

DA
3700
2004
11/9

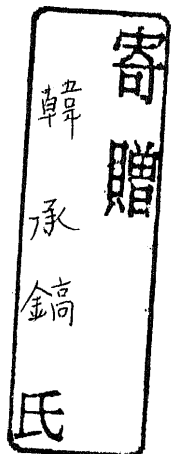
無線周波数利用効率を飛躍的に
高められる完全相補系列系を用いた
CDMA 移動通信システムに関する研究

システム情報工学研究科

筑波大学

2005 年 3 月

韓 承鎬



05009325

目次

第1章	序論	2
1.1	研究背景	2
1.2	研究内容	3
1.3	本論文の構成	3
第2章	多元接続方式	4
2.1	FDMA 方式	4
2.2	TDMA 方式	5
2.3	CDMA 方式	5
2.3.1	システムモデル	6
2.3.2	現行CDMA方式の問題点	7
第3章	完全相補系列系	8
3.1	記号と諸定義	8
3.1.1	行列と記号	8
3.1.2	系列と系列系	10
3.1.3	系列の相関関数	11
3.1.4	特殊な系列と系列系	13
3.2	関連定理	18
第4章	可変長拡散システム	37
4.1	システムの概要	37
4.2	送信機	38
4.2.1	パケットの構成	38
4.2.2	拡散系列の拡張	39
4.2.3	送信データ	42
4.2.4	拡張の影響	43
4.3	受信機	45
4.3.1	同期とチャンネル特性情報獲得	45
4.3.2	受信原理	46
4.3.3	データ判定	47

第5章 可変長拡散システムの性能評価	51
5.1 時間遅れ	51
5.2 データ伝送速度	51
5.3 回線容量	52
5.4 周波数利用効率	52
5.5 符号誤り率	54
謝辞	56
参考文献	57
著者論文リスト	60

目 次

2.1	FDMA 方式	4
2.2	TDMA 方式	5
2.3	CDMA 方式	6
2.4	直接拡散 (DS) の伝送系	6
2.5	拡散系列の理想的な相関特性	7
2.6	現行 CDMA システムで用いる拡散系列の相関特性	7
3.1	完全相補系列系の相関特性	16
4.1	システムモデル	37
4.2	パケット構成	39
4.3	ユーザが増えるときの対応	40
4.4	パケットの変化	44
4.5	パイロット信号の受信	45
4.6	二次フィルタリングの効果	46
4.7	受信原理	46
4.8	マルチパス、雑音がないチャンネルでの出力	47
4.9	マルチパスのパケットに与える影響	47
4.10	マルチパス環境での出力	48
4.11	チャンネルモデル	48
4.12	ビタビアルゴリズム	49
5.1	各システムの周波数利用効率	53
5.2	各種チャンネルでの可変長拡散システムの符号誤り率	55

表 目 次

4.1	サブパケットと系列の対応関係	38
4.2	系列の分配状況	42
4.3	拡散系列とデータ系列の割り当て状況	43
4.4	時間遅れの対応表	45
5.1	シミュレーションで想定したチャンネル	54

第1章 序論

1.1 研究背景

情報通信は21世紀の基幹産業となっており、それは有線通信技術、無線通信技術および装置化技術の三つの基幹技術からなっている。その中で、装置化技術の中心となるLSI技術はますます小型化、高速化、安価化し、技術開発は順調であり、有線通信技術の中心となる光ネットワーク技術の開発も順調に進んでいるが、将来的に需要が爆発的に増加すると予想されているモバイルネットワーク技術の開発においては、利用可能な無線周波数帯域が不足するという重大な問題が残っている。特に、近年モバイル環境でのデータ通信需要が急速に増えている為、無線周波数資源が不足している問題はますます深刻化していき、無線周波数利用率を高める技術が求められている。

ところが、現行のCDMA方式では、拡散系列の相関特性及びマルチパスによるチャンネル間干渉が原因で無線周波数利用率の向上を制限している [1]。

これらの問題を解決するために、末広らは先に無線周波数利用率を飛躍的に高められる完全相補系列系を用いるCDMAシステムを提案した [2]。完全相補系列系を用いるCDMAシステムでは、拡散系列として用いる完全相補系列の相関関数の和が理想的になるため [3]、チャンネル間干渉がなく、信号処理も非常に簡単になれる [4][5]。末広らは、また完全相補系列系を用いるCDMAシステムに、畳み込み拡散方式を適応することを提案し [6][7]、チップレートに近い情報伝送速度を実現可能にして、モバイル環境でのデータ通信速度を飛躍的に高めた。

しかし、末広らが提案した完全相補系列系を用いるCDMAシステムでは、一つのセル内のユーザ数が多くなる場合、拡散系列として用いる完全相補系列の系列長も長くなる問題点がある [33]。完全相補系列の系列長が長くなると、畳み込み拡散の時の出力レンジが大きくなり、増幅器のダイナミックレンジに対する要求が高まり、完全相補系列系を用いるCDMAシステムの効率に影響する恐れがある。従って、ユーザ数が多くなっても、長さが長くなりすぎない、完全相補系列系の生成法を開発することは実用的に非常に重要である。

本論文では、このような観点からより短い系列長の完全相補系列系の生成法と、新しい生成法によって生成される完全相補系列系を拡散系列として用いる可変長拡散システムを提案する。

1.2 研究内容

本論文では、新しい完全相補系列系の生成法を提案すると共に、新しい生成法で生成される完全相補系列系を応用した可変長拡散システムを提案する。

1.1 で述べたように、末広らが提案した完全相補系列系を用いる CDMA システムでは、完全相補系列系の系列を一組ずつセル内の各ユーザに拡散系列として分配することで、チャンネル間干渉がなく、無線周波数利用効率が高い移動通信システムの構築が可能となる。ところが、末広らが提案した完全相補系列系の生成法では、組数が N の完全相補系列系を生成するとその系列長は N^n ; ($n \geq 2$; $N, n \in \mathbb{Z}^+$) となる [8][9]。そのため、末広らが提案した完全相補系列系を用いる CDMA システムでは、セル内のユーザ数 ($N - 1$) が多くなる場合、拡散系列の系列長 (N^n) も長くなる問題点がある。

この問題を解決するため、本論文では、系列長が MN ; ($M \leq N$; $M, N \in \mathbb{Z}^+$) の N 組の系列からなる完全相補系列系の生成法 [29] と、完全相補系列系の組数を ON ; ($O, N \in \mathbb{Z}^+$) に拡張できる拡張法 [36] を提案する。そして、これらの完全相補系列系を拡散系列とする可変長拡散システムを提案する。

可変長拡散システムでは、本論文で提案する生成法により生成される完全相補系列系を拡散系列として用いることで、末広らが提案した完全相補系列系を用いる CDMA システムの長所を継承すると共に、問題点だった増幅器のダイナミックレンジに対する要求が高い問題を緩和することができる。また、可変長拡散システムは、そのときそのときのセル内のユーザ数と通信環境によって、拡散系列となる完全相補系列系を拡張させ、セル内のユーザの増加に低コストで柔軟に対応できるほか、ユーザの要求によってデータの通信速度と信頼性を変化させるシステムの構築が可能となる。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下のようになる。

第 2 章 : 「多元接続方式」では、現行の主な多元接続方式について述べる。

第 3 章 : 「完全相補系列系」では、可変長拡散システムで、拡散系列として用いる完全相補系列系の生成法に関する定理を述べる。

第 4 章 : 「可変長拡散システム」では、可変長拡散システムの構成と送受信原理を述べる。

第 5 章 : 「可変長拡散システムの性能評価」では、提案する可変長拡散システムのデータ伝送速度、周波数利用効率および符号誤り率などの評価を行う。

第2章 多元接続方式

移動通信システムでは、通常多くのユーザが一つの基地局と通信を行うため、各ユーザを判定するために、基地局ではシステムに与えられた信号空間を分割して各ユーザに割り当て通信を行うが、このようなやり方を多元接続と呼ぶ [1]。

分割の対象となる空間は、周波数、時間および符号があり、それぞれに応じて次の多元接続方式がある [10][11]。

- 周波数分割多元接続 (FDMA:Frequency Division Multiple Access)
- 時分割多元接続 (TDMA:Time Division Multiple Access)
- 符号分割多元接続 (CDMA:Code Division Multiple Access)

2.1 FDMA 方式

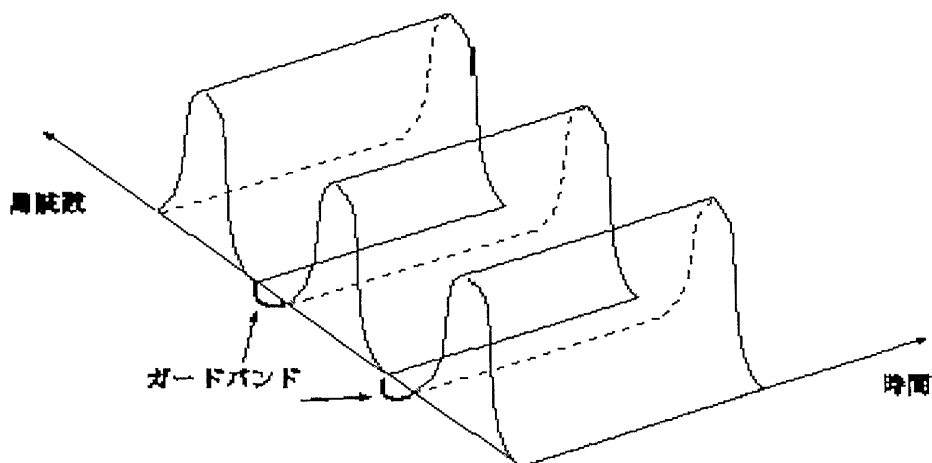


図 2.1: FDMA 方式

図 2.1 で示す FDMA 方式では、システムに与えられた周波数帯域を分割して各ユーザに割り当てるが、各ユーザに割り当てる周波数帯域の間にガードバンドを設けることにより、ユーザ間の相互干渉を避けている。そして、各ユーザは自分

に割り当てられた周波数帯域の信号のみを識別し送受信を行うため、FDMA 方式では信号は狭帯域で伝送され、受信端での信号対熱雑音比を高くすることが比較的容易である。しかしその一方、信号の狭帯域性によりフェージングの影響を受けやすい。

2.2 TDMA 方式

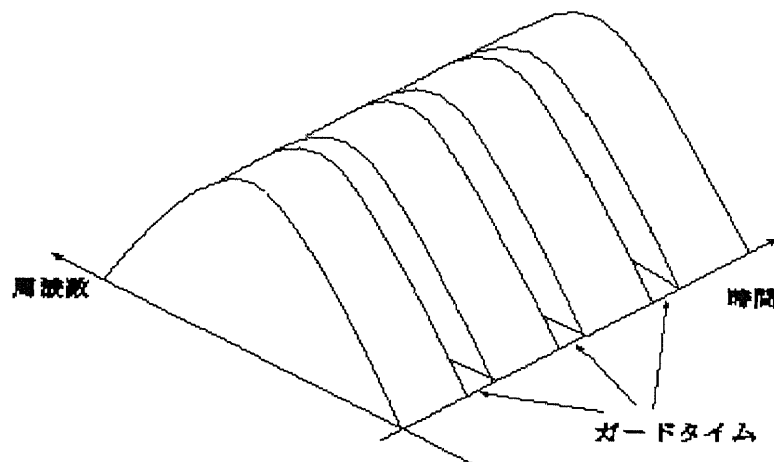


図 2.2: TDMA 方式

図 2.2 で示す TDMA 方式では、時間を分割して各ユーザに割り当てる。そのため、各移動局の信号はシステムに与えられたすべての周波数帯域を利用して、断続的かつ周期的に送信され、信号対熱雑音比を上げるためには、各移動局の送信電力を高くする必要がある。また、TDMA 同期および互いの信号が時間的に重ならないように、ガードタイムなどを設置するが、TDMA 方式ではこのようなオーバーヘッド部分の割合が増えて効率を低下させる。

2.3 CDMA 方式

図 2.3 で示す CDMA 方式では、同一の無線周波数においてユーザごとに異なる符号を割り当て多元接続を行なう。通常、ユーザはシステムに与えられた全帯域と時間を共有し、拡散符号を使って受信信号を逆拡散して信号を取り出すので、秘話性が高く、マルチパスによる干渉を受けにくく、設備が簡単などの長所がある。

ところが、現行の CDMA 方式は周波数利用効率が悪く、FDMA、TDMA に比べて伝送容量が小さいなどの欠点もある。

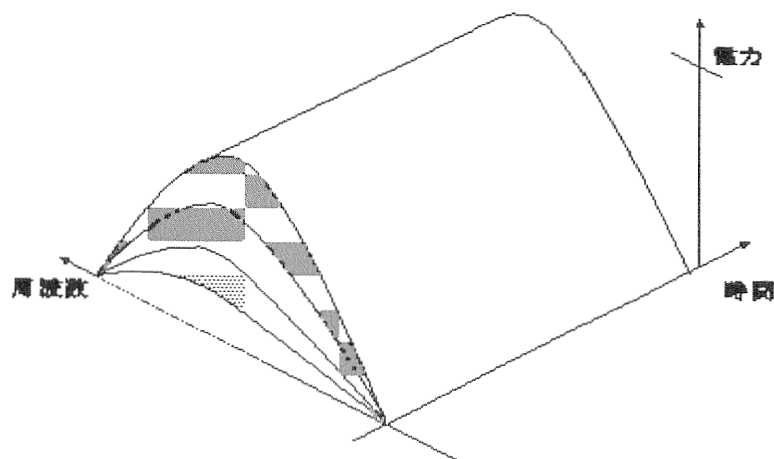


図 2.3: CDMA 方式

2.3.1 システムモデル

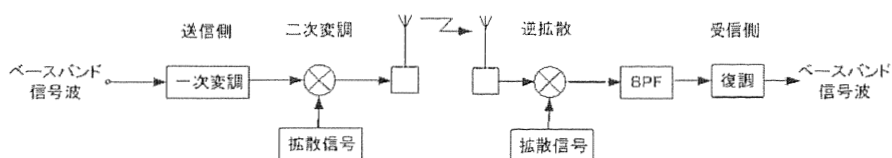


図 2.4: 直接拡散 (DS) の伝送系

CDMA 方式では、通常直接拡散 (Direct-Sequence Spread Spectrum: DS/SS) 方式が用いられるが、図 2.4 に DS/SS-CDMA 方式の基本的なシステム構成を示す。CS/SS-CDMA 方式では、変調を 2 段階に分けて行い、最初の変調を一次変調、次を二次変調または拡散変調という。一次変調では通常の狭帯域で用いる FSK, PSK などをつくる。一次変調された信号は拡散系列を乗算されて送信されるが、拡散系列のパルス幅は、一次変調におけるパルス幅に比べて十分短く設定するため、情報 1 ビットあたりの電力密度が小さく、帯域幅は非常に広がっている。

受信側では、到着した信号に送信側で用いたものと同じ拡散信号を再度乗積することで、逆拡散を行い広い帯域幅に拡散されていた信号を一次変調波にもどし、元のデータを復元する。

DS/SS-CDMA 方式では、信号のパワースペクトル密度を抑えることができるため、各ユーザの信号が時間、周波数的に重なっていても、信号品質の劣化と引き替えに通信が可能となる。

2.3.2 現行 CDMA 方式の問題点

上で述べたように CDMA 方式では符号の分割により、通信チャンネルを構成している。そのため、チャンネル間干渉を無くすには、図 2.5 のように拡散系列の自己相関関数が 0 シフト以外のすべてのシフトで 0 となり、相互相関関数はすべてのシフトで 0 となるのが理想的である。

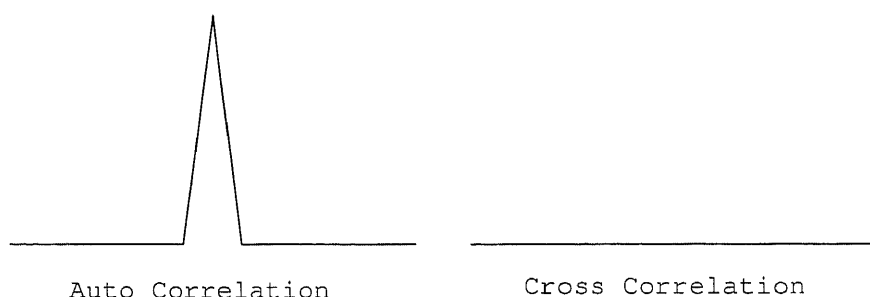


図 2.5: 拡散系列の理想的な相関特性

ところが現行の CDMA システムで用いられている拡散系列は、その自己相関関数にサイドローブがあり、相互相関関数もほとんどのシフトでの出力が 0 とならない。

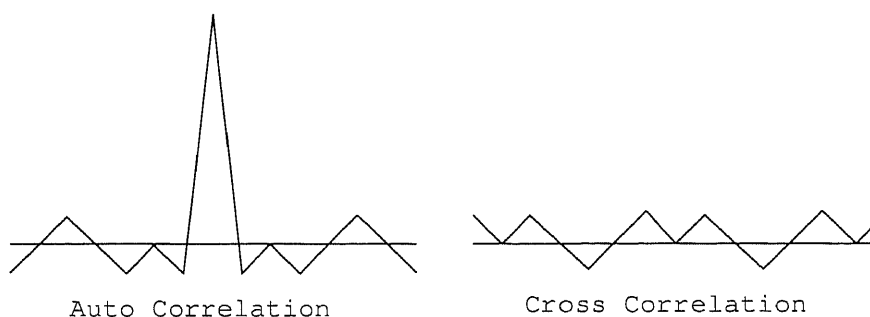


図 2.6: 現行 CDMA システムで用いる拡散系列の相関特性

そのため、多重するユーザ数が多くなると他のユーザからの干渉信号が大きくなり、希望するデータの復元に影響を及ぼす。また、基地局から遠くはなれたユーザからの送信信号は、近いユーザからの送信信号よりも大きな減衰を受ける（遠近問題）ので、基地局から近いユーザの信号の影響は非常に大きくなる。そのため、現行の CDMA 方式では、基地局から近いユーザは送信電力を下げ、遠いユーザは送信電力を上げるような送信電力制御（パワーコントロール）が不可欠となる。

つまり、現行の CDMA 方式では拡散系列の相関特性により、チャンネル間干渉が存在し、それがシステムの性能を下げる一番主な原因となっている。

第3章 完全相補系列系

3.1 記号と諸定義

3.1.1 行列と記号

本論文では、記号 Z を用いて整数の集合を表し、記号 Z^+ および Z^- で正の整数と負の整数の集合を表す。

また、次のような大きさ $M \times N$ の行列 A

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}_{M \times N} \quad (3.1)$$

に対して、符号 $A_{i,\cdot}$ を用いて行列 A の i 行の行ベクトルを表し、 $A_{\cdot,j}$ を用いて行列 A の j 列の列ベクトルを表す。

$$A_{i,\cdot} = [a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,N-1}]$$
$$A_{\cdot,j} = \begin{bmatrix} a_{0,j} \\ a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{M-1,j} \end{bmatrix}$$

そして、行列 A の転置行列を A^T で表し、

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{M-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{M-1,1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{0,N-1} & a_{1,N-1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}_{N \times M}$$

$FL(A)$ で行列 A の左右を反転させた行列を表記する。

$$FL(A) = \begin{bmatrix} a_{0,N-1} & a_{0,N-2} & \cdots & a_{0,0} \\ a_{1,N-1} & a_{1,N-2} & \cdots & a_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M-1,N-1} & a_{M-1,N-2} & \cdots & a_{M-1,0} \end{bmatrix}_{M \times N}$$

行列 A の複素共役行列は A^* で表し、

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{0,0}^* & a_{0,1}^* & \cdots & a_{0,N-1}^* \\ a_{1,0}^* & a_{1,1}^* & \cdots & a_{1,N-1}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M-1,0}^* & a_{M-1,1}^* & \cdots & a_{M-1,N-1}^* \end{bmatrix}_{M \times N}$$

A^{T*} で行列 A の転置複素共役行列を表す。

$$A^{T*} = \begin{bmatrix} a_{0,0}^* & a_{1,0}^* & \cdots & a_{M-1,0}^* \\ a_{0,1}^* & a_{1,1}^* & \cdots & a_{M-1,1}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{0,N-1}^* & a_{1,N-1}^* & \cdots & a_{M-1,N-1}^* \end{bmatrix}_{N \times M}$$

表記を簡略化するため、本論文では記号 \mathbf{Vec} と \mathbf{Diag} を導入し、 $\mathbf{Vec} A$ で行列 A の各列を順番につないで構成される列ベクトルを表し、 $\mathbf{Diag} B$ でベクトル B の各要素を対角成分とする対角行列を表す。

$$\mathbf{Vec} A = \begin{bmatrix} A_{\cdot,0} \\ A_{\cdot,1} \\ \vdots \\ A_{\cdot,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Diag} B = \begin{bmatrix} b_0 & & & \\ & b_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

ここで、 $B = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]$ 或いは $B = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T$ である。

そして、次のような行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,N'-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,N'-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{M'-1,0} & b_{M'-1,1} & \cdots & b_{M'-1,N'-1} \end{bmatrix}_{M' \times N'}$$

に対して、記号 \otimes でクロネッカ積を表し、次の演算と定義する。

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{0,0}B & a_{0,1}B & \cdots & a_{0,N-1}B \\ a_{1,0}B & a_{1,1}B & \cdots & a_{1,N-1}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M-1,0}B & a_{M-1,1}B & \cdots & a_{M-1,N-1}B \end{bmatrix}_{MM' \times NN'} \quad (3.4)$$

行列 A で、任意の異なる 2 行の内積が 0 となる時、行列 A を直交行列と呼び、

$$A_{i,\cdot} * A_{j,\cdot}^T = 0; \quad i \neq j \quad (3.5)$$

サイズ $N \times N$ の複素正方行列 A の転置行列 A^T と複素共役行列 A^* の積が N と単位行列 I との積になる場合

$$A^T A^* = A^* A^T = NI \quad (3.6)$$

あるいは次の式が成り立つ場合

$$A_{i,\cdot} A_{j,\cdot}^{T*} = A_{i,\cdot}^T A_{j,\cdot}^* = N\delta(i-j) \quad (3.7)$$

行列 A をユニタリ行列と呼ぶ。

ここで、 $\delta(n)$ は次の式

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

で定義されるディラックのデルタ関数である。

3.1.2 系列と系列系

系列

本論文では、長さ L の行ベクトル $S = [s_0 \ s_1 \ \cdots \ s_{L-1}]$ に、シフト位置を表す記号 n を加えて、各要素が s_0, s_1, \dots, s_{L-1} となる系列長 L の系列 $S(n)$ を表し、系列長 L の系列 $S(n)$ から記号 n を外して、各要素が系列 $S(n)$ の各要素と同じくなる長さ L のベクトルを表し、

$$S(n) = \sum_{l=0}^{L-1} s_l \delta(n-l) = \{s_0 \ s_1 \ \cdots \ s_{L-1}\} \quad (3.9)$$

$S^*(n)$ で系列 $S(n)$ の複素共役系列を表す。

$$S^*(n) = \sum_{l=0}^{L-1} s_l^* \delta(n-l) = \{s_0^* \ s_1^* \ \cdots \ s_{L-1}^*\} \quad (3.10)$$

また無限長系列 $S(n)$ が次の式

$$S(n) = S(n + N) \quad (3.11)$$

を満たす場合、この系列を周期 N の周期系列と呼び、その一周期の要素を用いて

$$\tilde{S}(n) = \{s_0 \ s_1 \ \cdots \ s_{N-1}\} \quad (3.12)$$

で表し、

$$\tilde{S}^K(n) = \{s_0 \ s_1 \ \cdots \ s_{N-1}\} \quad (3.13)$$

を用いて系列 $\{s_0 \ s_1 \ \cdots \ s_{N-1}\}$ を K 回繰り返した系列長 KN の周期 N の有限長周期系列を表す。

系列系

系列長 L の MN 個の系列

$$S_{i,k}(n) = \sum_{l=0}^{L-1} s_{i,k,l} \delta(n-l); \quad 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1 \quad (3.14)$$

を次のように並べた場合、

$$S(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & \cdots & S_{0,N-1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & \cdots & S_{1,N-1}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{M-1,0}(n) & S_{M-1,1}(n) & \cdots & S_{M-1,N-1}(n) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

この系列集合を系列系 $S(n)$ と呼び、同じ行に入っている系列を一つの組 (**Family**) とし、同じ列に入っている系列は対応する系列と定義する。また、 $S_{i,k}(n)$ を第 i 組目の第 k 番目の系列と呼び、表記を簡略化するため、系列系 $S(n)$ の組数、一つの組に入っている系列数および系列長を順番に並べて、 (M, N, L) の系列系 $S(n)$ と表記する。

3.1.3 系列の相関関数

有限長系列の相関関数

系列長がそれぞれ L_i, L_j となる有限長系列

$$\begin{cases} S_i(n) = \sum_{l=0}^{L_i-1} s_{i,l} \delta(n-l) \\ S_j(n) = \sum_{l=0}^{L_j-1} s_{j,l} \delta(n-l) \end{cases} \quad (3.16)$$

において、相関関数は

$$R_{S_i, S_j}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_i(m) S_j^*(m-n) \quad (3.17)$$

のように定義され、 $S_i(n) = S_j(n)$ の時の相関関数 $R_{S_i, S_i}(n)$ を系列 $S_i(n)$ の自己相関関数と呼び、 $S_i(n) \neq S_j(n)$ の時の相関関数 $R_{S_i, S_j}(n)$ を系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ の相互相関関数と呼ぶ [12]。

有限長系列の相関関数の定義により、系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ 相関関数の各要素は

$$R_{S_i, S_j} = S_i \cdot \begin{bmatrix} FL(S_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & FL(S_j) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & FL(S_j) \end{bmatrix}_{L_i \times (L_i + L_j - 1)}^* \quad (3.18)$$

となる。

周期系列の周期相関関数

周期が共に N となる無限長周期系列

$$\begin{cases} S_i(n) & ; & \tilde{S}_i(n) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{i,l} \delta(n-l) \\ S_j(n) & ; & \tilde{S}_j(n) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{j,l} \delta(n-l) \end{cases} \quad (3.19)$$

において、周期相関関数を

$$\tilde{R}_{S_i, S_j}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} S_i(m) S_j^*(m-n) \quad (3.20)$$

のように定義し、 $S_i(n) = S_j(n)$ の時の周期相関関数 $\tilde{R}_{S_i, S_i}(n)$ を系列 $S_i(n)$ の周期自己相関関数と呼び、 $S_i(n) \neq S_j(n)$ の時の周期相関関数 $\tilde{R}_{S_i, S_j}(n)$ を系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ の周期相互相関関数と呼ぶ。

周期相関関数の定義により、周期系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ の周期相関関数の各要素は

$$\tilde{R}_{S_i, S_j} = \tilde{S}_i \cdot \begin{bmatrix} s_{j,0} & s_{j,N-1} & \cdots & s_{j,1} \\ s_{j,1} & s_{j,0} & \cdots & s_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j,N-1} & s_{j,N-2} & \cdots & s_{j,0} \end{bmatrix}_{N \times N}^* \quad (3.21)$$

で表すことができる。

有限長系列の周期相関関数

系列長が共に L となる有限長系列

$$\begin{cases} S_i(n) = \sum_{l=0}^{L-1} s_{i,l} \delta(n-l) \\ S_j(n) = \sum_{l=0}^{L-1} s_{j,l} \delta(n-l) \end{cases} \quad (3.22)$$

において、周期相関関数を

$$\tilde{R}_{S_i, S_j}(n) = \sum_{m=0}^{L-1} S_i(m) S_j^*(m-n) \text{ mod } L \quad (3.23)$$

のように定義し、 $S_i(n) = S_j(n)$ の時の周期相関関数 $\tilde{R}_{S_i, S_i}(n)$ を系列 $S_i(n)$ の周期自己相関関数と呼び、 $S_i(n) \neq S_j(n)$ の時の周期相関関数 $\tilde{R}_{S_i, S_j}(n)$ を系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ の周期相互相関関数と呼ぶ。

また、ここでも周期相関関数の定義により、系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ の周期相関関数の各要素は

$$\tilde{R}_{S_i, S_j} = S_i \cdot \begin{bmatrix} s_{j,0} & s_{j,L-1} & \cdots & s_{j,1} \\ s_{j,1} & s_{j,0} & \cdots & s_{j,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j,L-1} & s_{j,L-2} & \cdots & s_{j,0} \end{bmatrix}_{L \times L}^* \quad (3.24)$$

で表すことができる。

3.1.4 特殊な系列と系列系

定義 1 系列長が L となる有限長系列 $S(n)$ で、その自己相関関数が 0 シフトを除くすべての N の倍数シフトで 0 となる系列を位数 N の倍数差直交系列と定義する [8]。

$$R_{S,S}(kN) = E_S \delta(k); k \in Z \quad (3.25)$$

ここで、 E_S は系列 $S(n)$ の 0 シフトでの自己相関係数である。

例 3 - 1 - 1 表記の簡略化を図るため、 $S(n) = \{++++\}$ で、系列長 $L = 4$ の系列 $S(n) = \{111-1\}$ を表した場合、系列 $S(n)$ の自己相関関数は

$$R_{S,S}(n) = \{-1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1\} \quad (3.26)$$

となるので、系列 $S(n)$ は位数 2 の倍数差直交系列となる。

定義 2 式 3.27 の M 個の系列長 L の位数 N の倍数差直交系列からなる $(M, 1, L)$ の系列系 $\mathcal{S}(n)$ において、異なる組の相互相関関数が、0 シフトを含む N の倍数シフトで 0 となる時、この系列系を位数 N のメイト系列系と定義する [13]。

$$\begin{cases} \mathcal{S}(n) &= \begin{bmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ \vdots \\ S_{M-1}(n) \end{bmatrix} \\ R_{S_i, S_j}(kN) &= E_{S_i} \delta(i-j) \delta(k); k \in Z \end{cases} \quad (3.27)$$

ここで、 E_{S_i} は第 i 組系列の 0 シフトでの自己相関係数である。

例 3 - 1 - 2 次のような $(2, 1, 4)$ の系列系

$$\mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{+++-\} \\ \{++-\} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

において、相関関数は

$$\begin{cases} R_{S_0, S_0}(n) &= \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\ R_{S_1, S_1}(n) &= \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\ R_{S_0, S_1}(n) &= \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \end{cases}$$

となるので、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は位数 2 のメイト系列系となる。

定義 3 $(1, N, L)$ の系列系 $\mathcal{S}(n)$ において、各系列の自己相関関数の和が 0 シフト以外のすべてのシフトで 0 となる時、この系列系を自己相補系列系と定義する [14]。

$$\begin{cases} \mathcal{S}(n) &= [S_0(n) \ S_1(n) \ \cdots \ S_{N-1}(n)] \\ \sum_{i=0}^{N-1} R_{S_i, S_i}(n) &= E_S \delta(n) \end{cases} \quad (3.30)$$

ここで、 E_S は各系列の 0 シフトでの自己相関係数の和である。

例 3 - 1 - 3 次のような $(1, 2, 4)$ の系列系

$$\mathcal{S}(n) = [S_0(n) \ S_1(n)] = [\{+++-\} \ \{++-\}] \quad (3.31)$$

において、系列 $S_0(n)$ と $S_1(n)$ の自己相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 R_{S_i, S_i}(n) &= R_{S_0, S_0}(n) + R_{S_1, S_1}(n) \\ &= \{-1, 0, 1, 4, 1, 0, -1\} + \{1, 0, -1, 4, -1, 0, 1\} \\ &= \{0, 0, 0, 8, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

となるので、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は自己相補系列系となる。

定義 4 (M, N, L) の系列系 $\mathcal{S}(n)$ において、任意の異なる組の対応する系列の相互相関関数 (N 個) の和がすべてのシフトで 0 になる時、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は相互相補系列系となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & \cdots & S_{0,N-1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & \cdots & S_{1,N-1}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{M-1,0}(n) & S_{M-1,1}(n) & \cdots & S_{M-1,N-1}(n) \end{bmatrix} \\ \sum_{k=0}^{N-1} R_{S_i,k,S_j,k}(n) = 0; \quad i \neq j \end{array} \right. \quad (3.32)$$

例 3 - 1 - 4 次のような $(2, 2, 4)$ の系列系

$$\mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{+++-\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

において、対応する系列の相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 R_{S_{0,k},S_{1,k}}(n) &= R_{S_{0,0},S_{1,0}}(n) + R_{S_{0,1},S_{1,1}}(n) \\ &= \{1, 0, 1, 0, 3, 0, -1\} + \{-1, 0, -1, 0, -3, 0, 1\} \\ &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

となるので、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は相互相補系列系となる。

定義 5 (M, N, L) の系列系 $\mathcal{S}(n)$ において、各組の系列の周期自己相関関数の和が 0 シフト以外のすべてのシフトで 0 となり、異なる組の対応する系列の周期相互相関関数の和がすべてのシフトで 0 となる時、系列系 $\mathcal{S}(n)$ を周期完全相補系列系と呼ぶ [15][16][17][18][19]。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & \cdots & S_{0,N-1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & \cdots & S_{1,N-1}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{M-1,0}(n) & S_{M-1,1}(n) & \cdots & S_{M-1,N-1}(n) \end{bmatrix} \\ \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{R}_{S_i,k,S_j,k}(n) = \tilde{E}_{S_i} \delta(i-j) \delta(n) \end{array} \right. \quad (3.34)$$

ここで、 \tilde{E}_{S_i} は第 i 組系列の 0 シフトでの周期自己相関係数の和である。

また、加法に関する線形性および式 3.24 より、周期完全相補系列系の定義式を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} S_{i,k} \cdot \begin{bmatrix} S_{j,k,0} & S_{j,k,L-1} & \cdots & S_{j,k,1} \\ S_{j,k,1} & S_{j,k,0} & \ddots & S_{j,k,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_{j,k,L-1} & S_{j,k,L-2} & \cdots & S_{j,k,0} \end{bmatrix}^* \\ &= [\tilde{E}_{S_i} \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \delta(i-j) \end{aligned} \quad (3.35)$$

例 3 - 1 - 5 式 3.33 と同じ系列系

$$\mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{++++\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} \end{bmatrix}$$

において、各組の系列の周期自己相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 \tilde{R}_{S_{0,k},S_{0,k}}(n) &= \tilde{R}_{S_{0,0},S_{0,0}}(n) + \tilde{R}_{S_{0,1},S_{0,1}}(n) \\ &= \{4, 0, 0, 0\} + \{4, 0, 0, 0\} \\ &= \{8, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 \tilde{R}_{S_{1,k},S_{1,k}}(n) &= \tilde{R}_{S_{1,0},S_{1,0}}(n) + \tilde{R}_{S_{1,1},S_{1,1}}(n) \\ &= \{4, 0, 0, 0\} + \{4, 0, 0, 0\} \\ &= \{8, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

となり、異なる組の周期相互相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 \tilde{R}_{S_{0,k},S_{1,k}}(n) &= \tilde{R}_{S_{0,0},S_{1,0}}(n) + \tilde{R}_{S_{0,1},S_{1,1}}(n) \\ &= \{0, 4, 0, 0\} + \{0, -4, 0, 0\} \\ &= \{0, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

となるので、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は周期完全相補系列系となる。

定義 6 (M, N, L) の系列系 $\mathcal{S}(n)$ において、各組の系列の自己相関関数の和が 0 シフト以外のすべてのシフトで 0 となり、異なる組の対応する系列の相互相関関数の和がすべてのシフトで 0 となるとき、系列系 $\mathcal{S}(n)$ を完全相補系列系と呼ぶ [3][8][9][28][30][29] [36]。

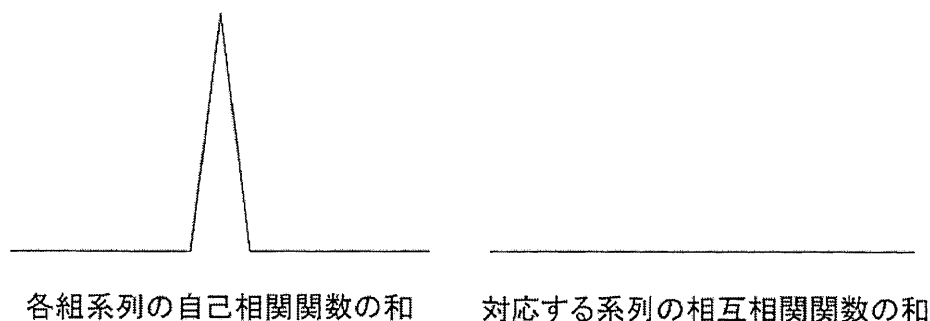


図 3.1: 完全相補系列系の相関特性

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & \cdots & S_{0,N-1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & \cdots & S_{1,N-1}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{M-1,0}(n) & S_{M-1,1}(n) & \cdots & S_{M-1,N-1}(n) \end{bmatrix} \\ \sum_{k=0}^{N-1} R_{S_i,k,S_j,k}(n) = E_{S_i} \delta(i-j) \delta(n) \end{array} \right. \quad (3.36)$$

ここで、 E_{S_i} は第 i 組系列の 0 シフトでの自己相関係数の和である。

ここでも加法に関する線形性および式 3.18 より、完全相補系列系の定義式を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} S_{i,k} \cdot \begin{bmatrix} FL(S_{j,k}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & FL(S_{j,k}) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & FL(S_{j,k}) \end{bmatrix}^* \\ &= [0 \ \cdots \ 0 \ E_{S_i} \ 0 \ \cdots \ 0] \delta(i-j) \end{aligned} \quad (3.37)$$

例 3 - 1 - 6 式 3.33 と同じ系列系

$$\mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{++++\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} \end{bmatrix}$$

において、各組系列の自己相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 R_{S_{0,k},S_{0,k}}(n) &= R_{S_{0,0},S_{0,0}}(n) + R_{S_{0,1},S_{0,1}}(n) \\ &= \{-1, 0, 1, 4, 1, 0, -1\} + \{1, 0, -1, 4, -1, 0, 1\} \\ &= \{0, 0, 0, 8, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 R_{S_{1,k},S_{1,k}}(n) &= R_{S_{1,0},S_{1,0}}(n) + R_{S_{1,1},S_{1,1}}(n) \\ &= \{1, 0, -1, 4, -1, 0, 1\} + \{-1, 0, 1, 4, 1, 0, -1\} \\ &= \{0, 0, 0, 8, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

となり、異なる組の相互相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 R_{S_{0,k},S_{1,k}}(n) &= R_{S_{0,0},S_{1,0}}(n) + R_{S_{0,1},S_{1,1}}(n) \\ &= \{1, 0, 1, 0, 3, 0, -1\} + \{-1, 0, -1, 0, -3, 0, 1\} \\ &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

となるので、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は完全相補系列系となる。

3.2 関連定理

定理 1 N 次ユニタリ行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (3.38)$$

の任意の M 列からなる行列

$$A' = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,0} & a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,M-1} \end{bmatrix}_{N \times M} \quad (3.39)$$

の各列を順番に並べたベクトルを成分とする系列長 MN の系列

$$\hat{A}(n) = (\text{Vec } A')^T(n) \quad (3.40)$$

は N の倍数差直交系列となる。

証明 1 式 3.40 によって生成される系列は

$$\hat{A}(n) = \sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{j,i} \delta[n - (iN + j)] \quad (3.41)$$

となるので

$$\begin{aligned} R_{\hat{A}, \hat{A}}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{A}(m) \hat{A}^*(m+n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{j,i} \delta[m - (iN + j)] \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{y,x}^* \delta[n + m - (xN + y)] \right) \\ R_{\hat{A}, \hat{A}}(kN) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{j,i} \delta[m - iN - j] \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{y,x}^* \delta[m - (x - k)N - y] \right) \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{j,i} \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{y,x}^* \delta[(i + k - x)N + (j - y)] \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} a_{j,i} a_{j,i+k}^* \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} A_{\cdot,i}^T A_{\cdot,i+k}^* = 0 ; (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0) \end{aligned}$$

例 3 - 2 - 1 4次ユニタリ行列となるアダマール行列

$$A = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

の前の2列からなる行列

$$A' = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \\ + & + \\ + & - \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

より、式3.40によって系列

$$\hat{A}(n) = \{+++++ -+-\} \quad (3.44)$$

を生成すると系列 $\hat{A}(n)$ の相関関数は

$$R_{\hat{A},\hat{A}}(n) = \{-1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 8 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1\}$$

となるので、系列 $\hat{A}(n)$ は位数4の倍数差直交系列となる。

定理 2 系列長 MN の N の倍数差直交系列 $\hat{A}(n)$ と N 次ユニタリ行列 B より $(1, N, MN)$ の系列系

$$\begin{cases} \mathcal{S}(n) = [S_0(n) S_1(n) \cdots S_{N-1}(n)] \\ S_i = \tilde{B}_{i,}^M(\text{Diag } \hat{A}) \end{cases} \quad (3.45)$$

を生成すると、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は自己相補系列系となる。

証明 2 式3.45によって生成される系列は

$$S_i(n) = \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} b_{i,k} \hat{A}(n) \delta[n - (jN + k)] \quad (3.46)$$

となるので

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} R_{S_i, S_i}(n) &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_i(m) S_i^*(m+n) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{\substack{M-1 \\ N-1}} b_{i,k} \hat{A}(m) \delta[m - (jN + k)] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{M-1} b_{i,y}^* \hat{A}^*(n+m) \delta[n+m-(xN+y)] \\
= & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{M-1} b_{i,k} \hat{A}(jN+k) \cdot \\
& \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{M-1} b_{i,y}^* \hat{A}^*(n+jN+k) \delta[n+(j-x)N+(k-y)] \\
= & B_{\cdot,k}^T B_{\cdot,y}^* \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{M-1} \hat{A}(jN+k) \cdot \\
& \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{M-1} \hat{A}^*(n+jN+k) \delta[n+(j-x)N+(k-y)] \\
= & N \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{M-1} \hat{A}(jN+k) \sum_{x=0}^{M-1} \hat{A}^*(n+jN+k) \delta[n+(j-x)N] \\
= & N \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{M-1} \hat{A}(jN+k) \sum_{x=0}^{M-1} \hat{A}^*(xN+k) \delta[n+(j-x)N]
\end{aligned}$$

ところが、 $\hat{A}(n)$ は N の倍数差直交系列なので、

$$R_{\hat{A},\hat{A}}(lN) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{A}(m) \hat{A}^*(lN+m) = 0; \quad l \neq 0$$

となり、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-1} R_{S_i,S_i}(n) &= N \sum_{\substack{k=0 \\ j=0}}^{M-1} \hat{A}(jN+k) \sum_{x=0}^{M-1} \hat{A}^*(xN+k) \delta[n+(j-x)N] \\
&= MN^2 \delta(j-x) \delta[n+(j-x)N] \\
&= MN^2 \delta(n)
\end{aligned}$$

これは、自己相補系列系の定義式である式 3.30 を満たすので系列系 $S(n)$ は自己相補系列系となる。

例 3 - 2 - 2 式 3.42 のアダマール行列をユニタリ行列として用い、式 3.44 の 4 の倍数差直交系列を利用して (1, 4, 8) の自己相補系列系 $S(n)$ を構成すると、系列系

$\mathcal{S}(n)$ の各系列は

$$\begin{aligned} [S_0(n)] &= [+++++] \cdot \text{Diag} [++++-+-] = [++++-+-] \\ [S_1(n)] &= [+ - + - + - + -] \cdot \text{Diag} [++++-+-] = [+ - + - + + + +] \\ [S_2(n)] &= [++--++--] \cdot \text{Diag} [++++-+-] = [++--+- - +] \\ [S_3(n)] &= [+ - - + + - - +] \cdot \text{Diag} [++++-+-] = [+ - - + + + - -] \end{aligned}$$

となるので、系列系 $\mathcal{S}(n)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(n) &= [S_0(n) \ S_0(1) \ S_2(n) \ S_3(n)] \\ S_0(n) &= \{++++-+-\} \\ S_1(n) &= \{+ - + - + + + +\} \\ S_2(n) &= \{++--+- - +\} \\ S_3(n) &= \{+ - - + + + - -\} \end{aligned}$$

これらの自己相関関数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 R_{S_i, S_i}(n) &= \\ & \begin{aligned} & \{ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 8 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\ & + \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 8 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\ & + \{ 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 3 \ -4 \ -1 \ 8 \ -1 \ -4 \ 3 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\ & + \{ -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -3 \ -4 \ 1 \ 8 \ 1 \ -4 \ -3 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \end{aligned} \\ & = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 32 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

となるので、式 3.45 によって生成される系列系 $\mathcal{S}(n)$ は自己相補系列系となる。

定理 3 N 次ユニタリ行列 A の任意の M 列から構成された $N \times M$ の行列 A' と、それぞれ M 次ユニタリ行列と、 N 次ユニタリ行列となる B, C から、行列を生成し、行列 D' の各行から、系列系 $\mathcal{S}(n)$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{S}(n) &= \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & \cdots & S_{0,N-1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & \cdots & S_{1,N-1}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{M-1,0}(n) & S_{M-1,1}(n) & \cdots & S_{M-1,N-1}(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D'_{0,\cdot}(n) & D'_{1,\cdot}(n) & \cdots & D'_{N-1,\cdot}(n) \\ D'_{N,\cdot}(n) & D'_{N+1,\cdot}(n) & \cdots & D'_{2N-1,\cdot}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D'_{(M-1)N,\cdot}(n) & D'_{(M-1)N+1,\cdot}(n) & \cdots & D'_{MN-1,\cdot}(n) \end{bmatrix} \\ D' &= (B \otimes C) \cdot \text{Diag} (\text{Vec } A') \end{aligned} \right. \quad (3.47)$$

を生成すると、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は (M, N, MN) の完全相補系列系となる。

証明 3 式 3.47 によって生成される行列は

$$\begin{aligned} D' &= (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A') \\ &= \begin{bmatrix} b_{0,0}C & b_{0,1}C & \cdots & b_{0,M-1}C \\ b_{1,0}C & b_{1,1}C & \cdots & b_{1,M-1}C \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{M-1,0}C & b_{M-1,1}C & \cdots & b_{M-1,M-1}C \end{bmatrix} \cdot \text{Diag} \begin{bmatrix} A_{\cdot,0} \\ A_{\cdot,1} \\ \vdots \\ A_{\cdot,M-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{cases} i = xN + y & (0 \leq x \leq M-1; 0 \leq y \leq N-1) \\ l = pN + q & (0 \leq p \leq M-1; 0 \leq q \leq N-1) \end{cases} \quad (3.48)$$

とおくと、

$$\begin{cases} d'_{i,j} &= d'_{xN+y,pN+q} = a_{q,p}b_{x,p}c_{y,q} \\ S_{x,y}(n) &= \sum_{\substack{q=0 \\ p=0 \\ M-1 \\ N-1}} a_{q,p}b_{x,p}c_{y,q}\delta(n - pN - q) \end{cases} \quad (3.49)$$

となるので、第 i 組系列と第 j 組系列の相関関数の和は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} R_{S_i,k,S_j,k}(n) \\ &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ k=0}}^{+\infty} S_{i,k}(m)S_{j,k}^*(m-n) \\ &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ k=0}}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{q=0 \\ p=0}}^{M-1} a_{q,p}b_{i,p}c_{k,q}\delta(m - pN - q) \right) \\ & \quad \cdot \left(\sum_{\substack{v=0 \\ u=0}}^{M-1} a_{v,u}^*b_{j,u}^*c_{k,v}^*\delta[m - n - uN - v] \right) \\ &= \sum_{\substack{q=0 \\ p=0}}^{M-1} \sum_{\substack{v=0 \\ u=0}}^{M-1} a_{q,p}a_{v,u}^*b_{i,p}b_{j,u}^*C_{\cdot,q}^T C_{\cdot,v}^* \\ & \quad \cdot \delta[n - (p-u)N - (q-v)] \\ &= N \sum_{\substack{u=0 \\ p=0}}^{M-1} A_{\cdot,p}^T A_{\cdot,u}^* b_{i,p} b_{j,u}^* \delta[n - (p-u)N] \\ &= N^2 B_i \cdot B_j^{T*} \delta[n] \\ &= MN^2 \delta(n) \delta(i-j) \end{aligned}$$

となる。

つまり、生成される系列系 $\mathcal{S}(n)$ の各系列は系列系 $\mathcal{S}(n)$ は (M, N, MN) の完全相補系列系となる。

例 3 - 2 - 3

$$A = C = \begin{bmatrix} +++ \\ +-+- \\ ++-- \\ +- -+ \end{bmatrix}; A' = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \\ ++ \\ +- \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$$

とおくと、式 3.47 により

$$\begin{aligned} D' &= (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A') \\ &= \begin{bmatrix} +++++++ \\ +-+-+--+ \\ ++--+- -- \\ +--++- -- \\ +++++- -- \\ +-+--+-+ \\ +- - - -+ \\ +- - + -+- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +000000 \\ 0+00000 \\ 00+0000 \\ 000+000 \\ 0000+00 \\ 00000-0 \\ 000000+0 \\ 0000000- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +++++-+- \\ +-+-+--- \\ ++--+- -- \\ +--++- -- \\ +++++-+- \\ +-+--+-+ \\ +- - - -+ \\ +- - + -+- \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、この行列上の 4 行から第 0 組系列

$$\begin{aligned} S_{0,0}(n) &= \{++++-+-\} \\ S_{0,1}(n) &= \{+-+-+---\} \\ S_{0,2}(n) &= \{++--+- --\} \\ S_{0,3}(n) &= \{+--++- --\} \end{aligned}$$

を生成し、また下の 4 行からは第 1 組系列

$$\begin{aligned} S_{1,0}(n) &= \{++++-+-\} \\ S_{1,1}(n) &= \{+-+-- --\} \\ S_{1,2}(n) &= \{++--+- --\} \\ S_{1,3}(n) &= \{+- - + -+-\} \end{aligned}$$

が生成され、系列系 $\mathcal{S}(n)$ を構成する。

$$\mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & S_{0,2}(n) & S_{0,3}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & S_{1,2}(n) & S_{1,3}(n) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

この系列系 $\mathcal{S}(n)$ の相関特性を確認すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{0,j}}(n) &= \\ &\{ \quad -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 8 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\ + &\{ \quad 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 8 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\ + &\{ \quad 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 3 \ -4 \ -1 \ 8 \ -1 \ -4 \ 3 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\ + &\{ \quad -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -3 \ -4 \ 1 \ 8 \ 1 \ -4 \ -3 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \\ = &\{ \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 32 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j}, S_{1,j}}(n) &= \\ &\{ \quad 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 8 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\ + &\{ \quad -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 8 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\ + &\{ \quad -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -3 \ -4 \ 1 \ 8 \ 1 \ -4 \ -3 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \\ + &\{ \quad 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 3 \ -4 \ -1 \ 8 \ -1 \ -4 \ 3 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\ = &\{ \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 32 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{1,j}}(n) &= \\ &\{ \quad 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 5 \ 0 \ 7 \ -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\ + &\{ \quad -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ -5 \ 0 \ -7 \ 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\ + &\{ \quad -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -5 \ 3 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\ + &\{ \quad 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 5 \ -3 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \\ = &\{ \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

となり、完全相補系列系の定義式 3.36 を満たすので、系列系 $\mathcal{S}(n)$ は $(2, 4, 8)$ の完全相補系列系となる。

定理 4 ユニタリ行列 A の大きさ N が M の整数倍になるとき、行列 A を N/M 個の大きさ $M \times N$ の行列 $A_0, A_1, \dots, A_{N/M-1}$ に分割して行列 D を生成し、この行

列 D の各行から系列系

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & \cdots & S_{0,N-1}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & \cdots & S_{1,N-1}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{N-1,0}(n) & S_{N-1,1}(n) & \cdots & S_{N-1,N-1}(n) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} D_{0,\cdot}(n) & D_{1,\cdot}(n) & \cdots & D_{N-1,\cdot}(n) \\ D_{N,\cdot}(n) & D_{N+1,\cdot}(n) & \cdots & D_{2N-1,\cdot}(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{(N-1)N,\cdot}(n) & D_{(N-1)N+1,\cdot}(n) & \cdots & D_{N^2-1,\cdot}(n) \end{bmatrix} \\ D = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_0) \\ (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_1) \\ \cdots \cdots \cdots \\ (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_{N/M-1}) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.51)$$

を生成すると、この系列系 $\mathcal{S}(n)$ は (N, N, MN) の完全相補系列系となる。

証明 4

$$D = \begin{bmatrix} (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_0) \\ (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_1) \\ \cdots \cdots \cdots \\ (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_{N/M-1}) \end{bmatrix}$$

ここで、

$$\begin{aligned} i &= xMN + yN + z, \quad l = pN + q \\ &\left(\begin{array}{l} 0 \leq y, p \leq M-1 \\ 0 \leq z, q \leq N-1 \\ 0 \leq x \leq N/M-1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

とおくと、

$$d_{i,j} = d_{xMN+yN+z,pN+q} = a_{q,xM+p} b_{y,p} c_{z,q} \quad (3.53)$$

$$S_{xM+y,z}(n) = \sum_{\substack{q=0 \\ p=0}}^{M-1, N-1} a_{q,xM+p} b_{y,p} c_{z,q} \delta(n - pN - q) \quad (3.54)$$

となるので、第 $xM + y$ 組系列と第 $tM + o$ 組系列の相関関数の和は、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-1} R_{S_{xM+y,k}, S_{tM+o,k}}(n) \\ &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ k=0}}^{N-1, +\infty} S_{xM+y,k}(m) S_{tM+o,k}^*(m-n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{q=0}^{M-1} a_{q,xM+p} b_{y,p} c_{k,q} \delta(m - pN - q) \right) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{v=0}^{M-1} a_{v,tM+u}^* b_{o,u}^* c_{k,v}^* \delta[m - n - uN - v] \right) \\
&= \sum_{\substack{q=0 \\ p=0}}^{M-1} \sum_{\substack{v=0 \\ u=0}}^{M-1} a_{q,xM+p} a_{v,tM+u}^* b_{y,p} b_{o,u}^* C_{\cdot,q}^T C_{\cdot,v}^* \\
&\quad \cdot \delta[n - (p - u)N - (q - v)] \\
&= N \sum_{\substack{u=0 \\ p=0}}^{M-1} A_{\cdot,xM+p}^T A_{\cdot,tM+u}^* b_{y,p} b_{o,u}^* \delta[n - (p - u)N] \\
&= N A_{\cdot,xM}^T A_{\cdot,tM} B_y \cdot B_o^{T*} \delta(n) \\
&= MN^2 \delta(n) \delta[(xM + t) - (yM + o)]
\end{aligned}$$

となる。

つまり、生成される系列系 $S(n)$ は (N, N, MN) の完全相補系列系となる。

例 3 - 2 - 4 前の例と同じく

$$A = C = \begin{bmatrix} +++ \\ + - + - \\ ++ -- \\ + - - + \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \\ ++ \\ +- \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \\ -- \\ -+ \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$$

と、設定すると上の例により

$$\left\{ \begin{array}{l}
S_0(n) = \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & S_{0,2}(n) & S_{0,3}(n) \\
S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & S_{1,2}(n) & S_{1,3}(n) \end{bmatrix} \\
S_{0,0}(n) = \{+++++ - +- \} \\
S_{0,1}(n) = \{+-+ - + + + \} \\
S_{0,2}(n) = \{++ - - + - - + \} \\
S_{0,3}(n) = \{+ - - + + + - - \} \\
S_{1,0}(n) = \{++++ - + - + \} \\
S_{1,1}(n) = \{+-+ - - - - - \} \\
S_{1,2}(n) = \{++ - - - + + - \} \\
S_{1,3}(n) = \{+ - - + - - + + \}
\end{array} \right. \quad (3.55)$$

となり、系列系 $S_0(n)$ は完全相補系列系となる。

また行列 A_1 を用いて、上の例と同じく行列 D_1 を生成すると、行列 D_1 は

$$D_1 = (B \otimes C) \cdot \text{Diag}(\text{Vec } A_1)$$

$$= \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +0000000 \\ 0+000000 \\ 00-00000 \\ 000-0000 \\ 0000+000 \\ 00000-00 \\ 000000-0 \\ 0000000+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & - & - & + & - & - & + \\ + & - & - & + & + & + & - & - \\ + & + & + & + & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + & + & + & + \\ + & + & - & - & - & + & + & - \\ + & - & - & + & - & - & + & + \\ + & + & + & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

となり、この行列からまた完全相補系列系 $S_1(n)$ が求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(n) = \begin{bmatrix} S_{2,0}(n) & S_{2,1}(n) & S_{2,2}(n) & S_{2,3}(n) \\ S_{3,0}(n) & S_{3,1}(n) & S_{3,2}(n) & S_{3,3}(n) \end{bmatrix} \\ S_{2,0} = \{++--+-+--\} \\ S_{2,1} = \{+---++++--\} \\ S_{2,2} = \{+++++--+-\} \\ S_{2,3} = \{+-+-++++\} \\ S_{3,0} = \{++---+--\} \\ S_{3,1} = \{+---+--++\} \\ S_{3,2} = \{++++-+-+\} \\ S_{3,3} = \{+-+-----\} \end{array} \right. \quad (3.56)$$

新たに生成した系列系 $S_1(n)$ に対しても、相関特性を確認すると

$$\sum_{j=0}^3 R_{S_{2,j}, S_{2,j}}(n) =$$

$$\begin{array}{l} \{ \quad 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad -4 \quad -1 \quad 8 \quad -1 \quad -4 \quad 3 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 1 \} \\ + \quad \{ \quad -1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -3 \quad -4 \quad 1 \quad 8 \quad 1 \quad -4 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \} \\ + \quad \{ \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 8 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \} \\ + \quad \{ \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 8 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \} \\ = \quad \{ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 32 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \end{array}$$

$$\sum_{j=0}^3 R_{S_{3,j}, S_{3,j}}(n) =$$

$$\begin{array}{l} \{ \quad -1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -3 \quad -4 \quad 1 \quad 8 \quad 1 \quad -4 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \} \\ + \quad \{ \quad 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad -4 \quad -1 \quad 8 \quad -1 \quad -4 \quad 3 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 1 \} \\ + \quad \{ \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 8 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \} \\ + \quad \{ \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 8 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \} \\ = \quad \{ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 32 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j}, S_{3,j}}(n) = \\
& \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\} \\
& + \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\} \\
& + \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\} \\
& + \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\} \\
& = \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

となるので、新しい系列系 $\mathcal{S}(n)$ は $(4, 4, 8)$ の完全相補系列系となる。

定理 5 (M, N, L) の完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ と、 O 次ユニタリ行列 E の W 行から系列系

$$\mathcal{S}(n) = E \otimes \mathcal{S}'(n) \quad (3.57)$$

を生成すると、これは (WM, ON, L) の完全相補系列系となる。

証明 5

$$\mathcal{S}(n) = E \otimes \mathcal{S}'(n) = \left[\begin{array}{cccc} e_{0,0}\mathcal{S}'(n) & e_{0,1}\mathcal{S}'(n) & \cdots & e_{0,O-1}\mathcal{S}'(n) \\ e_{1,0}\mathcal{S}'(n) & e_{1,1}\mathcal{S}'(n) & \cdots & e_{1,O-1}\mathcal{S}'(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{W-1,0}\mathcal{S}'(n) & e_{W-1,1}\mathcal{S}'(n) & \cdots & e_{W-1,O-1}\mathcal{S}'(n) \end{array} \right]_{WM \times ON}$$

ここで、

$$i = uM + v \quad (0 \leq u \leq W - 1; 0 \leq v \leq M - 1)$$

$$j = sM + t \quad (0 \leq s \leq W - 1; 0 \leq t \leq M - 1)$$

$$k = xN + y \quad (0 \leq x \leq O - 1; 0 \leq y \leq N - 1)$$

とおくと、

$$S_{i,k}(n) = e_{u,x} S'_{v,y}(n) \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{ON-1} R_{S_{i,k}, S_{j,k}}(n) \\
& = \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{\substack{O-1 \\ N-1}} R_{e_{u,x} S'_{v,y}, e_{s,x} S'_{t,y}}(n) \\
& = \sum_{x=0}^{O-1} e_{u,x} e_{s,x}^* \sum_{y=0}^{N-1} R_{S'_{v,y}, S'_{t,y}}(n) \\
& = O \sum_{y=0}^{N-1} R_{S'_{v,y}, S'_{t,y}}(n) \delta(u - s) \\
& = ONL \delta(n) \delta(v - t) \delta(u - s) \\
& = ONL \delta(n) \delta(i - j)
\end{aligned}$$

となり、定義式 3.30 により系列系 \mathcal{S} は完全相補系列系となる。

例 3 - 2 - 5

$$\mathcal{S}'(n) = \begin{bmatrix} S'_{0,0}(n) & S'_{0,1}(n) \\ S'_{1,0}(n) & S'_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{+++-\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$$

とすると、生成される系列系 $\mathcal{S}(n)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(n) &= \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & S_{0,2}(n) & S_{0,3}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & S_{1,2}(n) & S_{1,3}(n) \\ S_{2,0}(n) & S_{2,1}(n) & S_{2,2}(n) & S_{2,3}(n) \\ S_{3,0}(n) & S_{3,1}(n) & S_{3,2}(n) & S_{3,3}(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} \otimes \mathcal{S}'(n) \\ &= \begin{bmatrix} \{+++-\} & \{+-++\} & \{+++-\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} & \{++-+\} & \{+---\} \\ \{+++-\} & \{+-++\} & \{---+\} & \{-+--\} \\ \{++-+\} & \{+---\} & \{---+\} & \{-+--\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

系列系 $\mathcal{S}(n)$ の各組系列の相関特性は

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{0,j}}(n) &= \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\ &+ \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\ &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 16 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{1,j}}(n) &= \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\ &+ \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\ &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{2,j}}(n) &= \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\ &+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ -4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\ &+ \{ -1 \ 0 \ 1 \ -4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\ &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j},S_{3,j}}(n) &= \{ \quad 1 \ 0 \quad 1 \ 0 \quad 3 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad -1 \ 0 \quad -3 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad -1 \ 0 \quad -3 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \quad 1 \ 0 \quad 3 \ 0 \ -1 \} \\
&= \{ \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j},S_{1,j}}(n) &= \{ \quad 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad 1 \ 4 \quad 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad 1 \ 4 \quad 1 \ 0 \ -1 \} \\
&= \{ \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 16 \quad 0 \ 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j},S_{2,j}}(n) &= \{ \quad -1 \ 0 \quad 3 \ 0 \quad 1 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad 3 \ 0 \quad 1 \ 0 \quad 1 \} \\
&= \{ \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j},S_{3,j}}(n) &= \{ \quad 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad 1 \ 4 \quad 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad 1 \ -4 \quad 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \ -1 \ -4 \ -1 \ 0 \quad 1 \} \\
&= \{ \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{2,j},S_{2,j}}(n) &= \{ \quad -1 \ 0 \quad 1 \ 4 \quad 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad 1 \ 4 \quad 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \quad 1 \} \\
&= \{ \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 16 \quad 0 \ 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{2,j},S_{3,j}}(n) &= \{ \quad 1 \ 0 \quad 1 \ 0 \quad 3 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad -1 \ 0 \quad -3 \ 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \ 0 \quad 1 \ 0 \quad 3 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \ 0 \quad -1 \ 0 \quad -3 \ 0 \quad 1 \} \\
&= \{ \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_3,j,S_3,j}(n) &= \{ \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \} \\
&+ \{ \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \} \\
&+ \{ \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \} \\
&= \{ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 16 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}
\end{aligned}$$

となるので、定義式3.30により、生成された系列系 $\mathcal{S}(n)$ は完全相補系列系である。

定理 6 (M, N, L) の完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ のうち、任意の M' ($M' < M$) 組の系列に対して O 次ユニタリ行列 E の U 行とのクロネッカ積を求め、残りの $M - M'$ に対しては O 次ユニタリ行列 F の V 行とのクロネッカ積を求め、系列系 $\mathcal{S}(n)$ を生成すると、これは $(M'U + (M - M')V, ON, L)$ の完全相補系列系となる。

$$\mathcal{S}(n) = \begin{bmatrix} F \otimes S'_{M-M'}(n) \\ E \otimes S'_{M'}(n) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

証明 6 定理5により、系列系 $\mathcal{S}(n)$ で

$$S_F(n) = F \otimes S'_{M-M'}(n) \quad (3.60)$$

および

$$S_E(n) = E \otimes S'_{M'}(n) \quad (3.61)$$

は、完全相補系列系となるので、系列系 $\mathcal{S}(n)$ が完全相補系列系になるためには、系列系 $S_E(n)$ の任意の一組の系列と、系列系 $S_F(n)$ の任意の一組の系列がいつも相互相補系列系になればよい。

それで、

$$\begin{cases} i = uM' + v & (0 \leq u \leq U - 1; 0 \leq v \leq M' - 1) \\ j = s(M - M') + t & (0 \leq s \leq V - 1; 0 \leq t \leq M - M' - 1) \\ k = xN + y & (0 \leq x \leq O - 1; 0 \leq y \leq N - 1) \end{cases} \quad (3.62)$$

とおくと、

$$\begin{cases} S_{Ei,k}(n) = e_{u,x} S'_{v,y}(n) \\ S_{Fj,k}(n) = e_{s,x} S'_{t,y}(n) \end{cases} \quad (3.63)$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{ON-1} R_{S_{Ei,k}, S_{Fj,k}}(n) &= \sum_{\substack{y=0 \\ x=0}}^{O-1} R_{e_{u,x} S'_{v,y}, f_{s,x} S'_{t,y}}(n) \\
&= \sum_{x=0}^{O-1} e_{u,x} f_{s,x}^* \sum_{y=0}^{N-1} R_{S'_{v,y}, S'_{t,y}}(n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、対応する系列の相互相関関数の和はすべてのシフトで0となる。

つまり、定理6によって生成される系列系 $\mathcal{S}(n)$ は完全相補系列系となる。

例 3 - 2 - 6

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(n) &= \begin{bmatrix} S'_{0,0}(n) & S'_{0,1}(n) \\ S'_{1,0}(n) & S'_{1,1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{+++-\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と仮定すると、式6によって生成される系列系 $\mathcal{S}(n)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(n) &= \begin{bmatrix} \mathcal{S}_F(n) \\ \mathcal{S}_E(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \otimes \mathcal{S}'_{0,j}(n) \\ E \otimes \mathcal{S}'_{1,j}(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \{+++-\} & \{+-++\} & \{0000\} & \{0000\} \\ \{0000\} & \{0000\} & \{+++-\} & \{+-++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} & \{- - + -\} & \{- + ++\} \\ \{++-+\} & \{+---\} & \{++-+\} & \{+- --\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

系列系 $\mathcal{S}(n)$ に入っている系列の相関特性を確認すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{0,j}}(n) &= \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{1,j}}(n) &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ \sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j}, S_{2,j}}(n) &= \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\ &+ \{ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\ &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{0,j},S_{3,j}}(n) &= \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\
&+ \{ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j},S_{1,j}}(n) &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\
&= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j},S_{2,j}}(n) &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ -3 \ 0 \ -3 \ 0 \ 1 \} \\
&+ \{ -1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 3 \ 0 \ -1 \} \\
&= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{1,j},S_{3,j}}(n) &= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \} \\
&+ \{ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \} \\
&= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{2,j},S_{2,j}}(n) &= \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\
&+ \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\
&= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 16 \ 0 \ 0 \ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{2,j},S_{3,j}}(n) &= \{ -1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\
&+ \{ -1 \ 0 \ 1 \ -4 \ 1 \ 0 \ -1 \} \\
&+ \{ 1 \ 0 \ -1 \ -4 \ -1 \ 0 \ 1 \} \\
&= \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^3 R_{S_{3,j}, S_{3,j}}(n) &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、生成された系列系 $S(n)$ は完全相補系列系である。

定理 7 (M, N, L) の系列系 $S(n)$ が、完全相補系列系であると、その系列系 $S(n)$ は周期完全相補系列系でもある。

証明 7 系列系 $S(n)$ は完全相補系列系なので、完全相補系列系の定義式 3.37 から次の式

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_{i,k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & s_{j,k,L-1} & \cdots & s_{j,k,0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & s_{j,k,L-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^* = 0 \quad (3.64)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_{i,k} \cdot \begin{bmatrix} s_{j,k,0} & 0 & \cdots & 0 \\ s_{j,k,1} & s_{j,k,0} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j,k,L-1} & s_{j,k,L-2} & \cdots & s_{j,k,0} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} E_{S_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \delta(i-j) \quad (3.65)$$

が得られる。

式 3.64 + 式 3.65 より、次の

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_{i,k} \cdot \begin{bmatrix} s_{j,k,0} & s_{j,k,L-1} & \cdots & s_{j,k,1} \\ s_{j,k,1} & s_{j,k,0} & \ddots & s_{j,k,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{j,k,L-1} & s_{j,k,L-2} & \cdots & s_{j,k,0} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} E_{S_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T \delta(i-j) \quad (3.66)$$

が得られ、この式 3.66 は周期完全相補系列系の定義式 3.35 となるので、系列系 $S(n)$ が、完全相補系列系であると、周期完全相補系列系にもなるという結論を得られる。

定理 8 (M, N, L) の系列系 $S(n)$ が周期完全相補系列系である場合、組数 M の上限は系列の数 N となる [31].

証明 8 (M, N, L) の系列系 $S(n)$ で、各系列 $S_{i,k}(n)$ に対して離散フーリエ変換を行って得られる系列を

$$\begin{cases} S_{i,k}(\mathbf{m}) = \sum_{l=0}^{L-1} s_{i,k,l} \delta(\mathbf{m}-l) \\ 0 \leq i \leq M-1; 0 \leq k \leq N-1 \end{cases} \quad (3.67)$$

で表した場合，周期完全相補系列系の定義式である式 3.35 の両辺にフーリエ変換をすると，フーリエ変換の性質により，系列系 $\mathcal{S}(n)$ が周期完全相補系列系になるために満たすべき条件は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{s}_{i,k,0} \mathbf{s}_{j,k,0}^*, \mathbf{s}_{i,k,1} \mathbf{s}_{j,k,1}^*, \dots, \mathbf{s}_{i,k,L-1} \mathbf{s}_{j,k,L-1}^*] \\ &= \begin{cases} E_{S_i} [1 \ 1 \ \dots \ 1] \delta(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ 0 \leq \mathbf{i}, \mathbf{j} \leq M - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.68)$$

となる。

ここで，新たに列ベクトル $\mathbf{S}_{i, \cdot, l}$ を次のように定義すると

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{i, \cdot, l} = [\mathbf{s}_{i,0,l}, \mathbf{s}_{i,1,l}, \dots, \mathbf{s}_{i,N-1,l}]^T \\ 0 \leq \mathbf{i} \leq M - 1; 0 \leq l \leq L - 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

式 3.68 は次のようになる。

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{i, \cdot, l}^T \cdot \mathbf{S}_{j, \cdot, l}^* = E_{S_i} \delta(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ 0 \leq \mathbf{i}, \mathbf{j} \leq M - 1; 0 \leq l \leq L - 1 \end{cases} \quad (3.70)$$

上の式 3.70 から， (M, N, L) の系列系 \mathcal{S} が完全相補系列系になるためには，式 3.69 で定義されるベクトルが互いに直交する必要がある。

ところが，式 3.69 の定義から， $\mathbf{S}_{i, \cdot, l}, \mathbf{S}_{j, \cdot, l}^*$ は共に長さ N の列ベクトルであるので， N 次元空間で互いに直交するベクトルは最大 N 個存在する。

つれて， (M, N, L) の系列系 $\mathcal{S}(n)$ が周期完全相補系列系である場合，組数 M の上限は系列の数 N となる。

定理 9 系列系 $\mathcal{S}(n)$ が完全相補系列系である場合，組数 M の上限は系列の数 N である [31].

証明 9 $(M, N, L; M > N)$ の完全相補系列系 $\mathcal{S}(n)$ が存在すると仮定すると，定理 7 により，系列系 \mathcal{S} は $(M, N, L; M > N)$ の周期完全相補系列系になる。これは，定理 8 と矛盾するので， $(M, N, L; M > N)$ の完全相補系列系は存在しない。

つまり，系列系 $\mathcal{S}(n)$ が完全相補系列系である場合，組数 M の上限は系列数 N となる。

第4章 可変長拡散システム

4.1 システムの概要

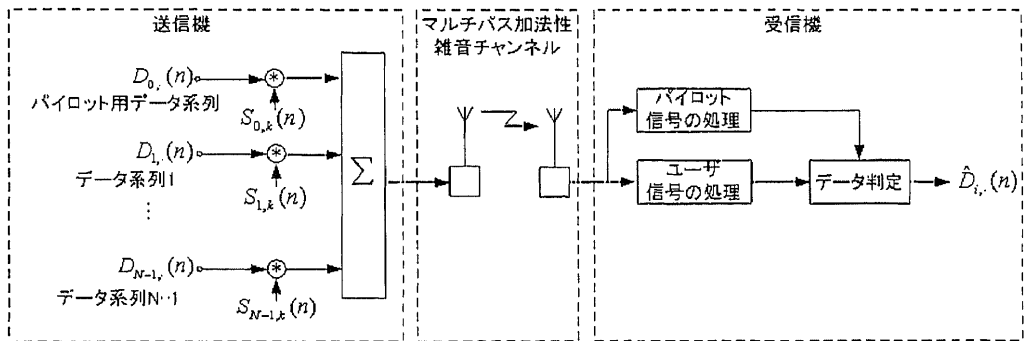


図 4.1: システムモデル

図 4.1 で示す可変長拡散システムでは、 (N, N, L) の完全相補系列系を拡散系列としてチャンネルを生成し、パケット方式により通信を行う [20][21] [22][23][24]。

(N, N, L) の完全相補系列系のうち、第 0 組系列は同期獲得、チャンネル特性推定などのシステムデータを拡散するために保留し、残りの $N-1$ 組系列は一組あるいは数組ずつ各ユーザに割り当て、各ユーザの拡散系列として使用させる [25]。本論文では、セル内のユーザ数を最大にする観点から、特別な説明がない場合には、残りの $N-1$ 組の系列を一組ずつ $N-1$ 人のユーザに割り当てたことにする [32][37]。

また、本論文では一つのパケットに含まれているデータを式 4.1 の $(N, 1, K)$ のデータ系列系 $\mathcal{D}(n)$ を用いて表す。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(n) &= \begin{bmatrix} D_{0,k}(n) \\ D_{1,k}(n) \\ \vdots \\ D_{N-1,k}(n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \{ d_{0,0} & d_{0,1} & \cdots & d_{0,K-1} \} \\ \{ d_{1,0} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,K-1} \} \\ \{ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \} \\ \{ d_{N-1,0} & d_{N-1,1} & \cdots & d_{N-1,K-1} \} \end{bmatrix}; d_{i,j} \in \{-1, 1\} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

ここで、 K は一つのデータ系列に入っているデータのビット数となり、 N は拡散系列として用いた (N, N, L) の完全相補系列系の N と等しい。したがって、可変長拡散システムではひとつのパケットに、システムデータ以外に最大 $(N-1) \times M$ ビットの送信データが含まれる。

送信機では、システムデータ系列と第0組の完全相補系列との畳み込みおよび各データ系列とそのデータ系列に対応させた拡散系列との畳み込み $D_{i,\cdot}(n) * S_{i,k}(n)$ を求めた後、これらをすべて加算し送信信号を構成する。

ここで、“*” は畳み込み演算を表し、系列 $S_i(n)$ と $S_j(n)$ の畳み込みは次のように定義される。

$$S_i(n) * S_j(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_i(m) S_j(n-m) \quad (4.2)$$

送信機から送信された信号は、無線チャンネルでマルチパスおよび加法性雑音加わるため、受信機では、まず設定したシステムデータ系列(パイロット信号)と受信された信号より、チャンネル特性(マルチパス特性)を推定する。そして、推定したチャンネル特性を用いて逆拡散された信号より、送信データ系列 $\hat{D}_{i,\cdot}(n)$ を推定する。

4.2 送信機

4.2.1 パケットの構成

図4.2で示すように、可変長拡散システムの時間 T_P を占めるひとつのパケットは時間 T を占める N 個のサブパケットから構成されている。ここで、 N は拡散系列として用いた (N, N, L) の完全相補系列系の N と等しい。

	$SP_0(n)$	$SP_1(n)$...	$SP_i(n)$...	$SP_{N-1}(n)$
$D_{0,\cdot}(n)*$	$S_{0,0}(n)$	$S_{0,1}(n)$...	$S_{0,i}(n)$...	$S_{0,N-1}(n)$
$D_{1,\cdot}(n)*$	$S_{1,0}(n)$	$S_{1,1}(n)$...	$S_{1,i}(n)$...	$S_{1,N-1}(n)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$D_{N-1,\cdot}(n)*$	$S_{N-1,0}(n)$	$S_{N-1,1}(n)$...	$S_{N-1,i}(n)$...	$S_{N-1,N-1}(n)$

表 4.1: サブパケットと系列の対応関係

各サブパケットには時間順によって0から $N-1$ まで番号を付け、表4.1で示すように、完全相補系列系 $S(n)$ の各組で、列番号がサブパケットの番号と同じの系列と対応させる。

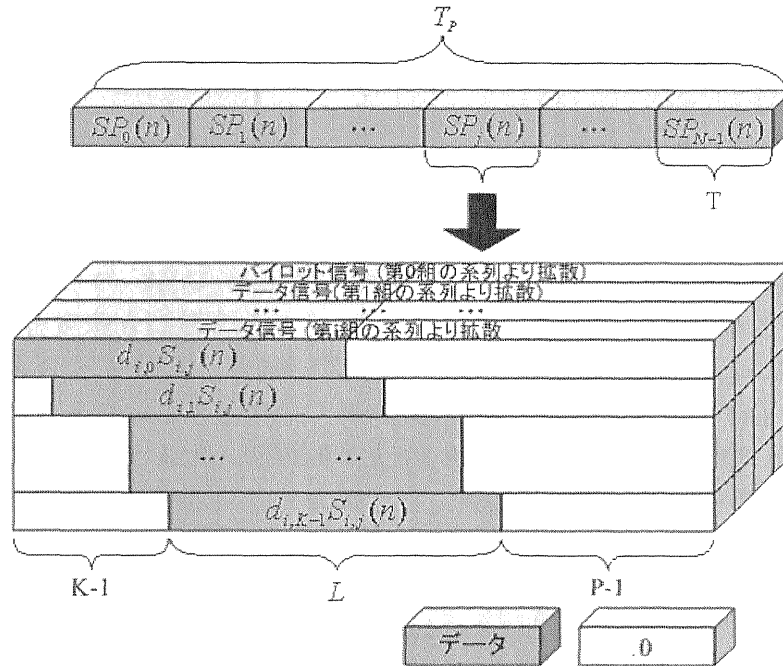


図 4.2: パケット構成

各サブパケットでは、図 4.2 で示すように、各送信データ系列が対応系列により畳み込み拡散された後、すべての送信データ系列の拡散信号が加算され、サブパケットの送信データ部分を構成する。そして、その後にマルチパスの影響を防ぐための $P - 1$ 個のゼロを加え、サブパケットを構成する。ここで、 P はマルチパスの及べる最大のチップ数である。

4.2.2 拡散系列の拡張

本論文で提案する可変長拡散システムは、完全相補系列系を拡散系列系を用いることで、各チャンネルの間では互いに無干渉で同時に通信することができるのの一つの特徴とする。可変長拡散システムのもう一つの特徴は、そのときそのときの通信環境によって、定理 6 より用いる完全相補系列系を拡張することで、セル内のユーザの増加などに柔軟に対応できるほか、異速度通信なども実現できることである。

定理 6 により、 (M, N, L) の完全相補系列系 $S'(n)$ と、 O 次ユニタリ行列 E および F により、 $(M'U + (M - M')V, ON, L)$ の完全相補系列系 $S(n)$ を生成できる。

可変長拡散システムではシステムの効率化を図り、

$$\begin{cases} M = N \\ U = V = O \\ E = \mathcal{H}(O) \\ F = I(O) \end{cases} \quad (4.3)$$

と設定する。ここで、 $\mathcal{H}(O)$ は O 次アダマール行列、 $I(O)$ は O 次単位行列を示す。式 4.3 の条件を定理 6 に適応すると、 (N, N, L) の完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ は、 O 次ユニタリ行列 E と F より、 (ON, ON, L) の完全相補系列系 $\mathcal{S}(n)$ に拡張される。

ここでは、 $N = O = 2$ と仮定し、 $(4, 4, L)$ の完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ を拡散系列とした可変長拡散システムが、拡散系列を $(8, 8, L)$ の完全相補系列系 $\mathcal{S}(n)$ に拡張させて、ユーザの増加に対応するのを例とし、可変長拡散システムの特徴を述べる。

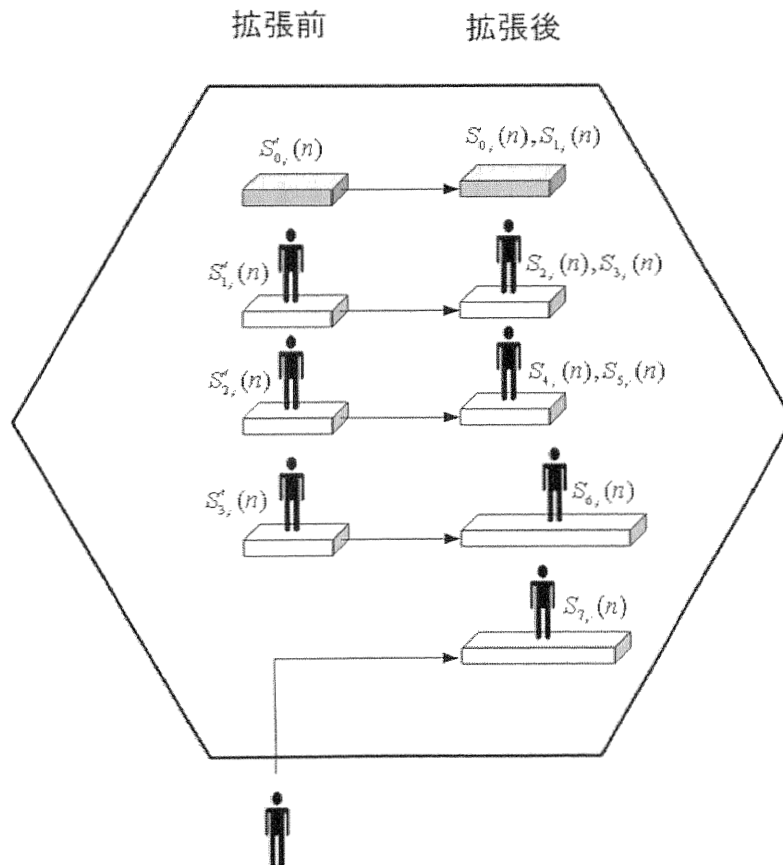


図 4.3: ユーザが増えるときの対応

系列系が拡張される前には、図 4.3 で示すセルの中で、3 人のユーザが $(4, 4, L)$

の完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ を拡散系列として同時通信していたと仮定する。

$$\mathcal{S}'(n) = \begin{bmatrix} S'_{0,0}(n) & S'_{0,1}(n) & S'_{0,2}(n) & S'_{0,3}(n) \\ S'_{1,0}(n) & S'_{1,1}(n) & S'_{1,2}(n) & S'_{1,3}(n) \\ S'_{2,0}(n) & S'_{2,1}(n) & S'_{2,2}(n) & S'_{2,3}(n) \\ S'_{3,0}(n) & S'_{3,1}(n) & S'_{3,2}(n) & S'_{3,3}(n) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

この時、システムは完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ の第0組の系列 $S'_{0,\cdot}(n)$ をシステム系列として、パイロット信号などの送信用に使用し、第1組から第3組までの系列は拡散系列として一組ずつ各ユーザに割り当てたとする。すると、システムは完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ のすべての組の系列を割り当てたので、セル内に新しいユーザが移動してくると、完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ では新しいユーザに割り当てる系列がなくなる。そのため、可変長拡散システムでは、元の完全相補系列系 $\mathcal{S}'(n)$ を拡張することで、完全相補系列系の組数を増やし、新しいユーザに割り当てる方法を使用する。

この例では、回線容量を増やすために、システムは定理6により、 $(8, 8, L)$ の完全相補系列系 $\mathcal{S}(n)$ を生成する。ここで、各パラメータは $N = O = 2$ として、式4.3を用い、増えたユーザ数は一人 ($M' = 1$) となるので、定理6より拡張された完全相補系列系 $\mathcal{S}(n)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(n) &= \begin{bmatrix} S_{0,0}(n) & S_{0,1}(n) & S_{0,2}(n) & S_{0,3}(n) & S_{0,4}(n) & S_{0,5}(n) & S_{0,6}(n) & S_{0,7}(n) \\ S_{1,0}(n) & S_{1,1}(n) & S_{1,2}(n) & S_{1,3}(n) & S_{1,4}(n) & S_{1,5}(n) & S_{1,6}(n) & S_{1,7}(n) \\ S_{2,0}(n) & S_{2,1}(n) & S_{2,2}(n) & S_{2,3}(n) & S_{2,4}(n) & S_{2,5}(n) & S_{2,6}(n) & S_{2,7}(n) \\ S_{3,0}(n) & S_{3,1}(n) & S_{3,2}(n) & S_{3,3}(n) & S_{3,4}(n) & S_{3,5}(n) & S_{3,6}(n) & S_{3,7}(n) \\ S_{4,0}(n) & S_{4,1}(n) & S_{4,2}(n) & S_{4,3}(n) & S_{4,4}(n) & S_{4,5}(n) & S_{4,6}(n) & S_{4,7}(n) \\ S_{5,0}(n) & S_{5,1}(n) & S_{5,2}(n) & S_{5,3}(n) & S_{5,4}(n) & S_{5,5}(n) & S_{5,6}(n) & S_{5,7}(n) \\ S_{6,0}(n) & S_{6,1}(n) & S_{6,2}(n) & S_{6,3}(n) & S_{6,4}(n) & S_{6,5}(n) & S_{6,6}(n) & S_{6,7}(n) \\ S_{7,0}(n) & S_{7,1}(n) & S_{7,2}(n) & S_{7,3}(n) & S_{7,4}(n) & S_{7,5}(n) & S_{7,6}(n) & S_{7,7}(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S'_{0,0}(n) & S'_{0,1}(n) & S'_{0,2}(n) & S'_{0,3}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{0,0}(n) & S'_{0,1}(n) & S'_{0,2}(n) & S'_{0,3}(n) \\ S'_{1,0}(n) & S'_{1,1}(n) & S'_{1,2}(n) & S'_{1,3}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{1,0}(n) & S'_{1,1}(n) & S'_{1,2}(n) & S'_{1,3}(n) \\ S'_{2,0}(n) & S'_{2,1}(n) & S'_{2,2}(n) & S'_{2,3}(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{2,0}(n) & S'_{2,1}(n) & S'_{2,2}(n) & S'_{2,3}(n) \\ S'_{3,0}(n) & S'_{3,1}(n) & S'_{3,2}(n) & S'_{3,3}(n) & S'_{3,0}(n) & S'_{3,1}(n) & S'_{3,2}(n) & S'_{3,3}(n) \\ S'_{3,0}(n) & S'_{3,1}(n) & S'_{3,2}(n) & S'_{3,3}(n) & -S'_{3,0}(n) & -S'_{3,1}(n) & -S'_{3,2}(n) & -S'_{3,3}(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

システムは拡張された $(8, 8, L)$ の完全相補系列系 $\mathcal{S}(n)$ の中で、行列 F によって拡張されたすべての系列を元のユーザに分配し、行列 E によって拡張された系列は異なるユーザに分配する。上の例での系列の変化は表4.2のようになる。

	パイロット	ユーザ 1	ユーザ 2	ユーザ 3	ユーザ 4
拡張される前	$S'_{0,\cdot}(n)$	$S'_{1,\cdot}(n)$	$S'_{2,\cdot}(n)$	$S'_{3,\cdot}(n)$	なし
拡張された後	$S_{0,\cdot}(n)$ $S_{1,\cdot}(n)$	$S_{2,\cdot}(n)$ $S_{3,\cdot}(n)$	$S_{4,\cdot}(n)$ $S_{5,\cdot}(n)$	$S_{6,\cdot}(n)$	$S_{7,\cdot}(n)$
受信用系列	$S'_{0,\cdot}(n)$	$S'_{1,\cdot}(n)$	$S'_{2,\cdot}(n)$	$S_{6,\cdot}(n)$	$S_{7,\cdot}(n)$

表 4.2: 系列の分配状況

拡張された後の系列系 $\mathcal{S}(n)$ において、行列 F によって拡張された系列は、0 を含まない部分は拡張前の系列と同じで、それらはすべて元のユーザに分配される。そのため、これらの系列を割り当てられたユーザは、完全相補系列系が拡張された後に新しい逆拡散用の受信用系列に変える必要はなく、拡張される前の系列を用いて逆拡散を行う。

つまり、系列系の拡張により、受信用系列を変える必要があるのは、行列 E によって拡張された系列を割り当てられたユーザで、行列 F によって拡張された系列を割り当てられたユーザの通信性能は拡張の影響を受けない。この例では、系列の拡張により影響を受けるのはユーザ 3 のみになる。

また行列 E によって拡張された系列を割り当てられたユーザも、行列 E をアダマール行列に設定したことにより、新しい受信用系列への変更が容易になる。

4.2.3 送信データ

完全相補系列系が拡張されると、送信データ系列の表現もそれに応じて変化する。式 4.5 で拡張前の送信データ系列を表し、拡張された後の送信データ系列 $\mathcal{D}(n)$ は式 4.6 をもって表すと、完全相補系列系の拡張に伴いデータ系列の組数も ON となる。

$$\mathcal{D}'(n) = \begin{bmatrix} D'_{0,\cdot}(n) \\ D'_{1,\cdot}(n) \\ \vdots \\ D'_{N-1,\cdot}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ d'_{0,0} & d'_{0,1} & \cdots & d'_{0,K-1} \} \\ \{ d'_{1,0} & d'_{1,1} & \cdots & d'_{1,K-1} \} \\ \{ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \} \\ \{ d'_{N-1,0} & d'_{N-1,1} & \cdots & d'_{N-1,K-1} \} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{D}(n) = \begin{bmatrix} D_{0,\cdot}(n) \\ D_{1,\cdot}(n) \\ \vdots \\ D_{ON-1,\cdot}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ d_{0,0} & d_{0,1} & \cdots & d_{0,K-1} \} \\ \{ d_{1,0} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,K-1} \} \\ \{ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \} \\ \{ d_{ON-1,0} & d_{ON-1,1} & \cdots & d_{OP-1,K-1} \} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

システムはデータ系列に対して、拡散系列の分配と同じく、第 i 組の系列が割り当てられたユーザには第 i 番目のデータ系列を割り当てる。

上の例では表 4.3 で示すように、拡張後システム系列として $S_{0,\cdot}(n), S_{1,\cdot}(n)$ が割り当てられたので、データ系列系での $D_{0,\cdot}(n), D_{1,\cdot}(n)$ にパイロット信号などのシステムデータ系列を送信する。ユーザ 1 とユーザ 2 も同じく、割り当てられた系列に対応して、 $D_{2,\cdot}(n), D_{3,\cdot}(n)$ と $D_{4,\cdot}(n), D_{5,\cdot}(n)$ をそれぞれの送信データに設定する。そして、行列 E によって拡張された系列を割り当てられたユーザ 3 とユーザ 4 は $D_{6,\cdot}(n)$ と $D_{7,\cdot}(n)$ をそれぞれの送信データに設定する。

		システム	ユーザ 1	ユーザ 2	ユーザ 3	ユーザ 4
拡張前	分配系列	$S'_{0,\cdot}(n)$	$S'_{1,\cdot}(n)$	$S'_{2,\cdot}(n)$	$S'_{3,\cdot}(n)$	なし
	受信系列	$S'_{0,\cdot}(n)$	$S'_{1,\cdot}(n)$	$S'_{2,\cdot}(n)$	$S'_{3,\cdot}(n)$	なし
	データ系列	$D'_{0,\cdot}(n)$	$D'_{1,\cdot}(n)$	$D'_{2,\cdot}(n)$	$D'_{3,\cdot}(n)$	なし
拡張後	分配系列	$S_{0,\cdot}(n)$ $S_{1,\cdot}(n)$	$S_{2,\cdot}(n)$ $S_{3,\cdot}(n)$	$S_{4,\cdot}(n)$ $S_{5,\cdot}(n)$	$S_{6,\cdot}(n)$	$S_{7,\cdot}(n)$
	受信系列	$S'_{0,\cdot}(n)$	$S'_{1,\cdot}(n)$	$S'_{2,\cdot}(n)$	$S_{6,\cdot}(n)$	$S_{7,\cdot}(n)$
	データ系列	$D_{0,\cdot}(n)$ $D_{1,\cdot}(n)$	$D_{2,\cdot}(n)$ $D_{3,\cdot}(n)$	$D_{4,\cdot}(n)$ $D_{5,\cdot}(n)$	$D_{6,\cdot}(n)$	$D_{7,\cdot}(n)$

表 4.3: 拡散系列とデータ系列の割り当て状況

4.2.4 拡張の影響

本節では、拡散系列として用いる系列系を (N, N, L) の完全相補系列系 $S'(n)$ から、 (ON, ON, L) の完全相補系列系 $S(n)$ に拡張した場合、システムが受ける影響に関して述べる。

- 回線容量 M

可変長拡散システムでは、完全相補系列系の拡張によって、完全相補系列系の組数を N から ON に増やすことができる。ところが、系列を各ユーザに割り当てる時、行列 F によって拡張される系列はすべてもとのユーザに分配されるので、行列 F によって拡張される系列は回線容量に影響を与えない。すなわち、系列系の拡張に伴う回線容量の増加量は、行列 E によって増加する組数と等しく、拡張前の回線容量を M' とした場合、拡張後の回線容量は

$$M = M' + M'(O - 1) \quad (4.7)$$

となる。

- パケット長

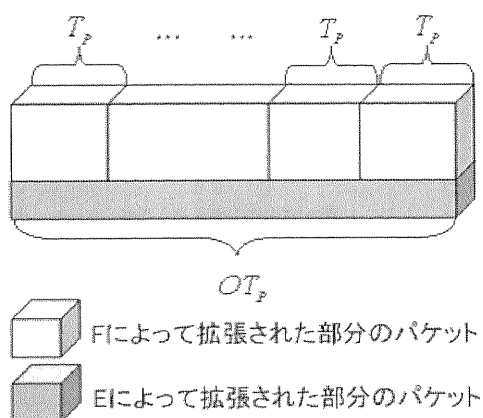


図 4.4: パケットの変化

完全相補系列系の拡張により、一つの packets に入っているサブ packets の数も N 個から ON 個に変化する。ところが、図 4.2 でデータ系列でのデータのビット数 K と系列長 L は変化がないので、一つのサブ packets が占める時間 T も変化しない。そのため一つの packets が占める時間は、図 4.4 で示すように T_p から O 倍の OT_p になる。

その中で、行列 F によって拡張される系列を割り当てられるユーザは、元の系列によって受信するので、 packets 長は拡張する前の T_p となり、可変長拡散システムでは、異なる packets 長の信号が無干渉に混在し、様々なユーザのニーズに答えることが可能となる。

- 通信速度

行列 F によって拡張された系列を割り当てられたユーザに対しては、図 4.4 で示すように、 packets 長と一つの packets に含まれるデータのビット数が変化しないため、系列系の拡張による通信速度の影響を受けない。

ところが、行列 E によって拡張された系列を割り当てられたユーザにとっては、系列系の拡張後 packets 長が OT_p と O 倍になるので、 M ビットのデータが受信される時間が O 倍になり、通信速度は拡張前の $\frac{1}{O}$ となる。

- プロセスゲイン

行列 F によって拡張された系列を割り当てられたユーザにとっては、プロセスゲインも系列系が拡張される前と変わらない。行列 E によって拡張された系列を割り当てられたユーザにとっては、受信される信号のエネルギーが O 倍になるほか、プロセスゲインも O 倍となり、系列系の拡張によってデータの信頼性を高めることができる。

4.3 受信機

4.3.1 同期とチャンネル特性情報獲得

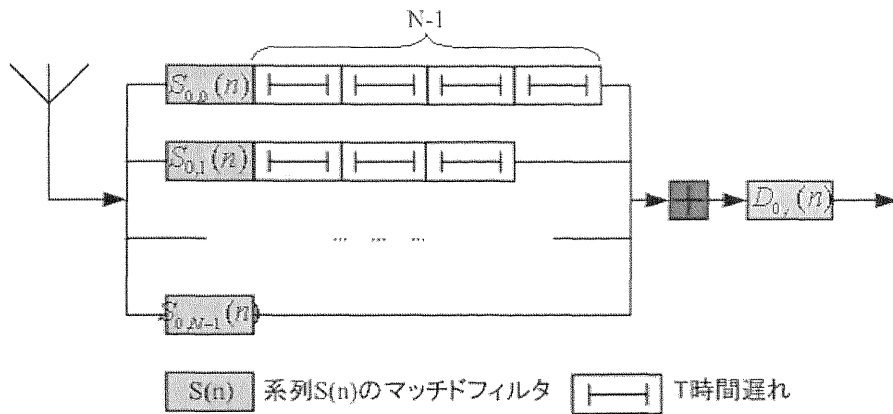


図 4.5: パイロット信号の受信

図 4.5 はパイロット信号の受信装置を示す。受信機では、受信された信号をシステム系列として与えられた第 0 組の各系列のマッチドフィルタに通し、それぞれに表 4.4 で示す時間遅れを付加して加算する。

系列	$S_{i,0}(n)$	$S_{i,1}(n)$...	$S_{i,N-2}(n)$	$S_{i,N-1}(n)$
時間遅れ	$(N-1)T$	$(N-2)T$...	T	0

表 4.4: 時間遅れの対応表

すると、完全相補系列の自己相関特性により、出力のゼロコリレーションゾーンでシステム系列として設定されたデータ系列の第 1 番目の系列が出力される。同期獲得、チャンネル推定などはシステム性能に非常に大きい影響を与えるので、その推定精度を高めるため、送信側ではあらかじめ相関関数がいい系列をシステム系列として設定する。そして、加算器からの出力をもう一度システム系列の整合フィルタに通すことで、同期およびチャンネル推定の精度を高める。

図 4.6 では、マルチパス特性が $|H(n)| = \{1 \ 0.4 \ 0.1 \ 0.2\}$ となるチャンネルを想定し、(2, 2, 4) の完全相補系列系を用いて、 $E_b/N_0 = 2dB$ の送信エネルギーで送信された場合、加算器とシステム系列 $D_{0,}(n) = \{-1 \ 1 \ 1 \ 1\}$ のマッチドフィルタからの出力波形を比較し、システム系列による二次フィルタリングの効果を示している。

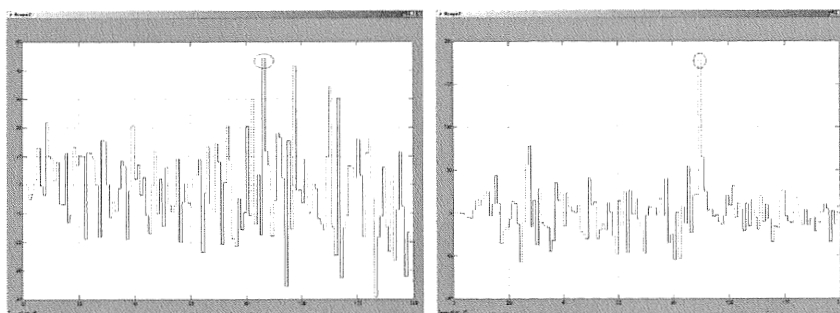


図 4.6: 二次フィルタリングの効果

4.3.2 受信原理

図 4.5 のパイロット受信装置より、同期が獲得できると、受信機はこの情報を利用して、図 4.7 で示すように受信信号をサブパケット別に分割する。分割されたサブパケットはそれぞれ表 4.1 で対応させた系列のマッチドフィルタに入力され、それらの出力に表 4.4 で対応させた時間遅れを付加して加算する。

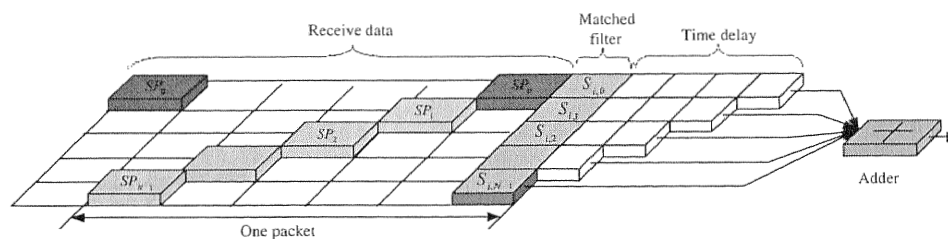


図 4.7: 受信原理

すると、完全相補系列系の相関特性により、チャンネルにマルチパスと雑音がない場合には図 4.8 で示す信号が出力され、この出力信号の極性から送信データを判定することができる。

ところが、移動通信では通常マルチパスが存在し、そのため信号間干渉が生じ、システムの性能を劣化させる。

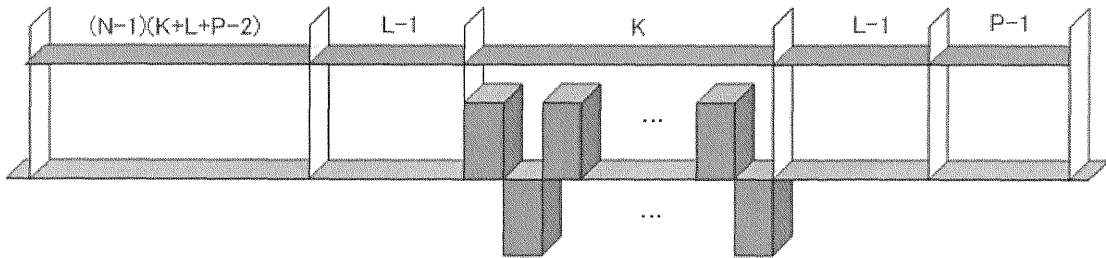


図 4.8: マルチパス、雑音がないチャンネルでの出力

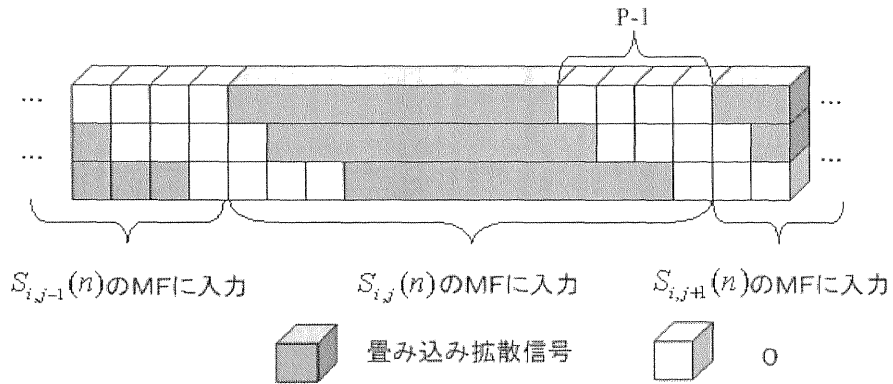


図 4.9: マルチパスの packets に与える影響

そのため可変長拡散システムでは、マルチパスが及べる最大のチップ数を P とした場合、サブパケットを構成する時、図 4.2 で表すように、最後にマルチパスの影響を防ぐための $P - 1$ 個の 0 を入れることにより、サブパケット間干渉を回避した (図 4.9)。そのため、サブパケットを分割の時の誤操作を防ぎ、加算器からの出力は図 4.10 となる。

4.3.3 データ判定

図 4.10 で示すように、各ユーザのマッチドフィルタから出力される信号には、マルチパスによる符号間干渉が存在し、システムはマルチパスおよび加法性雑音に加わった信号から、送信データを判定する。

これらの影響を考慮するため、マルチパス特性を系列

$$H(n) = \{ h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_{P-1} \} \tag{4.8}$$

を用いて表すと、送信チャンネルは図 4.11 で示すようになり、ユーザのマッチドフィルタからの出力は

$$Q_{i,\cdot}(n) = E_{S_i} D_{i,\cdot}(n) * H(n) + v(t) \tag{4.9}$$

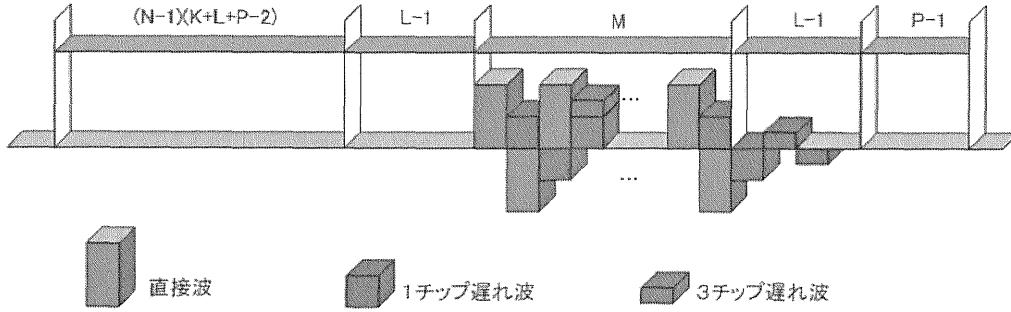


図 4.10: マルチパス環境での出力

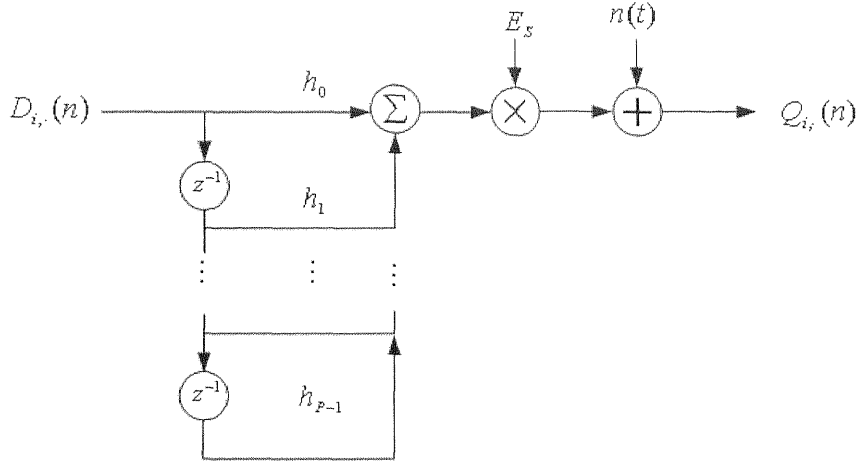


図 4.11: チャンネルモデル

となる。

各ユーザは、マッチドフィルタからの出力 $Q_{i_s}(n)$ および図 4.5 で示す装置により推定したマルチパス特性 $\hat{H}(n)$ を用いて、送信データ系列を判定するが、本論文では次の 5 のステップからなるビタビアルゴリズムを用いて送信データ系列を判定する [26]。

Step 1 判定済みのデータ数を書き込むレジスタ R を 0 と初期化し、 2^P 個のすべての二進数データを並べて、候補データ系列系を生成する。

Step 2 候補データ系列系 $\hat{D}(n)$ のすべての系列に対して、推定したマルチパス特性 $\hat{H}(n)$ より仮想受信信号を生成し、仮想受信信号の P チップと、受信信号の P チップととの自乗誤差 \mathcal{E} を求める。

$$\begin{cases} \hat{Q}(n) = \hat{D}(n) * \hat{H}(n) \\ \mathcal{E} = \sum_{i=R}^{L-1} |\hat{Q}(i) - Q(i)|^2 \end{cases} \quad (4.10)$$

ここで、 l は候補データ系列の長さである。

Step 3 高位数が同じで、最後の一ビットだけが違う二つのデータの誤差を比較し、大きい方を消す。

Step 4 残ったデータの下位がすべて同じなら、下位をそのデータと判定した後、レジスタ R に新しく判定したビット数を加算し、 $R = K$ なら終了する。異なる場合は判断せずに **Step 5** に移る。

Step 5 残ったデータに対して、一位増やし、**Step 2** に移る。

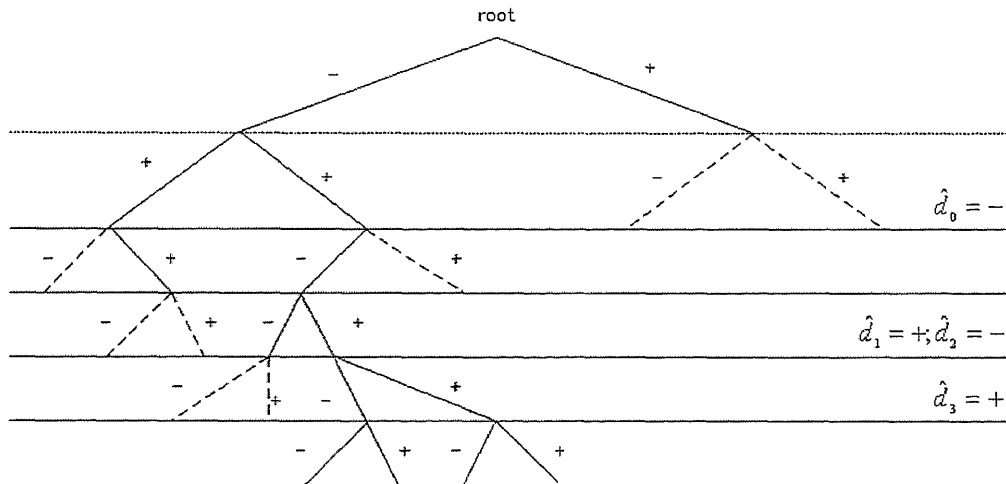


図 4.12: ビタビアルゴリズム

例として、マルチパス特性を $H(n) = \{h_0, h_1\}$ と仮定し、図 4.12 で示すビタビアルゴリズムの判定過程を説明する。

この例では $P = 2$ なので、**Step 1** の位数 2 のすべての二進数データ系列からなる候補データ系列系は

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{--\} \\ \{-+\} \\ \{+-\} \\ \{++\} \end{bmatrix}$$

となり、 $R = 0$ と初期化される。

候補データ系列系に含まれる各系列は **Step 2** で自乗誤差 \mathcal{E} が計算され、 $E_0 < E_2; E_1 < E_3$ なので、**Step 3** でデータ系列 $\{+-\}$ と $\{++\}$ は消され候補データ系列系は

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{--\} \\ \{-+\} \end{bmatrix}$$

となるが、残ったデータ系列 $\{- -\}$, $\{- +\}$ の最初のビットはすべて $\{-\}$ なので、Step 4 で $\hat{d}_0 = -$ と判定し、 $R = 1$ とする。

Step 5 に移された後、残ったデータ系列 $\{- -\}$ と $\{- +\}$ に対して、高位のビットが加わり、候補データ系列系は

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{- - -\} \\ \{- - +\} \\ \{- + -\} \\ \{- + +\} \end{bmatrix}$$

となる。そして、Step 2 で求められた自乗誤差が $E_{0,} > E_{2,}; E_{1,} < E_{3,}$ なので、Step 3 で残された候補データ系列は

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{- - +\} \\ \{- + -\} \end{bmatrix}$$

となり、このデータ系列の第2番目のビットは同じではないので、Step 4 で判定は行われず Step 5 に移される。

Step 5 では候補データ系列系が

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{- - + -\} \\ \{- - + +\} \\ \{- + - -\} \\ \{- + - +\} \end{bmatrix}$$

となり、Step 2 で計算した自乗誤差は $E_{0,} > E_{2,}; E_{1,} > E_{3,}$ なので、Step 3 で候補データ系列系は

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{- + - -\} \\ \{- + - +\} \end{bmatrix}$$

となり、第1と第2ビットがすべて $+$ と $-$ なので、Step 4 では $b_1 = +, b_2 = -$ と判定する。

その後、Step 5 においてデータ系列系は

$$\hat{D}(n) = \begin{bmatrix} \{- + - - -\} \\ \{- + - - +\} \\ \{- + - + -\} \\ \{- + - + +\} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

となり、これらの操作を繰り返してすべてのデータを判定する。

第5章 可変長拡散システムの性能評価

5.1 時間遅れ

可変長拡散システムでは、各ユーザの送信データはパケットにより送信され、そのデータを判定するためには一つのパケットが完全に受信される必要がある。そのため、データ判定などの処理の所要時間を $T_{Process}$ とすると、図 4.2 で示すように、各ユーザの時間遅れ T_D は次のようになる。

$$T_D = T_P + T_{Process} = N(K + L + P - 2)T_C + T_{Process} \quad (5.1)$$

ここで T_C は1チップが占める時間である。

ところが、4.2.4 で述べたように、本論文で提案する可変長拡散システムではユーザごとにパケット長が異なるため、時間遅れもユーザごとに異なる。

5.2 データ伝送速度

可変長拡散システムの通信単位である一つのパケットには、 $K \text{ bit/User}$ のデータが含まれており、時間 T_P を占めている。そのため、 $T_{Process} = 0$ としたら一つのチャンネルでのデータ伝送速度は

$$R_b = \frac{K}{T_P} = \frac{K}{N(K + L + P - 2)T_C} \quad [\text{bit/s}] \quad (5.2)$$

となり、システムチャンネル以外のすべてのチャンネルを一人のユーザに割り当てると、データ伝送速度は最大となり、次のように表せる。

$$R_{b,Max} = \frac{(N-1)K}{T_P} = \frac{(N-1)K}{N(K + L + P - 2)T_C} \quad [\text{bit/s}] \quad (5.3)$$

式 5.3 から、 $K \gg P + L + 2, N \gg 1$ の場合

$$R_{b,Max} = \frac{(N-1)K}{N(K + L + P - 2)T_C} \approx \frac{1}{T_C} = R_C \quad [\text{bit/s}] \quad (5.4)$$

となり、可変長拡散システムはチップレート R_C に近いデータ伝送速度を実現できる。

5.3 回線容量

回線容量は、ユーザが同時に使い得る最大チャンネル数を表す。可変長拡散システムでは、 (N, N, L) の完全相補系列系を拡散系列として用いる場合、回線容量はシステムチャンネル以外のチャンネルの数となり

$$M = N - 1 \quad (5.5)$$

で表せる。

ところが、4.2.2 で述べたように、可変長拡散システムでは拡散系列として用いる完全相補系列系を拡張することで、回線容量を増やすことができる(式4.7)。そのため時間遅れに制限がない場合、可変長拡散システムでの回線容量は理論上無限大となる。

5.4 周波数利用効率

周波数利用効率は、単位帯域あたりに送り得る最大情報量を表す尺度として、次のように定義される。

$$\eta = \frac{MR_b}{W_s} = \frac{C}{\frac{N_0 W_s}{E_b}} \quad [bit/s/Hz] \quad (5.6)$$

ここで、 W_s はシステムに割り当てられた全周波数帯域幅 [Hz]、 C はキャリア電力 [W] であり、 ME_bR_b に等しい。 E_b は各チャンネルにおける1情報ビットあたりのエネルギー [J]、 N_0 は片側熱雑音電力密度 [W/Hz] である。

FDMA および TDMA 方式では、周波数利用効率は式 5.7

$$\eta_{FDMA} = \eta_{TDMA} = \begin{cases} B \frac{C}{N_0 W_s} \frac{E_b}{E_b}; & \frac{MR_b}{W_s} < rG \log_2 m \\ BrG \log_2 m; & \frac{MR_b}{W_s} \geq rG \log_2 m \end{cases} \quad (5.7)$$

となり、 B は周波数再利用数、 r は誤り訂正符号の符号化率、 G はガードバンドあるいはガードタイムによる損失分 ($0 \leq G \leq 1$)、 m は変調における信号点数である。

一方、CDMA 方式では干渉量を減らす方策として、送信側で減らした干渉源の減少係数を V とし、受信側での減少係数を A とすると、周波数利用効率は

$$\eta_{CDMA} = \frac{C}{V \frac{E_b}{N_0 + I_0} \left(1 + \frac{AC}{N_0 W_s}\right)} \quad (5.8)$$

となる。ただし、 I_0 は他チャンネルからの干渉の電力密度である。

可変長拡散システムでは、チャンネル間干渉がないため周波数利用効率は式 5.7 と同じになる。ただし、式 5.7 での周波数再利用数は 1 となり、 G はマルチパスに対応するために入れた 0 と系列長による損失分である。

$$\eta = \begin{cases} \frac{C}{N_0 W_s} \frac{E_b}{E_b} & ; \frac{M R_b}{W_s} < r G \log_2 m \\ r G \log_2 m & ; \frac{M R_b}{W_s} \geq r G \log_2 m \\ G & = \frac{K}{K + L + P - 2} \end{cases} \quad (5.9)$$

図 5.1 では、パラメータ V 、 A 、 B 、 H 、 $\log_2 m$ をそれぞれ 1 とした場合、FDMA、TDMA、CDMA および本論文で提案する可変長拡散システムの無線周波数利用効率を比較した。

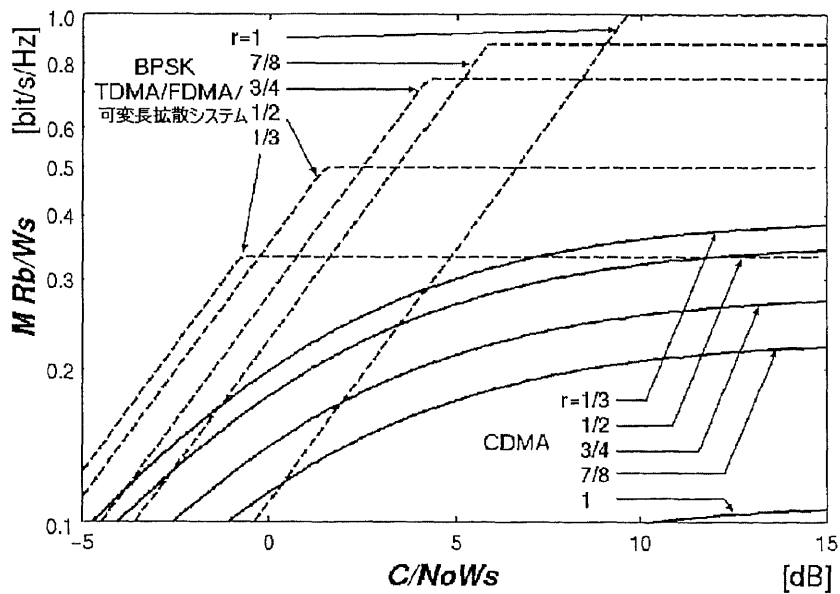


図 5.1: 各システムの周波数利用効率

図 5.1 より、可変長拡散システムはチャンネル間干渉がないので、現行の CDMA システムに比べて、無線周波数利用効率が高くなり、FDMA、TDMA 方式と同じ無線周波数利用効率を実現することができる。

5.5 符号誤り率

可変長拡散システムの符号誤り率は、拡散変調する前の一次変調方式に左右され、一次変調に用いられる変調方式の符号誤り率が可変長拡散システムの符号誤り率の上限となる。

本論文では、シミュレーションを行う際、一次変調においては *BPSK* 方式を用いられたので、本研究で行ったシミュレーションでの可変長拡散システムの符号誤り率は、チャンネルのマルチパスがない場合、その上限は *BPSK* 変調方式の符号誤り率となり、次の式

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right) = Q \left(\frac{\sqrt{2E_b}}{n_0} \right) \quad (5.10)$$

で表す[27]。ただし、

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (5.11)$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5.12)$$

である。

本論文では次の表 5.1 で表すチャンネル特性を想定し、シミュレーションを行い、その結果を図 5.2 に示した。

想定チャンネル	チャンネル特性 $ H(n) $
理想チャンネル	{1 0 0 0}
方形チャンネル	{1 1 1 1}
Rayleigh チャンネル	{1 0.5 0.25 0.1}
逆 Rayleigh チャンネル	{0.1 0.25 0.5 1}
Rician チャンネル	{0.2 1 0.4 0.1}

表 5.1: シミュレーションで想定したチャンネル

図 5.2 で示すように、本論文で提案する可変長拡散システムは、理想チャンネル、Rayleigh チャンネルおよび Rician チャンネルにおいて、*BPSK* 方式に近い誤り率を実現することができる。方形チャンネルと逆 Rayleigh チャンネルにおいては誤り率の性能上、前の三つのチャンネルに比べて劣れているが、自然界でのチャンネルはほとんど前の三つのチャンネルであるため、可変長拡散システムを実用する際の性能劣化にはいたらないものと思われる。

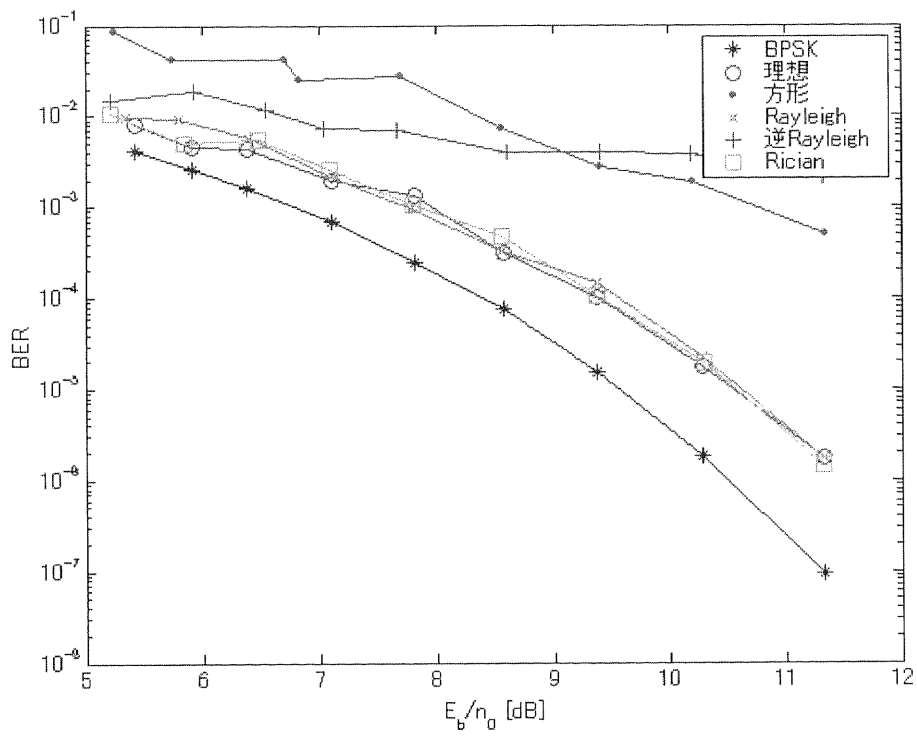


図 5.2: 各種チャンネルでの可変長拡散システムの符号誤り率

謝辞

本論文は著者が筑波大学大学院博士課程システム情報工学研究科の研究生から筑波大学大学院修士課程理工学研究科を経て、筑波大学大学院博士課程システム情報工学研究科までの在学中に行った研究の成果をまとめたものである。この期間中、大変多くの方々からご指導、ご協力いただきまして、心から感謝申し上げます。

特に、筑波大学に研究生として留学を始めてから4年半の間、暖かいご指導をくださった筑波大学機能工学系末広直樹教授に深く感謝申し上げます。

末広先生からは、固定観念に縛られない研究精神と枠に捕らわれない自由な研究スタイルを学び、論文の投稿、学会への参加、研究室でのディスカッションを通じて、論理的な思考方法と論理的な説明の重要性について教われました。博士論文を仕上げるまでにご指導いただいた以外にも、末広先生からはいろんな面から大変お世話になり、あらためて心から感謝申し上げます。中国科学院陳傑教授、中国西南交通大学範平志教授および創価大学伊本俊明講師にも、長年に渡り多くの助言と共に研究についてご指導頂き、有益な議論を行いました。ここで感謝の意を表します。

また、論文の審査にあたって筑波大学機能工学系大田友一教授、電子・情報工学系平沢一紘教授、機能工学系永井啓之亮教授、神奈川工科大学中村誠教授、山口大学松藤信哉助教授には数多くの貴重な助言をいただきました。この場を借りて感謝の気持ちを申し上げます。筑波大学機能工学系古賀弘樹助教授、社会工学系ミヤオイン講師にも、研究上長年に渡りお世話になりました。ここに深く御礼申し上げます。

データ収集や実験、研究を進める上での議論に参加・協力していただいた末広研究室の皆様及びOBの皆様にも深く感謝申し上げます。

最後に、父韓明熙、母禹順今、兄韓継鎬および妻崔玉花の今日に至るまでの温かい支援に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 小川明他, "CDMA 方式と次世代移動体通信システム", トリケップス, 1995 年.
- [2] Naoki Suehiro and Mitsutoshi Hatori, "Modulatable Orthogonal Sequences and their Application to SSMA Systems," IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-34, pp.93-100, Jan.,1988.
- [3] 末広直樹, "倍数差直交系列と完全相補系列系", 電子通信学会論文誌 vol. J65-A, pp.1247-1253.Dec., 1982.
- [4] Jie Chen, Xiaoxu Guo, Naoki Suehiro, Shuichi Itoh, "Base-band Signal Processing and Its Implementation for CDMA Systems Using Complete Complementary Codes", Sequence Design and Applications for CDMA Systems (IWSDA'2001), Supported by SWJTU-IMC and LinkAir Communications, ISBN 7-81057-609-7/ TN/264, pp107-116, Sep.2001.
- [5] Xiaoxu Guo, Jie Chen, Naoki Suehiro, "A High Speed Matched Filter for ZCZ-CDMA Communications", The 6th International Conference on Signal Processing, Beijing, 1368-1371 August, 2002, Aug. 2002.
- [6] Naoki Suehiro, "New Signal Design Method by Coded Addition of Sequences for Synchronous or Approximately Synchronized CDMA Systems", Proceedings of International Conference on Telecommunications, pp.200-203, April 1995.
- [7] Naoki Suehiro, Noriyoshi Kuroyanagi, Toshiaki Imoto, Shinya Matsufuji, "Very Efficient Frequency Usage Systems using Convolutional Spread Time Signals Based on Complete Complementary Code ", PIMRC'2000.(2000-09).
- [8] Naoki Suehiro and Mitsutoshi Hatori, "N-Shift Cross-Orthogonal Sequences", IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-34, pp.143-146, Jan., 1988.
- [9] 末広直樹, "単位行列の 3 乗根より導かれる完全相補系列系", 電子通信学会論文誌, vol. J66-A, pp.486-491, June 1983.
- [10] Theodore S.Rappaport, "Wireless Communications Principles and Practice".

-
- [11] LEON W. CHOUCH II "Digital and Analog Communication Systems, Fifth Edition", Prentice-Hall International, Inc.
- [12] P.Fan, M.Darnell, Sequence Design for Communications Applications, Research studies Press LTD, 1997.
- [13] Shinya Matsufuji and Naoki Suehiro, "Function for Even-Shift Orthogonal Sequences", Proceedings of 4th International Symposium on Communication Theory and Applications, pp.168-171, July 1997.
- [14] S. Matsufuji, Y. Tanada, N. Suehiro, N. Kuroyanagi, "On quadriphase Complementary Pairs", Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Communication Technology, pp.435-438, Jan.2003.
- [15] Hideyuki Torii and Naoki Suehiro, "Expansion of Modulated Orthogonal Sequences", Proceedings of 1998 IEEE International Symposium on Information theory, pp.105. August, 1998.
- [16] 末広 直樹, 畔柳 功芳, 范平志, "変調可能な直交系列より構成される周期完全相補系列", 信学技報, IEICE,IT98-65,pp.19-24(1999-01).
- [17] N. Suehiro, N. Kuroyanagi, P. Z. Fan, "Periodic complete complementary code composed of modulatable orthogonal sequences", The 2nd Int. Symp. On Wireless Personal Multimedia Communications(WPMC'99), Amsterdam, The Netherlands, pp.368-370, Sept. 21-23, 1999.
- [18] H.Torii, N.Suehiro and M.Nakamura, "General construction of periodic complete complementary codes composed of expanded modulatable orthogonal sequences" Proceedings of IEEE Symposium on Computers and Communications pp.738-743, July 2000.
- [19] H.Torii, M.Nakamura and N.Suehiro "Generalized method for constructing modulatable periodic complete complementary codes", Proceedings of IEEE Signal Processing Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, March 2001.
- [20] 末広直樹, 羽鳥光俊, "相互相関のない多相周期系列とその非同期 SSMA 通信への応用", 電子通信学会論文誌, vol.J68-A, pp.1087-1093, Oct. , 1985. (電子情報通信学会昭和 6 1 年度論文賞受賞)
- [21] T. Imoto, N.Suehiro, N. Kuroyanagi and Pingzhi Fan,"Avoidance of Interference on Approximately Synchronized CDMA without Co-Channel Interference nor Multipath Fading using Complete Complementary Code", 2000

- IEEE Sixth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, ISSSTA2000, pp.102-106, Parsippany, NJ, USA, Sep.6-8, 2000.
- [22] Hsiao-Hwa Chen, Jun-Feng yeh, Naoki Suehiro, "A Multicarrier CDMA Architecture Based on Orthogonal Complementary Codes for New Generations of Wideband wireless Communications", IEEE Communications Magazine, October 2001, Vol.39 No.10, pp126-135.
- [23] Naoki SUEHIRO and Toshiaki IMOTO, "Complete Complementary Codes Composed of Perfect Sequences and their Application to Mobile Communications", WSEAS2003, Issue 1, Volume 2 pp28-32, Malta, Italy, Sep.1-3 2003.
- [24] Makoto Nakamura, Hideyuki Tori, Satoshi Wakoh, Naoki Suehiro, "Inter-call Interference in Approximately Synchronized CDMA Systems", Sequence Design and Applications for CDMA Systems(IWSDA'2001), Supported by SWJTU-IMC and LinkAir Communications, ISBN 7-81057-609-7/ TN/264, pp107-116, Sep.2001.
- [25] Naoki Suehiro, "Modulatable Real-Valued Orthogonal Sequences and their Application to an Asynchronous SSMA System with a Method for Eliminating Co-Channel Interferences", Communication, Control and Signal Processing, pp.546-552, Elsevier Science Publishers, 1990.
- [26] John G. Proakis, "Digital Communications Third Edition", Publishing House of Electronics Industry.
- [27] Stephen G. Wilson, "Digital Modulation and Coding", Publishing House of Electronics Industry.

著者論文リスト

学術雑誌に発表した論文

- [28] Chenggao Han, Naoki Suehiro, Toshiaki Imoto "A Generation Method for Constructing Complete Complementary Sequences", WSEAS Trans. On Comm., Issue 2, Vol. 3, pp. 530-534, April 2004
- [29] 韓承鎬, 末広直樹, 伊本俊明, "系列長 MN の完全相補系列の生成法" IEICE Trans., (Accepted)
- [30] Chao Zhang, Chenggao Han, Yiting Liao, Xiaokang Lin and Mitsutoshi Hatori, "An iteration method of Constructing Complete Complementary Sequences with the length of $2^m N$ ", Tsinghua Science and Technology.
- [31] 韓承鎬, 末広直樹, "周期完全相補系列系および完全相補系列系の組数の上限", IEICE Trans.. (条件付採録)

国際会議で発表した論文 (査読付き)

- [32] Chenggao Han, Naoki Suehiro, Jie Chen, Noriyoshi Kuroyanagi, Makoto Nakamura, "Simulation of a Parallel Transmission System for Multipath Property to Estimate Pilot Signals and Additional Chip-Shifted Information-Transmission Signals", Sequence Design and Applications for CDMA Systems, ISBN 7-81057-609-7/ TN/264, pp107-116, Sep. 2001.
- [33] Chenggao Han, Naoki Suehiro, Toshiaki Imoto and Noriyoshi Kuroyanagi, "Very Efficient wireless Frequency Usage System with Multipath Estimation in Correlation Domain", IASTED2002, pp. 210-213, Malaga, Spain, Sep. 9-12, 2002.
- [34] Naoki Suehiro, Chenggao Han, Toshiaki Imoto and Noriyoshi Kuroyanagi, "An Information Transmission Method using Kronecker Product", IASTED2002, pp. 206-209, Malaga, Spain, Sep. 9-12, 2002.
- [35] Naoki Suehiro, Chenggao Han, Toshiaki Imoto, "Very Efficient Wireless Frequency Usage with Multipath Measurement in Correlation Domain", 2003 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT2003), pp. 385, Yokohama, Japan, jun. 29- jul. 4, 2003.

- [36] Chenggao Han, Naoki Suehiro, "A Generation Method for Constructing $(N,N,MN/P)$ Complete Complementary Sequences", SympoTIC'04, Bratislava, Slovakia, Oct. 24-26, 2004.

国内研究会で発表した論文(査読無し)

- [37] 韓承鎬, 末広直樹, 陳傑, 畔柳功芳, 中村誠, "マルチパス推定用パイロット信号とチップシフト加算情報伝送信号との並列伝送システムのシミュレーション", 信学技報 ITS2000 - 75, pp135-140, 徳島, 3月, 2001年.
- [38] 韓承鎬, 末広直樹, 伊本俊明, 川本潤一郎, "信号使用確率が不均一な QAM", 信学技報 SST2001 - 2, pp7-14, 沖縄, 4月, 2001年.
- [39] 末広直樹, 韓承鎬, 伊本俊明, "DFT 行列とクロネッカ積を用いたマルチパス信号の擬コヒーレント加算による無線周波数利用効率の増大", 信学技報 SST2002 - 161, pp45-50, 三重, 3月, 2002年.
- [40] 韓承鎬, 末広直樹, 伊本俊明, "系列長 MN の完全相補系列およびその高速演算回路", 信学技報 CAS2004 - 15, pp. 31-35, 北海道, 6月, 2004年.