

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540111

研究課題名（和文） 1階言語で定義された算術理論のモデルの研究とその応用

研究課題名（英文） Study of first order model theory and its application

研究代表者

坪井 明人 (TSUBOI AKITO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：30180045

研究成果の概要（和文）：

単純理論(simple theory)のモデルにおけるタイプ排除定理(Omitting Types Theorem)の研究を行った.単純理論は安定理論(stable theory)を含むより広い範疇の理論のクラスである.Steinhorn は,超安定な理論(superstable theory)のモデルにおいて,無限の一様列(indiscernible sequence)を含めば,そのモデルにおいて排除されているタイプを排除したままモデルを拡大できることを示した.本研究では超単純(super-simple)な理論に対してその結果を拡張することを考え,より広い範囲に適用でき,証明もより明解になる議論の仕方を発見した.その結果以下のような結果を得ることができた.

結果:言語 L は可算言語とする. T を L において記述された完全理論とする. T は超単純と仮定する.またモデル M を理論 T の可算モデルとし,空集合上の完全タイプ p が M において排除されているとする.さらに M は無限独立集合 I を含むとする(I が独立集合であるとは,分岐(forking)の意味で独立な集合とする).このとき, M を真に拡大する(elementary extension)モデル N でタイプ p を排除するものが存在する.

この結果の証明は,古典的タイプ排除定理を使い,Steinhorn における証明のような,安定性特有の議論(平均タイプ(average type)など)を用いない.このため安定の場合に限ってもより明解な証明法が得られたことになる.その他, Shelah のタイプ排除定理と Morley のタイプ排除定理に関連した拡張も得られている.

研究成果の概要（英文）：

We extended Steinhorn's omitting types theorem. His theorem holds when the theory T is superstable. We weakened the assumption of superstability to a weaker condition of supersimplicity. Steinhorn's original proof uses the notion of average types. Our proof does not use such a notion. First we proved a quite general result and then, by applying the result to a model of supersimple theory, we get the following extension of Steinhorn's result as a corollary:

The result: Let L be a countable language and T a complete supersimple theory formulated in L . Let M be a countable model of T having an infinite independent (in the sense of forking) set. Suppose that M omits a complete type p over the empty set. Then there is a proper elementary extension N of M that also omits p .

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2007年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 2008年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2009年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,100,000 | 930,000 | 4,030,000 |

研究分野：数理論理学，モデル理論

科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論

1. 研究開始当初の背景

タイプ排除定理は有用な定理であり， PA の可算モデルにおいて，その終端拡大を行う場合にこの定理を使うことができる．そのためタイプ排除定理を研究することが重要と考えた．当初の目的は，タイプ排除定理とその周辺の定理を算術のモデルの構築に利用とするものであった．その後より一般的な研究の方向性を得た．

2. 研究の目的

一階の言語で記述された理論 T のモデルを研究することを目的とする． T の一階定義可能集合の振る舞いの研究，また定義可能集合の族（タイプ）の振る舞いの研究を主要テーマとする．

3. 研究の方法

筑波大学におけるセミナーと研究集会を通して研究を進展させた．筑波大学におけるセミナーは

- (1) 大学院生とのセミナー
- (2) 共同研究者（研究分担者）とのセミナー

に大別される．(1)のセミナーでは，安定性理論，単純性理論の研究およびジェネリック構造の研究を主な研究対象とする．

(2)のセミナーでは，一階言語の算術のモデルおよび2階の言語（実はこれも1階の特別な場合）の算術のモデルを証明論の方法論を使って考察する．

研究集会については，「夏の勉強会」と称する研究集会を各年に開催すること，また（主に）秋に京都大学数理解析研究所で行われる研究集会である．京都大学での集会では，一部の参加者への旅費補

助を行い，より多くの研究者が参加し研究の推進を行えるようにした．本研究課題の成果に密接に結びついた主要な研究集会は以下のものである．

モデル理論夏の勉強会

2007年8月6日(月)～8月8日(水)

場所：筑波大学

世話人：坪井明人（筑波大学大学院数理物質科学研究科）

鹿児島モデル理論研究集会

2009年2月23日(月)午後～2月25日(水)午前

場所：鹿児島国際大学 728 教室 (7号館 2階)

トポロジーからみたモデル理論の展開

2009年度モデル理論サマースクール

2009年8月26日(水)～8月28日(金)

場所：和歌山市民会館 4階第二練習室

4. 研究成果

ジェネリック構造に関する結果．

ジェネリック構造は与えられた有限構造のクラス K に属する構造を貼り合わせてゆきできる無限構造である． K として重要なあるクラスを考え，そのジェネリック構造 M について考察を与えた．主要結果の系としては次のものがある：

(*) M の公理化を与える論理式の集合に関し，今までに分かっていたよりも低い範疇に属する論理式により公理化ができることを示した．

タイプ排除定理に関する結果．

タイプは変数列 x に関する（無限個の）

条件の集合である。条件は1階論理式で書かれている必要がある。可算言語で表現された理論において、一般にタイプ排除定理は次を主張する：本質的に1つの論理式で代用できないタイプは、そのタイプの共通解が存在しない（タイプを排除する）モデルを選ぶことができる。我々はタイプの排除定理をいくつかのバージョンで拡張することを考え以下の結論を得た。

(A) 有限生成の可算モデルがタイプ p を排除すれば、そのタイプを排除したままモデルを拡大できる。

(B) 超単純の理論の可算モデルが無限の一様列を含みタイプ p を排除していれば、その真なる拡大でタイプ p を排除したものが存在する。

(C) Morley のタイプ排除定理はタイプを排除するモデルの大きさに関する Hanf 数を扱う。Shelah のタイプ排除定理は、完全なタイプに関する結果である。これらのある意味で同時に拡張する結果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

1.

Ikeda, Koichiro; Kikyo, Hirotaka; Tsuboi, Akito

On generic structures with a strong amalgamation property. (English)

J. Symb. Log. 74, No. 3, 721-733 (2009). 査読有

2.

Tsuboi, Akito

A note on Steinhorn's omitting types theorem. (English)

Colloq. Math. 115, No. 2, 189-194 (2009). 査読有

3.

Tsuboi, Akito

Models omitting given complete types. (English)

Notre Dame J. Formal Logic 49, No. 4, 393-399 (2008). 査読有

4.

Kobayashi, Makoto; Tsuboi, Akito

A note on stationarity of types over models in simple theories. (English)

Math. Log. Q. 54, No. 6, 625-628 (2008). 査読有

5.

Kim, Byunghan; Kolesnikov, Alexei S.; Tsuboi, Akito

Generalized amalgamation and \aleph_n -simplicity. (English)

Ann. Pure Appl. Logic 155, No. 2, 97-114 (2008). 査読有

[学会発表] (計6件)

1.

Model Theory Kirishima 2010, New developments of "independence" in model theory, March 3rd (Wed), 2010,

Ryokojin-sanso, Kagoshima, Japan

Akito Tsuboi, "On coheir extentions"

2.

「モデル理論とその周辺」研究集会 (宮武徹先生追悼研究集会), 神戸大学自然科学総合研究棟 3 号館 421 プレゼンテーション室(4階東側), 2009年11月29日(日)

坪井明人 「一階様相 μ 計算とその周辺(2)」

3.

2009年度モデル理論サマースクール,

2009年8月27日, 和歌山市民会館, 4階第二練習室,

坪井明人, 「On Average Types」

4.

鹿児島モデル理論研究集会, 鹿児島国際大学 728 教室 (7号館2階) 2009年2月23日, 2月24日,

坪井明人, 「有限個の可算モデルを持つ理論 I,II」

5.

RIMS 研究集会, モデル理論の手法による無限構造の構成法, 2007年10月29日~11月1日, 京都大学数理解析研究所

坪井明人 「Independence in generic structures」

6.

モデル理論夏の勉強会 2007, 筑波大学総合研究B棟 1階 0110 室, 2007年8月7日 10:00 - 10:40,

坪井明人 「An extension of Steinhorn's result on omitting types theorem」

[その他]

ホームページ等

www.math.tsukuba.ac.jp/~tsuboi

6. 研究組織

(1)研究代表者

坪井 明人 (TSUBOI AKITO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・
教授

研究者番号：30180045

(2)研究分担者

池田 一磨 (IKEDA KAZUMA)

聖徳大学・児童学部・講師

研究者番号：10383449

坂井 公 (SAKAI KO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・
准教授

研究者番号：20241797

池田 宏一郎 (IKEDA KOICHIRO)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：60332029

(H20→H21：連携研究者)

桔梗 宏孝 (KIKYO HIROTAKA)

神戸大学・工学部・教授

研究者番号：80204824

(H20→H21：連携研究者)

塩谷 真弘 (SHIOYA MASAHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・
准教授

研究者番号：30251028

(H20→H21：連携研究者)