学校数学における証明の機能としての「発見」に関する一考察

茅 野 公 穂

1．はじめに

学校数学において，証明に関わる内容は，古くから中等教育における教育内容として重要な位置を占めてきた。日本でも，明治期に，証明に関わる内容の教育的な価値や必要性が認められ，中等教育における教育内容として位置づけられてきた。ただし，義務教育の一環として中学校数学に証明が位置づけられたのは，1958年(昭和33年)10月告示の中学校学習指導要領[1]からである。

日本の義務教育に証明が取り入れられた当時から，証明についての指導内容として，証明の構成についてだけでなく，証明の機能が重要であると指摘されている。この時期に刊行された中学校学習指導要領数学科編の解説書[2]には，証明によって，帰納や類推によって見いだした性質がより「確かなもの」となり，「より前進するための力強い礎石となる確信」をもつことがねらいとして記されている(和田，1958，pp. 26-28)。また，このねらいを実現すべく，証明によって「帰納や類推によって得た結論の正しいことを確認」すること，帰納や類推によって得た結論の正しいことを「他人にも明確に示し得る」こと，直観や帰納が及びにくい場合でも証明により「既知の基本性質から未知の性質を導き得る」こと，「多くの成果を整理して，それを論理的体系に組織立てる」ことが期待されている。ただし，論理的な体系に組織立てることは高等学校以後において指導される内容とされ，それ以外のものは中学校においても指導される内容と位置づけられている(和田，1958，pp. 250-251)。これらのうち，証明によって「帰納や類推によって得た結論の正しいことを確認」すること及び「既知の基本性質から未知の性質を導き得る」ことは，それぞれ，証明の機能としての「立証」，「発見」に対応する。

しかし，学校数学における証明指導が，典型例としての証明を生徒に提示することや生徒が証明を構成することにとどまりがちであると先行研究によって指摘されている(小関，1987[3]等)。これらの先行研究は，証明の機能を顕在化することにより，授業において生徒が証明を活用することを促そうとしてきている。証明の機能を顕在化し授業において生徒が証明を活用することを促すことは，義務教育の一環として証明に関わる内容を学習する日本に限らず，諸外国においても同様に課題となっている。

学校数学における証明の機能に関連する先行研究は，その関心によって分類すると４つに分けられる。第一に，証明の機能として何を設定するのかに答えるもの。第二に，生徒が証明すること及び証明を機能という面からどのように受け止めているのかを明らかにするもの[4]。第三に，教師が機能という面からどのように証明を受け止めているのかを明らかにするものである。これは，小学校教師[5]と中等学校教師[6]とに分けられる。小学校教師の証明の受け止め方が注目されるのは，小学校段階の教育課程で証明はあまり注目されていないが，もし，小学校段階においていくつかの例をもって証明だと受け止めると，その後生徒は証明というアイディアを学習するのが困難になるためである。第三の研究は，証明の機能を生徒がどう受け止めるかは，教師による影響が少なくないという前提に立って，教師が証明の機能をどう捉えているのかを調べているのだろう。

第四として，学校数学において証明の機能の活用を促すためにその過程で生徒が直面すると想定される困難等を解明しようとするものである。ただし，生徒が直面すると想定される困難等を抽出する先行研究の多くは，証明の機能としての「立証」に焦点をあてたものである。証明の機能としての「発見」については，生徒の活動の分析をもとに学習指導への示唆を検討する研究は行われ始めたところであり[7]，困難等が抽出されているとは言い難い。困難等を抽出するには，条件を制御し要因相互の関係等を実証的に解明する必要があるが，その前提となる「発見」の表す意味を限定できていないことも一因であると考える。さらに，学習指導要領の最低基準性が明確にされた今日，証明指導における発展的な内容への対応を検討する必要がある。このような問題意識から本稿は証明の諸機能の一つ「発

見」に焦点をあて，「発見」の意味することを明らかにすることを目的とする。

本稿では，この証明の機能としての「発見」の意味を明らかにするにあたり，「発見」を設定する際の根拠に着目し，「発見」を類型化する。

2．学校数学における証明の機能

証明の機能については，これまで様々な文脈で言及され研究されてきた。証明の機能は，1996年に刊行された『*International Handbook of Mathematics Education*』においても Hanna & Jahnke によって取り上げられている[8]。以下では，証明の機能に関わる代表的な先行研究として，ハンナ(Hanna, G.)および De Villiers を取り上げ，どのような機能を設定し，どのような観点から証明の機能にアプローチしたのかを整理する。

ハンナ(Hanna, 1989)[9]は，シュタイナー(Steiner, M., 1978)[10]の研究をもとにして「命題が真であることを示す」ことと「なぜ命題が真であるのかを示す」という２つの機能を設定した。これらのうち，ハンナは「なぜ命題が真であるのかを示す」機能を重視し，証明を，「命題が真であることを示す」機能だけをもつ証明(proofs that prove)と，「命題が真であることを示す」ことと「なぜ命題が真であるのかを示す」という２つの機能を併せもつ証明(proofs that explain)に分けることを提案している。このようにハンナは証明を比較する視点として証明の機能を設定している。

ハンナは，「なぜ命題が真であるのかを示す」機能を重視する際には，「計算によるもの」，「図解による証明(demonstration)」，「前形式的証明」，「インフォーマルな証明」，「厳密な証明」といった形式は，学年段階や学習指導の内容に応じればよい旨を述べている(Hanna, 1995, p. 47)。すなわち，前提が図の意味であっても，その前提から演繹的な推論で命題が導かれていればよいことを明言している。これは，彼女の1983年の『*Rigorous proof in mathematics education* (数学教育における厳密な証明)』[11]の成果を踏まえたものと考える。彼女は，『*Rigorous proof in mathematics education*』において，「中等学校における学校数学のカリキュラムは，数学(the science of mathematics)を反映すべきである」という信念を検討課題として取り上げた。この信念は，反映すべきかどうかが問題ではなく，反映すべきものは何かという点が特に問題である。そこで，ハンナ(1983)は，アメリカ合衆国およびカナダといった北米地域において数学教育現代化運動期に強調された形式論理にもとづいた証明は，数学を反映したものであるかどうかを検討した。その結果，数学においても，厳密さの基準がないこと，及び証明を受け入れる際に形式論理以外の要素が決定的な役割を果たしていることを根拠に，形式論理にもとづいた証明は，数学を反映したものではないという結論を導き出している。

なお，ハンナ (1989) は，証明の創造的な側面について述べてはない。後述するが，ハンナが引用したシュタイナーの主張を検討すると，ハンナは「なぜ命題が真であるのかを示す」ことに証明の創造的な側面の意味を含ませている可能性がある。

今日，証明の機能にあらためて着目する理由として先行研究が挙げることは，数学や数学教育でのコンピュータソフトウェア利用の増加にともない，普遍妥当性を確かめるといった「立証」の機能のメリットが薄れてきたということである(Hanna, 1998；De Villiers, 1998, 1999等[12])。1976年にアッペルとハーケンが，四色問題を，約2000の場合に分け，コンピュータプログラムを利用して解決(証明)したことも遠因であろう。

証明がどんなことに役立つのかがあらためて着目された理由に挙げられているコンピュータソフトウェアの一つに，*Dynamic Geometry Software* (以下 *DGS* と略記)と呼ばれる，図形を連続的に変形することを可能にしたソフトがある。*DGS* によって，生徒は，正確に図を描き測定するなどの「擬似経験的な方法」(quasi-empirical method: De Villiers, 1990, p. 23)を，即座にまた手軽に用いることができるようになってきているのである(De Villiers, 1998, p. 377)。

こうした *DGS* の特徴をいかして推測の普遍妥当性について確信を得た生徒は，測定値という帰納的な証拠を証明ととらえるとの報告がある(Chazan, 1993)[13]。証明の機能としての「立証」を取り上げるだけでは，推測の普遍妥当性について確信を得た生徒の多くは，証明しようとする必要性をもちにくいというのである。これとは逆に，生徒たちは，帰納による検証は単に確信をもたらすだけだと認め，説明することへの好奇心をそそることが比較的簡単であることを指摘する研究もある(Schumann & De Villiers, 1993)[14]。最寄りのことは数学者からも指摘されている。リーマン予想を支持する，納得できる帰納的な証拠があるにもかかわらず我々は証明を必要としていることを，デービスとヘルシュは指摘する(P. J. Davis & R. Hersh, 1983, p. 368)[15]。De Villiers やデービスらの見解は，考察していることが「擬実験」(quasi-experiment: Polya, 1954a, p. 5)[16]やコンピュータを用いて得た納得できる証拠によって支持されていても，推測と既知の結果と

の関係の有無やどのような関係があるのかは明示されないため，証明への動機が強まるということである。

このような問題意識から，De Villiers, M. (1990)[17]は，ベル(Bell, A. W., 1976)[18]の研究を発展させて5つの証明の機能を設定した[19]。5つは，命題が真であることを示す「立証」，なぜ命題が真であるのかについての洞察をもたらす「説明」，様々な結果を公理や定義や定理からなる演繹的な体系に位置づける「体系化」，新しい結果を発見や発明する「発見」，数学的な知識を伝達(transmission)する「コミュニケーション」である。De Villiers は，正確な作図と測定等と証明との対比によってこれらの機能を設定している。なお，De Villiers は，これらの各機能に焦点をあてるためのワークシートからなるテキストを，1999年に刊行している[20]。このテキストは，*DGS* の一つであるスケッチパッドの使用を前提としたものであり，機能ごと数種類用意された生徒用ワークシートと，それぞれのワークシートについての教師用の参考資料(Teacher Note)で構成されている。

De Villiers は，「きわめて純粋に演繹的なマナーで新しい結果が発見／発明された例が数学史には数多くある」(De Villiers, 1990, p. 21)ことを指摘する。それゆえ，De Villiers は「数学において概念や命題は，証明が提出される前に納得され定式化されている」という認識を批判する(De Villiers, 1990, p. 21)。そのために，証明は新たな結果を発見／発明することに貢献できることを強調して「発見」という機能を設定したと考えられる。

De Villiers は，証明の機能としての「発見」を解説する際，「たこ型の隣り合う辺の中点を線分で結ぶと長方形になる」ことの証明を例に挙げる。De Villiers は，この証明を振り返ることにより，「対角線が直交する四辺形の隣り合う辺の中点を線分で結ぶと長方形になる」へと一般化できると主張する(De Villiers, 1990, p. 21；1998[21], p. 380)。De Villiers は，このような発見を「演繹的な一般化を経た演繹的発見」(deductive discovery via deductive generalization: De Villiers, 1990, p. 22)と呼ぶ。この事例は，証明の機能としての「発見」を説明するためにその後も用いられてきた[22]。また，De Villiers は，「四辺形の隣り合う辺の中点を線分で結ぶと平行四辺形になる」ことの証明から，中点連結定理のもう一つの性質を用いて「四辺形の隣り合う辺の中点を線分で結んでできる(平行)四辺形の周の長さは，元の四辺形の2本の対角線の和に等しい」ことを演繹的に導く例も挙げる(De Villiers, 1999, p. 63)[23]。以上のように，De Villiers が設定する「発見」は，命題が真であることを保証している証明の前提に着目し，演繹的な推論によって新しい命題を生成するというものである。したがって，「演繹的な一般化」を含めて幅がある概念である。

3．学校数学における証明の機能としての「発見」

数学における証明の機能の1つを指す用語としての「発見」は，De Villiers (1990)[24]によって「新しい結果を発見や発明すること」を意味するものとして導入された。

同じ趣旨のことはこれまでにも論じられてきていた。例えば，「正しいことの確認に止まらず，直観や帰納推理が及びにくい場合でも，論証により既知の基本性質から未知の性質を導き得る」(和田，1958，p. 250)[25]，「ある命題の真なることを示す証明をした後で，もう一度証明を振り返って，真なることを保証する要素と命題との関係を調べてみるべきである。そうすることによって，証明は厳密になり，命題をより一般的にしたり，新しい問題を発見したり」(杉山，1986，p. 134)[26]できるなどである。

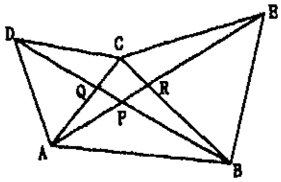
上述の「発見」の内容は，生徒が何もないところから新しいことを見つけるという趣旨ではない。生徒が証明の分析を通して新たな定理を生成することである。ここで証明分析とは，証明で明らかにした前提と命題との関係を調べること(杉山，1986)や，反例によって論駁される前提を見つけこの前提を命題に条件として組み込むこと(Lakatos, 1976)[27]を指す。しかし，「発見」の例示には，質の異なる内容が含まれている。この質の違いは，「発見」の機能を活用する文脈の違いともいえ，証明分析の視点に依存すると考える。そこで，証明の機能としての「発見」を設定する根拠を分析し，証明分析の視点を抽出する。以下では，図形に関する命題を想定し，典型として4つの視点を設定する。

3.1　命題における辺や頂点が属す集合への着目

数学では，命題が一般の言語をもって述べられ，命題が図について述べられ，証明に必要な補助線が述べられ，図について証明が展開される[28]。中学校数学においても，命題が一般の言語で述べられ，その命題を証明すべく命題を図について述べ[29]，証明を構成する。しかし，中学校数学においては，命題が一般の言語で述べられたものを出発点としてその証明を構成するばかりでなく，命題が図について述べられたものを出発点としてその証明を構成することも扱われる[30]。

図について展開された証明を，命題を一般の言語でもって述べたものの証明とするには，証明で明らかにした前提をもとに，命題における頂点，辺，角など図形の構成要素が属す集合を判断しなければならない[31]。このとき，生徒は図について展開された証明を通してそれまで想定していなかったより洗練された命題を生成する場合がある。典型的なものは，その図についての命題に対して一般の言語でもって述べられた命題を生成するときや，一般の言語でもって述べられた命題に対してより洗練された命題を生成するときである。

例えば，命題「右の図のように，三角形 ABC の外側に，二つの正三角形 ACD，BCE をつくり，頂点 A と E，D と B をそれぞれ結ぶとき AE＝DB である」とその証明を取り上げる。この命題に対する証明は以下のようになる。



△ ABC について 3 つの点の位置を検討するのは煩雑

> 証明　△ ACE と△ DCB において，
> △ ACD は正三角形だから，AC＝DC……①
> また，△ BCE も正三角形だから，CE＝CB……②
> △ ACD と△ BCE は正三角形だから，
> ∠ACD＝∠BCE　……③
> ∠ACE＝∠ACB＋∠BCE，
> ∠DCB＝∠ACD＋∠ACB…④
> ③，④から，∠ACE＝∠DCB　……⑤
> ①，②，⑤から，2 辺とその間の角が，それぞれ等しいので，△ ACE≡△ DCB
> よって，AE＝DB

なため，点 B，C は固定し，点 A の位置に着目して「図のように」の意味を検討する。例えば，直線 AC 上に点 A'をとる。証明において，①～③は正三角形について一般に成り立つ。したがって，④が成り立つ限り AE＝DB が成り立つ。④は∠ACB の大きさに依存せずに成り立つ。以上の理由により，点 A と A'を同一視できる。点 A'を，点 C を中心とする半径 AC の円周上にとった場合も同様である。それゆえ，上述の証明によって，点 A は，図の点 B，C に対して△ ABC が三角形となるような任意の位置について AE＝DB であると判断することができる。したがって，「右の図のように点 B，C をとり，三角形 ABC の外側に，二つの正三角形 ACD，BCE をつくり，頂点 A と E，D と B をそれぞれ結ぶとき AE＝DB である」という，より洗練された命題とすることができる。同様に，点 B，C それぞれの位置に着目して「右の図」の△ ABC について検討すれば，△ ABC は任意の三角形でよいと判断することができる。さらに，正三角形とされている△ ACD 及び△ BCE について，点 D あるいは点 E の位置を検討することも想定される。

以上のように，命題における頂点，辺などが属す集合は，証明で明らかにした前提に基づいて判断される。このような判断は，一方で，前提そのものを問い直す契機となる。証明で明らかにした前提を問い直すことによる数学的発見の論理を提唱しているのがラカトシュ（Lakatos, I.）である。

3.2　証明で明らかにした前提の問い直し

ラカトシュは，命題と証明の数学における提示の仕方を批判する。ラカトシュの著作『証明と論駁』[32]には，補遺として「演繹主義対発見的（heuristic）アプローチ」が収録されている。この冒頭で，ラカトシュは，命題と証明の「演繹主義的スタイル」による提示の仕方について以下のように述べる。

> ユークリッド的方法論は一定の拘束的な表現のスタイルを発展させてきた。私はこれを「演繹主義的スタイル」と呼ぶ。このスタイルでは苦心の公理，補題，および（あるいは）定義のリストから始められる。公理と定義はしばしば不自然に見え，煙にまかれてしまうほど混み入っている。これらがどうして混み入っているのかは決して語られることはない。公理と定義のリストの後には，注意深く表現された定理が続く。これらの定理にはたくさんの条件がつく。誰かがそれらの定理を推量したことがかつてあったなどとはとても思われない。定理の後には証明がでてくる（Lakatos, 1976, p. 142）

ラカトシュは，「演繹主義的スタイル」による提示を，「証明生成概念」（proof-generated concepts: Lakatos, 1976, p. 89）の発見へと導いた大局的反例を隠し，「証明生成概念をその‘証明上の前身’から引き離し，出し抜けに不自然かつ権威主義的方法で提示する」（Lakatos, 1976, p. 144）と特徴づける。これに対して，「発見的スタイル」による提示は，証明生成概念の発見の要因に注目をあびせ「新しい概念の誕生をうながした‘論理’を強調する」（Lakatos, 1976, p. 144）と特徴づける。『証明と論駁』の副題目『数学的発見の論理』は，この意味で用いられている。そして，ラカトシュは，この数学的発見の論理として，「証明と論駁の

方法」(method of proofs and refutations: Lakatos, 1976, p. 64)を提案する。

ここで,「大局的反例」(global counterexample: Lakatos, 1976, p. 11)とは，推測自体を論駁するものである。これに対して,「局所的反例」(local counterexample: Lakatos, 1976, p. 10)は，推測自体を論駁するのでなく,証明における前提(ラカトシュの用語では「補題」(lemma: Lakatos, 1976, p. 10))を論駁するものである。そして,「証明と論駁の方法」とは，大局的反例が，局所的反例となるような「有罪補題」(guilty lemma: Lakatos, 1976, p. 34)を，証明を分析することによって見つけ，この顕在化した「有罪補題」を，推測の中に条件として組み込むものである(Lakatos, 1976, p. 50)。ここでの「有罪補題」は，証明を構成した際には見落とされていた[33]か，誤認されていたものである。この「証明と論駁の方法」は,「補題組み込み法」(method of lemma-incorporation: Lakatos, 1976, p. 33)とも呼ばれる。

ラカトシュは，この「証明と論駁の方法」の数学史上の起源を，1847年のザイデル(P. L. Seidel)の論文による一様収束の生成におく(Lakatos, 1976, p. 136)。ザイデルは，推測「連続関数の任意の収束級数の極限は連続である」に対するコーシー(A. L. Cauchy)による証明(1821年)を分析することで一様収束の概念をうみだした。それゆえ，ラカトシュは，もう一つの補遺「証明と論駁の方法のもう一つのケーススタディ」において，一様収束という証明生成概念を発見的スタイルで紹介することを試みる(Lakatos, 1976, pp. 127-141)。

ラカトシュは,「証明と論駁の方法」を「最終性」(finality: Lakatos, 1976, p. 63)の追究の方法と位置づけている。ただし，ラカトシュは，最終性を義務としてではなくありがたい賞与として受け入れるよう提案する(Lakatos, 1976, pp. 64-65)。まず,「最終性」について，ラカトシュは以下のように述べる。

> 僕が追究するのは*確実性*(*certainty*)のみではありません。その*最終性*(*finality*)もです。定理は確実でなければならない−その領域*内*ではいかなる反例も存在してはならない。しかし，それだけではまだ*最終*ではありません。その領域*外*にはどんな例があってもならないのです。私は，例と反例の間に分割線をひきたいのです。少数の例からなる安全領域とそれ以外との間や，例と反例の混成袋とそれ以外との間に分割線をひくのではないのです。(Lakatos, 1976, p. 63)

このように，ラカトシュがいう最終性とは，2つの条件「領域内には反例が存在しない」,「領域外には例がない」を満足することにより特徴づけられている。ラカトシュは,「一つの証明と複数の論駁の方法」(method of proof and refutations: Lakatos, 1976, p. 40)では，推測の批判的改良のために十分でないため，証明も論駁も複数の「証明と論駁の方法」(method of proofs and refutations: Lakatos, 1976, p. 64)を強調する。

3.3　対象が属す集合の補集合への着目

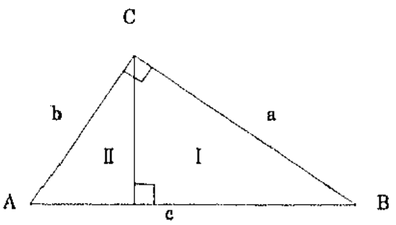
「発見」という用語は用いていないものの，一つの定理の証明から新たな定理を得るという，証明の創造的な側面に言及しているものがある。「なぜ命題が真であるのかについての洞察をもたらす」という証明の機能である。この機能は，その名称は異なるものの，ハンナはexplanation(説明)[34]と呼び，ベルは，illumination(照明)[35]と呼び設定している。ここでの「なぜ」に答えることについて，ハンナはシュタイナー(Steiner, M., 1978)[36]による以下の一節をもとに「命題が述べる対象に固有な性質に言及する」ことであるとする。

> 説明のための証明(explanatory proof)は，命題において述べられた実体(entity)あるいは構造がもつ固有な性質に言及する。この証明からは，その結果がその性質に依存していることは明らかである。もし我々が証明において，同じ領域の他のもの(object)に換えればその定理が成り立たなくなるのは明らかなはずである。さらにいえば，我々がその性質を多様にすれ(vary)ばそれに応じてどのように定理が変わるのかがわかるのである。(Steiner, 1978, p. 143)

シュタイナーによる「固有な性質」の意味することは,「ある性質が，仮定した実体(entity)あるいは構造にとって，そうした実体あるいは構造についてのある族(family)あるいは領域においてユニークであることである」(Steiner, 1978, p. 143)とされる。ただし，シュタイナーは「固有な性質」は相対的な概念であり，同一のものでも多様に特徴づけられることを指摘し，18という数を例に挙げ，17に1加えた数とすることもできるし，素因数分解で2×3^2とすることもできると指摘する。

シュタイナーは，三平方の定理に対する直角三角形を利用した証明を取り上げ,「固有な性質」について論じている(Steiner, 1978, p. 144)。三平方の定理とは，直角三角形の辺の長さについて，斜辺をcとすればa^2+

$b^2=c^2$という関係が成り立つというものである。



直角三角形において斜辺に対応する頂点から，斜辺へ垂線をひく。この垂線によって分けられた三角形をIとIIとする。三角形IとIIは全体の三角形に相似であり，互いに相似である。また，全体の三角形は，直角三角形の斜辺c上に構成されたものと見なせる。したがって，三角形Iの面積＋三角形IIの面積＝全体の三角形の面積となる，3組の相似な図形を手にすることになる。相似な平面図形の面積は，対応する辺の二乗に比例するから上の図の直角三角形において構成された相似な図形は，ka^2, kb^2, kc^2で表される面積をもつ。よって$\mathrm{ka}^2+\mathrm{kb}^2=\mathrm{kc}^2$が成り立つことから，三平方の定理$\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2=\mathrm{c}^2$が導かれる。

三平方の定理についてのこの証明を，シュタイナーは，直角三角形を「お互いに相似かつ全体の三角形とも相似な２つの三角形に一意に分解できる」(Steiner, 1978, p. 144)と特徴づける。シュタイナーは，この証明に対して，「三角形の最も長い辺である c，あるいは斜辺である c に対応する直角三角形の頂点を変形させ(vary)」てみる。さらに，直線AB上に点HとIを，それぞれ∠BCH＝∠CAB, ∠ACI＝∠CBAとなるように線分 x および y を引いて，以前のように三角形を分解してみる(図1)。こうしてできた三角形IとIIは，まだお互いに相似であり，全体の三角形とも相似である。しかし，「頂点の角度を *90°*から *180°*の間で変化させる(vary)とき，三角形IとIIは，全体を覆うことができない」。つまり c^2は△CHIの面積分だけ a^2+b^2より大きくなる。一方，*90°*から *0°*へと減らしたときには，c^2は△CHIの面積分だけ a^2+b^2より小さくなる。それゆえ，「(正あるいは負の)差を計算できるものの，あらゆる三角形について，その三角形の辺上に構成された正方形の和と，斜辺上の正方形との関係を求めてみると一致しない」。以上の結果から，シュタイナーは，「直角三角形の固有な性質は，単に x と y が一致することである」(Steiner, 1978, p. 144)と指摘する。

以上がシュタイナーによる，三平方の定理の直角三角形を利用した証明における，直角三角形の「固有な性質」についての説明である。したがって，先の「命題において述べられた実体あるいは構造」とは，この場合は，三平方の定理における直角三角形を指すものと考えられる。また，「実体あるいは構造についてのある族あるいは領域」は，三角形を指すと考えられる。さらに，「もし我々が証明において，同じ領域の他のものに換えれば」とは，直角三角形を，鈍角三角形や鋭角三角形に換えることを指すと考えられる。

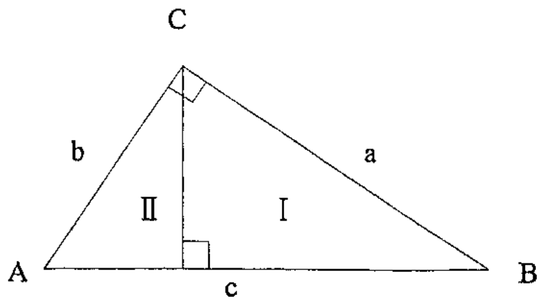


図１　鈍角三角形を，お互いに，かつ全体の三角形とも相似な２つの三角形に分解

さて，シュタイナーが指摘する「我々がその性質を多様にすればそれに応じてどのように定理が変わるのかがわかる」(Steiner, 1978, p. 143)ということを，三平方の定理の証明について行ったことをあてはめて述べてみる。

直角三角形を鈍角三角形にかえれば，証明において「x と y が一致」から「x と y が一致しない」にかわる。それに応じて $a^2+b^2=c^2$という関係が，三角形IとIIで元の三角形を覆えないから，$a^2+b^2\neq c^2$とわかる。あるいは，それに応じて $a^2+b^2=c^2$という関係が，三角形IとIIで元の三角形を覆えないから△CHIの面積分だけ c^2は大きくなるから $a^2+b^2<c^2$とわかる。

つまり，「説明のための証明」(explanatory proof: Steiner, 1978, p. 143)は，対象(直角三角形)が属す集合(三角形)の補集合(鈍角三角形や鋭角三角形)に考察の対象を移すときに，どんな性質がどのように影響するのかを調べるときに役立つものであるといえよう。これは，シュタイナーが以下のように論じていることからも裏付けられる。

> 固有な性質を変化させることを通しての一般化可能性(generalizability)が，証明を説明に役立つものとするのである。証明が説明に役立つものとなるのは，単に，普遍性ではないのである。(Steiner, 1978, p. 146)

ただし，「固有な性質を変化させる」の表す意味には注意が必要である。最初から固有な性質だとわかって

いるのではなく，対象が属す集合をもとに補集合を考えることによって明らかになるのである。それゆえ，命題が述べる対象しか想定していない場合には，固有かどうかの判断はつかない。したがって，シュタイナーが考えていた「説明」とは，ただ証明しようとした命題について述べているものではないことになる。実際，シュタイナー(1978)は，Proofs あるいは Theorems と複数形を用いて次のように述べる。

> 説明していること(explanation)は，ただ単に，一つの証明と一つの定理との関係ではない。むしろ，証明の配置(an array of proofs)と定理の配置(an array of theorems)の関係である。ここでは，証明(proofs)は，上述のように"変形(deformation)"することによってお互いに一方から他方が得られる。(ただし，これらの配置において，各々の証明は，それぞれの定理を"説明"している。)(Steiner, 1978, p. 143)

シュタイナーは，三平方の定理をもとに，鈍角あるいは鋭角三角形についての命題および証明を生み出すことを「変形」という用語で表現している。この主張の後半部分でシュタイナーは，一つの定理の証明から新たな定理を得るという，証明のもつ創造的な側面に言及している。もっとも，「変形」という用語に表されるように，見いだす命題は，元の命題と類比な関係にある命題や，そうした類比な命題を統合する一般的な命題に限定される。それゆえ，まったく新しい命題を見いだすということではない。シュタイナー(1978)がこのような証明のもつ創造的な側面に着目していたことは，以下の数学的帰納法についてのコメントからもうかがえる。

> 我々は，新しくて，しかも関連する証明を，性質を変化させ(varying)再び演繹する(reasoning)ことによって生成するようにしなければならない。数学的帰納法による証明は，通常，変形できるものではない。なぜなら，演繹する前に，定理をあらかじめ推測しておかなければならないからである。(Steiner, 1978, p. 151)

これまでの検討から，シュタイナーは，対象が属す集合の補集合に考察の対象を移した後に，証明が役立つことを指摘していると考える。ただし，「"変形"は，機械的な置き換えではなく，証明のアイディアを不変なままに保ちつつ，証明をつくり直す(reworking)ことである」(Steiner, 1978, p. 147)というように，機械的に置き換えればただちに結果が得られるものでないことに留意したい[37]。

以上の，補集合への着目という視点は，3.1および3.2で述べた証明で明らかにした前提に基づいた定理の洗練の限界を補うという意味で重要である。3.1および3.2の視点は，前提が成り立つ限りにおいて定理を洗練しようとする際にメリットがある。前提が成り立たない場合については，3.1および3.2の視点は意味をなさない。

3.4　系への着目

De Villiers が例示した，「四辺形の隣り合う辺の中点を線分で結ぶと平行四辺形になる」ことの証明から，中点連結定理のもう一つの性質を用いて「四辺形の隣り合う辺の中点を線分で結んでできる(平行)四辺形の周の長さは，元の四辺形の2本の対角線の和に等しい」ことを演繹的に導く例は，系を導くものといえる。3.1で例示した命題と証明において，△ACE≡△DCB であることから△ACE＝△DCB を導けば，系に着目したものとなる。こうした系への着目は，素朴な定理を洗練することに関心がある3.1～3.3の視点と趣が異なるものである。

4.　おわりに

本稿では，学校数学における証明の機能の研究において，漠然ととらえられてきた「発見」の意味することを検討した。

第一に，これまで先行研究において設定されてきた「発見」には，典型として4つの視点から特徴づけられる意味が含まれることである。

第二に，ハンナが「なぜ命題が真であるのかを示す」という証明の機能を設定する際の根拠となったシュタイナーの主張には，一つの定理の証明から新たな定理を生成するという証明のもつ創造的な側面が含まれていることである。

いずれにしても，証明の機能としての「発見」をユークリッド原論をはじめ数学の雑誌等に記載されている定理とその証明に対して行うことは困難である。むしろ，こうした雑誌等に記載される以前の定理に対して，素朴な定理を洗練するときに「発見」は必要となる。それゆえ，学校数学においてこそ証明の機能としての「発見」を用いることが相応しい。

今後は，「発見」の意味にもとづいて条件を制御し，生徒が証明の機能としての「発見」を活用する際に想定される困難[38]を抽出し，その困難を解決する方策を構想する必要がある。

註および引用・参考文献

1）文部省（1959）．*中学校数学指導書*．明治図書．

2）和田義信（1958）．*中学校学習指導要領の展開 数学科編*．明治図書．

3）小関煕純（編）（1987）．*図形の論証指導*．明治図書．

4）Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

5）Martin W. G. & Harel G. (1989) Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.

6）Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conception of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405.など．

7）例えば，日本では，平成10年3月に実施された中学生4人×4グループについての実験結果にもとづく宮崎樹夫(1998, 1999, 2000, 2002)の研究がある．海外においては，De Villiers (1998)の研究がある．宮崎樹夫，伊藤秀雄，勝野学，北澤嘉孝，黒沢浩二，佐々木英明(1998)．中学校数学における証明の機能の活用に関する研究： 発見の機能に焦点をあてて，*日本科学教育学会研究会研究報告* 12(6)，1-6．宮崎樹夫（1999）．学校数学における証明の機能に関する研究：発見の機能活用の必要条件に焦点をあてて．*第32回数学教育論文発表会論文集*，203-208．Miyazaki, M. (2000). What are essential to apply the discovery function of proof in lower secondary school mathematics? *Proceedings of 24th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.1-8). Hiroshima: Hiroshima University. 宮崎樹夫(2003)．中学校数学において，生徒が証明の発見機能を活用するための諸条件に関する研究．*科学教育研究* 26(5)，358-369．De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

8）このハンドブックにおいてHanna & Jahnkeは，経験科学と数学との関わりから証明の機能について検討する．その結果，経験科学における数学的な証明は，ある理論の初期において，証明された命題が真であると立証することよりも，命題が導かれた前提の信憑性，蓋然性，あるいは有益性を確かめるのにより役立つかもしれないことを指摘し，機能を追加している(p. 896)．
Hanna, G. H. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving, In Alan J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

9）Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogaiski & M. Artigue (Eds.), *Proceeding of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp.45-51). Paris: Laboratoire PSYDEE.

10) Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34, 135-151.

11) Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Ontario, Canada: The Ontario Institute for Studies in Education.

12) Hanna, G. (1998). Proofs as explanation in geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2&3), 4-13. De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers. De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof*. Emeryville: Key curriculum press.

13) Chazan, D. (1993). High school students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 359-387.

14) Schumann, H. & De Villiers, M. (1993). Continuous variation of geometric figures: interactive theorem finding and problems in proving. *Pythagoras*, 31, 9-27.

15) Davis, P. J. & Hersh, R. (1983). *The mathematical experience*. London: Pelican.

16) Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning, vol.1: Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.

17) De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

18) Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

19) De Villiersが共同研究者として参加した報告書(1987)には，Bell (1976)が設定した「立証あるいは正当化」,「照明」,「体系化」の「3つのセンスをそれぞれ立証，説明，体系化と呼ぶことにする」という記述が見られる．1987年に出版されたが，De Villiersにより1997年に英訳され，Web上で公開されている．

Human, P. G., Nel, J. H., De Villiers, M. D., Dreyer, T. P., & Wessels, S. F. G. (1987). *Alternative instructional strategies for geometry education: A theoretical and empirical study, Final report of University of Stellenbosch Experiment in Mathematics Education (USEME)-project*: 1977-78. Retrieved October 10, 2001, from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/usewo1.htm.

ただし，ベルの設定した照明(illumination)を，説明(explanation)へと用語を改めた理由については，解釈が試みられているが現時点ではわからない．

宮崎樹夫(1993)．学校数学における証明の意義に関する考察：証明の機能に焦点を当てて．*筑波大学教育学系論集* 18(1)，155-169．

20) De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof*. Emeryville: Key curriculum press.

21) De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

22) 宮崎樹夫(1993)．学校数学における証明の意義に関する考察：証明の機能に焦点を当てて．*筑波大学教育学系論集* 18(1)，155-169．など．

23) 前掲書20)．

24) 前掲書17)．

25) 前掲書2)．

26) 杉山吉茂 (1986)．*公理的方法に基づく算数・数学の学習指導*．東洋館．

27) Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

28) 例えば，菊池大麓(1897)による説明は次の通りである．「通例教科書ニ於テハ先ツ定理ヲ汎ク一般ノ言語ヲ以テ述フ，之ヲ一般ノ演述(general enunciation)ト云フ；次ニ圖ニ就テ之ヲ述フ，之ヲ圖ニ就テノ演述(particular enunciaton)ト云フ；次ニ證明ニ必要ナル作圖(construction)ヲ指示シ；次ニ之ヲ證明ス(demonstaration)」(p.48)

菊地大麓 (1897)．幾何學講義，第一巻．大日本圖書。

29) 命題を図について述べる際には，一般性に配慮して図をかいたり記号をふったりする必要がある．山下國広(1987)は，一般の言語で述べられた命題を証明すべく図について述べた命題を生成することを「記号化」という用語で表す．この「記号化」は「言葉だけで述べられている命題(以下，これを一般命題という)を，A，B，C，……，//，⊥，∠，……などの記号を用いて表した命題(以下，これを特述命題という)に直すこと」(p. 23)と説明されている．ただし，この説明および，調査結果の分析において，一般性に配慮する旨は明示されていない．

山下國広 (1987)．子どもの実態．小関熙純 (編)，*図形の論証指導* (pp.22-56)．明治図書．

30) 一般性に配慮して図をかいたり記号をふったりすることが困難な生徒もいるため，教育的な配慮から，教科書等では命題が図について述べられ図について証明が展開されることがある．

清水静海(1994)．論証．中学校数学科教育実践講座刊行会(編)．CRECER，第6巻 (pp. 204-236)．ニチブン．

31) 山下國広 (1987)は，「文章化」という用語を当てている．「文章化」の意味することは，「証明した内容をとらえて，一般命題の文章に直すこと」(p. 23)である．ただし，この説明および，調査結果の分析において，図について述べた命題の証明で明らかにした前提をもとに命題に述べられた図形の構成要素が属す集合を判断する旨は明示されていない．前掲書29)．

32) 前掲書27)．

33) 「隠れた補題」(hidden lemma: Lakatos, 1976, p. 43)と，ラカトシュは呼ぶ．

34) 前掲書9)．

35) 前掲書18)．

36) 前掲書10)．

37) このような対象が属す集合の補集合に着目することを含め，条件がえを学習されうる一つの方略として提案しているのがブラウンとワルター(S. I. Brown & M. I. Walter)である．問題設定の研究で知られ

るブラウンとワルター(S. I. Brown & M. I. Walter)による「与えられたものに挑戦する」(Challenging the given: Brown & Walter, 1990, p. 15)という概念は，「与えられたものを受け入れる」(Accepting the given: Brown & Walter, 1990, p. 15)という概念とともに，問題設定の２つの相として考案されたものである．ブラウンとワルターは，「与えられたものに挑戦する」問題設定に焦点をあて，「与えられたものに挑戦するという概念を，学習されうる一つの方略に仕立て上げ」，その方略を「表すために What-if-Not(そうでなかったらどうなるか)という表現を造り上げた」(Brown & Walter, 1990, p. 15)．なお，シュタイナーとブラウンらは，論文上では参照など行っていない．また，両者において交流があったのかどうかについては現時点では判断できていない．

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing* (second edition). Lawrence Erlbaum Associates.

38) 例えば，補集合に着目するためには，対象となっている集合を含む全体集合を意識しなければならない．

A Study on the "discovery" as a Function of Proof in School Mathematics

Kimiho Chino

The purpose of this study is to analyze the meaning of "discovery" as a function of proof in school mathematics. Especially, the focus is put on the idea that enables us to make new statement as a theorem with a statement and its proof.

This analysis is done by examining the basis which sets up "discovery". Especially, the focus is put on the statements in geometry, and the differences in quality of "discovery" are studied.

The following four viewpoint were specified to discuss the meaning of "discovery": (a) the set to which the structural elements of a figure belong, (b) examination of premises, (c) the complement of a set, (d) a system. Based on the results obtained by the study, imprication for "show why the statement is true" (Hanna, 1989) and tasks for the future are also made.