

平成22年 3月31日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540158

研究課題名（和文） ハミルトン流による偏微分方程式の大域的研究

研究課題名（英文） Hamilton flows and Partial Differential Equations

研究代表者

梶谷 邦彦 (KAJITANI KUNIHICO)

筑波大学・名誉教授

研究者番号：00026262

研究成果の概要（和文）：非線型の双曲型方程式、特に変係数を係数に持つキルヒホフ方程式に対する初期値問題および散乱問題を空間次元が1次元の場合と多次元の場合にそれぞれ違った方法で考察した。1次元の場合は初期データが減衰する条件の下で、多次元の場合は方程式の係数に対応するハミルトン流が **non-trapping** になるならば、初期データの積分可能条件の下で、初期値問題に対する時間大域解の存在定理、さらに波動作用素および散乱作用素の存在を証明した。ここで提出した積分可能条件は定理の証明を非常に簡素化し見通しをよくした。

研究成果の概要（英文）：Under the non-trapping condition we proved that there exist the global solution of the Cauchy problem for Kirchoff equations and moreover that the wave operator and the scattering operator for perturbed Kirchoff equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	750,000	4,150,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：キルヒホフ方程式、波動方程式、大域解、散乱問題、解の減衰

1. 研究開始当初の背景

ハミルトン流の **non-trapping** 性はシュレジンガー方程式の解が平滑効果をもつための必要条件にもなっているが、さらにこの条件 (**non-trapping**) は平滑化効果を超局所的に考察する場合にも重要な働きをする。たとえば、初期値が **microlocal** に減衰していればシュレジンガー方程式の解はマイクロカルに滑らかになる。非線型の双曲型方程式、

特に変係数を係数に持つキルヒホフ方程式に対する初期値問題および散乱問題を空間次元が1次元の場合と多次元の場合にそれぞれ違った方法での考察が必要と思われる。1次元の場合は初期データが減衰する条件の下で、多次元の場合は方程式の係数に対応するハミルトン流が **non-trapping** になる場合に、初期値問題に対する時間大域解の存在定理、さらに波動作用素さらに散乱作用素

の存在が予想されていた。

2. 研究の目的

(1) 摂動された波動方程式および摂動キルヒホフ方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在定理さらに散乱問題の研究。

(2) p -ラプラシアンに対応する波動方程式およびキルヒホフ方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在定理さらに散乱問題の研究。

(3) 熱方程式の初期値境界値問題の解の L^p — L^q 評価を導くのが目標。

(4) ストークス方程式に対する初期値問題の解の L^p — L^q 評価を導くのが目標。

(5) 空間多次元における p -ラプラシアンタイプの波動方程式およびキルヒホフ方程式に対する初期値問題のソボレフ空間での時間局所解の存在さらに時間大域解および散乱作用素の存在を証明するのが目標。

3. 研究の方法

(1) 摂動された波動方程式に対する初期値問題の解の時間減衰の結果を用いる。

(2) 空間1次元における摂動されたキルヒホフ方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在定理および散乱問題の解決を導くために、特性曲線の方法を用いて解の評価を行った。

(3) 空間多次元における摂動されたキルヒホフ方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在定理を導くための十分条件として、初期値が積分可能であるという検証が簡単な条件を発見した。多次元の場合は1次元の場合と違った証明方法を用いた。

(4) (3) と同様な設定の下で摂動されたキルヒホフ方程式に対する散乱問題の考察を行った。すなわち摂動されたキルヒホフ方程式とフリーなキルヒホフ方程式の間の非線形な波動作用素およびその逆作用素の存在が積分可能条件の下で可能になった。

(5) 空間多次元における摂動されたキルヒホフ方程式に対する初期値の積分可能条件を検証する場合、ハミルトン流がノントラッピング条件を満たすことが重要である。この条件の下では、摂動された波動方程式とフリーの波動方程式の間の波動作用素を用いることが出来て、積分可能条件を検証が容易になる。

(6) 半空間における熱方程式に対する初期値—境界値問題の解が L^p 有界となるための境界条件を分類する。この結果を半空間におけるストークス方程式に対する初期値—境界値問題に適用することが出来る。すなわち、ストークス方程式の解は熱方程式の基本解を用いて表現出来ることを利用して、解の評

価を行う。

(7) 半空間におけるストークス方程式に対する初期値—境界値問題は、境界条件がディレックレイおよびノイマン条件の場合に研究がなされているが、一般の境界条件についてはあまり研究がなされていない。境界条件をより一般的することによって、よりこの問題の本質が見えてくる。この場合ラプラス逆変換の計算が初期値—境界値問題の解の L^p — L^q 評価を導くのに有効に働く。

(8) 空間1次元における p -ラプラシアンタイプの波動方程式に対する初期値問題のソボレフ空間での時間局所解の存在定理はすでに得られている。また空間多次元における p -ラプラシアンタイプの波動方程式に対する初期値問題のジュブレ空間での時間局所解の存在定理は得られているので、今後の課題は空間多次元における p -ラプラシアンタイプの波動方程式およびキルヒホフ方程式に対する初期値問題のソボレフ空間での時間局所解の存在定理の証明さらに時間大域解および散乱作用素の存在証明である。

4. 研究成果

今回の研究課題において、摂動された波動方程式、空間1次元および多次元における摂動されたキルヒホフ方程式に対する初期問題の時間局所解の存在さらに時間大域解および散乱作用素の存在を証明した。さらにストークス方程式に対する初期値境界値問題についての考察は予定通り結果が得られたが、 p -ラプラシアンに対応する波動方程式およびキルヒホフ方程式に対する考察は今後の課題である。

(1) 多次元摂動波動方程式の初期値問題の解の減衰をノントラッピング条件の下で導いた。

(2) 空間1次元の摂動キルヒホフ方程式の初期値問題の大域解、波動作用素および散乱作用素の存在を示した。

(3) 多次元の摂動キルヒホフ方程式については、方程式の係数より決まるハミルトン流がノントラッピング条件を満たすという仮定の下で初期値問題の大域解、波動作用素および散乱作用素の存在を示した。

(4) 半空間における熱方程式に対する初期値—境界値問題の解が L^p 有界であるための境界作用素が満たすべき必要十分条件を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Time global solutions to the Cauchy problem for multidimensional perturbed Kirchhoff equations, K. Kajitani, Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, Edited by Antonio Bove, Springer imprint Birkhauser Boston (2009) 査読有, p.138-149
- ② Scattering for one dimensional perturbed Kirchhoff equations, K. Kajitani Journal Mathematical Society of Japan, 査読有, vol.60, (2008), 665-693.
- ③ Time decay estimates of solutions for wave equations with variable coefficients, K. Kajitani, Hyperbolic Problem and Regularity questions, Trend in Mathematics, Birkhauser, Verlag Basel/Switzerland, 査読有, (2006), 121-138
- ④ On the existence in Gevrey classes of local solutions to the Cauchy problem nonlinear hyperbolic systems with Holder continuous coefficients, K. Kajitani, and Yuzawa, Annali dell' Universita di Ferrara 55, 査読有, (2006), 303-315
- ⑤ The Cauchy problem for hyperbolic systems with Holder continuous coefficients with respect to the time variables, K. Kajitani and Yuzawa, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (5) vol. V, (2006), 査読有, 465-482.

[学会発表] (計13件)

- ① L^p estimates of solutions of mixed problem for heat equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2010年3月1日, 東海大学シンポジウム, 東海大学
- ② L^p estimates of solutions of mixed problem for heat equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2009年12月18日, ポアンカレ研究所解析セミナー, フランス パリ
- ③ Mixed problem for Stokes equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2009年3月10日, 東海大学シンポジウム, 東海大学
- ④ Scattering for multidimensional Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2008年12月17日, ポアンカレ研究所解析セミナー, フランス パリ
- ⑤ Scattering for perturbed Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2008年11月1日, 東海大学シンポジウム, 東海大学
- ⑥ Time global solutions of Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2008年9月18日, トリエステ大学解析セミナー, イタリア, トリエステ
- ⑦ Time global solutions to the Cauchy problem for perturbed Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2007年12月19日, ポアンカレ研究所解析セミナー, フランス パリ
- ⑧ 多次元キルヒホフ方程式初期値問題の時間大域解, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2007年12月7日, 早稲田大応用解析セミナー, 早稲田大学
- ⑨ Time global solutions to the Cauchy problem for perturbed Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2007年10月12日, シェナ大学シンポジウム, イタリア, シェナ
- ⑩ Scattering theory for one dimensional perturbed Kirchhoff, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2007年3月9日, 東海大学シンポジウム, 東海大学
- ⑪ The Cauchy problem for one dimensional Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2006年12月13日, ポアンカレ研究所解析セミナー, フランス パリ
- ⑫ The global solutions of the Cauchy problem for one dimensional perturbed Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2006年10月29日, 東海大学シンポジウム, 東海大学
- ⑬ Scattering for one dimensional Kirchhoff equations, 招待講演, 講演者: K. Kajitani, 2006年9月8日, ピサ大学解析セミナー, イタリア, ピサ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

梶谷 邦彦 (KAJITANI KUNIHICO)

筑波大学・名誉教授

研究者番号：00026262