様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２１日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４０２０８
研究課題名（和文）　等質空間上のラドン変換と調和解析への応用

研究課題名（英文）　Radon transforms on homogeneous spaces and their application to harmonic analysis

研究代表者
筧　知之（KAKEHI TOMOYUKI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：７０２３１２４８

研究成果の概要（和文）：
我々は等質空間上のラドン変換とその調和解析への応用について研究し、以下の結果を得た。一般化されたマトリックスラドン変換の像がパフィアン型不変微分作用素により特徴付けられる事を証明した。更に、反転公式も得た。（２）コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解のサポートが、ある条件のもとでは、有理数時間において低次元集合となる事、そして、無理数時間においては、対称空間全体と一致する事を証明した。

研究成果の概要（英文）：
We studied Radon transforms on homogeneous spaces, and their applications to harmonic analysis. Our results are as follows. (1) We proved that the ranges of generalized matrix Radon transforms are characterized by Pfaffian type invariant differential operators. In addition, we also obtained the inversion formulas. (2) We proved that under some condition the support of the fundamental solution to the Schroedinger equation on a compact symmetric space becomes a lower dimensional subset at a rational time and that it coincides with the whole symmetric space at an irrational time.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２００８年度	900,000	270,000	1,170,000
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：大域解析学
科研費の分科・細目：数学・大域解析
キーワード：ラドン変換　等質空間　対称空間　像の特徴付け　反転公式　シュレディンガー方程式　基本解

１．研究開始当初の背景

逆問題解析と呼ばれる分野が近年、応用からの要請もあり活発に研究されるようになってきた。逆問題解析とは、得られた観測データから逆に観測対象の構造や性質を調べる

事を中心的な研究テーマとする分野である。中でもラドン変換に対する逆問題は、コンピュータートモグラフィーや画像解析に応用先を持つ事から重要な研究対象となりつつある。一方で、一般の対称空間やアファイングラスマン多様体などの（対称リーマン空間ではない）等質空間の調和解析とラドン変換などの積分幾何の理論が相互に重要な役割を果たすことが判ってきた。

２．研究の目的

対称空間ではない等質空間上のラドン変換について、像がどのような微分作用素の零解の空間として特徴付けられるのか、そして、原像をどのように再構成するのか、を明らかにし、それらの結果を、等質空間上の調和解析の諸問題（表現論および微分方程式）へ応用する。

３．研究の方法

（１）カルタン運動群の作用する等質空間上のラドン変換について、研究の方法は以下の通りである。
コンパクト対称空間上のラドン変換に関する既知の結果（像の特徴付け、および、反転公式）と、等質空間上のフーリエ変換、および、フーリエスライス定理、そして、カルタン運動群上の普遍包絡環の中心の構造決定、を組み合わせて行う。

（２）調和解析および対称空間上の微分方程式への応用について、研究の方法は以下の通りである。
ルート系に関する代数的な考察、不変微分作用素の動径部分公式、極大トーラス上でのフーリエ解析、そして、多変数超幾何微分方程式に関する Heckman-Opdam 理論を組み合わせて行う。

４．研究成果

研究成果は、（１）等質空間上のラドン変換そのものに関する成果と、（２）対称空間上の調和解析に関する成果、に分けられる。

（１）　等質空間上のラドン変換について

U/K を対称空間とし、対応する標準補空間を ｐとする。K のｍへの作用から、ｐ上の合同変換群としてカルタン運動群Ｇが定義される。Ｇはｐのある種の低次元平面の全体Ξにも作用し、この作用に関して、Ξは、対称空間ではない等質空間となる。Ξ´を、そのような別の等質空間とすると、Ξ上の関数をΞ´上の関数に移すＧ同変な積分変換として、ラドン変換Ｒが定まる。本研究では、上記のラドン変換に関して、像の特徴付け、および、反転公式の構成、の問題を扱った。特に、U/K がコンパクト実グラスマン多様体の場合、即ち、$U=O(n+k)$, $K=O(n)\times O(k)$ の場合、に詳細な研究を行った。この場合、標準補空間ｐはｎ×ｋ実行列全体の空間と一致する。そこでｐにおける m-matrix plane の全体を Ξ_m と表すことにする。同様に、ℓ-matrix plane の全体 Ξ_ℓ が定まる。そして、Ξ_m 上の急減少関数の空間から Ξ_ℓ 上の急減少関数の空間へのラドン変換 $R(m,\ell)$ が定まる。得られた結果は以下の通りである。
$\dim \Xi_m < \dim \Xi_\ell$ である場合。Ξ_ℓ 上の一般化されたパフィアン型不変微分作用素Ｄにより、ラドン変換 $R(m,\ell)$ の像は、Ｄの零解の空間と一致する。
$\dim \Xi_m \leqq \dim \Xi_\ell$ かつ $\ell-m$ が偶数である場合。上記のような一般化されたパフィアン型不変微分作用素の多項式で表される微分作用素Φにより、$R(m,\ell)$ の反転公式は、
$\Phi R(\ell,m)\ R(m,\ell)f=f$ として与えられる。ここで、$R(\ell,m)$ は $R(m,\ell)$ の双対ラドン変換である。これら２つの結果は、タフツ大学（アメリカ合衆国）の Gonzalez 教授との共同研究であり、論文を現在準備中である。
コンパクトグラスマン多様体上のラドン変換については、像の特徴付け、および、反転公式の構成、について、Helgason, Gelfand, Graev, Gindikin, Grinberg, Gonzalez, Kakehi, Rubin 等の研究によりかなり詳しいことが判っている。しかし、対称空間ではない等質空間上のラドン変換については散発的な研究があるだけである。本研究は、カルタン運動群が作用する等質空間の枠組みにおいて、像の特徴付け、および、反転公式の構成、という２つの問題に大きな進展を与えたと言える。今後の研究の方向としては、サポート定理などの逆問題への応用が考えられる。また、枠組みは異なるが、D 加群の理論を用いて、研究分担者の竹内潔准教授が位相的ラドン変換に関する反転公式を具体的に構成した。これも、D 加群の理論の積分幾何への応用という点で重要な結果と言える。

（２）　対称空間上の調和解析について

ラドン変換の調和解析そのものへの応用ではないが、関連する重要な応用の例としてラドン変換を用いた波動方程式の基本解の構成が挙げられる。本研究では、多重時間波動方程式系、および、シュレディンガー方程式の基本解をラドン変換を用いて構成することを試みた。しかし、研究代表者自身の研究では、当初の路線とは異なりラドン変換を用いない形で、ある種の対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解を具体的に構成す

ることに成功し、かつ、基本解のサポートの決定にも成功した。以下において、その成果を説明する。
M=U/K を偶数重複度条件を満たすコンパクト対称空間とする。そして、以下のようなM上の時間発展型シュレディンガー方程式を考える。

$(i\partial/\partial t + \triangle)\phi=0$

$\phi(0,x) = \delta(x)$

上記において、△はM上のU不変計量に関するラプラス・ベルトラミ作用素、δ(x)は、Mの原点 o=eK に特異点を持つデルタ関数を表すものとする。物理学的には、上記のシュレディンガー方程式は、時刻 t=0 において原点 o を出発する自由粒子の運動を記述している。上記の解、即ち、基本解をE(t,x)と表すことにする。得られた結果は以下の通りである。

Mの幾何学的構造から決まる定数 c が存在して次の(I)(II)が成り立つ。
(I)　t/c が有理数である場合。
t/c=p/q とおく。ここで、q>0 かつ p,q は互いに素な整数とする。すると、時刻 t における基本解 E(t, ・)の distribution としての台は、Mのある低次元集合(q に依存し、p には依存しない)と一致する。
(II)　t/c が無理数である場合。
基本解 E(t, ・)の台はM全体と一致する。更に、E(t, ・)の特異台もM全体と一致する。

上記の結果は、時刻 t=0 において原点 o を出発する自由粒子が、有理数時間においては、M のある低次元集合にのみ存在するが、無理数時間においては、M の任意の点に存在し得るということを主張している。特に、対称空間上の自由粒子は、有理数と無理数を識別するのである。
次に、この結果の重要な点および意義があると思われる点を述べる。

① 一般に、多様体上でシュレディンガー方程式の基本解を大域的に構成することは自由粒子の場合（ポテンシャルや磁場などがない場合）ですらかなり難しい。本研究は、ある種の対称空間に対して、系統的に基本解を構成する新しい方法を与えた。

② 基本解の滑らかさについて。上記①に関係するが、粒子に捕捉条件を付けた場合、基本解の滑らかさに関する研究はそれほど多くはない。実質的に意味のある結果としては、調和振動子型のシュレディンガー方程式に関する谷島賢治教授（学習院大学）による結果があるくらいである。これは、一般に捕捉条件が強い場合、基本解の構成が極度に難しくなることによる。
本研究は、この意味でも、捕捉条件が強い場合の基本解の滑らかさについて、詳細な結果を与えており、意義があると言える。

③ 結果(I)における低次元集合は、一般化されたガウス和を用いて記述される。ここで、ガウス和とは、代数的整数論（特に円分体）において重要な役割を演ずる和である。本研究では、単に基本解のサポートを決定したに留まらない。M の極大トーラスに対してガウス和を定義し、基本解 E(t,x)が、有理数時間においてガウス和を用いて具体的に記述されることも突き止めた。参考までに、波動方程式の基本解についての研究は既に存在し（Helgason 等による）具体的に判っているが、波動方程式の基本解からはこのような情報は得られない。

これらの研究成果は、論文「Support theorem for the fundamental solution to the Schroedinger equation on a comact symmetric space」としてまとめ、現在、論文を投稿中である。

次に、関連する事として、研究分担者の磯崎洋教授は、ユークリッド空間の標準計量に漸近的に近いリーマン計量に関するフーリエ変換とフーリエスライス定理を用いて新しいラドン変換を導入し、その超局所解析的構造を調べ、波動方程式の散乱理論へ応用した。また、研究分担者の木下保准教授は、関連する双曲方程式系の解空間の詳細な研究を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①Kakehi Tomoyuki Fundamental solution to the Schroedinger equation on a compact symmetric space　数理解析研究所講究録掲載確定 査読なし

②Isozaki Hiroshi, Le Rousseau Jérôme. Pseudodifferentialmulti - product representation of the solution operator of a parabolic equation. Comm. Partial Differential Equations 34 (2009), no. 7-9, 625—655, 査読有

③ Matsui Yutaka, Takeuchi Kiyoshi. Topological Radon transforms and degree formulas for dual varieties. Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 7, 2365—2373 , 査読有

④Kinoshita Tamotu, Yagdjian Karen. On the Cauchy problem for wave equations with time-dependent coefficients. Int. J. Appl. Math. Stat. 13 (2008), No. S08, 1—20, 査読有

⑤Ide Takanori, Isozaki Hiroshi, Nakata Susumu, Siltanen Samuli, Uhlmann Gunter Probing for electrical inclusions with complex spherical waves. Comm. Pure Appl. Math. 60 (2007), no. 10, 1415—1442, 査読有

〔学会発表〕（計３件）

①Kakehi Tomoyuki「Generalized Matrix Radon transform」 Workshop on Integral Geometry and Group Representations August 5 (Wed), 2009 - August 10 (Mon), 2009 Tambara Institute of mathematical Sciences, the University of Tokyo (Tambara, Numata, Gumma)

②Kakehi Tomoyuki「Fundamental solution to the Schroedinger equation on a compact symmetric space」, Special Session on Radon Transforms, Tomography, and Related Geometric Analysis 2008 AMS Spring Southeastern Meeting (AMS Sectional Meeting), ２００８年３月２８日～３０日, Louisiana State University, Baton Rouge, USA

③Kakehi Tomoyuki「Some remarks on the Schroedinger equation on compact symmetric spaces」, International Conference on Integral Geometry, Harmonic Analysis and Representation Theory ２００７年、８月１５日～１８日、University of Iceland, Natural Sciences Building, Reykjavik, Iceland

６．研究組織

(1)研究代表者

筧　知之（KAKEHI TOMOYUKI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：７０２３１２４８

(2)研究分担者

磯崎　洋（ISOZAKI HIROSHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：９０１１１９１３

竹内　潔（TAKEUCHI KIYOSHI）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：７０２８１１６０

木下　保（KINOSHITA TAMOTSU）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：９０３０１０７７