中学校数学における証明の役割に関する一考察

―証明による理解促進に焦点を当てて―

牧 野 智 彦

1．はじめに

現在の学校数学において我が国のみならず，生徒は証明を学習する。我が国における中学校数学においても，筋道を立てて説明する表現力や論理的思考力の育成の点から，証明は重要な内容として位置づけられている[1]。

にもかかわらず，我が国の証明に関する学習状況は必ずしも望ましいとは言えない。例えば，証明を書くことができない，証明の必要性を感じない，証明の意義を理解していない，などの問題がある[2]。これらは，我が国に限らず，海外においても指摘されている[3]。これらの問題点の中で，筆者は，証明の必要性や意義についての問題に着目する。筆者は，生徒が証明を意味ある活動と捉えることを望むからである。

ところが，現在の証明の学習指導では，生徒に証明を意味ある活動として捉えさせる機会が少ないように思える。清水(1994)は，図形の証明に関するこうした証明の学習状況を生んでいる背景には，証明は学習活動や探究活動における方法であるという視点が見失われ，証明の形式に拘泥してしまったことがあるのではないかと指摘している[4]。これは，教師自身が証明を学習活動の方法とは捉えていないこと，また証明が理解を促進する方法であると捉えていないことを意味している。他方，Knuth(2000)の行った中等学校の数学教師の証明の役割に関する調査[5]は，証明の役割として理解促進があると捉えている教師は18名中0名という結果を示している。この結果に対して，Knuth は，「数学における証明の第一の役割はある結果の正しさを立証することであると多くの数学者は認識している。しかし，おそらく等しく重要なものとして，数学者は理解を促進(*fostering*)するという証明の役割を認識している」[6]と述べ，教師の証明の役割に関する認識に問題があるとしている。これは，教師の証明の役割に関する認識が偏っていることを示唆している。

一方，小関(1992)は，中学校第2，3学年において論証指導が行われているにもかかわらず，生徒の平行四辺形の認知発達が望ましくないことを述べている[7]。また，松尾(2000)は，中学校第2学年の証明の学習指導では，実際，平行四辺形の性質や平行四辺形になるための条件などを用いて証明を行うことに重点が置かれ，証明の学習指導が証明の応用として捉えられており，四角形の包摂関係の理解は学習指導上さほど重要視されていないことを指摘している[8]。このように，図形教育の点からも，証明の学習指導において，生徒の図形の概念理解に必ずしも証明を機能させていないことが指摘されているのである。

これらの現状から，中学校数学において，証明を生徒にとって意味のある活動とするために，本研究は，「理解促進」という証明の役割に着目する。

学校数学において鍵となる証明の役割は理解促進であることは，デービス＆ヘルシュ(1986)[9]，Hanna(1995, 2000)[10]そして Hersh(1993)[11]によって主張されている。にもかかわらず，彼らは，理解を直観的，経験的にしか捉えておらず，「理解促進」の役割を詳細に説明しているとは言えない。例えば，Hersh は，「理解の観念は正確でもないし，正確にされそうもない。我々は'理解すること'が何を意味しているのかはわからないが，'理解'を育成するための指導をすることができる。なぜなら，たとえ'理解'が何であるかを正確に言うことができないとしても，'理解'を認めることはできるからである」[12]と述べている。また，Hanna によれば，「'数学的理解'という言葉は何か捕らえ所のないものである。…しかし，数学者はそのようなものがあることを知っている」[13]のである。他方，デービス＆ヘルシュは，「証明は，第一に，物事の真髄を顕わにすることによって理解を促進させる」[14]と説明している。ところが，物事の真髄を捉えることが理解であるとは言っても，物事の真髄とは何であるかということ，また，物事の真髄を捉えるためにどのように証明が関与しているかということについては明確になっていない。この点からも，

デービス&ヘルシュの言明は，一般的であり，不十分と言わざるを得ない。

このように先行研究は，理解促進という証明の役割を指摘しているにもかかわらず，証明と理解促進の関係は必ずしも明らかになっていない。理解促進を視点とした証明の学習指導の在り方を検討するためには，証明と理解促進の関係をより詳細に捉え，それらのメカニズムを解明する必要がある。

そこで，本稿では，証明と理解促進のメカニズムを明らかにすることを目的とする。そのために，まず，第一に，証明による理解促進に関する先行研究者の主張を整理し，問題点を指摘する。そして，数学教育研究における理解促進に関する先行研究を整理し，理解促進がどのように捉えられているかを解明する。第二に，「統合」という視点から，証明による理解促進を定義する。第三に，第二の成果を踏まえ，理解促進を導く証明活動の特性に関する先行研究の主張を整理し，我が国の中学校の図形領域の事例に即して，理解促進を導く証明活動の特性の実際を具体的に解明する。

2．理解促進

2.1 Gila Hanna による理解とその促進の問題点

Gila Hanna は，1950年代から1960年代の「New Math」運動で採用されていた証明の厳密さの強調への批判から研究を立ち上げている。そして，Hanna は，数学者の見解をもとに，証明の厳密さよりも，証明から得られる理解(understanding)や，その証明の数学上の意義(significant)の方が数学者にとって重要とされていることを指摘した[15]。

定理の理解について，Hanna(1989)は，「一連の演繹的な推論のつながりが正しいことを確認することに留まらない…理解は以前の数学的経験への訴えかけ(appeal)を必要とするものである」[16]と，2つの側面から説明している。そして，Hanna(1995)の「数学者は正当化以上のことを証明に期待している。…数学者は自分をより賢明にさせる証明を好む。これが意味していることは，数学者に好まれる証明は，その定理の意味を理解させることである。すなわち，定理が真であることだけではなく，なぜその定理が真であるかをも知ることである」[17]という主張から，Hanna の研究では，定理の理解が「一連の演繹的な推論の正しさを確認することに留まらない」という側面から一貫して説明されていることがうかがえる。この側面からの説明から，Hanna は，証明された定理に対する数学者の納得の程度によって理解促進を特徴づけていると解釈することができる。

正当化以上の納得を得ることも，確かに，証明によって得られる理解である。しかし，納得の程度は人によって異なる。多くの生徒は証明によって定理が正しいことを示すことで十分満足している。だから，生徒はそれ以上のことを望まず，証明を儀式的に捉える傾向を示すのであると思われる。

従って，納得の程度によって理解促進を特徴づけることは証明者の理解促進の判断基準として曖昧である。このような意味で，Hanna の理解に対する見解は漠然としており，証明による理解促進を議論するためには，Hanna の見解は不十分であると考える。そこで，まず，一般に，数学教育研究において理解促進がどのように捉えられているかを概観する。

2.2 数学教育研究における理解促進の捉え方

2.2.1 Hiebert & Carpenter による理解促進

Hierbert, J. & Carpenter, T. P. (1992)は，「数学における理解とは，アイディア間，事実間，手続き間のコネクションをつくることである」[18]と定義している。そして，多くの研究者は，理解とは一つ一つの情報(アイディア，事実，手続き）間の関係を認識することであることに同意していると，自分たちの理解の定義を強調している。しかも，Hiebert & Carpenter は，情報間の関係に関して，心的ネットワークを創るために学習者が構成するコネクションがあるとしている。その一つは，類似点と相違点に基づかれた関係であり，もう一つは包含(inclusion)に基づかれた関係である。

また，Hiebert & Carpenter は，自分たちの理解の定義を用いて，新しい情報が既存のネットワークと結びつけられる，あるいは，以前には関連づけられていなかった情報間に新しい関係が構成される(construct)につれて，徐々に，ネットワークはより大きく，そしてより多く組織されるとしている。これが，彼らの理解促進の捉え方である。

2.2.2 Pirie & Kieren による理解促進

Pirie & Kieren(1988)は，Skemp などの研究[19]のように，理解の種類を分類することは，異なる子どもの数学的理解を示す方法としては適切ではないと主張している[20]。なぜならば，彼女は，子どもの数学的理解は複雑な現象であり，一つのカテゴリーでは説明することができないと考えていたからである。そして，子どもが数学的理解を獲得する全プロセスを見渡す方法が必要であるということから研究を立ち上げている。そして，Pirie & Kieren(1989)は，数学の指導に関するカリキュラム文書，会議録，心理学，人工知能に関す

る研究は，全て，理解を伴う指導・学習に関心を示しているけれども，理解の成長に焦点を当てた理解の特性や，それを支える教育学的な行為の同定という視点が欠けていることを指摘している[21]。

このような問題意識から，Pirie & Kieren(1994)は，観察者の視点から，児童･生徒の理解の成長に着目し，数学的理解をダイナミックな成長過程として捉え，次のような理解モデルを構築している[22]。

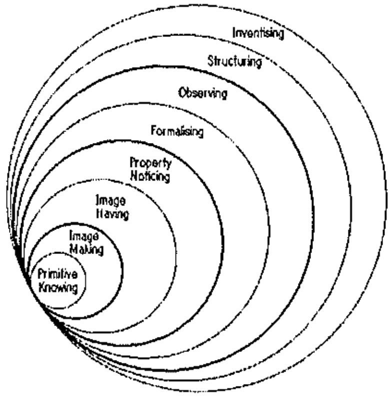

図１　Pirie & Kieren の理解モデル

それぞれのレベルでの活動は以下のようである。ここでは，それぞれのレベルの名前の訳と Primitive Knowing の内容以外，小山正孝，中原忠男の研究[23]を参考にした。それぞれのレベルに「活動」という訳を用いたのは，Pirie & Kieren による「我々は理解の本質を活動と見ていて，特定の内容と見ていない」[24]という主張を反映させたためである。

①原始的な認識(Primitive Knowing)
　児童・生徒が知っていること。
②イメージをつくる活動(Image Making)
　①の原始的な認識に結びついたイメージをつくること。
③イメージを持つ活動(Image Having)
　②のイメージをつくる活動でつくられたイメージを抽象して，活動とは離れたイメージを持つこと。
④性質に気づく活動(Property Noticing)
　③のイメージを持つ活動で，抽象したいくつかのイメージ間の相違，組み合わせ，あるいは関連に気づくこと。
⑤定式化する活動(Formalising)
　④の性質に気づく活動で，気づいた性質について意識的に考え，共通な性質を抽象して，自分の心的活動の起源を捨て去ること。ここで，数学的定義が行われる。
⑥観察する活動(Observing)
　自分で考えた構造を観察し，それらを矛盾なく組織化すること。
⑦構造化する活動(Structuring)
　自分の思考をある公理的構造の中で整理すること。
⑧創案する活動(Inventising)
　それまでのことにとらわれないで，全く自由な角度から考えてみること。

Pirie & Kieren は，理解の成長は直線的に進んでいくものではなく，前後のレベルを行き来しダイナミックに進んでいくものであると捉えている。そして，深くて広い理解にはより外側のレベルの認識に対する基礎になる既存の認識を再構成する必要があるとしている。また，Pirie & Kieren の理論について，Borgen & Manu(2002)は，「生徒は自らの経験を構造化や再構造化することによって理解に至る」[25]と解釈している。従って，Pirie & Kieren は，理解促進を内側の理解の再構成であると捉えていると考えることができる。

さらに，Pirie & Kieren(1991, 1994)は，理解促進に必要な活動として，folding back というアイディアを導入している[26]。folding back は，先にあった理解の上に現在の理解を重ねるということであり，内側のレベルに戻ってきたときには，理解は「より厚く」なり，もとの問題についての理解が拡張すると捉えられている。

このように先行研究は，問題意識や立場，そして，説明のために用いている言葉は異なるが，理解促進の意味は，新しい知識との関係によって，既存の知識が捉え直され，再構成されるという点で共通であると考えられる。なぜならば，Pirie & Kieren は，folding back によってそれまでの理解を再構成することを理解促進としている一方で，Hiebert & Carpenter による理解促進の定義「新しい知識と既存の知識が関係づけられる，あるいは，新しい知識によって，以前は関連づけられていなかった知識が関係づけられる」も，新たな関係から既存の知識を捉え直し，再構成するということを意味していると，筆者は捉えるからである。

証明による理解促進を検討するためには，ここでの理解促進を証明との関係から定義する必要がある。そこで，理解，あるいは理解促進という用語は用いてはいないが，新たな関係から既存の知識を捉え直すという活動と証明活動の関係に言及している Bell の見解と，

新たな関係から既存の知識を捉え直すという意味で証明の機能を位置づけている Hanna & Jahnke の見解について考察する。

3．証明による理解促進

3.1　総合的探究活動の中の統合のフェーズ

Bell, A (1979) による総合的探究活動 (investigation) モデルを参照する。Bell は,「総合的探究活動のプロセスの構成要素」として，次のようなモデルを提示している[27]。

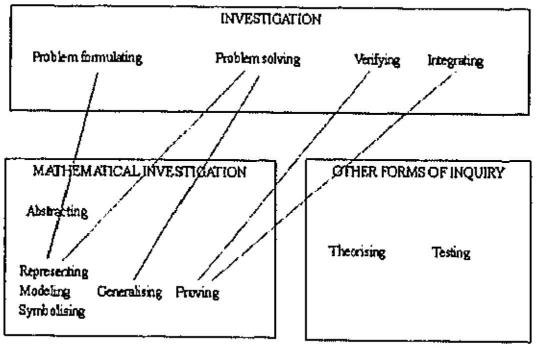

図2　総合的探究活動のプロセスの構成要素

Bell は，総合的探究活動を，全種類の知識獲得の手段を取り入れようという試みで用いている。そのために，問題の定式化 (Problem Formulating) と，統合 (Integrating) を付け加えている。そして，Bell は，数学における総合的探究活動 (mathematical investigation) の構成要素として証明活動 (proving) を位置づけている。そして，次のように，証明活動と総合的探究活動の「検証」や「統合」との関連について述べている[28]。

「数学的証明は推測の確認と明確に表現された演繹的な説明による略証 (sketch proof) との同定における検証のフェーズに関連する。しかし，演繹的な体系を構築するという意味で，証明は新しい知識と古い知識を統合することに重要な役割を果たす。」

ここでの「統合」の意味について，Bell は次のように説明している[29]。

「統合するということは，既知の知識体系に新しい知識を組み入れることであり，全体として更に広げられた知識の集合体を再吟味することである。」

2.2における理解促進の意味から，Bell の統合に関する記述は，新しい知識と古い知識が新しい関係で統合されることによって，さらに知識の集合体が広げられ，再吟味されることから，既存の知識は捉え直され，理解が促進すると解釈することができる。しかし，Bell の主張は，証明が関わっているということを指摘するに留まっている。

一方，Hanna & Jahnke (1996) は，証明の機能の一つとして「一つのよく知られている事実を，一つの新しい枠組みへ組み入れて，それから，一つの真新しい視点からそれを見渡す」を位置づけている (以下, incorporation の機能と呼ぶ)[30]。これは，2.1における Hanna の定理の理解に関する「理解とはそれまでの生徒の数学的経験に対する訴えかけを必要とする」に通じるものである。なぜなら,「一つのよく知られている事実」は，それまでの数学的経験を示唆していると考えるからである。ところが，Hanna & Jahnke は，これについては具体的な事例を用いて詳しく論じていない。従って，incorporation の解釈の手がかりは，Hanna & Jahnke によるこの一文だけである。

incorporation の機能は，文字通り，一つのよく知られている既存の知識を，真新しい視点から見渡すことであり，既存の知識は新しい視点から捉え直され，再構成される。Hanna は，このような意味の理解の促進に証明が機能すると捉えていると解釈することができる。

このように，Bell と Hanna & Jahnke は，どちらも具体的な事例を用いて説明してないが，既存の知識を捉え直す視点を統合，あるいは incoporation で特徴づけている。

そこで，次に，証明による理解促進の意味について，数学教育における「統合」の見解をもとに考察する。

3.2　統合の意味

中島 (1982) は，統合の主要な意味として，次の三つを挙げている[31]。

(1)集合による統合

はじめは，異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見いだして一つのものにまとめる場合。

(2)拡張による統合

はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲 (はじめの考えでは含められない範囲のものまで) に適用できるように，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合。

(3)補完による統合

既に知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて,「完全になる」ようにまとめる場合。

中島による「統合」の分類から，Bell が主張する統

合は，「拡張による統合」に当たる。その理由として，「全体として知識の集合体が広げられる」が意味していることは，中島による「もとのものも含めてまとめる」ことに通じると考えるからである。

次に，Hanna & Jahnke の incorporation の機能については，彼女らの記述をもとに，中学校第２学年における多角形の内角の和を事例に具体的に考察する。incorporation の機能の記述から，「一つのよく知られている事実」は，「三角形の内角の和は180°」であるとする。そして，「一つの新しい枠組み」は「多角形の内角の和」とする。このことから，例えば，四角形，五角形の内角の和について，次のような証明が考えられる。

（証明）

四角形は，四角形の内部の点と各頂点を結ぶことによって，<u>４つの三角形に分けられる</u>。三角形の内角の和が180°であるから，180°×４。

しかし，<u>内部の点に集まっている角</u>の分をひかなければならない。

よって，180°×４－360°＝360°

（証明）

五角形は，五角形の内部の点と各頂点を結ぶことによって，<u>５つの三角形に分けられる</u>。三角形の内角の和は180°であるから，180°×５。

しかし，<u>内部の点に集まっている角</u>の分をひかなければならない。

よって，180°×５－360°＝540°

これらの証明から，一般に，n 辺多角形の内角の和は，(180°×n)－360°で表される。そして，n 辺多角形は，内部の点と各頂点を結ぶことによって，必ず n 個の三角形に分けられることと，内部の点に集まる角は常に360°であることから，個々の多角形の内角の和は「多角形の辺の数」に依存するという「真新しい視点」から統合される。この真新しい視点から，個々の多角形はその特殊として位置づけられる。これも，先の中島による統合の意味の分類によると，個々の事実を含めてまとめるという点から，「拡張による統合」の意味に分類される。

以上の考察から，Bell の統合と Hanna & Jahnke の incorporation の機能は，「拡張による統合」という意味で共通していると言える。そして，証明による理解促進は，中島の言う「拡張による統合」という意味である。つまり，既存の個々の知識を含めてまとめることによって，既存の知識をその特殊として位置づけることである。

次では，証明，あるいは証明活動のどのような特性が，理解促進を導くのかについて議論し，証明と理解促進の関係について，事例に即して解明する。

４．証明と理解促進の関係

4.1　理解を促進させる証明の特性

Hanna (1989) は，理解を促進させ得る証明を，説明力のある証明(explanatory proof)，あるいは，説明するための証明(proofs that explain)と呼んでいる[32]。Hanna は，この「説明」という語に関して，Steiner, M. (1978)[33]の主張に基づいて，次にように述べている[34]。

「私は，証明が，それの契機(motivation)となる数学的アイディアを示したり，利用したりするときに限り，好んで説明という用語を用いる。…証明されている定理の正しさを示唆する“特徴的性質(characteristic property)”は何かを，証明が示すとき，その証明は説明していると，私は言う。」

さらに，Hanna (1989) は，彼女が証明する証明(proofs that prove)と呼んでいるものとの比較の中で，説明する証明の特性について述べている[35]。

「説明する証明は，その証明に必要とされる数学的アイディア(すなわち，既に証明されている定理，あるいは，既に正しいことが証明されている他の数学的言明をもたらす数学的性質）に基づく理論的根拠を与えなければならない。」

この必要とされる数学的アイディアに基づく理論的根拠が，その定理の特徴的性質と呼ばれるものと考えられる。この特徴的性質は，incorporation の機能の「真新しい視点」にも通じる。従って，理解を促進させる証明の特性は，特徴的性質，あるいは「真新しい視点」が証明の中に明示されているということである。

理解を促進させる証明の特性を，このように捉えることから，Hanna (1998) は，幾何における証明の多くは説明的な証明であり，理解を促進させる証明であるとしている[36]。

4.2　証明による理解促進の具体例

理解促進を導く証明の特性を踏まえて，証明と理解の関係について，具体的な事例をもとに説明する。証明による理解促進を説明するために，具体的な事例として，次のような命題を取り上げる。

「四角形 ABCD の四辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G，H とすると，四角形 EFGH は平行四辺形である」

そして，Hanna & Jahnke による incorporation の機能「一つのよく知られた事実を，一つの新しい枠組

みの中に組み入れて，それから，真新しい視点からそれを見渡す」をもとに，証明が理解促進のためにどのように機能しているのか，その実際を示す。

この命題に対する一般的な証明は次のようなものである。

(証明)

△ABDにおいて，AE=EB，AH=HDから，
中点連結定理より，EH//BD，EH=1/2BD
△CBDにおいて，CF=FB，CG=GDから，
中点連結定理より，FG//BD，FG=1/2BD
よって，EH//FG，EH=FGとなり，
□EFGHは平行四辺形である。

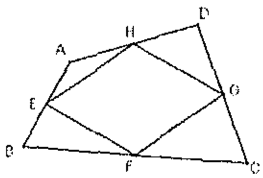

図3

まず，この証明によって正しいことが確かめられた命題がHannaのいう「一つのよく知られた事実」と考える。そして，「一つの新しい枠組み」は，この証明の中で平行四辺形になるための条件とする。

この「一つの新しい枠組み」から，「向かい合う1組の辺が平行で，かつ長さが等しい」という平行四辺形になるための条件が，証明の中に明示されている。すなわち，この証明では，平行四辺形の辺に関する条件が用いられていることがわかる。

四角形EFGHが平行四辺形になるために，四角形ABCDの一つの対角線ACと，四角形EFGHのEF，GHが平行，ACとEF，GHの辺の長さの比が一定という条件が必要であることを，この証明は示している。よって，「四角形ABCDの一つの対角線と，その対角線に向かい合う四角形EFGHの二辺とがそれぞれ平行であり，かつ，辺の長さの比が一定」が「真新しい視点」になる。

この「真新しい視点」から，この命題に関する事実を見直すと，四角形ABCDの二つの対角線の長さは，四角形EFGHが平行四辺形であるためには問題にならないことがわかる。しかも，四角形ABCDは一般の四角形であるが，四角形ABCDは台形(等脚台形を除く)，平行四辺形でも，四角形EFGHは同様に平行四辺形になることを捉えることができる。よって，台形（等脚台形を除く）や平行四辺形の場合が，この命題の特殊として位置づけられ，この命題の理解は促進する。

また，「真新しい視点」は，「四角形ABCDの対角線の長さが等しい場合はどうなるのだろうか？」という問いへの見通しを与える。対角線の長さが等しい馴染みのある四角形は，長方形，あるいは，等脚台形などである。

例えば，四角形ABCDが長方形である場合は，「真新しい視点」から四角形EFGHは同様に平行四辺形になる。四角形EFGHが平行四辺形になる場合，四角形EFGHの辺の長さは四角形ABCDの対角線の長さとの関係において決定される。よって，四角形ABCDが長方形の場合，四角形ABCDの対角線の長さは等しい(AC=BD)ので，四角形EFGHの隣り合う辺は等しくなり(EF=FG=GH=HE)，四角形EFGHはひし形になる。これは，長方形だけに限らず，四角形ABCDが等脚台形，あるいは，より一般に対角線の長さが等しい四角形の場合でも，各辺の中点を結んでできる四角形EFGHがひし形になることがわかる。

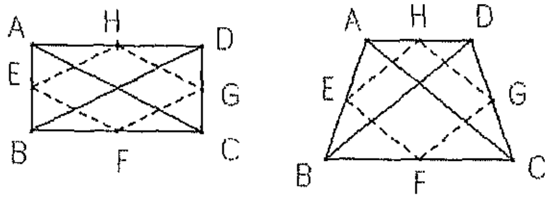

図4

このように，証明活動は新たな「真新しい視点」を生み出し得る。証明の直後では，「四角形ABCDの一つの対角線と，その対角線に向かい合う四角形EFGHの二辺とがそれぞれ平行であり，かつ，辺の長さの比が一定」が「真新しい視点」であった。この「真新しい視点」は，四角形EFGHが平行四辺形であるという視点でまとめるためには有効であるが，四角形ABCDが長方形の場合を，最初の命題の特殊として位置づけることはできない。従って，四角形ABCDの対角線の長さが等しい場合についての証明活動によって，四角形EFGHの形は「四角形ABCDの対角線の長さに依存する」を「真新しい視点」とすることによって，四角形ABCDの対角線の長さが等しい場合を，その特殊として位置づけることができる。

さらに，小学校来から図形の対角線についての考察は，対角線の長さについてだけでなく，対角線の交わり方についても考察する。このような小学校における

学習経験から，四角形ABCDの「対角線の交わり方」という，「真新しい視点」が生み出される。そこで，同じ命題を角に関する平行四辺形になるための条件を用いた証明活動に取り組む。

（証明）

△ABDにおいて，EH//BD（中点連結定理）

同様に，△BCAにおいて，EF//AC

EFとBDの交点をPとすると，

∠E＝∠FPO＝∠AOB

∠AOB＝∠COD（対頂角）

FGとCAの交点をQとすると，

FG//BDより，∠COD＝∠CQG

HG//ACより，∠COD＝∠G。

同様に，∠H＝∠AOD＝∠BOC＝∠F。

従って，□EFGHは平行四辺形になる。

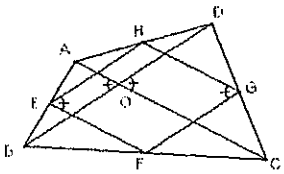

図5

この証明の中に，「四角形ABCDの対角線の交角とそれに向かい合う四角形EFGHの内角が等しい」ことが明示されている。つまり，∠E＝∠AOB＝∠COD＝∠G，かつ，∠F＝∠BOC＝∠AOD＝∠Hであることが明示されている。この性質によって，四角形EFGHは平行四辺形になることが示される。しかし，四角形EFGHが平行四辺形であるためには，必ずしも隣り合う対角線の交角が等しい必要はないことがわかる。

そして，「四角形ABCDの対角線の交わり方」という「真新しい視点」からの，証明の見直しは，「四角形ABCDの対角線の交角が等しい場合，すなわち，対角線が直交する場合はどうなるのだろうか？」という見通しを与える。

対角線が直交する馴染みのある四角形はひし形などである。この時，上図の∠AOBと∠AODが90°となるので，∠E＝∠G＝∠F＝∠H＝90°となり，四角形EFGHは長方形になる。

この段階で，四角形ABCDの対角線の交わり方によって，四角形EFGHは決定されることがわかる。つまり，四角形ABCDの対角線の交角が等しくない場合は，四角形EFGHは平行四辺形になり，等しい場合は長方形になる。従って，「四角形ABCDの対角線の交わり方」から，最初の命題は捉え直される。

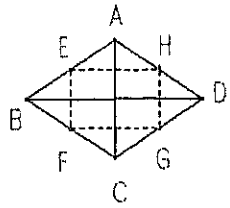

図6

四角形ABCDの各辺の中点を結んでできる四角形EFGHは，四角形ABCDの対角線についての性質に依存している。この点から，さらに，四角形ABCDの対角線の長さと交わり方の両方の条件を持つ場合についても考えることができる。四角形ABCDの対角線の長さが等しく，交角が等しい場合には，四角形ABCDは正方形になる。四角形ABCDが正方形の場合，対角線の長さが等しく，交角が等しいことから，四角形EFGHの4辺の長さは等しく，かつ，4つの角は全て90°になるので，四角形EFGHは正方形になる。

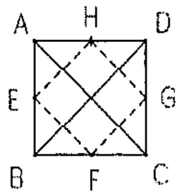

図7

以上のように，Hanna & Jahnkeによる「よく知られている事実を新しい枠組みへ組み入れ，真新しい視点からそれを見渡す」という証明の機能によって，最終的に，個々の事実は最初の事実の特殊として位置づけられる。そして，最初の命題自体も，「四角形ABCDの各辺の中点を結んでできる四角形EFGHは，四角形ABCDの対角線の長さと交わりに方に依存する」という新たな視点で，その一つであると捉え直され，最初の命題の理解は促進し得る。

そして，証明活動，あるいは証明の特性は，「真新しい視点」を導く数学的な性質を明示していることである。これは，Hannaの主張する「説明的な証明」の特性に通じるものであり，「説明的な証明」の意味する内容をより具体的に示している。

また，この事例において注目すべき点は，「真新しい視点」は，最初から固定的なものではないということ

である。最初は仮に「真新しい視点」が決定されるが，より洗練された「真新しい視点」は，その後の一連の証明活動を通して，生み出され得る。この視点は，Hanna & Jahnke においては指摘されていない点である。

5．おわりに

本稿では，証明による理解促進に関する先行研究において，理解促進が漠然と捉えられていることを問題点とし，第一に，数学教育研究において，理解促進がどのように捉えられているかを解明した。第二，その理解促進の捉え方を証明，あるいは証明活動との関係において特徴づけた。第三に，その理解促進を導くために，証明がどのような側面で関与しているか，その実際を事例をもとに解明した。その結果，証明による理解促進は，証明によってより一般的な視点を導きだし，その一般的な視点から個々の知識をその特殊として位置づけることである。そして，理解促進の鍵となる「真新しい視点」は固定的ではなく，むしろその後の証明活動の中で，理解を促進し得る新たな視点が生み出されていくことが明らかになった。これは先行研究においては指摘されていない証明活動の特性である。

そして，証明による理解促進を視点とした証明の学習指導の在り方を検討するために，学習指導の展開，配慮事項，生徒の状態などを実証的に解明していくことが，今後の課題である。

註と参考・引用文献

1）文部省（1999）．学習指導要領解説数学編．大阪書籍．

2）国宗進(1987)．「論証の意義」の理解に関する発達の研究．数学教育学論究，47/48，3-24．；宮崎樹夫(1997)．証明指導の新しいパースペクティブ．日本数学教育学会編，*学校数学の授業構成を問い直す*，251-263．；相馬一彦（1998）．「必要感」を重視した図形の論証指導．*第31回数学教育論文発表会「テーマ別研究部会」発表集録*，97-102．；宮崎樹夫(2002)．数学教育における証明の研究の諸側面と局所的様相－カリキュラム開発研究に着目して－．*第35回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録*，176-180．

3）Senk, S. (1985). How Well do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456. ; Senk, S. (1989). Van HieleLevels and Achievement in Writing Geometry Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321. ; de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24. ; Moore, C. R. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266. ; Dreyfus, T. & Hadas, N. (1996). Proofs as answer to the Question Why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1, 1-5. ; Hadas, N. & Hershkowitz, R. (1998). Proof in Geome-try as an Explanatory and Convincing Tool. In A. Ol-iver & K. Newstead (Eds.) *Proceedings of 22th Conf-erence of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 25-32. ; Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't Prove (with apologies to Morris Kline). *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.

4）清水静海（1994）．証明の指導の真の根拠を問い直す－幾何の指導を通じて児童・生徒は何を学習すべきか－．*日本科学教育学会年会論文集*，18，77-78．

5）Knuth, E. J. (2000). *Secondary School Mathematics Teacher's Conception of Proof*. Doctoral Dissertation (Draft), 1-40.
Knuth は，証明の役割として，次のような４つのコンセプションを挙げている．
① Establishing Truth, ② Promoting Understanding, ③ Creating Knowledge, ④ Answering why.
調査の結果は，①15名② 0 名③ 8 名（8 名のうち Establishing Truth を証明の役割と捉えている教師 7 名を含む）④ 3 名．

6）前掲 5），p. 7.

7）小関熙純編(1992)．*図形の論証指導*．明治図書．

8）松尾七重(2000)．*算数・数学における図形指導の改善*．東洋館出版社．

9）P. J. デービズ／R. ヘルシュ（柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕訳）(1986)．*数学的経験*，森北出版．

10）Hanna, G. (1995). Challenge to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

11）Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.

12) 前掲11), p. 398.

13) 前掲10), p. 8

14) 前掲 9), p. 142.

15) Hanna, G. (1983). *Rigorous Proof in Mathematics Education*. OISE Press.

16) Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

17) Hanna, G. (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain. In Vergnaud et al. (Eds.), *Proceedings of the 13 th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 45-51.

18) Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In Grouws, D. A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 65-97.

19) Skemp は，理解の種類を次のような 4 つに分類した．道具的理解，関係的理解，論理的理解，記号的理解．これらは以下の論文において議論されている．Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teacher*, 77, 20-26. ; Skemp, R. R. (1979). Goals of Learning and Qualities of Understandind. *Mathematics Teacher*, 88, 44-49. ; Skemp, R. R. (1982). Symbolic Understanding. *Mathematics Teacher*, 99, 56-61.

20) Pirie, S. (1988). Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed Formalised... How Can We Know? *For the Learning of Mathematics*, 8(3), 2-6.

21) Pirie, S. & Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 7-11.

22) Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise it and How Can We Represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190. Pirie & Kieren(1989)において，すでに理解モデルは提案されている．このときの最初のレベルは Doing であった．その後，Primitive Knowing へ修正している．

23) 小山正孝 (1992). 数学教育における理解モデルについて．岩合一男先生退官記念出版会編，*数学教育 学の新展開*，聖文社，172-183. ; 中原忠男 (1995). *算数・数学教育における構成的アプローチの研究*．聖文社．

24) 前掲22) p. 181

25) Borgen, K. L. & Manu, S. S. (2002). What do Students Really Understand? *Journal of Mathematics Behavior*, 21, 151-165.

26) 前掲22)あるいは，folding back に関しては，Pirie, S. & Kieren, T. (1991). Folding Back: Dynamic in Growth of Mathematical Understanding. In Furinghetti, et.al (Eds.), *Proceedings of the 15 th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 169-176. で詳細に議論されている．

27) Bell, A. W. (1979). The Learning of Process Aspects of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 361-387.

28) 前掲27), p. 361.

29) 前掲27), p. 361.

30) Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Press, 877-908.

31) 中島健三 (1982). *算数・数学教育と数学的な考え方―その進展のための考察―〈第二版〉* 金子書房．

32) 前掲17), p. 47.

33) Steiner, M. (1978). Mathematical Explanation. *Philosophical Studies*, 34, 131-151.
Steiner は，説明力のある証明に関して，「説明力のある証明は，その定理の中で言及される実在(a entity)，あるいは構造が持つ特徴的性質(characteristic property)に言及する．その結果，その説明的な証明から，その定理の結論は，その特徴的性質に依存していることが明らかになる」と述べている．

34) 前掲17), p. 47.

35) 前掲17), p. 47.

36) Hanna, G. (1998). Proof as Explanation in Geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2&3), 4-13.

A Study on the Role of Proof in Junior High School Mathematics

—Focusing on the Promotion of Understanding through Proof—

Tomohiko Makino

In mathematics education some researchers have pointed out that in school mathematics the key role of proof is the promotion of understanding. But they have not always explained in detail the role of proof as the promotion of understanding, because they have ambiguously grasped it basing on the activity and experience of mathematicians. To examine what is the teaching of proof focusing on the promotion of understanding in junior high school, it is necessary to investigate in detail the relation between proof and understanding.

The purpose of this paper is to probe the mechanism of the proof and promotion of understanding. For this purpose, this paper defined the promotion of understanding through proof and explained concretely the character of proof and proving to promote the understanding with a geometrical problem in junior high school.

The result of this paper is as followings:

(1) The promotion of understanding through proof is to review each already known fact from a general perspective.

(2) The function of proof to promote the understanding is "incorporation of a well-known fact into a new framework and thus viewing it from a fresh perspective" asserted by Gila Hanna.

(3) "A fresh perspective" is the key idea promoting the understanding through proof. And it is generated and refined in the proof and proving . The later is a character of proving to promote the understanding.