

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540063

研究課題名 (和文) 可分距離空間とその上の連続写像の力学的・幾何学的構造の研究

研究課題名 (英文) Study of dynamical and geometrical properties of maps on separable metric spaces

研究代表者

加藤 久男 (KATO HISAO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：70152733

研究成果の概要 (和文)：本研究では、相空間として一般のコンパクト距離空間を取り扱い、連続写像のカオス的な性質を位相的・エルゴード的に考察した。主な研究成果として、位相エントロピーの評価から *hereditarily indecomposable continua* 上には拡大同相写像は存在しないことを証明した。またアレキサンドロフ・ウリゾーンの距離化定理を応用して、拡大写像の拡大率とフラクタル次元に関する強力な定理を得た。これらの結果は、幾何学的トポロジーと位相力学系理論研究の進展に大きく貢献する結果となった。

研究成果の概要 (英文)：We studied chaotic properties of maps of compact metric spaces by use of topological theory and ergodic theory. In this study, we proved that hereditarily indecomposable continua admit no expansive homeomorphisms. Also by use of Alexandroff-Urysohn metrization theorem we obtained very strong theorems concerning ratios of expanding maps and fractal dimensions. These results are very important in the theories of geometric topology and dynamical systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：幾何学的トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：カオス、エントロピー、拡大写像、連続体、非分解空間、フラクタル

1. 研究開始当初の背景

研究代表者と分担者は、連続写像の位相力学的性質の研究を行っている。一般に、連続写像の力学系は複雑なトポロジーを導くこと

が知られている。アトラクターをはじめとする不変集合は大変複雑な構造をなしている場合が多く、そうした複雑なコンパクト距離空間の幾何学的構造はたいへん興味深い研

究対象であった。本研究テーマでは、相空間として一般のコンパクト距離空間を取り扱い、連続写像のカオス的な性質を位相的・エルゴートの考察していく。この場合、通常の微分可能性を仮定した力学系理論とはかなり異なったものになる。現在、力学系において色々なカオス写像が考察されている。例えば、transitive, sensitive, chaos of Li-Yorke and Devaney, 正のエントロピーを持つ写像、拡大同相写像、連続体的同相写像などが代表的なものである。特に、拡大同相写像、連続体的拡大同相写像、正の位相エントロピーをもつ同相写像とそれを許容する空間の関係を研究することが重要になってきた。拡大的力学系とは、微少な観測値の相違が過去または未来のある時刻に明確な違いとなって現れる力学系のことで、位相力学系、エルゴート理論では特に重要な概念である。連続体的拡大同相写像の概念は、拡大同相写像とパイコね変換を一般化したものであり、研究代表者によって定義された。これまでの研究で、拡大同相写像の存在に関する一連の定理、カオス連続体の存在定理、平面内のカオス連続体の indecomposable 構造に関する定理などを証明した(Fund. Math. Trans. AMS. Topology Appl. Pacific J. Math. Canad. J. Math. 岩波数学辞典(4版)など)。Indecomposability は、general topology (連続体論)の中心的課題として Knaster, Kuratowski, Bing などによって研究されてきたが、近年、力学的複雑さが幾何学的な複雑となって現れる典型的な構造としてこの indecomposability が出現し、その重要性が認知されてきた(多くの場合、不安定集合と indecomposable 連続体の composant が一致する構造)。

2. 研究の目的

本研究では、相空間として一般のコンパクト距離空間を取り扱う。この場合、通常の微分可能性を仮定した力学系理論とはかなり異なったものになる。本研究の目的は、トポロジーの主な研究対象である可分距離空間とその上の連続写像の力学的・幾何学的性質を、トポロジー、位相力学系理論およびエルゴート理論を駆使して総合的に研究し、カオス力学系に現れる複雑な不変集合の幾何学的構造を明らかにすることである。本研究の取り組むべき第一の課題は、トポロジーと位相力学系に関わる多くの問題のうちで、コンパクト距離空間の拡大的同相写像と核になる空間の indecomposability の関係を明らかにすることである。また、フラクタル集合上の一般的な写像の位相エントロピー評価、Menger 多様体上のカオス写像(minimal homeomorphism, expansive

homeomorphism...など)の存在問題も本研究課題で究明していきたい重要な問題である。また、normal sequence から導かれる距離と Hausdorff dimension との関係は、box-counting dimension と同様に密接に結びついていると予想された。しかし依然として未解決な問題である。現在、距離に応じての Hausdorff dimension は上からの評価が可能であるが、下からの評価に大きな問題を残している。本研究課題の目標の1つは、この問題に関して満足のいく解答を与えることである。大胆な予想ではあるが、位相次元を表す normal sequence の subsequence から導かれる距離で、Hausdorff dimension と box-counting dimension は一致するのではと予想していた。

3. 研究の方法

研究代表者および研究分担者で研究成果・アイデアを定期的に確認しあい、研究代表者である加藤が全体の研究計画をまとめ遂行した。トポロジー、位相力学系理論およびエルゴート理論を駆使して総合的に研究し、かつ得られた手法・結果を融合することで本研究を行った。第一の研究テーマは、連続写像のカオス的な性質を位相的・エルゴートの考察することであり、このテーマは、加藤・川村・酒井が担当した。第2の研究テーマは、幾何学的トポロジーからの研究である。局所的に複雑な可分距離空間および連続写像の幾何学的構造について集中的な研究を行った。このテーマと関連する重要な問題「4次元ユークリッド空間の cell-like decomposition space は有限次元か」の解明に向けた研究を行った。この方向は、加藤と共に Menger 多様体論および metric geometry の専門家である研究分担者・川村が担当した。また、研究分担者・酒井は、無限次元多様体論・巾空間論の専門家からこの方面の研究を行った。

4. 研究成果

本研究の成果としては、以下に挙げる結果を得た。幾何学的トポロジー研究では、ある幾何学的な性質をもつ連続写像のクラスが全体の写像空間の中でどのように埋め込まれ、どのような位相的・幾何学的構造をもつか詳しく研究した。低い次元から高い次元への写像空間の研究については、Hurewicz, Menger などによってすでに多くの著名な結果が知られていたが、本研究では、高い次元のコンパクト距離空間から低い次元の多面体及び多様体への(連続)写像空間を取り扱い、Higher Dimensional Bruckner-Garg Type maps, Lelek maps, Bing maps などの

クラスの集合が、それぞれ写像空間全体の中でG-デルタ稠密になるという近似定理を証明した (Topology Appl.)。いずれの写像も一点の逆像が複雑な indecomposable 空間となる写像のクラスである。また、位相エントロピーの評価から hereditarily indecomposable continua 上には拡大同相写像は存在しないことを証明した。更には、非分解空間と拡大同相写像に関する最も一般的な定理の証明 (非可算個の handles をもつ連続体を含まないという条件下でカオス連続体の indecomposability の証明) に成功した。また、アレキサンドロフ・ウリゾンの距離化定理を応用して、拡大写像の拡大率とフラクタル次元に関する一般的な定理を得た。更には、2次元以上の多様体上の測度保存の力学系、及びランダムな可算個の可算点列に対して、それらを軌道上に実現する測度保存の力学系がいくらかでも与えられた力学系の近くに存在することを証明した。これらの結果は、幾何学的トポロジーと位相力学系理論研究の進展に大きく貢献する結果となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① H.Kato, C. Fujita and M. Matsumoto, Fractal Metrics of Ruelle Expanding Maps and Expanding Ratios, Topology and its Applications, 査読有、157(2010), 615-628.
- ② H. Kato and C. Fujita, Almost periodic points and minimal sets in topological spaces, Applied General Topology, 査読有, 10 (2009), 239-244.
- ③ H.Kato, C. Mouron, Hereditarily indecomposable compacta do not admit expansive homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有、136(2008), 3689-3696.
- ④ Kubiś, Wieslaw and K. Sakai, Hausdorff hyperspaces of \mathbf{R}^m and their dense subspaces, 査読有、J. Math. Soc. Japan 60 (2008), no. 1, 193-217.
- ⑤ H.Kato, Higher Dimensional Bruckner-Garg Type Theorem, Topology and its Applications, 査読有, 154 (2007), 1690-1702.
- ⑥ H.Kato, Topological Entropy of Maps on Regular Curves, Topology and its Applications, 査読有, 154 (2007), 1027-1031.

- ⑦ Brodskiy, N., Dydak, J., Karasev, A. and K.Kawamura, Root closed function algebras on compacta of large dimension. 査読有、Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 2, 587-596

[学会発表] (計5件)

- ① 加藤久男, Chaotic continua of continuum-wise expansive homeomorphisms, 「一般位相幾何学及び幾何学トポロジーに関する研究」数理解析研究所研究集会, 京都大学, 10月16日(2009).
- ② 加藤久男, Dynamical systems which realize given random bi-sequences of points on their orbits, 第44回位相空間論シンポジウム, 島根大学, 5月30日(2009).
- ③ 加藤久男, Expanding Ratios, box-counting dimension and Hausdorff dimension, 「一般位相幾何学及び幾何学トポロジーとその応用」数理解析研究所研究集会, 京都大学, 10月8日(2008).
- ④ 加藤久男, The nonexistence of expansive homeomorphisms on hereditarily indecomposable compacta, 「一般位相幾何学及び幾何学トポロジー」数理解析研究所研究集会, 京都大学, 10月19日(2007).
- ⑤ 加藤久男, 高次元コンパクト距離空間より多様体への連続写像が作る写像空間について, 日本数学会一般講演, 東北大学, 9月23日(2007).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 久男 (KATO HISAO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：70152733

(2) 研究分担者

酒井 克郎 (SAKAI KATSURO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授

研究者番号：50036084

川村 一宏 (KAWAMURA KAZUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授

研究者番号：40204771

金戸 武司 (KANETO TAKESHI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・

講師

研究者番号：70107340

山崎 薫里 (YAMAZAKI KAORI)

高崎経済大学・経済学部・准教授

研究者番号：80301076

(H20→H21：連携研究者)

南 就将 (MINAMI NARIYUKI)

慶応義塾大学・医学部・教授

研究者番号：10183964

(H20→H21：連携研究者)