導である。このように，オープンアプローチによる指導は，子どもの心と数学の本質を開示するものである。

オープンアプローチによる指導は，教師・子ども・内容に関わる3つの原理に支えられている。子どもに関わる原理は「自己（自律）活動」である。子どもの自主性・主体性による自己活動は，自由放任にならないように配慮しつつ最大限尊重されるべきである。内容に関わる原理は「発展（進化）と統合」である。ある内容が基本的で本質的であればあるほど，類似な，あるいは特殊な内容を包括して，それはより広いものに「開く」働きをもつものである。一方，「開き」続けることができるのは，はじめの内容が「扇のかなめ」のように，基本的・本質的なものとして見返され，位



置付けられるからである。特に，数学の内容は理論的・体系的であり，「発展と統合」の原理に適しているといえる。教師に関わる原理は「臨機応変の処置」である。実際の指導では，子どもの発言が教師の準備したものと異なる場合がある。このとき，子どもの発言を生かし，真意を他の子どもに伝わるように配慮したりすることは，教師の重要な仕事である。

オープンアプローチによる指導は，一般に，場面A　問題の数学的定式化，場面B　多様な解決の探求，場面C　発展的な問題の設定という3つの場面で構成される。

場面A「問題の数学的定式化」では，問題設定の元になる場面やオープンな問題それ自体を，教師から子どもに提示し，子どもはそれを理解し，数学の問題として定式化する。場面B「多様な解法の探求」では，数学的に定式化された問題に対して，子どもたちが自らの学習経験に基づいて自らの解法を見出す。ここでの解法は多様であり，特に解法間の関係が追及され，複数の解法を統合し，よりよい解法への発展が扱われる。場面C「発展的な問題の設定」では，生徒が，場面Bでの問題解決に基づいて，より一般的な問題を設定したり，その解決を通じて，より一般的ないし，妥当な解法を見出そうとする。

オープン性の意味と問題のタイプ及び評価

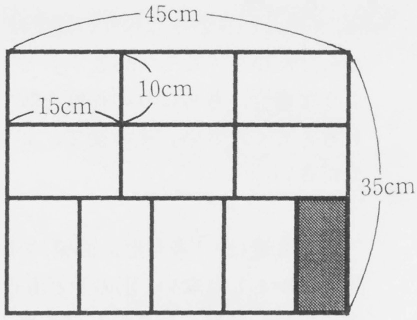
島田が提案した「オープンエンドアプローチ」では，解答が一意に定まらない未完結の問題に焦点が当てられた。これは，正答の多様性を積極的に利用する授業の展開を意図していたためである。 それに対して「オープンアプローチ」では，オープン性の意味がより広く捉えられている。つまり，エンドがオープンである問題の他にも，多様な解決方法を持つ問題，多様に発展させることの問題も含めて考えられており，筆者はそれらを含めてオープンな問題と呼んできた。この拡張により，その趣旨は保ったままで問題の開発が難しいという研究経過における課題が克服される。さらに，子どもの学力観や必要感に応じて授業を展開することができるようになる。さらには，子どもが自分自身で解決をした後で，数学的なアイデアに基づいて解法をまとめあげていく指導の展開を考えていくこともできるようになるであろう（能田，1983）。

「オープンアプローチ」で使われる問題はノンルーチンな問題である。さらに，上述した事柄に基づいて，問題を3つのタイプに分けることができる。それらは，「過程がオープン」な問題，「結論がオープン」な問題，「発展がオープン」な問題の3つである。他の研究でもこのような分類を採用する場合がある。以下では，典型的な例とともにそれぞれのタイプの問題を紹介する。

過程がオープン

このタイプの問題は，問題を解く適切な方法が複数存在する問題である。言うまでもなく，すべての数学の問題はこの意味ではオープンである。しかし，問題は，多くの学校数学の問題が1つの正答のみを要求されたり，あるいは，問題のプロセスの面を強調していないことにある。従って，プロセスがオープンであることを言葉に出していうことは重要であり，教師がそうした側面から目の前の問題を見直すことは大切である。次に示す「カード問題」は，このタイプの問題の1例である。

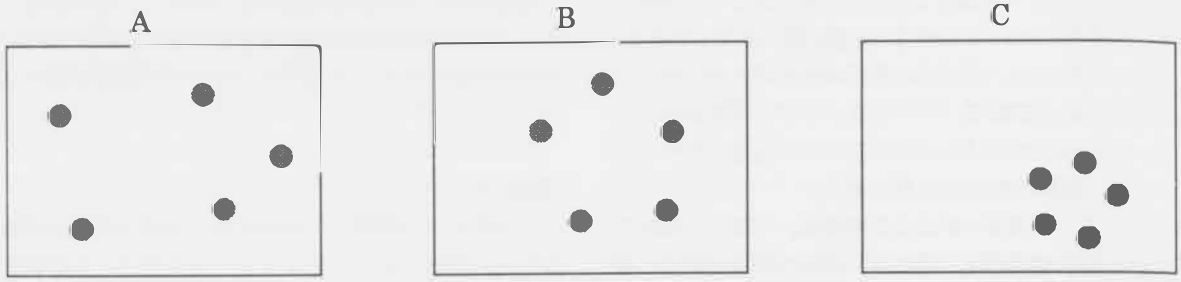
「37人の子どもが松井先生のために誕生日カードを作ろうとしています。全員が1枚ずつカードを作ります。さて，大きな長方形の紙（45cm×35cm）からカード（15cm×10cm）を作ることになりました。この長方形の紙から，カードが何枚作れるでしょうか。」



ここでは，子どもは，図で示すように，実際の長方形をその大きさのカードに区切って枚数を考えていくことができる。あるいは，(35×45)÷（15×10）のような式を立てて計算から答を求めることもできる。別の子どもは，比に目をつけて，（7×9）÷（3×2）を計算して答を求めるかもしれない。このように，複数の解法が存在するために，子ども達は，自分の学力や関心に応じて問題解決の活動に従事することができる。また，その後，グループ討議を通して，よりよい問題解決のプロセスを探っていくこともできる。

エンドがオープン

このタイプの問題は複数の正答を持つ問題，すなわちオープンエンドの問題である（島田，1997）。欧米では，クリスチャンセンやウォルターら（1986）が「探求問題」の重要性を述べているが，その「探求問題」



はエンドがオープンな問題に類似な性格を備えている。このタイプの問題の例として，以下では，「おはじきの問題」を示す。「おはじきの問題」は，オープンエンドアプローチの代表的事例としてよく用いられる。

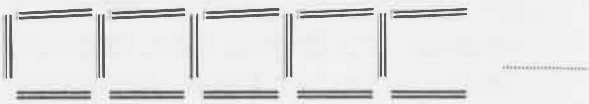
「A，B，Cの3人でおはじき遊びをしたら，上の図のようになりました。この遊びでは，落としたおはじきのちらばりの小さい方が勝ちとなります。上の例では，「おはじきのちらべりの程度は，A，B，Cの順にだんだん小さくなっています」と言えそうです。このような場合，ちらばりの程度を数で表す仕方を幾通りも考えてください。その後で，よりよい方法を選んでください。」

子ども達は，「多角形の面積」を測るという方法を発見するかもしれない。別の子ども達は，「2点を結ぶ最大の線分」で散らばりの程度を表そうと，するかもしれない。また別の子どもは，「円で覆うときの最大の円の半径」で表すかもしれない。どの方法も利点と欠点を持っている。教師は，他の場合についても，それぞれの方法が一般化できるかどうかという点から，それぞれの方法の利点と欠点を，子どもと一緒に話し合って見つけることができるでしょう。

発展のさせ方がオープン

子どもは，問題を解いた後に，もともとの問題の条件や属性を変えることで新しい問題を開発することができる。このような「問題から問題へ」と発展させる側面を強調するときに，発展のさせ方がオープンな問題を考えることができる。以下で述べる「マッチ棒の問題」は，日米の数学的問題解決の共同研究で用いられたものである（三輪，1992)。

「マッチ棒を使って，図のように正方形を横につなげていきます。正方形が8個になったとき，マッチ棒は，何本使われていますか。



(1)　上の問題の考え方と答を書きなさい。
(2)　上の問題をもとにして，それと同じような問題をいろいろつくりなさい。答は出さなくてよいですから，できるだけたくさんの問題をつくりなさい。
(3)　上で作った問題の中で，一番よいと思うのはどれですか。その番号を（　）の中に書きなさい。そのわけも書きなさい。」

子ども達は，問題を解いた後で，正方形の数を色々に変えて問題を作るかもしれない。また，正方形という条件を三角形やひし形などに変えて問題を作るかもしれない。更には，マッチ棒の数が与えられているときにできる正方形の数を求めるというような逆の問題を作るかもしれない。このように，子どもは自分なりの問題を作ることを楽しむことができる。更に，自分が作った問題を友人の問題と比べるなどして，問題の構造について話し合ったり，様々な原問題の解き方の一般性を話し合ったりすることができるであろう。

子どもの解答の評価

このようなオープンな問題を吟味する際には，「オープンアプローチ」における子どもの活動の評価（評定）の仕方について述べておくことが重要であろう。なぜなら，このアプローチの目的は正答を導き出すことではなく，むしろ，子どもの数学的な考え方や創造性を育成することだからである。実際，教師は，このアプローチによって子どもが生み出す様々な応答を評価することに難しさを感じるからであろう。

子どもの応答は以下のような基準によって評価することができる（島田，1977)。

● 流暢さ――幾つの解法を見出せたか。
● 柔軟さ――幾つの数学的なアイデアを発見できたか。
● 独自性――そのアイデアはどの程度独自性があるか。
● エレガンス――アイデアの表現がどの程度簡潔で明瞭であるか。

これらの基準は量的と質的の両面から評価する必要がある。特に最初の2つの基準は，子どもが見出した解法やアイデアの個数を数えることで評価できるでしょう。

能田（1998）は，行列を用いた評価モデルを提示している。そこでは，「多様性」と「一般性」が評価される。行列では，(Aij) によって1人の児童（あるいはグループ）による応答の数を示す。「多様性」は，(Aij)（j は定数)によって示し，異なる数学的なアイデアが異なる (Aij) に対応する。「一般性」は (Aij)（i は定数)によって示し，異なるレベルの一般性が異なる(Aij) に対応する。上述した「おはじきの問題」は，このモデルによって次のように評価されることになる。

多様性――A1j：長さのアイデア，A2j：面積のアイデア，A3j：分散のアイデア
一般性――Ai1：具体例，Ai2：半具体例，Ai3：抽象例

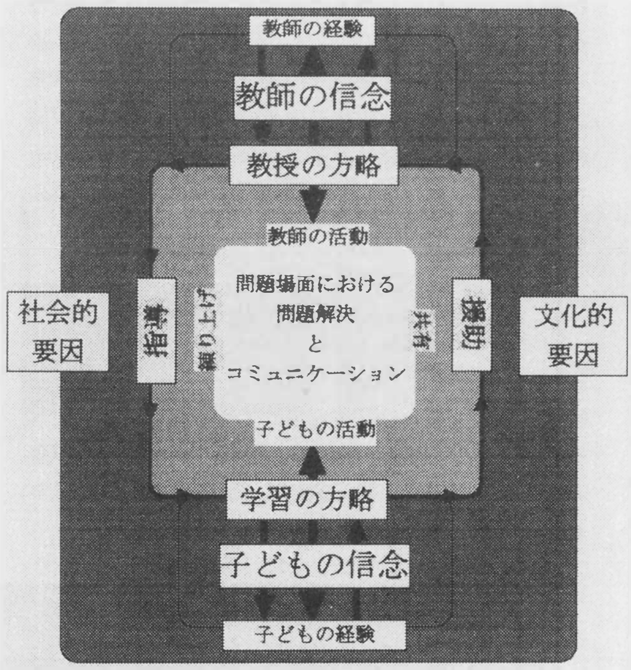
具体的には，次のような評定が可能になる。

A11：2点を結ぶ最大・最小線分，
A12：5点の周の長さ，
A13：任意の点から各点への長さの和，
A21：5点を覆う最小の正方形の面積，
A22：5点を覆う最小の円の面積，
A23：5点のうちの3点を使ってできるあらゆる三角形の面積の和。

<評価例>

$$P:\begin{bmatrix}110\\000\\000\end{bmatrix}\qquad Q:\begin{bmatrix}121\\011\\000\end{bmatrix}$$

この評価モデルによると，上のPとQの子どもにおいては，PよりもQの方が多様性や一般性の点で優れ



ていると見ることができる。また，PとQが同じ子どもであって，オープンな問題を使った指導の前後の変化を示していると見ると，指導によって子どもの思考力がどのように変化したのかを知ることもできる。

オープンアプローチによる学習指導場面

ここでは，オープンアプローチを用いた数学の授業の展開がどのように記述されるのかを記す。右図は，日本の指導法としての問題解決を特徴づけた図である（能田，清水，1989）。能田の学位論文では（1984)，ヘルバルトの教授学的タクト論によって説明した内容を再整理している。同時に，問題解決場面における日本の授業にみられる数々の特質を盛り込んでいる。その問題解決場面で，大切な数学的な考えが子どもに提示され，子どもは協同的に問題場面に挑戦し，最終的にはその場面に対する解決を得る。(see also TIMSS results by US Department of Education, 1996)。

一方で，子どもが加齢し，その能力や価値観の幅が広くなると，そのような授業を展開することは一層難しくなる。そこでオープンアプローチでは，子どもの能力と関心，数学的な考え方の発展の両方に開かれ，問題の生成と解決の過程を探求することを支援するオープンな問題を用い，豊かな場面を子どもに提供していく。その活動を通して，生徒は数学的な知識ばかりでなく，数学的問題解決の重要な基礎である，数学的

な考え方，信念，学び方に対するメタ知識を学ぶことが期待できる。

ここで取り上げる事例は，東京都文京区にある筑波大学附属小学校の坪田耕三先生による，おはじきの問題の授業である(1988)。子どもは6年生である。以下では，先に述べた3つの展開場面に準じてその授業の流れを記述する。

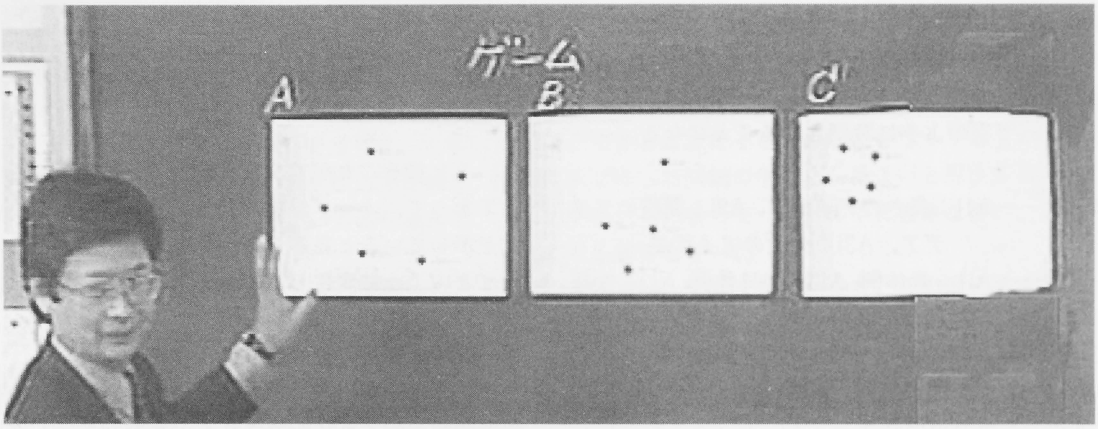
場面Ａ　問題の数学的定式化

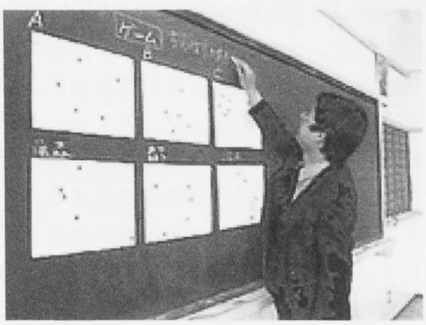
おはじきの問題は，問題文ではなく，次のようなゲーム場面で提示される。

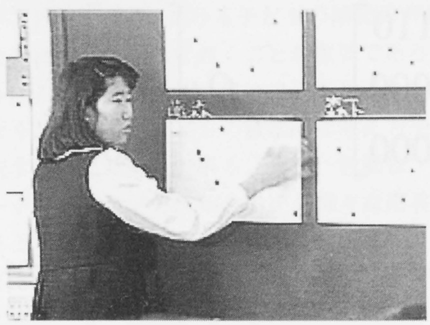
教師；紙の上におはじきを投げてちらばり具合を比べるゲームをします。いちばんちらばりが大きい人が勝ちです。今，A，B，C三人の人が，それぞれおはじきをこのように投げました。誰が勝ちでしょうか。

坪田先生は，このゲームを子どもに体験させます。しばらくして，何人かの子どもに結果を前に示すようにいいます。友達の結果を掲示すると，子どもたちは，様々なちらばり方があることに気づきます。坪田先生は，どれがちらばっているといえるのかをみんなが納得できるように説明することを求める。何人もの子どもが手を挙げ，考えを述べる。多くの説明には，6年生までの既習である長さや面積が話題に上る。その議論は，様々な決定方法があることへ話題が移っていく。

このような問題の提示方法は，日本の授業ではしばしばみられるものである。坪田先生の授業が成立する前提には，子どもが長さや面積といった専門用語を，普段から用いて説明できるように育てられていることがあげられる。子どもが自然にそれらの言葉を使って説明している状況を受けて，坪田先生は，「よりよい判





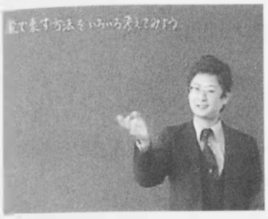
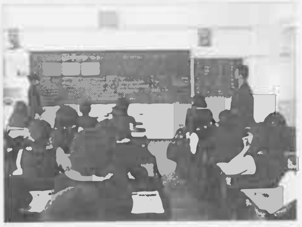
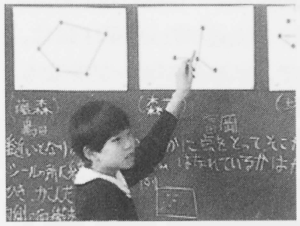
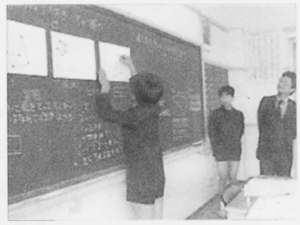


断の仕方を得点で表せないか」と問題を投げかける。

場面B　多様な解決の探求

自力解決では，子どもは，自分なりの数量化の方法を編み出す。発表では，利点が話題にされるが，他の子どもからは定義の不十分さに対する反例が示される。熱のこもった議論を通じて，子どもは，より洗練した方法を定めようと，多様な議論が総合されていく。

場面B

場面C　発展的な問題の設定

発表が終わった段階で，坪田先生は，最初のゲーム場面に立ち返り，誰が提案した方法で勝者を決めればよいかを決定することを求める。子どもはより単純なものを選びたいと考えて，もっとも多かった面積による比較で勝者をきめることにした。子どもは，決められた方法で，それぞれに面積を求めて，その値を比べて勝者を決定した。同時に，ちらばり具合によっては，必ずしも面積は妥当な方法ではないことが議論された。最後に，坪田先生は，面積では，なお，再考すべき余地があることを話題にして，今日の授業を振り返った。そして，今日は，あいまいなものを比較する上で，数量で表すことを学んだと授業を結んだ。

このような坪田先生の授業は，次のことを例証している。すなわち，子どもは，問題状況において自らの問題を設定し得ること，自ら，自分自身の方法を設定し得ること，一つの解答ではなく様々な解法を容認すること，異なる解法の内実を詳細に確かめ，妥当性を吟味し，反駁しえることである。この結果は，オープンアプローチによる学習指導は，教室において，生き生きした数学的活動を提供することを示唆している。

今後の数学教育研究への課題

「オープンアプローチ」は1980年前後に定式化されたものではあるが，これまで見てきたことは，今日，世界の数学教育界で議論されている問題と多くの接点を持っている。「オープンアプローチ」では，子どもの心に数学を開く学習指導を求めてきた。そして，この要請は80年代に数学教育で台頭してきた構成主義のアプローチとも立場を同じくするものであった。特に，子どもの発言が教師の準備したものと異なる場合でも，子どもの発言を適宜生かしながら授業を進めようとすることは，M. Simon 氏により近年提唱されてきた学習軌道の発想にも関わっている。問題へのアプローチのオープン性は，オープンアプローチの重要な一面である。子どもの多様な発想や考えを取り上げ，それらを集団での洗練と教師の適切な助言によって発展させていく点は，議論やコミュニケーションを生かした授業の提唱において主張されていることに関わっている。さらに，正答を得ることよりも，子どもの数学的な考え方や創造性に評価の重点を置くことは，問題解決志向的な学習指導における，子どもの態度や信念の変容を調べる研究にも通じている（能田，1993）。

こうした研究視野の関連性は，近年の研究成果を活用して「オープンアプローチ」をより充実させることができるとともに，個別的な成果を越えて，学習指導の場でその成果を統合する，より大きな枠組みとして「オープンアプローチ」が機能し得ることを示唆するものと言えよう。「オープンアプローチ」が数学へと開かれていることに注意するならば，オープンアプローチが学習指導研究における「数学」の位置を再考する視点を与える可能性を指摘できる。例えば，評価では数学に対する肯定的な態度を単にみるだけでなく，流暢さ，柔軟さ，独自性，エレガンスという視点を打ち出しているが，これは数学，あるいは学問をする（数学する）活動の特性を反映したものであろう。

90年代における世界的な数学教育改革の過程で，日本の算数・数学の授業に対する関心が高まってきている。「オープンアプローチ」はある意味において，日本の授業の伝統のよい点を鮮明にして，展開させたものである。その基本精神である「子どもの心と数学の両方を開く」学習指導の展開は，日本の授業を考察する上で有意な視点を与えるものである。実際，TIMSS の分析とも整合する。Stigler と Hiebert は，米国，ドイツ，日本の授業を子ども，教師，数学の関係により特

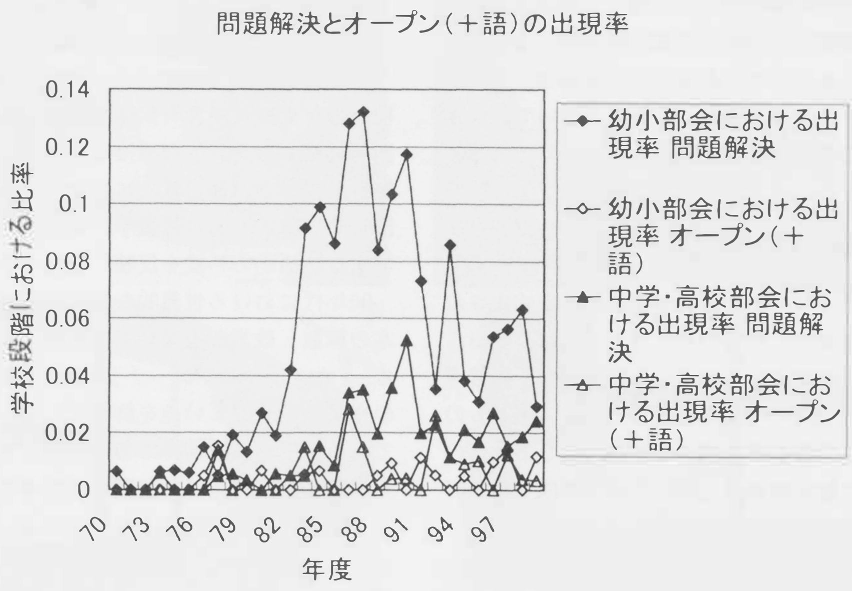
徴づける中で，日本の授業を子どもと数学が大切にされた授業であると指摘している（Stigler & Hiebert, 1999, pp. 25-26)。子どもと数学の双方に授業が開かれることを志向するからこそ，日本の問題解決を通じての学習指導は，単なる解法の提示に終わったり，あるいは子どもの意見の羅列に終わることはないのである。

最後に今後の課題について2点述べたい。第1には，3つのオープンな問題の中で，エンドがオープンなものについては上でも述べたようによい問題の開発が難しく，日本でも十分な事例があるとはいいがたい。しかし，このタイプもまた大きな数学教育的な価値を有しており，さらなる開発が臨まれる。上では「おはじきの問題」を例としてあげたが，そこではおはじきの散らばり具合を数学的に意味づけるという作業が求められていた。このことは，エンドがオープンな問題と数学的モデル化との関わりを示唆している。すなわち，数学的モデル化の研究を参照していくことで，エンドがオープンな良問を開発するヒントが得られるのではないかと期待している。第2の課題として，生徒の思考様式の変容を追う研究の必要性をあげたい。「オープンアプローチ」を実践した事例もかなりあり，子どもたちにおける理解や態度の肯定的な変容については研究が行われてきた。しかし，個々の子どもたちの数学的な考え方や創造性が，学習指導を通じてどのように発展するのか，またその契機が何かについては，まだ充分な理解を得るには至っていない。オープンアプローチによる学習指導を通じて，数学の授業を改善していく上で，これらの研究は大切な分野である。

補　遺

次の表は，過去30年間（1970－1999）日本数学教育学会年会における「問題解決」「オープン」という語を含んだ研究の出現率を，各学校段階毎に表している。また，下図のグラフは年度毎の小学校，中学校・高等学校の出現率の推移を表している。表からは，用語「オープン」の出現率が中学校・高等学校段階で相対的にみて高いことがわかる。この結果は，オープンアプローチの目的が，中学校・高等学校段階における子どもの能力の多様性に答えることを意図して研究されてきたことに通じている。グラフからは，小学校段階で，1980年代に問題解決を通じての学習指導が研究主題になったことがわかる。この動向は，NCTM の動向に呼

	幼少部会	中学校部会	高校部会	高専大学
発表件数	5405	3681	3353	447
問題解決の割合	5.3%	2.5%	0.4%	1%
オープン（＋語）の割合	0.4%	0.9%	0.2%	0



応するものといえるが，日本の問題解決が上述のように固有の意味を有する点に注意してほしい。

引用・参考文献

Becker, J. P., & Shimada, S. (eds.). (1997). The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Christansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In Christansen, B. et al. (eds.), Perspectives on mathematics education. The Netherlands: D. Reidel.

古藤怜，新潟県算数教育研究会著．(1992)．算数科多様な考え方の生かし方まとめ方．東洋館

三輪辰郎編著．(1992)．日本とアメリカの数学的問題解決の指導．東洋館．

能田伸彦(1982)．数学教育における教授方略に関する基礎的研究．教育学系論集，第6巻．107-129

能田伸彦（1983)．算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究：授業の構成と評価．東洋館．

能田伸彦，清水克彦(1989)．日米に於ける数学の問題解決に関する比較文化的研究(日米セミナー報告書)

Nohda, N. (1991). Paradigm of the 'open-approach' method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. ZDM 32-37

Nohda, N. (1993). How to link affective and cognitive aspects in mathematics class, Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychlogy of Mathematics Education, vol. I, 8-10

Nohda, N. & Reys, R. E. (1994). Computional Altornatives for the Twenty-first Century; cross-cultural Perspectives from Japan and the United states.

Nohda, N. (1995). Teaching and evaluation using "open-ended problem" in classroom. ZDM 57-61

Nohda, N. (1998). Teaching and evaluating using 'open-approach method' in classroom activities. Proceeding of the 31th JSME annual meeting of mathematics education (pp. 419-424). November 14-15, Fukuoka University of Education.

沢田利夫，坂井裕編著．(1995)．中学校数学科［課題学習］問題づくりの授業．東洋館．

島田茂，沢田利夫，橋本吉彦，渋谷憲一．(1972) 数学教育の評価方法に関する開発研究，文部省科学研究費，科学教育研究報告．

島田茂編著．(1977)．算数・数学科のオープンエンドアプローチ．みずうみ書房．

竹内芳男，沢田利夫編著．(1984)．問題から問題へ．東洋館．

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), 114-145.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). Teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free Press.

坪田耕三（日本語版, 1988）. オープン・エンド　アプローチの授業算数科六年単元「散らばり方をどう表すか」図書文化社

Tsubota, K. (1988). Videotape of the lesson "Degree of scattering of marbles".

U.S. Department of Education. (1996). Eight-grade mathematics lessons: United States, Japan, and Germany. Office of Educational Research and Improvement.