

贈	平成
、	年
17	月
キ	日
ニ	
シ	
天	

DA
1376
1994
HG

クラリネットの発音機構

1995年3月

小島時彦

目次

本論文中の記号	6
1 序論	7
2 人工吹鳴実験	12
2.1 実験装置	12
2.1.1 マウスピース内圧力変化 $p(t)$ と吹鳴器内圧力変化 $P(t)$ の測定	13
2.1.2 リード開口 $x(t)$ の測定	13
2.1.3 リードに流れ込む空気流速 $v(t)$ の測定	14
2.1.4 吹鳴器内平均圧力 P_0 とマウスピース内平均圧力 p_0 の測定	15
2.2 実験方法	19
2.3 実験結果	19
2.3.1 励起された振動状態	19
2.3.2 振動状態の遷移	21
2.4 考察	23
3 測定結果の解析	25
3.1 解析方法と結果	25
3.1.1 $p(t), x(t), v(t), P(t)$ の波形とパワースペクトル	27
3.1.2 (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ	31
3.1.3 多次元相空間における再構成アトラクタ	32
3.1.4 相関次元 d_2	35
3.1.5 最大 Lyapunov 指数 λ_{\max}	38
3.2 周期的振動状態に対する解析	40
3.2.1 最低音 D_3 の吹鳴時における振動状態	40
3.2.2 高周波数音の吹鳴時における振動状態	48
3.2.3 4倍周期分岐の関係にある振動状態	55
3.3 非周期的振動状態に対する解析	58
3.3.1 T^2 トーラスを持つ振動状態	58
3.3.2 T^3 トーラスを持つ振動状態	81
3.3.3 ストレンジアトラクタを持つ振動状態	85

3.4	考察	92
4	計算機シミュレーション	96
4.1	Schumacher 方程式	96
4.2	計算方法	98
4.2.1	差分方程式への置き換え	98
4.2.2	反射関数 $r(t)$	99
4.2.3	特性インピーダンス Z_0	101
4.2.4	吹鳴圧力 P_0	101
4.2.5	分岐図を得る手順	104
4.3	計算結果	106
4.3.1	吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答	106
4.3.2	吹鳴圧力を階段状に次第に上昇下降させるときの応答	119
4.3.3	特性インピーダンスをステップ関数状に変化させるときの応答	125
4.4	考察	129
5	考察	132
5.1	実験結果と理論との比較	132
5.2	高周波数の音の原因	137
5.3	演奏者により吹鳴されたクラリネットの非周期振動	138
6	結論	141
	謝辞	144
	参考文献	145
	著者文献	148
	付録 Schumacher 方程式の台形法を用いた解法	150

表 目 次

2.1	マウスピース内平均圧力 p_0 の測定	15
2.2	典型的な lip adjustment と励起された振動状態	20
2.3	平均律音階における音名の周波数	20
2.4	振動が励起される P_0 の範囲 (lip adjustment No.6)	21
3.1	解析を行った振動状態の lip adjustment, P_0, f	26
3.2	典型的な振動状態の $p(t)$ のパワースペクトルにおける主要な周波数成分	27
3.3	Mutual Information の最初の極小値から求められる最適な時間遅れ . .	34
3.4	典型的な振動状態の相関次元 d_2	37
4.1	Schumacher 方程式中に現れるパラメータ	98
4.2	吹鳴圧力をステップ関数状に変化させた場合に振動解が得られる範囲 .	106
4.3	吹鳴圧力を階段関数状に変化させた場合に振動解が得られる範囲	119
5.1	気柱の長さで奏者によって吹鳴される音との関係	137
5.2	平均律音階における音名の周波数	137
5.3	演奏者による吹鳴に使用した楽器	138

目次

1.1	木管楽器の発音機構の概要	7
1.2	クラリネット	8
2.1	クラリネットを人口吹鳴する装置の全体図	16
2.2	人工吹鳴に用いた吹鳴器 (人工の口)	17
2.3	プローブマイクロフォンの周波数特性	18
2.4	状態遷移図 (lip adjustment No. 6)	22
3.1	人工吹鳴実験から得られた典型的な振動状態の $p(t)$	30
3.2	(p, x, v) 状態空間の座標系	31
3.3	3次元相空間の座標系	32
3.4	最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の計算方法	39
3.5	振動状態 6 - D_3	44
3.6	振動状態 4 - D_{3L}	47
3.7	振動状態 6 - C_6^\sharp	50
3.8	振動状態 6 - E_6	53
3.9	振動状態 1 - B_3^b	56
3.10	振動状態 1 - B_5^b	57
3.11	振動状態 6 - D_{3H}	65
3.12	振動状態 2 - X_2	69
3.13	振動状態 3 - X_3	71
3.14	振動状態 1 - X	73
3.15	振動状態 5 - X	75
3.16	振動状態 3 - X_1	77
3.17	振動状態 3 - X_2	79
3.18	振動状態 2 - X_1	83
3.19	振動状態 6 - X	88
4.1	Schumacher 方程式中に現れる変数	97
4.2	Gauss 関数を用いた反射関数 $r(t)$	100
4.3	吹鳴圧力をステップ関数状に変化させる方法	102
4.4	吹鳴圧力を階段状に変化させる方法	103

4.5	$x(t)$ 波形の極大値 x_m	104
4.6	P_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	109
4.7	振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 8.00\text{kPa}$	110
4.8	P_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	111
4.9	P_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	112
4.10	倍周期分岐における振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	114
4.11	振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 4.49\text{kPa}$	116
4.12	P_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 3.4\text{ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	118
4.13	P_0 を階段状に次第に上昇下降 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	121
4.14	P_0 を階段状に次第に上昇下降 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$	122
4.15	振動解 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 9.0\text{kPa}$ (P_0 上昇時)	123
4.16	振動解 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 9.0\text{kPa}$ (P_0 下降時)	124
4.17	Z_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 4.5\text{kPa}$	126
4.18	Z_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 7.0\text{kPa}$	127
4.19	Z_0 をステップ関数状に変化 $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 10.0 \text{kPa}$	128
5.1	ベル部の形状を考慮した反射関数 $r(t)$	134
5.2	人工吹鳴実験と Schumacher 方程式から得られる状態空間アトラクタ	135
5.3	McIntyre らの仮定した $U_f - p$ 曲線	136
5.4	演奏者により吹鳴されたクラリネットの非周期振動	140

本論文中の記号

本論文で使用する記号は次のとおりである。

t	時間
t_s	サンプリング周期
l	吹鳴器の中へマウスピースが突き出した部分の長さ
x_0	吹鳴器の唇の圧力下にあるリードの静止開口 (唇の圧力は調節する) l と x_0 を用いてリードあるいはマウスピースのくわえ方を表す
f	吹鳴音周波数。平均率音階 ($A_4 = 440\text{Hz}$) の最も近い音名と その音からの音程 (cent) で表す。
P_0	吹鳴器内平均圧力
P_t	遷移吹鳴圧力 (振動状態が不連続的に変化する吹鳴圧力)
P_c	振動を励起できる P_0 の上限
$P(t)$	吹鳴器内圧力変化
p_0	マウスピース内圧力の平均値
$p(t)$	マウスピース内圧力変化
$D(t)$	吹鳴器とマウスピース内の圧力差 ($D(t) = \{p_0 + p(t)\} - \{P_0 + P(t)\}$)
$x(t)$	リード開口
$v(t)$	吹鳴器からリード開口を通して気柱に流れ込む空気流速
$U_f(t)$	口から楽器気柱に流入する空気の体積流量
$U(t)$	気柱に流入する空気の全体積流量 ($U_f(t)$ とリードが振動することにより生ずる流れの和)
M_e	リード開口を通過する空気の等価質量
$r(t)$	反射関数
Z_0	管の特性インピーダンス
t_R	Gauss 関数で近似した $r(t)$ において反射波の最深部までの時間
$V\{ \}$	$\{ \}$ で囲まれた変数の変化幅

第 1 章

序論

リード木管楽器は共鳴気柱及びリードを持つ。リード開口を通して、演奏者が口から楽器内に空気を吹き込むと、共鳴気柱は励振される。気柱の振動によって、マウスピース内に圧力 $p(t)$ が生じ、また周囲の空気中に音が放射される。気柱の振動を支えるエネルギーは、演奏者の口から楽器内に流入する空気の体積流量 $U_f(t)$ によって供給される。図 1.1 は、 $U_f(t)$ が $p(t)$ を発生させ、その $p(t)$ がリード開口を変化させしがつて $U_f(t)$ をコントロールする様子を示す。木管楽器の発音機構に関しては、Fletcher と Rossing の共著による書物¹⁾ に多くの研究が紹介されているが、解明すべき多くの問題も残されている。

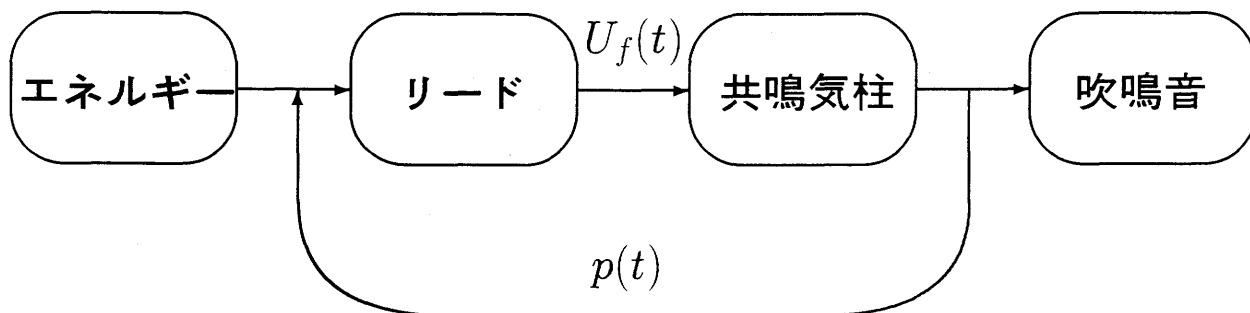


図 1.1: 木管楽器の発音機構の概要

クラリネットは一枚のリードを持つシングルリード楽器でその気柱形状は円筒管に近い。図 1.2 に本研究の実験で用いたクラリネットの概形を示す。訓練されたクラリネット奏者は主に運指によって音程をコントロールし良い定常的な音を放射する。一方、初心者はしばしば運指には関係なくリードミスと呼ばれている望ましくない高音 (squeal) を発生させる。楽器から放射される音は気柱の振動によってもたらされるが、なぜクラリネットにこのような音を発生させる振動状態が励起されるかはまだ完全には理解されていない。

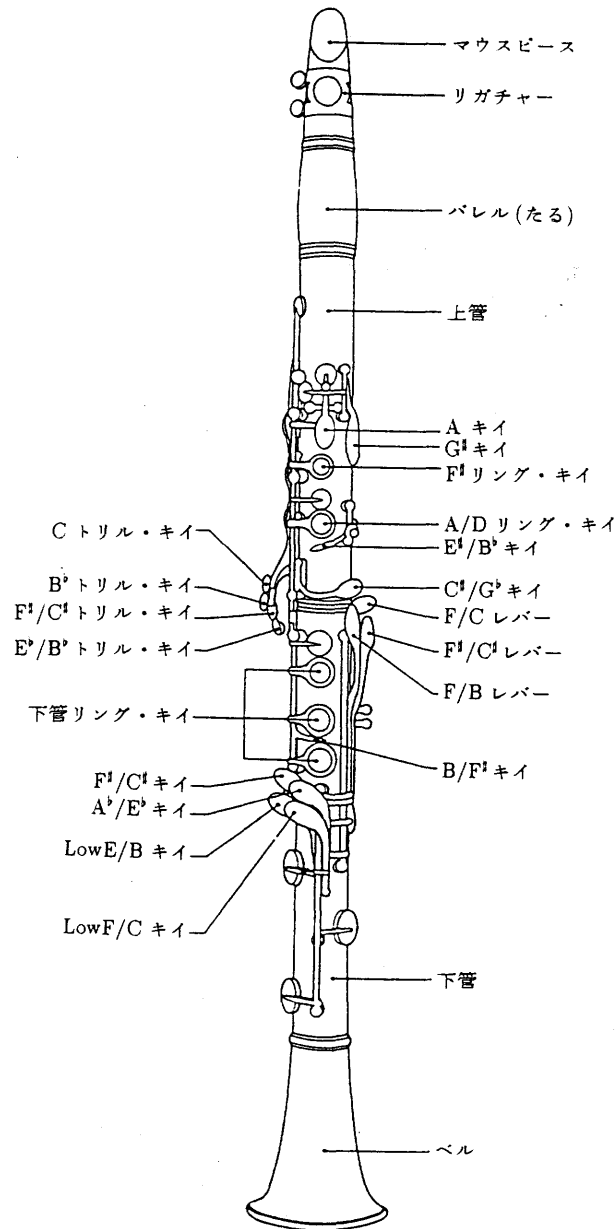


図 1.2: クラリネット

1961年に Backus²⁾ はクラリネットを人工吹鳴し、マウスピース内圧力変化 $p(t)$ とリード開口 $x(t)$ を同時に観測した。その論文は奏者によって得られるような音楽的な定常音が楽器から放射される場合のみを扱っている。Backus²⁾ によるクラリネットの人工吹鳴実験から現在までの約三十年間にクラリネットの音響学的振る舞いは様々な数学的方法、そして計算機シミュレーションによって幅広く研究されてきた³⁾⁻¹⁰⁾。これらの研究はクラリネット気柱の周期的振動の発生に焦点を絞っている。Schumacher⁷⁾, McIntyreら⁸⁾ の論文は、リード木管楽器の一種であるクラリネットの発音機構の理論的基礎を示す意味で重要である。Schumacher⁷⁾ はクラリネットの発音機構を記述する連立微積分方程式を提案し、クラリネットが種々のピッチの音や multiphonic 音を発するときのマウスピース内音圧変化 $p(t)$ 、リード開口 $x(t)$ および口から楽器気柱に流入する空気体積流量 $U_f(t)$ を、この方程式の解として示した。彼はこれらの解を得るために、方程式の係数やパラメータを、クラリネットの気柱寸法やリードの性質に合わせて定めた。また演奏時の運指に従う音孔の開閉条件のもとに反射関数 $r(t)$ を計算したが、マウスピース部分の複雑な気柱構造は無視した。最近になって、非線形振動の立場から、カオスを含む非周期的振動の研究が、クラリネットの multiphonic 音¹⁵⁾、クラリネットに類似な系^{11),12)} に対して行われた。これらの報告は、気柱振動あるいは楽器から放射される音に着目したものであるが、振動と同時に関与しているリード開口、リード開口部を流れる空気流、さらに口内圧力には触れていない。

これまでに我々の研究室では井戸川徹教授を中心に、自励発振系としての木管楽器の持続音に関する音響学的振舞の観測結果について多くの報告を行ってきた^{13),14),33),35)-38)}。岩城³⁶⁾ はクラリネットの人工吹鳴実験を行い、励起される振動状態においてマウスピース内圧力変化 $p(t)$ とリード開口 $x(t)$ を観測した。

本論文ではクラリネットの発音機構を解明するために行った、人工吹鳴実験及び計算機シミュレーションについて報告する。演奏家が吹奏して得られた音の分析結果についても述べるが、これは十分な検討を加えたとはいいがたく、参考データ程度のものである。

第2章では岩城³⁶⁾ らに引き続きクラリネットの人工吹鳴実験を行った結果について述べるが、実験に際しては、リード開口を通過する空気流速 $v(t)$ および人工の口内の圧力変化 $P(t)$ も新たに測定した。クラリネットの発音機構の理解のために、それを楽器としてよりは1つの音響系とみなし、そこから発せられる全ての音に注目して実験を行った。クラリネットの音孔は全て閉じ、人工の唇がマウスピースとリードをくわえる強さと深さ(以後 lip adjustment と呼ぶ)を一定にした状態で機械により吹鳴した。クラリネットを人工吹鳴するために用いた人工口(以後、吹鳴器と呼ぶ)、空気系について詳細に示す。人工吹鳴装置を用いることによって、人間の介在なしに lip adjustment と吹鳴圧力を制御し、一定に保つことができた。さらに、人工的に吹鳴することにより

興味ある物理変数を容易に正確に計測することができた。本実験では励起された全ての振動状態においてマウスピース内圧力 $p(t)$ 、リード開口 $x(t)$ 、吹鳴器の中からリード開口を通して気柱に流れ込む空気流速 $v(t)$ (粒子速度を含めて)、吹鳴器内圧力 $P(t)$ を同時に測定した。これらの測定装置、及び測定方法についても述べる^{i), u)}。

通常の演奏では、クラリネットの音孔を全て閉じて吹奏するとき平均律音階で D_3 (146.83Hz) に近い音を放射する持続音を用いる。 D_3 音は我々の用いた実験装置でも得られ、奏者によって同じクラリネットを吹鳴した場合に得られる音に非常によく似て聞こえた。 D_3 音を人工吹鳴している状態で観測されたマウスピース内圧力とリード変位は Backus²⁾ によって示された E_3 音のそれに極めて近い。音孔をすべて閉じたクラリネットの人工吹鳴実験からは D_3 音以外にも多くの音を放射する振動状態が得られた。 C_6^\sharp (1108.7Hz), E_6 (1318.5Hz) のように共鳴気柱の長さとは無関係な振動数の音も観測された。このような音は初心者がしばしば発生させ、リードミスと呼ばれている。さらにチューナでは発生音の振動数を特定できない多くの振動状態も観測された。音孔を全て閉じたクラリネットから得られた多数の周期的、非周期的な振動状態の吹鳴音は、実際に熟練した演奏者によっても出し得た。また、Keefe¹⁵⁾ はクラリネットを特殊な運指のもとで吹鳴するとき得られる multiphonic 音について非線形振動の立場から、解析を行った。これらのことから実験で得られた振動状態は機械により人工的に吹鳴したために作り出された特別な振動ではないことが判る。第5章に演奏者により吹鳴されたクラリネットに励起される非周期振動の例を示す。

第3章では第2章で測定した典型的な周期的振動状態および非周期的振動状態の例について、解析した結果について述べる^{b), e)}。解析は主にマウスピース内圧力 $p(t)$ に着目し、特に非線形振動論^{15), 16), 23)-25)} の立場から以下の5項目について行った^{1)-n), v)}。

- (i) $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の波形とパワースペクトル、
- (ii) $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ から得られる (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ、
- (iii) 多次元相空間における再構成アトラクタ、
- (iv) 再構成アトラクタの相関次元 d_2 、
- (v) 再構成アトラクタの最大リアプノフ指数 λ_{\max} 。

解析結果は1つの lip adjustment の例についてやや詳細に述べる。解析結果から、人工吹鳴実験においてクラリネットに励起された振動状態の種類を決定し、取り上げた典型的例の相互間の共通点や相違点を考察する。

第4章では Schumacher 方程式を用いたシミュレーション結果について述べる。Schumacher 方程式の構造はそのまま認め、それをどのような条件の下に解けば準周期あるいはカオス振動解が得られさらに振動状態遷移にヒステリシスが現れるかを調べた^{g)}。その際、クラリネット気柱の特性インピーダンス及び吹鳴圧力は、これまで正しいとされてきた値及びそれよりもかなり高い値を含む広い範囲の値をとりうるものと仮定した。気柱の反射関数は簡単な Gauss 関数とし、微分方程式は台形法による差分方程

式に置き換えた。吹鳴圧力が低く、特性インピーダンスが高い領域には、カオスに到る倍周期分岐の存在が確かめられた。また、吹鳴圧力を上昇下降させるとき振動状態の遷移にはヒステリシスが見られた。上記のような計算の後に、Schumacher 方程式の問題点に関して考察を行う。

第 5 章では実験と理論との相違に関して考察を行う。人工吹鳴実験によって得られた、クラリネットが D_3 音を放射している状態で観測される振動波形は、Schumacher 方程式⁷⁾ のパラメータを適切に調整し、その数値計算から極めてよく再現できることを示す^{b)}。また、演奏者により吹鳴されたクラリネットから得られる非周期振動の例を示す。

第 6 章で本研究の結論を述べる。

第 2 章

人工吹鳴実験

2.1 実験装置

クラリネットの人工吹鳴は無響室で行った。図 2.1 はクラリネットを人工吹鳴する装置の全体図である。実験に用いたクラリネットはヤマハ社の YCL-451 である。マウスピースはヤマハ社 4C、リードにはプラスチック製の完成リード (BARI 社 medium) を用いた。吹鳴器、クラリネット本体は鉄のアンゲルの台によって固定されている。クラリネットの指穴は全て機械的に閉じ、最低音を吹鳴する状態となっている。

無響室の外にある空気圧縮器により加圧された空気は容積 0.23m^3 の空気溜に貯えられ、減圧弁で減圧された後、無響室内にある自作したブリード型圧力調整器で希望する圧力に調節される。この圧力調整器の手動操作により吹鳴器内平均圧力 P_0 は 0 から 20kPa の間でほぼ一定に保たれる。空気はゴム管と吹鳴器とを連結する接続器を通り、人工の口である吹鳴器に至る。接続器の最も狭い部分の断面積は約 43mm^2 であり、管の断面積 (78.5mm^2) よりも小さい。空気系の詳細は既発表の論文^{13),33)} に記してある。

図 2.2 は人工吹鳴に用いた吹鳴器 (人工の口) である。吹鳴器は厚さ 5mm の透明アクリル板を用いて作成した。吹鳴器の内容積は $3.2 \times 10^{-4}\text{m}^3$ で人工唇やそれを支えている内部のアクリル板を差し引くと約 $2.5 \times 10^{-4}\text{m}^3$ である。マウスピースをくわえる人工唇はシリコンゴム (信越化学社 KE114S) で人間の唇と同様な触感を持つように調節して作成した。人工唇の厚さは約 10mm である。下唇に相当するシリコンゴムには人間の歯の代わりに直径 2mm の銅線をそのほぼ中央に埋込んだ。調節できる唇のパラメータは 図 2.2 に示した l と x_0 である。 l は吹鳴器の中へリードが突き出した部分の長さであり、吹鳴器、またはクラリネットを移動することにより調節した。 x_0 は吹鳴器に取り付けた調整ネジによって人工唇がマウスピースをくわえる圧力を調整し、人工唇の圧力下においてリードが静止している状態でのリード開口である。 x_0 は接眼マイクロメータで測定した。人工唇がリードとマウスピースをくわえる状態を以後 lip adjustment と呼び、それを表すのに l と x_0 を用いる。lip adjustment は吹鳴装置を用いて何度も実験を行う場合に、同じ振動状態の組を繰り返すために必要不可欠で

ある。

本論文で測定したパラメータについて 図 2.2 に示した。以下、2.1.1 節でマウスピース内圧力変化 $p(t)$ と吹鳴器内圧力変化 $P(t)$ の測定、2.1.2 節でリード開口 $x(t)$ の測定、2.1.3 節でリードに流れ込む空気流速 $v(t)$ の測定、2.1.4 節で吹鳴器内平均圧力 P_0 とマウスピース内平均圧力 p_0 の測定について述べる。吹鳴音周波数 f はデジタルチューナ (KORG 社 DTM-12) によって測定した。この装置は音の高さを $A_4 = 440\text{Hz}$ の平均律音階の最も近い音名および、その音からの音程 (cent) で示す。

2.1.1 マウスピース内圧力変化 $p(t)$ と吹鳴器内圧力変化 $P(t)$ の測定

$p(t)$ と $P(t)$ を測定するのに本実験で使用したのは、プローブマイクロフォン (B & K 社 type 4170) である。このプローブマイクロフォンは、1/2-in コンデンサマイクロフォン (type 4134) にプローブが装着されている。プローブの先端の直径は 1.25mm、細管部分の長さは 202.5mm である。カップラ (B & K 社 type DB 0260) により、1/2-in コンデンサマイクロフォン (B & K 社 type DB 4165) を基準とした増幅器 (B & K 社 type 2606 あるいは 2607) を含めたこのプローブマイクロフォンの 10 ~ 5000Hz の周波数特性を 図 2.3 に示す。左列が $p(t)$ 、右列が $P(t)$ の測定に用いたプローブマイクロフォンの周波数特性である。(a) は利得、(b) は位相遅れである。横軸の周波数は対数軸で表した。1/2-in コンデンサマイクロフォンは上述した周波数範囲で無視できる遅れと利得を持つと考えられる。この周波数特性を用いて、プローブマイクロフォンによる $p(t)$, $P(t)$ の測定結果を補正した³⁵⁾。

$p(t)$ はマウスピースの先端から 34mm の位置に直径 1.4mm の穴を開け、そこにプローブマイクロフォンの先端を差し込み測定した。その際にはプローブの先端がマウスピースの内壁よりも内側に飛び出ないように注意した。また、プローブと穴の間の小さな隙間から空気漏れが起こるのを防ぐためにシリコンの小片で封をした。 $p(t)$ はプローブマイクロフォンで測定したので、その増幅器の周波数特性のためにマウスピース内平均圧力 p_0 は得られない。従って、 $p(t)$ はマウスピース内圧力 $p_0 + p(t)$ から p_0 を差し引いた変動圧力である。 p_0 の測定については 2.1.4 節で詳細に述べる。

$P(t)$ は吹鳴器上側に直径 1.4mm の穴を開け、そこにプローブマイクロフォンを差し込み測定した。

2.1.2 リード開口 $x(t)$ の測定

$x(t)$ の測定に使用したのは長さ 6.5mm、幅 1.3mm のフォトダイオード (浜松ホトニクス社 Ss1227-16BQ) である。フォトダイオードは吹鳴器の光源とは反対側の表面に置いた。管体ベルの外側約 10cm の位置に置いたレンズランプ (ROYAL 社 LNS-SB-12-71X) から管体内部を通り、リードとマウスピースの間の隙間を抜けてフォトダイオードに入射する光量の変化により $x(t)$ を測定した。

光 - 電気変換方法によるリード振動検出器の出力はリードの開口と線形に比例することを確認した。すなわち、 x_0 を調節ネジによって変化させ、検出器出力を接眼マイ

クロメータで測定した開口と比較した。また、正弦電圧によって励起される LED を用いてフォトダイオードに光を与え、本方法によるリード振動検出器の周波数応答を測定した。10 ~ 20000Hz の周波数範囲において、その利得は一定で遅れは 5×10^{-6} s よりも少なかった。

2.1.3 リードに流れ込む空気流速 $v(t)$ の測定

$v(t)$ の測定に使用したのは、一般用流体計測システム (日本科学工業社 7106) である。装置は、熱線流速計 (簡易型 CTA アネモスタ Model 1011)、指数可変型リアライザ (Model 1013)、直流電圧計 (Model 1008) よりなる。熱線プローブ (Model 0251R-T5) は長さ 2mm、直径 5×10^{-3} mm のタンゲステン線から作られている。熱線流速計の出力信号は、リアライザにより直線化される。その平均値を直流電圧計で、振幅をブラウン管オシロスコープで読み取った。熱線流速計出力はプローブ・キャリブレーター (日本科学工業社 Model 1065) を用い、定常流速に対して測定流速範囲を 0m/s から 100m/s までとして校正した。

吹鳴器内で熱線プローブと管体の軸方向がつくる角度は約 25 度である。リードに流れ込む気流が管体の軸方向のみであると仮定した場合、流れの方向とプローブのつくる角度が直角のときよりも、 $v(t)$ の振幅は約 6% 小さい値となる。この値はプローブ・キャリブレーターを用い、流れの方向と熱線プローブの軸方向がつくる角度を ± 90 度の範囲で変化させて熱線流速計の出力を計測した結果から得られた⁴⁾。熱線流速計は全方向に対する空気流速だけではなく、粒子速度に対しても感度が良い。熱線流速計の周波数応答を検定するよい方法は見当たらなかった。

熱線プローブの取付場所についてはマウスピース内と吹鳴器内の 2 箇所について予備実験を行った¹⁾。熱線プローブをマウスピース先端から 34mm の位置に差し込んだ場合には、 $p(t)$ が弱く正弦波に近いとき、熱線流速計の出力波形も正弦波に近く、 $p(t)$ との間には 90 度の位相差が観測された。マウスピース内では音波強度が非常に高く、熱線流速計出力は主に気柱内の粒子速度に比例する。熱線プローブを気柱内に置くと、その出力の平均値から $v(t)$ の平均値を得ることは可能かも知れないが、 $v(t)$ の波形は得られない。一方、熱線プローブを吹鳴器内に置いた場合には、プローブ先端を図 2.2 に示すようにマウスピースの外側、リード開口にできるだけ近い位置に置くことによって流速の測定が可能であった。

熱線流速計の出力は流速の絶対値を示す。従って流速の方向を知ることはできない。測定結果によれば $v(t)$ はその変化の大部分において $v > 0$ m/s であるが、一部分において $v < 0$ m/s (逆流) となる可能性もある。 $v > 0$ m/s から $v = 0$ m/s を経て $v < 0$ m/s となるので、逆流が発生する部分は推測できる。もし、逆流が存在しないのであれば $v(t)$ はマウスピース入り口において測定可能である。

本論文では空気流が吹鳴器から楽器に向かうときに $v(t)$ が正であるとしておく。なお数種の振動状態について得られた $v(t)$ 測定の最大値は 41 m/s、最小値は 30m/s であった。

2.1.4 吹鳴器内平均圧力 P_0 とマウスピース内平均圧力 p_0 の測定

吹鳴器内の平均圧力 P_0 は圧力変換器（豊田工機社 DD 102. S）を用いて測定した。この圧力変換器は 600Hz 付近まで平坦な周波数特性を持つ。圧力変換器の出力を直流増幅器（豊田工機社 AA 3004）で増幅し、デジタルテスタ（SANWA 社 MD 200C）で読みとった。

マウスピース内の平均圧力 p_0 を測定するときにはプローブマイクロフォンを取り外し同じ差し込み孔に圧力変換器を挿入した。そのためには人工吹鳴を一時停止した。プローブマイクロフォンを取り外し、同じ差し込み孔に圧力変換器を差し替えた。後に、再び同じ吹鳴状態を再現し、その状態で p_0 を測定した。同じ吹鳴状態の再現が極めて精度良く行われたとは言い難いが、 p_0 の値自身が小さいので、その測定精度はそれ程問題にはならない。 p_0 の測定を役立てる主な目的は、リード開口部の空気流が吹鳴器から楽器に向かうのかあるいはその逆かを決定することにある。すなわち、 $p_0 + p(t)$ と $P_0 + P(t)$ の大小関係を見るためだけのものである。

ある lip adjustment で励起された数種の振動状態について P_0, p_0 を測定した結果を表 2.1 に示す。励起された振動状態について $0.3 \leq p_0 \leq 0.35$ kPa であり、 P_0 に対して 3.0 ~ 6.8 % であった。

excited vibratory states	P_0 (kPa)	p_0 (kPa)	p_0 / P_0 (%)
D_6	5.0 ~ 5.6	0.32 ~ 0.33	5.7 ~ 6.6
B_5^b	5.3 ~ 7.5	0.30 ~ 0.36	4.0 ~ 6.8
D_3	7.0 ~ 10.0	0.30 ~ 0.35	3.0 ~ 5.0

表 2.1: マウスピース内平均圧力 p_0 の測定

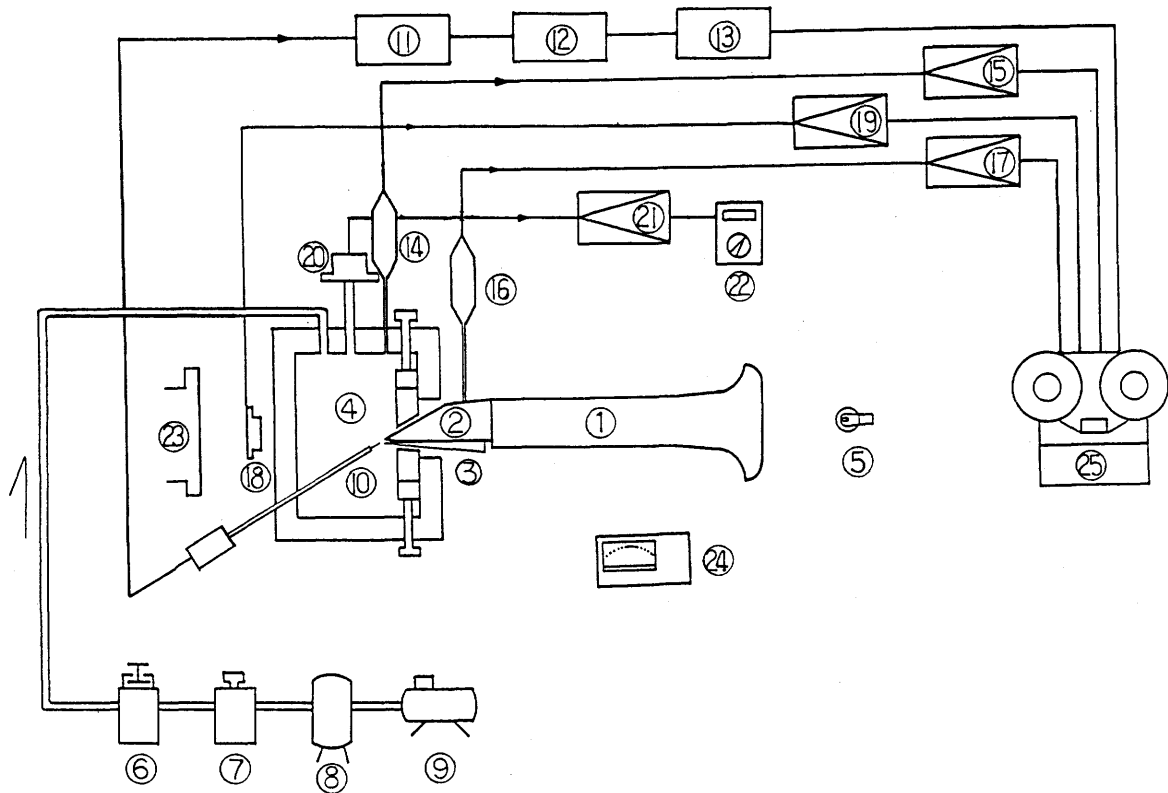


図 2.1: クラリネットを人口吹鳴する装置の全体図

- | | |
|------------------|------------------|
| 1) クラリネット, | 14) プローブマイクロフォン, |
| 2) マウスピース, | 15) 計測用増幅器, |
| 3) プラスチックリード, | 16) プローブマイクロフォン, |
| 4) 吹鳴器, | 17) 計測用増幅器, |
| 5) レンズランプ, | 18) フォトダイオード, |
| 6) ブリード型圧力調整器, | 19) I-V コンバータ, |
| 7) 減圧弁, | 20) 圧力変換器, |
| 8) 空気溜, | 21) 直流増幅器, |
| 9) 空気圧縮器, | 22) デジタルテスタ, |
| 10) 熱線プローブ, | 23) 接眼マイクロメータ, |
| 11) 簡易型熱線流速計, | 24) デジタルチューナ, |
| 12) 指数可変型リニアライザ, | 25) データレコーダ |
| 13) 直流電圧計, | |

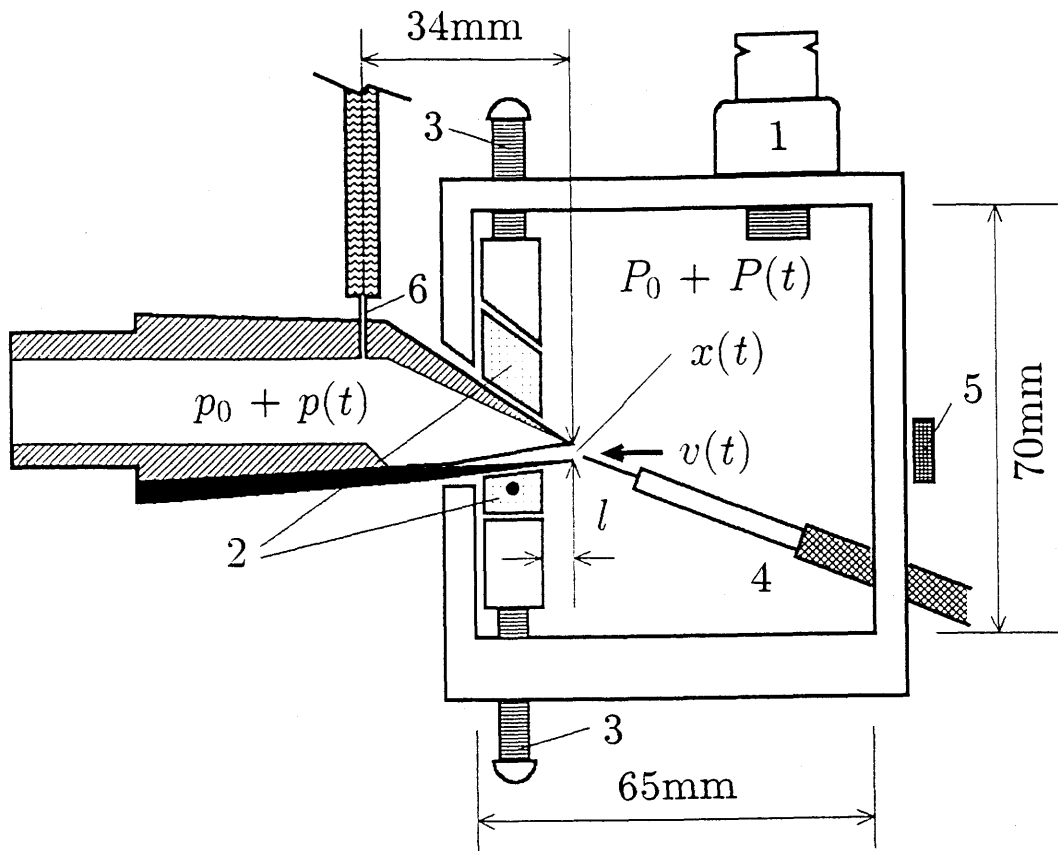


図 2.2: 人工吹鳴に用いた吹鳴器 (人工の口)

- p_0 マウスピース内圧力の平均値,
 $p(t)$ マウスピース内圧力変化,
 $x(t)$ リード開口 (静止時: x_0),
 $v(t)$ 吹鳴器からリード開口を通して気柱に流れ込む空気流速,
 P_0 吹鳴器内平均圧力,
 $P(t)$ 吹鳴器内圧力変化,
 l 吹鳴器の中へマウスピースが突き出した部分の長さ,
 f 吹鳴音周波数.

- 1) 空気配管接続器具, 4) 熱線流速形プローブ,
 2) 人工唇, 5) フォトダイオード,
 3) 唇圧力の調節ネジ, 6) プローブマイクロフォン,

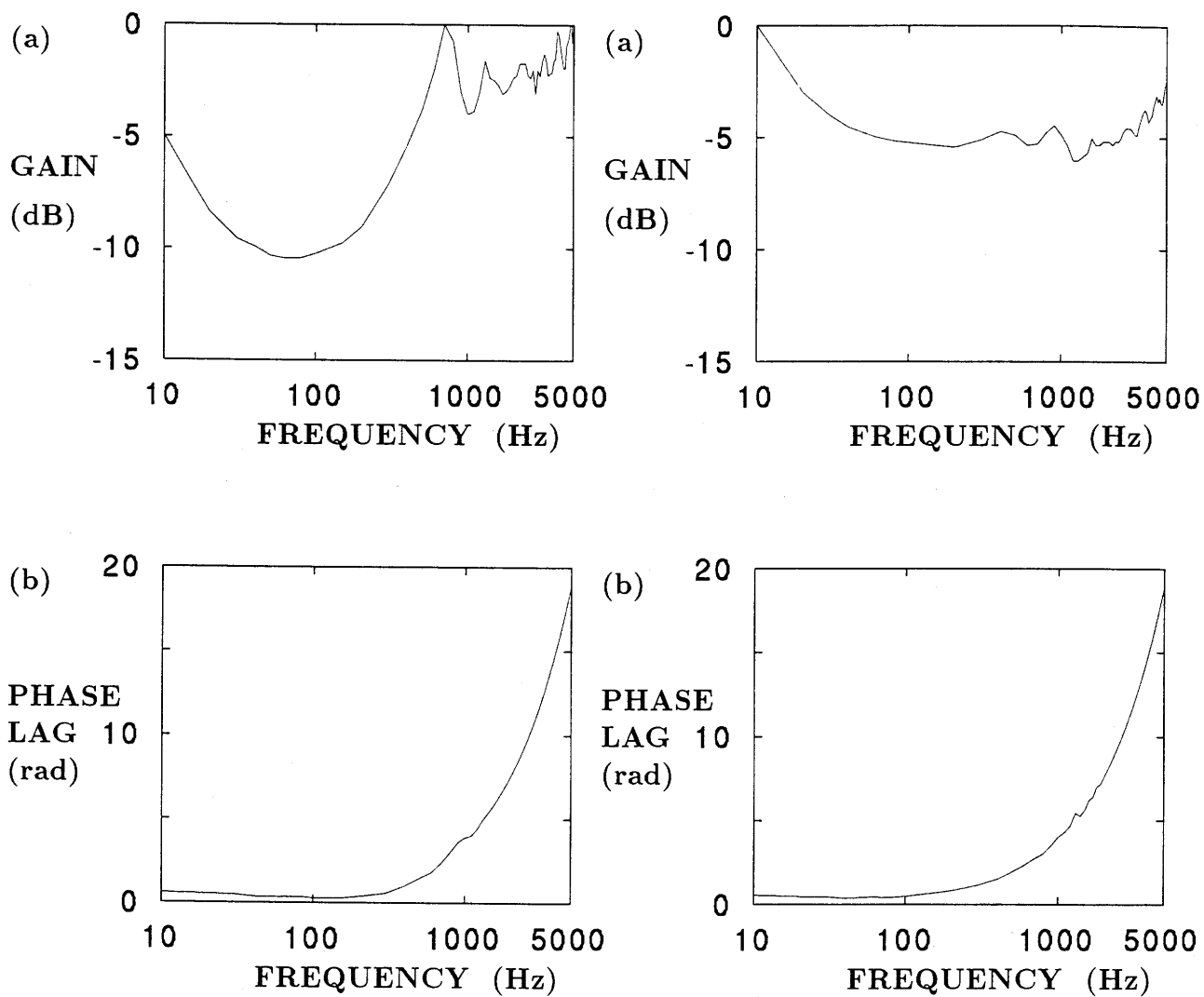


図 2.3: $p(t)$ と $P(t)$ の測定に使用したプローブマイクロホンの周波数特性
 [左列] $p(t)$ 測定用, [右列] $P(t)$ 測定用, (a) 利得, (b) 位相遅れ

2.2 実験方法

人工唇がマウスピースをくわえる状態 (lip adjustment) の深さ及び、強さを数値として表すのには前述の l と x_0 を用いる。クラリネットの音孔を全て閉じ、lip adjustment を一定にした状態で人工吹鳴した。 P_0 をゆっくりと上昇下降させ、ブラウン管オシロスコープを用いて $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ を観測した。 P_0 の変化範囲は 0kPa からリードがマウスピースに密着して振動が停止する圧力 P_c までの間である。この範囲で多くの異なる振動状態が励起されるのが観測された。励起された各振動状態において $p(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $P(t)$ を同時にデータレコーダ (TEAC 社 R410) に記録し、また、 P_0 と f も測定した。典型的に $P(t)$ の振幅は $p(t)$ に比して約 3~5% であった。

一つの振動状態から他の振動状態への遷移は、 P_0 の変化に伴って、突然しかも不可逆的に起こる。この遷移が発生する $P_0 = P_t$ の値も測定した。この実験を異なる lip adjustment に対して繰り返した。但し、lip adjustment の調整は音孔を全て閉じたクラリネットの基本音 D_3 がその lip adjustment のもとで励起されるように行った。

$p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の測定アナログ波形は、遮断周波数 4.1kHz、それ以上の周波数では 24dB/Octave の減衰を持つ低域ろ波器に通した後、同時に 0.1ms のサンプリング周期で計算機に取り込んだ。これらの時系列のサンプリング時刻は A/D 変換器のクロック周期 0.01ms だけずれているが、このずれは殆ど問題にはならない。

2.3 実験結果

2.3.1 励起された振動状態

音孔を全て閉じたクラリネットを lip adjustment を一定に保ち、 P_0 のみを変化させて人工吹鳴した。異なる lip adjustment で励起される振動状態の種類や数は異なった。実験で用いたクラリネットの音孔を全て閉じた場合に得られる最低音 D_3 に近いピッチの音は高い吹鳴圧力範囲で放射された。低い吹鳴圧力範囲では二つの異なる振動状態の組が励起された。それらはリードミスと呼ばれているような通常の演奏では用いられない高い周波数の音 (squeal) を放射する周期的振動、そして多くの非周期的振動 (準周期振動そしておそらくカオス振動) である。

実験において採用した典型的な lip adjustment とその lip adjustment のもとで励起される振動状態を表 2.2 に示す。表 2.2 の lip adjustment No.1 ~ 5 は岩城の報告³⁶⁾ によるものである。

着目する振動状態が周期的であれば、楽器から放射される音の平均律音階の音名をデジタルチューナで読みとり、その振動状態の名前とした。例えば、 D_3 と示された振動状態では、 f は平均律音階の D_3 音に極めて近い。一定の lip adjustment の下で P_0 を変化させるとき、 C_6^\sharp (1108.7Hz)、 E_6 (1318.5 Hz) のように共鳴気柱の長さとは無関係な振動数の音も観測された。このような音は初心者がしばしば発生させ、リードミスなどと呼ばれている。これらの音を発生させる振動状態も周期的である。表 2.3 は

表 2.2 に現れる平均律音階の音名の周波数を表す。

デジタルチューナの指示が平均律音階の D_3 を指し示した D_{3L} と D_{3H} は例外である。前者は振動状態 D_3 とは区別し得る 周期的振動状態であり、振動状態 D_3 よりも P_0 が低い範囲で励起される。一方、後者は 振動状態 D_3 よりも P_0 が高い範囲で励起される非周期的振動状態である。

さらにチューナでは発生音の振動数を特定できない複雑な波形を持つ多くの非周期的な振動状態 (準周期振動状態、カオス振動状態) も観測された。これらの振動状態は X_1, X_2, \dots で表す。

本論文では以後、表 2.2 に示した各振動状態を lip adjustment の番号と振動状態の記号を用いて表す。このようにすることによって異なる lip adjustment のもとで同じ記号で表される振動状態を区別できる。例えば、振動状態 6 - D_3 は lip adjustment No. 6 の下で励起される周期的振動状態 D_3 を表し、振動状態 2 - X_1 は lip adjustment No. 2 の下で励起される非周期振動状態 X_1 を表す。

lip-adjustment No.	lip-adjustment		excited vibratory states					
	l (mm)	x_0 (mm)	(lower P_0)			(higher P_0)		
1	9.0	0.82	X	B_5^b	B_3^b	D_6	E_6	D_3
2	9.0	0.40	B_5^b	X_1	F_6	D_3	X_2	F_6
3	6.0	0.49	X_1	X_2	F_6	X_3	D_3	D_{3H}
4	4.5	0.37	F_6	D_{3L}	D_3	D_{3H}		
5	8.0	0.62	X	B_5^b	B_3^b	D_6	D_3	
6	7.0	0.71	X	C_6^\sharp	E_6	D_3	D_{3H}	

表 2.2: 典型的な lip adjustment と励起された振動状態

notes in the tempered scale	frequency (Hz)
D_3	146.83
B_3^b	233.08
B_5^b	932.33
C_6^\sharp	1108.7
D_6	1174.7
E_6	1318.5
F_6	1396.9

表 2.3: 平均律音階における音名の周波数

2.3.2 振動状態の遷移

マウスピースとリードをくわえる唇の状態を 表 2.2 に示した lip adjustment No.6 の状態 ($l = 7\text{mm}$, $x_0 = 0.71\text{mm}$) で一定に保ち、 P_0 をゆっくりと上昇、下降させるときの、振動状態の遷移がどのように発生するかを 図 2.4 に示す。観測された振動状態は振動状態 D_3 , C_6^{\sharp} , E_6 , D_{3H} , X の 5 つのグループに分類できる。振動状態 D_3 , C_6^{\sharp} , E_6 は周期的振動状態である。振動状態 D_{3H} は非周期的振動状態であり、その $p(t)$ 波形は、 D_3 に C_6^{\sharp} あるいは E_6 が重畳されているように見える。振動状態 X も非周期的振動状態であるが、その $p(t)$ 波形はとても複雑である。これら個々の振動状態については第 3 章で詳細に解析し、比較検討する。

一つの振動状態は、表 2.4 に示すようにその振動状態に固有な P_0 の範囲で安定である。即ちその範囲で P_0 を変化させても、波形とその周波数の変化の量は僅かでも連続的で可逆的である。表 2.4 から、 P_0 の値が同じでも励起される振動状態が異なる場合があることがわかる。どの振動状態が励起されるかは直前に励起されていた振動状態と吹鳴圧力の変化方法に依存する。

vibratory states	P_0 (kPa)
C_6^{\sharp}	3.8 ~ 8.2
D_3	5.5 ~ 11.5
E_6	5.5 ~ 9.0
D_{3H}	11.5 ~ 11.9
X	3.6 ~ 4.4

表 2.4: 振動が励起される P_0 の範囲 (lip adjustment No.6)

ある振動が励起された状態から、その振動状態に固有な範囲を越えて P_0 を変化させると、 $P_0 = P_t$ でその振動状態は別の振動状態に変化した。この変化は多くの場合で突然起こり、不連続的、不可逆的に変化する場合が多かった。図中の矢印は変化の方向を表し、実線が P_0 を上げるときに起きる遷移、破線が下げるときに起きる遷移に対応している。また、矢印の根元にある数字は遷移吹鳴圧力 P_t (振動状態が不連続的に変化する吹鳴圧力) の値を示している。 P_t の値は、2 つの安定領域の間で P_0 を上昇させるときと下降させるときでは一般的には異なった。例えば、振動状態 C_6^{\sharp} と振動状態 D_3 との間 P_t は上昇時では $P_t = 8.2\text{kPa}$ であるが、下降時では $P_t = 5.5\text{kPa}$ である。また、この不可逆的な変化は 2 つの安定領域の間で場合によっては一方向にしか進行しなかった。例えば、振動状態 E_6 から振動状態 D_{3H} への遷移は P_0 を上昇させる場合のみ得られ、振動状態 C_6^{\sharp} から振動状態 X への遷移は P_0 を下降させる場合のみ得られる。図 2.4 においてリードが完全に閉じた状態から P_0 を下げた場合に 2 つの異なる遷移が起きることが示されているが振動状態 D_3 への遷移は圧力を下げる速さが小さい場合、振動状態 E_6 への遷移は圧力を下げる速さが大きい場合に起こる。

上述の結果は P_0 の上昇下降による振動状態の遷移の列にヒステリシスが存在することを示している。

lip adjustment を変化させることにより、励起される振動状態の種類や数は異なり、図 2.4 とは全く別のいろいろな状態遷移図が得られた。これら全ての状態遷移図から P_0 変化による振動状態遷移の列にヒステリシスが見られた。

lip adjustment No.1 及び No. 5 においては B_3^b 音 (233.1Hz) を吹鳴する状態と B_5^b 音 (932.3Hz) を吹鳴する振動状態がともに含まれている。振動状態 1 - B_3^b と振動状態 1 - B_5^b は、その基本周期の比が 4 : 1 であり 4 倍周期分岐の関係にあると考えられる。3.2.3 節 でこれらの振動状態に対する詳細な解析を行う。

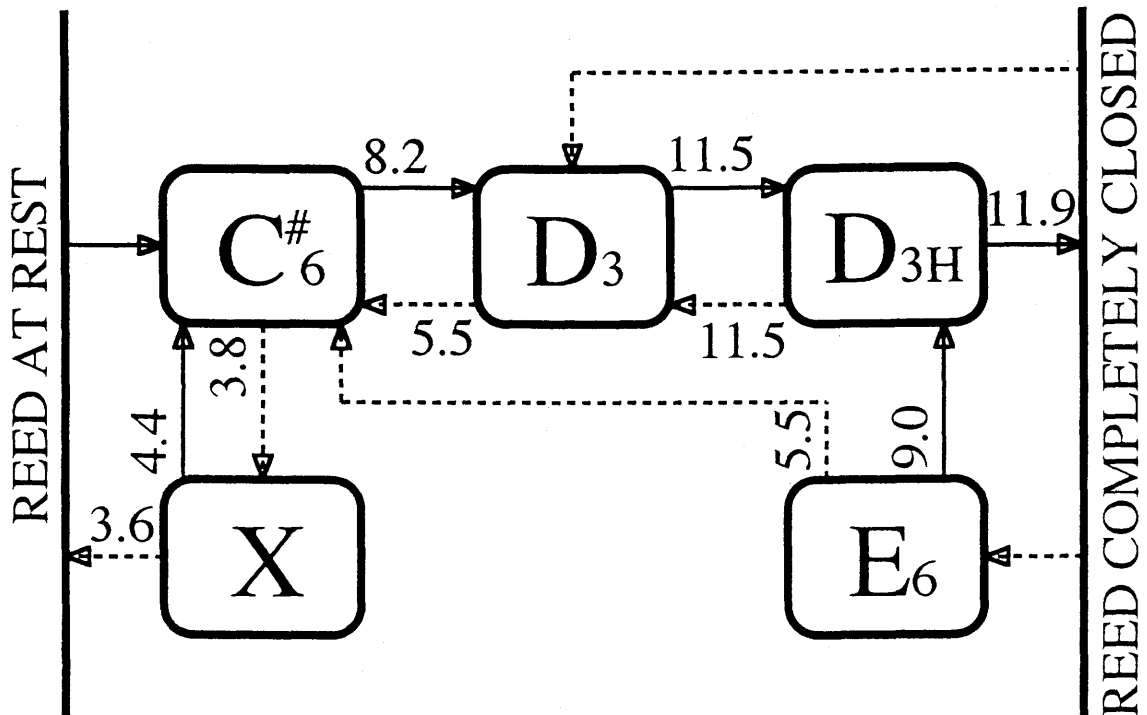


図 2.4: 状態遷移図 (lip adjustment No. 6)

2.4 考察

音孔を全て閉じたクラリネットを機械により人工的に吹鳴する実験を行った。すなわち、人工の唇がマウスピースをくわえる深さと強さ (lip adjustment) を固定した状態で吹鳴圧力 P_0 を 0 からリードが閉じるまでの広い範囲で上昇あるいは下降させた。 P_0 の変化に伴い励起される振動状態を観測した。

振動状態はパラメータ l, x_0 そして P_0 に依存する。これらパラメータの 3 次元空間の全てにおいて、全ての振動状態の励起領域が決定されることが望ましい。本論文の実験は D_3 音を生じる lip adjustment に対して行われた。それ故、3 次元の全パラメータ空間において、周期領域と非周期領域を決定するためにはさらなる実験が必要である。全パラメータ空間をカバーすることとその結果を示すことは以下に示す 2 つの理由により複雑である。第 1 にパラメータ空間の変数 (l, x_0, P_0) の多くの組み合わせに対して 2 つあるいはそれより多くの状態 (振動停止の状態を含めると最大 4 つ) が励起される。励起される振動状態は P_0 を連続的に上昇、あるいは減少させる領域に依存する。第 2 に 1 つの状態から別の状態への遷移は突然起こり、それゆえ、領域の境界を決定するために多くの計測が必用とされる。変数 l はリードと下唇の接触位置の計測に用いられるが特に問題のあるパラメータである。このパラメータはより正確に決定されるべきである。

これらの実験の過程において、状態遷移は P_0 の変化が原因となる唇とリードとの接触位置の変化から引き起こされる可能性もあるとして調べてみた。実験から状態遷移の最中にこれらの接触位置の決定的な変化は光学マイクロメータを使用しても見られなかった。さらに唇を鉛筆の先で押すことにより故意に僅かな接触位置のずれをつくっても遷移は起こらなかった。同じ遷移は一定の lip adjustment のもとで繰り返し得られた。そのような結果はもし状態遷移が接触位置のずれによって引き起こされているならば考えにくい。

人間の口腔の平均体積 (/ア/ または /イ/ の発音状態においておよそ $1.6 \times 10^{-4} \text{m}^3$) はこれらの実験に用いた吹鳴器の体積 (およそ $2.5 \times 10^{-4} \text{m}^3$) よりもかなり小さい¹⁰⁾。また、吹鳴器の体積を $1.8 \times 10^{-4} \text{m}^3$ まで減少させたときの影響についても調べた。しかし、振動状態における本質的な差異は見られなかった。

振動状態 B_3^b と B_5^b は本論文の実験では lip adjustment No. 1 と No. 5 で励起された。おそらく、これらの振動状態の間の遷移は Maganza ら¹¹⁾ により議論されたカオスへの倍周期分岐 (ファイゲンバウムルート) の 4 倍周期分岐の典型的例である。Gibiat¹²⁾ は実験的シミュレーションモデルに周期的、カオス的振動が励起され、倍周期分岐、3 倍周期分岐が起こる可能性を示した。これらはクラリネットに倍周期分岐、伝統的でない音が起こる可能性について報告している。

音孔を全て閉じたクラリネットを人工吹鳴し、 P_0 を広い範囲で上昇あるいは下降させるとき、クラリネットからは様々な音が放射される。それらは、実験に用いた楽器の最低音である D_3 音以外に、通常リードミスと呼ばれている高周波数の音、さらに準周期あるいはカオス的な非周期音である。これらの音は、言うまでもなく、クラリネット気柱に励起されたそれぞれの気柱振動によるものである。

lip adjustment を一定に保った状態でしかも同じ P_0 のもとでも、 P_0 を上昇させるかあるいは下降させるかによって 2 つ以上の異なる気柱振動状態が励起される場合がある。すなわち、パラメータ空間 (l, x_0, P_0) の与えられた一点で複数の振動状態が励起されることを示した。どの振動状態が励起されるかは、吹鳴圧力を変化させる直前に励起されていた振動状態に依存する。それ故、 P_0 を変化させる方法に依存して状態遷移の列にヒステリシスが存在することを示した。

人工的に吹鳴されたクラリネットの振る舞いは、例えばバスーン¹³⁾、オーボエ、そしてソプラノサキソフォン¹⁴⁾ の様な円錐気柱を持つリード楽器と比較してより複雑な振動状態を持つ。これらの円錐気柱楽器の全ての音孔を閉じて人工吹鳴した場合、周期的振動状態においては気柱の基本周波数あるいは 2 倍、あるいは 3 倍の周波数のどれかの振動成分を持つ。これらは時間波形によって簡単に区別することができる単純な振動状態である。しかし、複雑な非周期的振動状態は円錐気柱楽器ではめったに見られなかった。

もう 1 つの円錐気柱楽器とクラリネットの差異は、吹鳴圧力の低いところで両者では得られる振動状態が異なるということである。バスーン¹³⁾、オーボエ、そしてソプラノサキソフォン¹⁴⁾ などのような円錐気柱楽器では共鳴管の基本音、すなわち音楽的に好ましいと思われる音は低い吹鳴圧力範囲で得られる。一方、クラリネットでは非周期振動の多くが低い吹鳴圧力で得られる。クラリネットの基本音は常に高い吹鳴圧力で発生される。lip adjustment を適切に調節すると、 P_0 の比較的高い範囲で、音楽の演奏中に用いられるような良質の D_3 音を得られた。

人工吹鳴実験から得られた多数の周期的、非周期的な振動状態の吹鳴音は、実際に熟練した演奏者によっても出し得た (第 5 章参照)。このことから実験で得られた振動状態は機械により人工的に吹鳴したために作り出された特別な振動ではないことが判る。

第 3 章

測定結果の解析

3.1 解析方法と結果

本章では第 2 章に述べた人工吹鳴実験において得られたデータを解析する。励起された振動状態において測定されたマウスピース内圧力変化 $p(t)$ 、リード開口 $x(t)$ 、吹鳴器からリード開口を通して気柱に流れ込む空気流速 $v(t)$ 、吹鳴器内圧力変化 $P(t)$ の測定アナログ波形は、遮断周波数 4.1kHz、それ以上の周波数では 24dB/Octave の減衰を持つ低域ろ波器に通した後、同時にサンプリング周期 $t_s = 0.1\text{ms}$ で A/D 変換を行い、計算機に取り込んだ。A/D 変換器の分解能は 12bit である。A/D 変換後の $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の時系列を以後、

$$\left. \begin{array}{l} \{p_n\} \equiv \{p(nt_s)\} \\ \{x_n\} \equiv \{x(nt_s)\} \\ \{v_n\} \equiv \{v(nt_s)\} \\ \{P_n\} \equiv \{P(nt_s)\} \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (3.1)$$

と表す。ここで N はサンプリング点数である。本章で示す測定波形やパワースペクトル、アトラクタはすべて計算機に記憶されたデジタル時系列からの出力である。

本章では表 2.2 に示した lip adjustment No. 1 ~ 5 で励起される数種の典型的な振動状態と lip adjustment No. 6 で励起される全ての振動状態を解析する。解析を行った振動状態の lip adjustment (l, x_0), P_0, f の値を表 3.1 に示す。解析は以下の 5 項目に着目して行った。

- (i) $p(t), x(t), v(t), P(t)$ の波形とパワースペクトル、
- (ii) $p(t), x(t), v(t), P(t)$ から得られる (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ、
- (iii) 多次元相空間における再構成アトラクタ、
- (iv) 再構成アトラクタの相関次元 d_2 、
- (v) 再構成アトラクタの最大リアプノフ指数 λ_{\max} 。

以下、解析方法、解析結果について述べる。

	lip-adjustment		vibratory state	P_0 (kPa)	f	
	No.	l (mm)				x_0 (mm)
(a)	1	9.0	0.82	B_3^b	5.8	B_3^b (233.1Hz) - 9cent
(b)				B_5^b	4.8	B_5^b (932.3Hz) - 12cent
(c)				X	4.2	Indefinite
(d)	2	9.0	0.40	X_1	3.7	Indefinite
(e)				X_2	6.3	Indefinite
(f)	3	6.0	0.49	X_1	3.1	Indefinite
(g)				X_2	3.1	Indefinite
(h)				X_3	5.3	Indefinite
(i)	4	4.5	0.37	D_{3L}	3.1	D_3 (146.8Hz) + 4cent
(j)	5	8.0	0.62	X	3.4	Indefinite
(k)	6	7.0	0.71	D_3	7.1	D_3 (146.8Hz) - 30cent
(l)				C_6^\sharp	4.8	C_6^\sharp (1108.7Hz) + 20cent
(m)				E_6	4.8	E_6 (1318.5Hz) + 10cent
(n)				D_{3H}	11.2	D_3 (146.8Hz) - 35cent
(o)				X	3.7	Indefinite

表 3.1: 解析を行った振動状態の lip adjustment, P_0 , f

3.1.1 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の波形とパワースペクトル

本章で示す各波形は 20ms 分である。サンプリング周期 t_s は 0.1ms であるので、1 つの波形データは $20\text{ms}/t_s = 200$ 個のサンプル値を含んでいる。各時系列のチャンネル時間差は 0.01ms である。このずれはサンプリング周期の 1/10 であるので、殆ど問題にはならないと考えられる。

パワースペクトルは、 $t_s = 0.1\text{ms}$ でサンプルされた離散データにハミング窓をかけた後、FFT (高速フーリエ変換) により求めた。FFT の点数は $2^{14} = 16384$ である。従って、パワースペクトルの分解能は $10\text{kHz}/16384 = 0.61\text{ Hz}$ である。

図 3.1 は人工吹鳴実験から得られた典型的な振動状態における $p(t)$ 波形とそのパワースペクトルである。周波数成分の最大値を 0dB として 3kHz までを示した。また、表 3.2 には、図 3.1 に示したパワースペクトルにおける最大ピークを持つ周波数 f_a 、及び主要なピークを持つ周波数 f_b , f_c を示す。

vibratory state			f_a (Hz)	f_b (Hz)	f_c (Hz)
(a)	1	- B_3^b	933.2		
(b)		B_5^b	930.2		
(c)		X	695.2	1135.3	(-2.9dB)
(d)	2	- X_1	943.0	1367.2	(-4.2dB)
(e)		X_2	1398.9	951.5	(-10.4dB)
(f)	3	- X_1	1181.0	1364.1	(-2.2dB)
(g)		X_2	955.2	1364.8	(-2.3dB)
(h)		X_3	1423.3	971.1	(-14.9dB)
(i)	4	- D_{3L}	148.9		
(j)	5	- X	435.8	695.8	(-2.1dB)
(l)	6	- D_3	144.0		
(l)		C_6^\sharp	1122.4		
(m)		E_6	1328.1		
(n)		D_{3H}	145.3	1143.2	(-17.1dB)
(o)		X	909.4	162.4	(-4.4dB)

表 3.2: 典型的な振動状態の $p(t)$ のパワースペクトルにおける主要な周波数成分

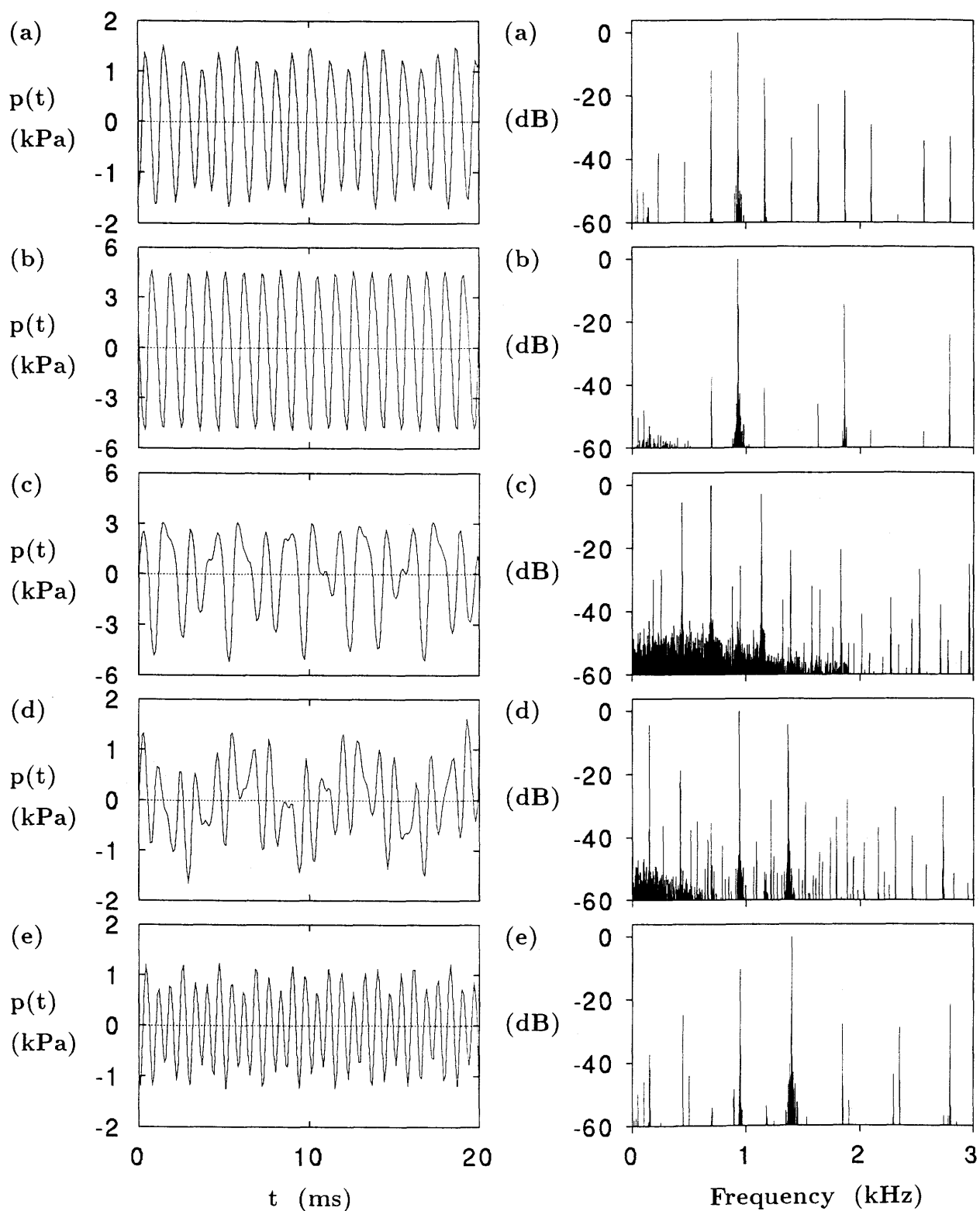


図 3.1: 人工吹鳴実験から得られた典型的な振動状態の $p(t)$ [左列] 波形, [右列] パワースペクトル, (a) $1 - B_3^b$, (b) $1 - B_5^b$, (c) $1 - X$, (d) $2 - X_1$, (e) $2 - X_2$

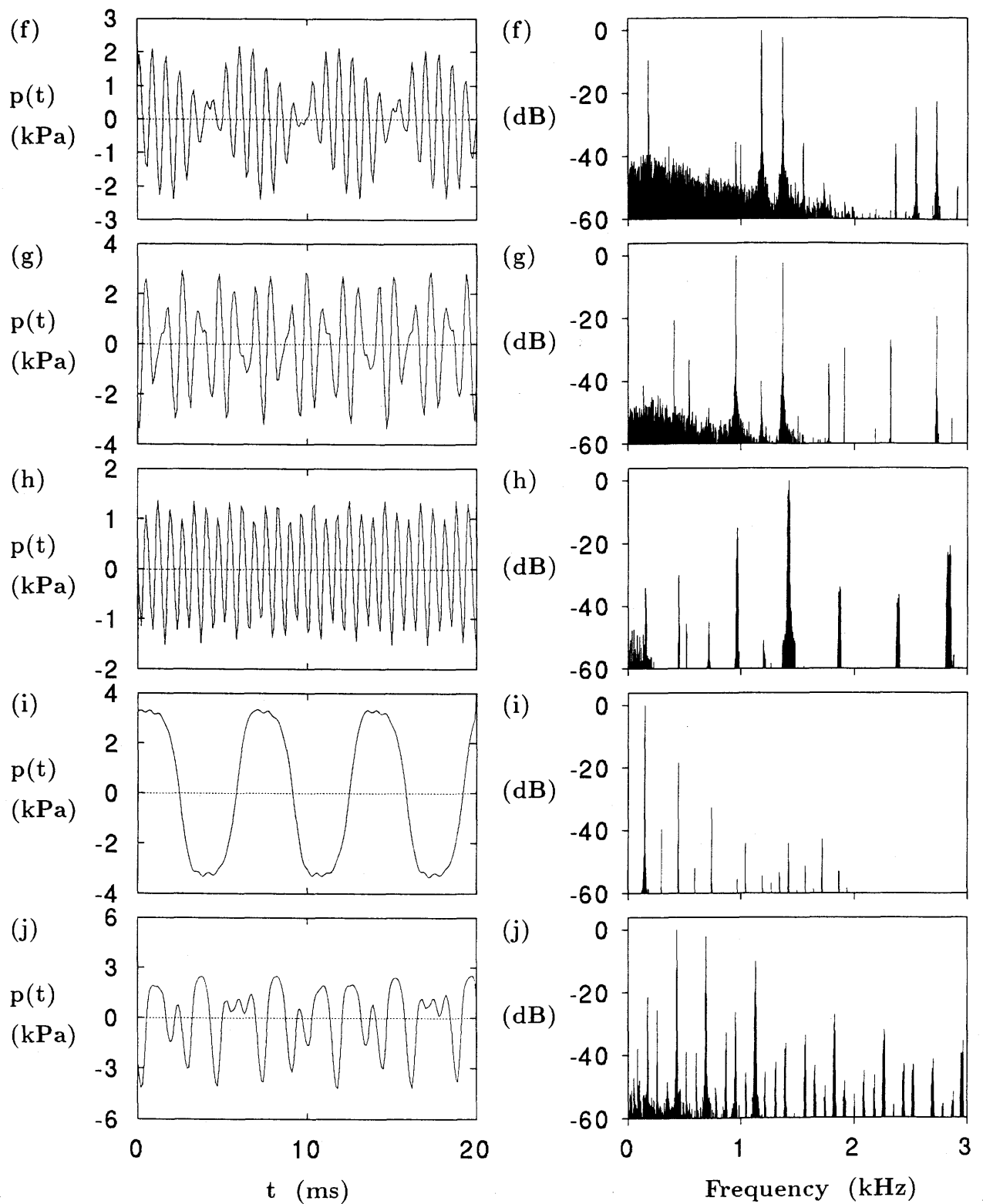


図 3.1: 人工吹鳴実験から得られた典型的な振動状態の $p(t)$ [左列] 波形, [右列] パワースペクトル, (f) 3 - X_1 , (g) 3 - X_2 , (h) 3 - X_3 , (i) 4 - D_{3L} , (j) 5 - X

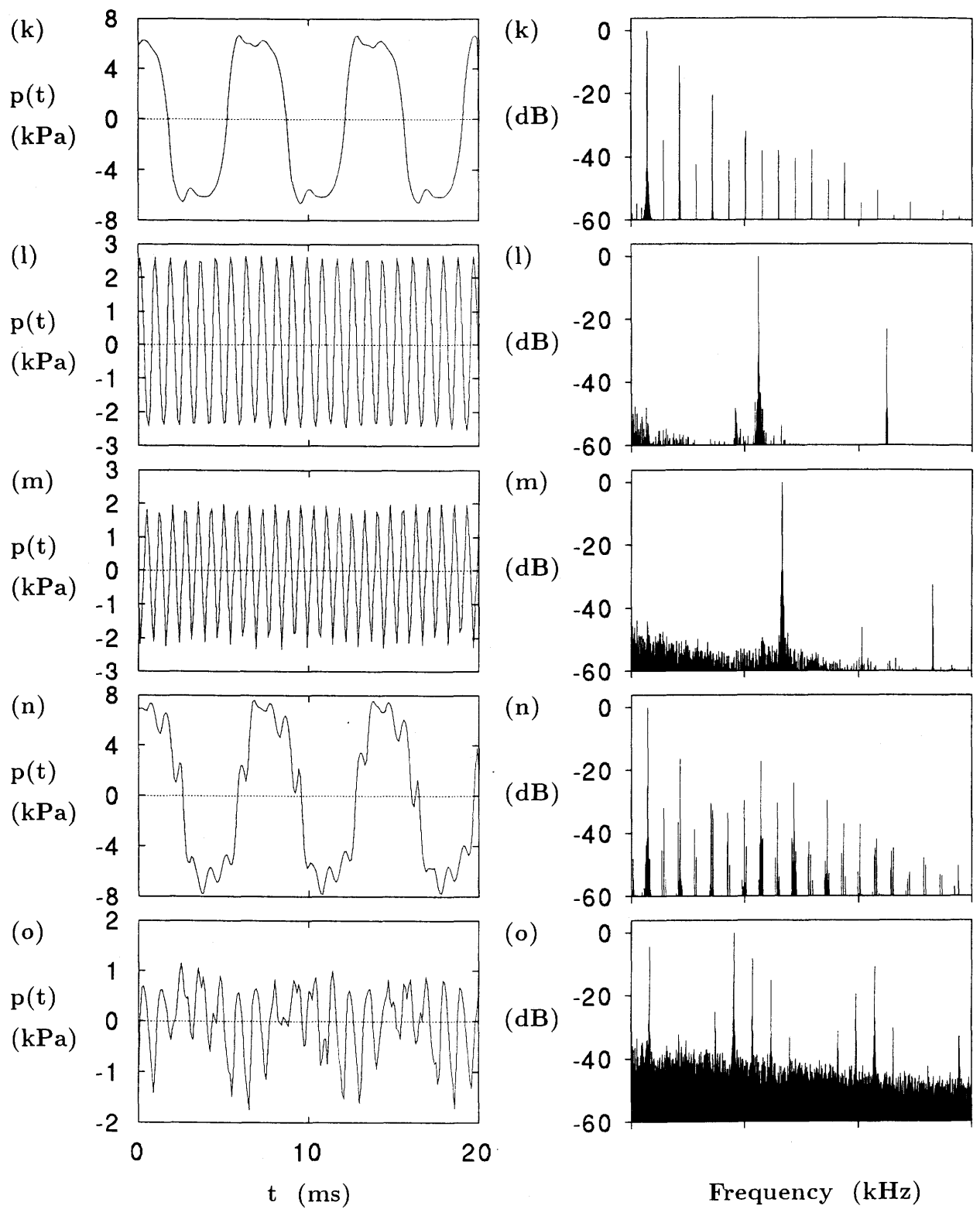


図 3.1: 人工吹鳴実験から得られた典型的な振動状態の $p(t)$ [左列] 波形, [右列] パワースペクトル, (k) 6 - D_3 , (l) 6 - C_6^\sharp , (m) 6 - E_6 , (n) 6 - D_{3H} , (o) 6 - X

3.1.2 (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ

アトラクタは位相空間に埋込まれた力学系の軌道の極限集合である。

$p(t), x(t), v(t), P(t)$ の時系列をそれぞれ式 (3.1) で表すとき、 (p, x, v, P) 状態空間内のアトラクタは 4 次元のベクトル、

$$\{p_n, x_n, v_n, P_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (3.2)$$

により与えられる。4 次元のベクトルを描くのは困難であるので、本論文では式 (3.2) と同様にして $(p, v), (v, x), (p, x), (P, v), (P, x), (P, p)$ 状態空間におけるアトラクタ、 (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタを示す。図 3.2 は (p, x, v) 状態空間の座標系である。N を十分大きく選ぶとき状態空間内にアトラクタが得られる。

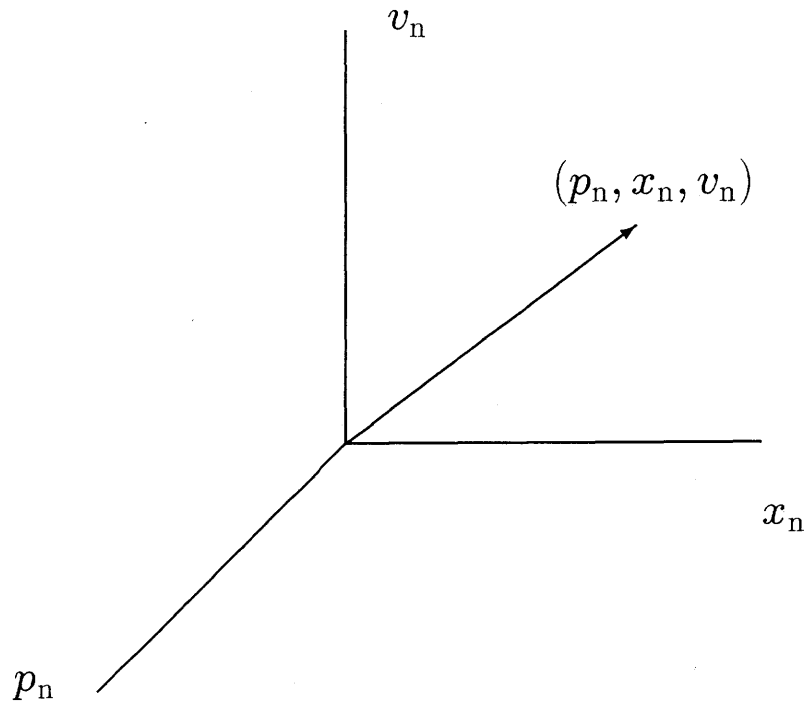


図 3.2: (p, x, v) 状態空間の座標系

3.1.3 多次元相空間における再構成アトラクタ

Takens²⁶⁾ は、高次元力学系のアトラクタそのものを扱う代わりに、任意に選ばれたひとつの成分座標の軌道情報のみからアトラクタが再構成できることを証明した。

本研究では主に $p(t)$ のみから、多次元相空間にアトラクタを再構成し、その形状について検討を行った。 $p(t)$ を用いた理由は、クラリネットの人工吹鳴において、カオス振動を除いては、 $p(t)$ 波形は対称性がよく、したがって $p(t)$ 波形のみからの再構成アトラクタは理解し易い形になるからである。 $p(t)$ 波形のみを利用するのは折角の $x(t)$, $v(t)$ のデータを捨ててしまう無駄を犯すことにはなるが、アトラクタが理解し易いと言うのは大きな利点である。振動状態によっては $x(t)$, $v(t)$ からアトラクタの再構成を行った。

多次元相空間へアトラクタを再構成するには埋込み (embedding) という方法を用いる^{16), 23)-25)}。時間遅れ $T = ht_s$ を導入し、 m 次元のベクトル、

$$\vec{p}_n \equiv \{p_n, p_{n+h}, p_{n+2h}, \dots, p_{n+(m-1)h}\} \quad (3.3)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots, N'; N' \leq N - (m-1)h)$$

をつくる。ここで m は埋め込み次元と呼ばれる。式 (3.3) は m 次元相空間の 1 点の座標を表す。 N を十分に大きく選ぶとき多次元相空間内にアトラクタが再構成される。図 3.3 は $m = 3$ の場合の多次元相空間の座標系である。

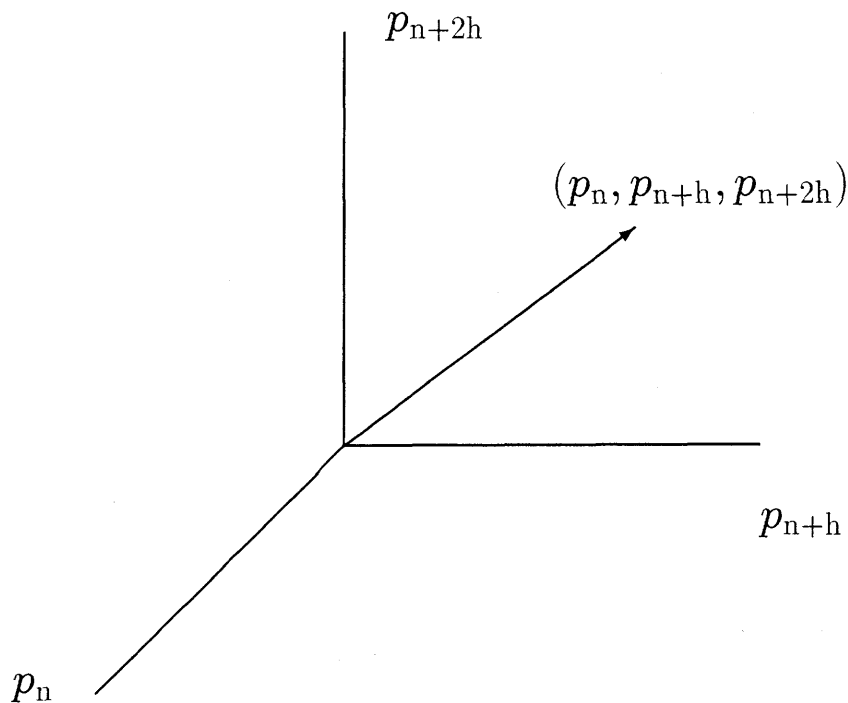


図 3.3: 3 次元相空間の座標系

Mutual Information 時間遅れ $T = ht_s$ の値が小さすぎると再構成アトラクタが細長くなり、大きすぎると再構成アトラクタが何回もねじれてしまう。最適な T を選択する 1 つの方法として時系列の自己相関関数の最初の極小値に対応する時間遅れを用いる方法もあるが、本論文では Keefe が採用した方法¹⁵⁾、すなわち時系列 $\{p_n\}$ と $\{p_{n+h}\}$ の Mutual Information を計算し、その計算曲線の最初の極小値に対応する時間遅れを最適な T とした。Mutual Information は注目する時刻での $\{p_n\}$ が与えられているときに平均して予測できる $\{p_{n+h}\}$ の情報量を表す。計算方法を以下に述べる。

デジタル時系列 $\{p_n\}$ の振幅の数値を表す変数を s_i とする。例えば、 $\{p_n\}$ の振幅の最大値と最小値の差が 10bit (1024) で表されているとき、 N 点の $\{p_n\}$ は $s_1, s_2, \dots, s_{1024}$ の何れかにカウントされる。 s_i にカウントされた個数と N 点の比を求め、 $P_s(s_i)$ とする。 $P_s(s_i)$ は $\{p_n\}$ の 1 点のデータが s_i にカウントされる相対度数である。同様に、遅れを含むデジタル時系列 $\{p_{n+h}\}$ の振幅の数値を表す変数を q_j とし、一点のデータが q_j にカウントされる相対度数を $P_q(q_j)$ とする。また、注目する時刻で $\{p_n\}$ のデータが s_i に $\{p_{n+h}\}$ のデータが q_j に同時にカウントされる相対度数を $P_{sq}(s_i, q_j)$ とする。これらの相対度数 $P_s(s_i), P_q(q_j), P_{sq}(s_i, q_j)$ を用いて、それぞれ対応するエントロピーを計算する。

$$H(S) = - \sum_i P_s(s_i) [\log_2 P_s(s_i)] \quad (3.4)$$

$$H(Q) = - \sum_j P_q(q_j) [\log_2 P_q(q_j)] \quad (3.5)$$

$$H(S, Q) = - \sum_{i, j} P_{sq}(s_i, q_j) [\log_2 P_{sq}(s_i, q_j)] \quad (3.6)$$

ここで式 (3.4) ~ 式 (3.6) の対数の底は 2 であり、エントロピーの単位は bit で与えられる。計算したエントロピーを用いて Mutual Information $I(S, Q)$ は次式で定義されている。

$$I(S, Q) = H(s) + H(Q) - H(S, Q) \quad (3.7)$$

定義から $I(S, Q) = I(Q, S)$ である。Mutual Information は式 (3.4) ~ 式 (3.6) で計算したエントロピーの加減算で得られるのでその単位は bit である。Mutual Information は状態 S が与えられているときに平均して予測される状態 Q の情報量を表す。情報量の極小値は状態 S と状態 Q の相関が局所的に小さくなる時間遅れ $T = ht_s$ で得られる。

Mutual Information の計算はどれだけ点数を用いるか、また対象とするデジタル時系列の振幅の分解能によって多少変化する。本論文では 16000 点を用い、振幅の最大値と最小値の差は 6 ~ 10bit で変化させて計算を行った。時系列 $\{p_{n+h}\}$ の h を $0 \leq h \leq 50$ の範囲で変化させて式 (3.7) を計算し、その結果を横軸に h ($0 \leq h \leq 15$)、縦軸に Mutual Information をとり示した。 h の範囲 ($0 \leq h \leq 15$) は本論文の目的に対しては十分であった。本論文で示した Mutual Information の図には 5 つの計算曲線を

描いたが、それらはそれぞれ振幅の最大値と最小値の差を 6 ~ 10bit で表した場合の結果である。振幅の最大値と最小値の差を大きい bit 数で表した順に計算曲線の平均値は高くなる。本論文では Mutual Information の計算に 16000 点を用いたが、この程度の点数では bit 数をあまり大きくしない方が凹凸のはっきりとした結果が得られた。Mutual Information 曲線の最初の極小値に対応する時間遅れ (ht_s) が振幅の分解能を変化させても一定であるとき、その値を最適値として採用した。

表 3.3 は 表 3.1、図 3.1 に示した振動状態の $p(t)$ から Mutual Information の計算により求められた最適な時間遅れである。時間遅れはサンプリング周期 t_s ($=0.1\text{ms}$) の整数倍 h として示した。以後、各典型的な振動状態に対してアトラクタを再構成する際には 表 3.3 に示した h の値を用いる。

	vibratory state	optimal delay h
(a)	1 - B_3^b	3
(b)	B_5^b	3
(c)	X	4
(d)	2 - X_1	3
(e)	X_2	2
(f)	3 - X_1	2
(g)	X_2	2
(h)	X_3	2
(i)	4 - D_{3L}	14
(j)	5 - X	5
(l)	6 - D_3	4
(l)	C_6^d	3
(m)	E_6	3
(n)	D_{3H}	6
(o)	X	3

表 3.3: Mutual Information の最初の極小値から求められる最適な時間遅れ

3.1.4 相関次元 d_2

カオス振動の存在に対する定量的判断はアトラクタの相関次元 d_2 と最大リアプノフ指数 λ_{\max} の計算に基づいて行う^{15),16),23)-25)}。本節では相関次元 d_2 について説明する。最大リアプノフ指数 λ_{\max} についての説明は 3.1.5 節で行う。

カオス振動のアトラクタの次元は原理的には非整数の次元 (フラクタル次元) をとる。それに対してノイズでは無限の自由度を持つため埋込み次元 m とともに増大する。従って、正確な次元測定の結果はある時系列に対しカオス振動とノイズの区別を与える。簡単にフラクタル次元を計算する方法が Grassberger と Procaccia²⁷⁾⁻²⁹⁾ により提案されている。これは、相関次元 d_2 と呼ばれ、式 (3.8) で定義されている。

$$d_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_m(r)}{\log(r)} \quad (3.8)$$

ここで r は m 次元相空間内の距離、 $C_m(r)$ は相関関数を表す。計算方法について以下に述べる。

はじめに m 次元相空間に再構成した N 点より成るアトラクタの全ての点と点との組み合わせ数である N^2 個について、その 2 点間の距離 R を計算し、その最大値を R_{\max} とする。

距離は、通常はユークリッド距離、

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \left\{ \sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.9)$$

をとるが、次のように絶対値や最大ノルム、

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sum_{j=1}^m |x_j - y_j| \quad (3.10)$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \max\{|x_j - y_j|, 1 \leq j \leq m\} \quad (3.11)$$

などを用いた方が計算時間の節約になる。どの式を用いても相関次元 d_2 の計算結果は同じである。このようにノルムのとり方に依存しないで d_2 が求まるのは、空間スケール r に関するスケーリング指数だけを問題にしているからである。 \vec{x} を a 倍したとき、 $\|a\vec{x}\| = a\|\vec{x}\|$ の関係を満たすならば、 d_2 は距離の取り方に依存しないで求まる^{16),23)-25)}。本論文では相関次元 d_2 の計算に関する距離には式 (3.10) の絶対値による距離を用いる。

次に相関関数

$$C'_m\left(\frac{R}{R_{\max}}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H\left(\frac{R - \|\vec{p}_i - \vec{p}_j\|}{R_{\max}}\right) \quad (3.12)$$

を $0 \leq R/R_{\max} \leq 1$ の範囲で計算する。ここで H は階段関数であり式 (3.13) で与えられる。

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad (3.13)$$

式 (3.12) は m 次元相空間に存在する N 点の全ての点と点の距離を計算し、その距離が R よりも短いときのみその組み合わせの個数を加算し、全ての組み合わせ数 N^2 に対する R よりも短い距離を持つ点の組み合わせの個数の比を計算している。

R は最小値 R_{\min} を $R_{\min} = R_{\max}/1000$ として離散的 (500 分割) に変化させた。 R/R_{\max} の k ($1 \leq k \leq 500$) 番目の値 R_k は、

$$\log(R_k) = \log(R_{\min}) + k \frac{\log(R_{\max}) - \log(R_{\min})}{500} \quad (3.14)$$

で示される。 $k = 500$ のとき、 $R_k = R_{\max}$ となり、式 (3.12) は $C_m(1) = 1$ となる。

d_2 の計算にはより多数の観測点を用いた方が信頼性の高い結果が得られるが従来の相関関数の計算量は N が大きくなると N^2 の割合で増加する。計算量を少なくするために Mutual Information により求められた最適な時間遅れ $\tau = ht$ 。毎に参照ベクトルを選択し

$$C_m\left(\frac{R}{R_{\max}}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \cdot N_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_1} H\left(\frac{R - \|\vec{p}_{h,i} - \vec{p}_j\|}{R_{\max}}\right) \quad (3.15)$$

を計算した¹⁵⁾。式 (3.15) 中の N_1 は N/h を越えない最大の整数を表す。同じ N に対して式 (3.15) を式 (3.12) と比較すると計算量が約 $1/h$ になるので計算時間の節約になる。

本論文では式 (3.15) を用いて $N = 16000$ について $C_m(R/R_{\max})$ を計算した。計算はワークステーション (富士通社 S-4/5, 計算速度 60 MIPS) で行った。計算時間は $N = 16000$, $h = 2$ の場合、1つの次元につき約 7 時間を要した。

d_2 の計算を行う m の範囲は

$$m \geq 2d_2 + 1 \quad (3.16)$$

の条件を満たすように選択した^{15),16)}。例えば $d_2 = 2$ のアトラクタに対しては $2 \times 2 + 1 = 5$ 次元以上の m をについて d_2 の計算を行った。

$r = R/R_{\max}$ として、 $C_m(r)$ と r を両対数軸上にプロットし、その曲線の特定の r_k で傾き (Local Slope) を計算する。Local Slope は r_{k-20} から r_{k+20} ($20 \leq k \leq 480$) の 41 個のデータから最小二乗法により計算し、 r の対数の関数として示した。式 (3.16) を満たす範囲で m を増加しても Local Slope が注目する r の範囲で変化しないとき、その値が d_2 である。真の観測データに測定系のノイズが加わっている場合、 r の小さいところではノイズの影響があらわれ、Local Slope が大きくなり、 r が大きく、1 に近いところでは $C_m(r)$ が飽和し、Local Slope は 0 に近くなる。従って、ノイズレベルよりも大きく、 $C_m(r)$ が飽和し始めるよりも小さい r の範囲で、Local Slope が一定に見なせる範囲 (Scaling Region) を求めた。その範囲内で得られる Local Slope の平均値とその標準偏差を d_2 とした。表 3.4 に 図 3.1 に示した典型的な振動状態に対して得られた d_2 の値である。表 3.4 中の m と r の値は d_2 を算出するのに用いた埋め込み次元と Scaling Region である。

vibratory					
state		m	log r		d_2
(a)	1 - B_3^b	8	-1.7 ~ -1.3		1.04 ± 0.02
(b)	B_5^b	3	-1.5 ~ -1.0		1.01 ± 0.01
(c)	X	6	-1.1 ~ -0.7		2.13 ± 0.03
(d)	2 - X_1	8	-1.0 ~ -0.7		3.17 ± 0.04
(e)	X_2	6	-1.5 ~ -1.0 -0.5 ~ -0.4	{	2.12 ± 0.03 1.20 ± 0.02
(f)	3 - X_1	6	-1.1 ~ -1.0		2.29 ± 0.03
(g)	X_2	6	-1.2 ~ -0.8		2.14 ± 0.03
(h)	X_3	6	-1.5 ~ -1.1 -0.7 ~ -0.4	{	2.20 ± 0.05 1.14 ± 0.03
(i)	4 - D_{3L}	6	-1.4 ~ -0.3		1.03 ± 0.03
(j)	5 - X	6	-1.2 ~ -0.8		2.06 ± 0.01
(l)	6 - D_3	7	-1.8 ~ -0.3		1.04 ± 0.02
(l)	C_6^H	4	-1.1 ~ -0.5		1.02 ± 0.01
(m)	E_6	3	-1.1 ~ -0.5		1.03 ± 0.04
(n)	D_{3H}	6	-1.7 ~ -1.1 -0.6 ~ -0.3	{	2.14 ± 0.02 1.10 ± 0.03
(o)	X	7	-0.8 ~ -0.6		2.97 ± 0.03

表 3.4: 典型的な振動状態の相関次元 d_2

3.1.5 最大 Lyapunov 指数 λ_{\max}

カオス振動の性質のひとつに初期値に対する敏感な依存性がある。カオス振動では力学系の初期値を僅かにずらした場合、それぞれの軌道間の距離が時間と共に平均として指数関数的に離れていく。この性質は多次元相空間あるいは状態空間における軌道の近傍が時間とともにどのように変化していくかを定量化して評価される。具体的には m 次元の状態空間において初期状態を表す点のまわりに m 次元の単位球を考え、それが軌道にそってどのように変形していくか、その変形を特長づける量を評価する。 m 次元の単位球は時間と共に一般に楕円体に変形する。Lyapunov 指数 λ は m 次元球の主軸の長さの変化率を評価する量である。従って m 次元空間のアトラクタに対しては m 個の Lyapunov 指数 λ_i ($1 \leq i \leq m$) が存在する。 m 個の Lyapunov 指数 λ_i の中の最大値が最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} である。最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} はアトラクタ上のわずかに異なる 2 点間の距離の指数的増大率を示す。カオスでは、僅かに初期条件の異なる 2 つの状態は、時間の経過と共に、大きく離れて行くので、そのアトラクタの最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} が正 ($\lambda_{\max} > 0$) となることで定義される。それに対してノイズでは $\lambda_{\max} = 0$ となる。従って、カオスか否かの判定には λ_{\max} の評価が重要である。

Lyapunov 指数の計算法については多くの方法が提案されている^{16),23)-25)}。しかし、それらの多くは系の時間発展を記述する方程式がわかっている場合に用いることができる方法である。人工吹鳴実験から得られたデータのみを用いて最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} を計算するために、ここでは時系列から λ_{\max} を求める計算法を採用した³⁰⁾⁻³²⁾。計算法について以下に述べる。

はじめに m 次元相空間に存在する N 点から成る再構成アトラクタの i 番目の点を \vec{p}_i とする。 \vec{p}_i とそれ以外の $N-1$ 点との m 次元相空間における距離を計算し、その距離が最小となるような点 $\vec{p}_{i'}$ を求める。本論文では最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の計算に関する距離には式 (3.9) に示したユークリッド距離を用いる。 i 番目の点 \vec{p}_i と点 $\vec{p}_{i'}$ との距離を

$$r_i = \|\vec{p}_i - \vec{p}_{i'}\| \quad (3.17)$$

i 番目の点 (\vec{p}_i) が選ばれた時刻 $t = 0$ から jt_s 時間後の 2 点間の距離を

$$r_{i+j} = \|\vec{p}_{i+j} - \vec{p}_{i'+j}\| \quad (3.18)$$

として下式を計算する。

$$\lambda(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{t \cdot N} \sum_{i=1}^N \log \frac{r_{i+j}}{r_i} \quad (3.19)$$

ここで対数は自然対数であり、 $t = jt_s$ である。式 (3.19) は $t = 0$ での最小距離 r_i に対する注目する時刻での距離 r_{i+j} の比を計算し、その対数の和の時間平均をとっている。横軸に t 、縦軸に λ をとって計算結果をプロットした。式 (3.16) を満たす範囲で

埋め込み次元 m を増加しても λ が注目する t の範囲で変化しないとき、その値が求める最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} である^{31),32)}。

距離 r_{i+j} は最初は時間と共に増加するがアトラクタ全体幅よりも大きい値にはならないので、その後は振動する。従って、距離 r_{i+j} がアトラクタ全体幅程度に大きくなるまでに λ が収束することが望ましい。しかし、式 (3.19) の計算では λ の収束に時間がかかる。よって、本論文では Sato ら³²⁾ が提案した以下の計算法を用いた。

i 番目の点 \vec{p}_i が選ばれた時刻 $t = 0$ から $(j+k)t_s$ 時間後の 2 点間の距離を

$$r_{i+j+k} = \|\vec{p}_{i+j+k} - \vec{p}'_{i+j+k}\| \quad (3.20)$$

として下式を計算する。

$$\lambda(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau \cdot N} \sum_{i=1}^N \log \frac{r_{i+j+k}}{r_{i+j}} \quad (3.21)$$

ここで対数は自然対数である。また、 $\tau = kt_s$ である。横軸に $t = jt_s$ 、縦軸に λ をとって計算結果をプロットした。 $\tau = kt_s$ は小さすぎると計算結果が大きく振動することから、本論文では τ の値として $5\text{ms} = 50t_s$ あるいは $10\text{ms} = 100t_s$ を採用した。

$t = jt_s$ は $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ ($0 \leq j \leq 1500$) の範囲で変化させた。実際に同じ時系列に対して式 (3.19) と式 (3.21) を計算した結果を比較すると、式 (3.21) では式 (3.19) よりも一定値への収束が速かった。

人工吹鳴実験から得られた典型的な振動状態に対して式 (3.21) を計算した結果、多くの場合で、 λ の平均値は僅かに正となった。しかし、計算曲線は変動が大きく、明瞭に λ が一定になる t の範囲を決定することは困難であった。各振動状態に対して行った式 (3.21) の計算結果については対応するそれぞれの節で詳しく述べる。

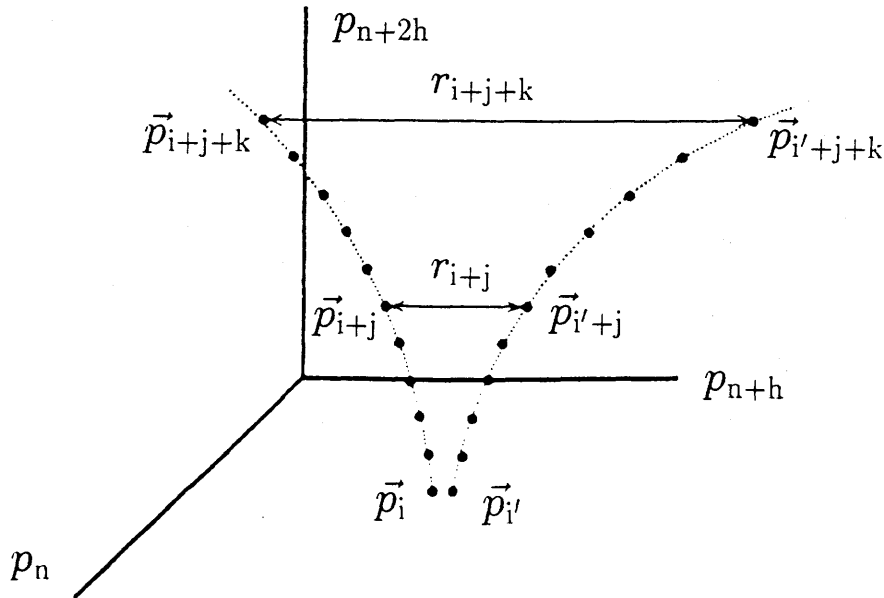


図 3.4: 最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の計算法

3.2 周期的振動状態に対する解析

本節では、図 3.1 に示した振動状態の中から周期的振動状態であると判断した振動状態について詳細に解析を行う。人工吹鳴実験から得られた周期的振動状態の特徴を以下に述べる。

(1) 波形から得られるパワースペクトルには基本となる周波数 f_a とその整数倍周波数にピークが存在する。

(2) (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ、多次元相空間における再構成アトラクタの基本形状はリミットサイクルである。従って、再構成アトラクタから得られる相関次元は $d_2 \doteq 1.0$ である。

3.2.1 節には振動状態 $6 - D_3$, $4 - D_{3L}$ 、3.2.2 節には振動状態 $6 - C_6^{\sharp}$, $6 - E_6$ 、3.2.3 節には振動状態 $1 - B_3^b$, $1 - B_5^b$ の例を示す。

3.2.1 最低音 D_3 の吹鳴時における振動状態

振動状態 $6 - D_3$

この振動状態は、実験で用いたクラリネットの最低音の吹鳴状態である。この振動状態で放射された音は奏者が通常の演奏で音孔を全て閉じて発生させる音に極めて近かった。lip adjustment No.6 ($l = 7.0\text{mm}$, $x_0 = 0.71\text{mm}$), $P_0 = 7.1\text{kPa}$ で得られ、そのとき発生される音 f は平均律音階の D_3 (146.83Hz) に比して 30cent 低かった。ここではそれ以外の例に対する基礎として、またそれらとの比較のために詳細に説明する。

図 3.5 はこの振動状態で得られた図である。図 3.5 (a) ~ (d) は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ 波形を示している。A/D 変換器のサンプリング周期は $t_s = 0.1\text{ms}$ であり、図に示した波形の基本周波数は 144Hz であるから、1 周期あたり約 68 サンプルのデータが含まれている。従って、波形は充分精度よく再現されていると思われる。

$p(t)$ の最大最小値の差、つまり $V\{p(t)\}$ は 13.3kPa で、その波形は p_0 の上下に殆ど対称に振れる。また圧力変換器による p_0 の測定値は 0.35kPa 以下であった。 $P(t)$ の変化の幅 $V\{P(t)\}$ は 0.33kPa であり、 P_0 の約 1/20、 $p(t)$ の約 1/40 の振幅である。 $P(t)$ はその平均値 $P_0 = 7.1\text{kPa}$ の上下に対称に変動している。 $v(t) = 0\text{m/s}$ の間に上昇し、 $v(t) \neq 0\text{m/s}$ の区間では減少する。 $P(t)$ の増加減少の速度が遅いのは吹鳴器の容積が大きいためである。 $P(t)$ が極小に近くなる付近では $p(t)$ の値も小さい。

吹鳴器内圧力がマウスピース内圧力よりも高ければ、つまり、

$$D(t) = \{p_0 + p(t)\} - \{P_0 + P(t)\} < 0 \quad (3.22)$$

であれば、空気流は吹鳴器から楽器気柱に向かって流れ $v(t)$ は正である。 $D(t)$ の最大値 D_{\max} は、上述の値を用いて

$$\begin{aligned} D_{\max} &< \{p_0 + V\{p(t)\}/2\} - \{P_0 + V\{P(t)\}/2\} \\ &= \{0.35 + 13.3/2\} - \{7.1 + 0.33/2\} \\ &= 0.07(\text{kPa}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

のように、僅かに正の値 0.07kPa よりも小さいことが知られるが、 p_0 測定の結果はそれほど信用できないので本当にマウスピース内の圧力が吹鳴器内の圧力よりも高くなり、 $v(t) < 0$ となるか否かは不明である。これ以上正確なことは 図 3.5 (a) ~ (d) の波形から推論するしかない。 $v(t) < 0$ となるのは、 $p(t)$ も $x(t)$ もともに大きい場合だけに限られる。 $v(t)$ の増減は、大局的に見て $x(t)$ したがって $p(t)$ に比例している。 $p(t)$ の最大値付近で $x(t)$ が大きくとも $v(t)$ が減少するが明らかに正である。 $v(t)$ が負になるとすればこの時を除いてはあり得ない。従って、熱線流速計は $v(t)$ の正負を区別し得ないが、この振動においては $v(t)$ は常に正であり、楽器気柱から吹鳴器に向かう空気の逆流は見られない。

$x(t)$ は $0 \leq x \leq 0.71$ mm で振動する。 $x(t) = 0$ ではリードがマウスピースレイに密着して完全に閉じている。これは 1 周期の約半分の時間に及ぶ。 $x(t) = 0$ mm の部分では $v(t) = 0$ m/s となっているが、これはリードが閉じると吹鳴器から気柱に流れ込む空気がなくなるためである。

$v(t)$ が大きい範囲で 3 つの極大値が見られる。その中の 2 つは $v(t)$ が 0 でない範囲の両端にある。 $v(t)$ の極小値は $p(t)$ の極大値で生ずる。 $x(t)$ (すなわち $p(t)$) が最大値に近いにもかかわらず $v(t)$ は減少し、これらの間には非線形な関係が存在する。このことは、 (p, v) 状態空間内に描いたアトラクタ (図 3.5 (i)) をみると、より明らかである。 $v(t)$ は $p(t)$ が減少する途中で 1 周期の中の最大値 (30m/s) をとる。その直後、急激に減少し $v(t) = 0$ となったすぐ後に $v(t)$ の微小な振動が見られる。これは、リードが閉じるときに、その動きによって起こされる負の方向の流れによる振動であると考えられる。このときには $p(t)$ は充分小さくなっていて、やはり $D(t) < 0$ は保たれている。従って、 $v(t)$ は常に正と考えられるから、熱線プローブによる図に示した $v(t)$ 波形は正しいと考えられる。

$x(t)$ は、 $x = 0$ の部分を除いて、理屈から言えば $D(t)$ に比例するはずであるが、実際上は殆ど $p(t)$ に比例すると考えてよい。何故なら、 P_0 は定数であり、 p_0 は極めて小さく、 $V\{P(t)\}$ は $V\{p(t)\}$ の約 2.5% にすぎないからである。

図 3.5 (e) ~ (h) は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルを示している。パワースペクトルは、16384 点の FFT により計算し、3kHz までを示した。(e) ~ (h) のパワースペクトルの全てに平均律音階の D_3 音の周波数 (146.83Hz) に近い 144Hz に最大ピークがある。さらに、その整数倍の周波数に約 1Hz の精度で明瞭なピークが認められる。図 3.5 (e) に示した $p(t)$ のパワースペクトルは奇数高調波成分が優勢である。2 (288Hz), 4 (577Hz), 6 (865Hz) 倍の偶数倍の周波数に比較して、3 (432Hz), 5 (721Hz), 7 (1010Hz) 倍の奇数倍周波数に背の高いピークが見られるのはクラリネットから放射される音の特徴に一致する。これはクラリネットが近似的に閉管であり円柱の形をしているからであると考えられる。図 3.5 (f) $x(t)$, (g) $v(t)$, (h) $P(t)$ のパワースペクトルにおいては偶数高調波成分も奇数高調波成分に劣らない。(g) $v(t)$ のパワースペクトルにおいては、ノイズによる広帯域成分も明瞭に見られる。(e) $p(t)$ と (h) $P(t)$ のパワースペクトルは似ていて、(f) $x(t)$, (g) $v(t)$ のパワースペクトルに比べて、低周波数成分に勢力がかたよっている。(e) $p(t)$ のパワースペクトルを低域フィルターに通すと (h) $P(t)$ のパワースペクトルが得られるように見える。(f) $x(t)$, (g) $v(t)$ のパワースペ

クトルは似ていて、(e) $p(t)$ と (h) $P(t)$ の場合に比較して高周波数成分に勢力を持つ。

図 3.5 (i) ~ (n) は $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の 4 波形から状態空間 (p, x, v, P) 内に描いたアトラクタの (i) (p, v) , (j) (v, x) , (k) (p, x) , (l) (P, p) , (m) (P, x) , (n) (P, v) 面への投影である。また、図 3.5 (s) は状態空間 (p, x, v) におけるアトラクタである。これらの投影図つまりもともとのアトラクタ自体は動的な特性を示す。図 3.5 (i) ~ (n), (s) の図は全て 20ms 分のデータから描かせた。ゆらぎがかさなっているが、この振動状態から (p, x, v, P) 状態空間に得られるアトラクタがリミットサイクルであることは明瞭である。ゆらぎは測定した $v(t)$ 波形に特に多く含まれている。(i) (p, v) 面への投影は空気流速とマウスピース内音圧の関係を表す。 p が増加するときよりは減少するときの方が v はより大きい極大値をとり、一種のヒステリシスが見られる。 $v(t)$ の最大値は $p(t)$ 及び $x(t)$ が減少する過程で生ずることは 図 3.5 (i), (j) から明らかであり、これから軌道上の点の移動方向が定まる。また $v-p$ 曲線において p が減少するとき p の最大値付近で小さなループを描く。この小さなループは $v-x$, $p-x$ 曲線にも対応する場所に現れる。(k) (p, x) 面への投影は直線に近いゆるやかな曲線となり、 $x(t)$ と $p(t)$ とがおおよそ比例関係になることが分かる。理論的には $x(t)$ は $(p(t) - P(t))$ によって定まるはずであるが、 $P(t)$ の変化は $p(t)$ のその 2.5% に過ぎないので、 $x(t)$ と $(p(t) - P(t))$ の関係は $x(t)$ と $p(t)$ の関係に極めて近い。したがって (j) (v, x) 面への投影は、 (p, v) 面への投影に近いことが容易に知られる。第 5 章でこれらの図を用いて Schumacher 方程式の計算結果と比較を行う。

図 3.5 (r) は $p(t)$ から $h=4$, $N=500$ として 3 次元相空間に再構成したアトラクタである。相空間上にプロットされた点を順に線で結んで示した。この再構成アトラクタはその周期ごとに同じ道筋を通る閉じた曲線となり、リミットサイクル (limit cycle) になる。軌道が小さく巻いている部分がみられるがこれは高調波成分により作られる。

図 3.5 (p) は $m = 4 \sim 10$, $h=4$, $N = 16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。 $m \geq 7$ においてかなり広い範囲にわたる Scaling Region が見られる。相関次元は $d_2 = 1.0$ と決定された。式 (3.16) より $m \geq 3 \sim 4$ で一定の d_2 が求まるはずであるが実際はそれよりも高い埋込み次元を必用とした。 $d_2 = 1.0$ によって示される周期性は 図 3.5 (e) ~ (h) のパワースペクトルにも明瞭に示されている。

図 3.5 (q) は $m = 4 \sim 10$, $h = 4$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 100\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。 λ は $0 \leq t \leq 80\text{ms}$ で僅かに正になった。

振動状態 4 - D_{3L}

図 3.6 は lip adjustment No.4 ($l = 4.5\text{mm}$, $x_0 = 0.37\text{mm}$), $P_0 = 3.1\text{kPa}$ で励起された振動状態 4 - D_{3L} から得られた図である。図 3.6 (a) ~ (d) は $p(t)$ と $x(t)$ の波形とそのパワースペクトルである。 $p(t)$ の振幅は $V\{p(t)\} = 6.7\text{kPa}$ 、リード変位は $0 \leq x \leq 0.34\text{mm}$ である。 $p(t)$, $x(t)$ 波形には細かい振動成分が重畳している。図 3.6 (c), (d) のパワースペクトルにはピークが $f_a = 149\text{Hz}$ にみられ、その整数倍音が存在する。1kHz から 2kHz の振動成分が -40 dB 程度まで上昇しているのが見られるが f_b

となる周波数成分を決定するのは $p(t)$ のパワースペクトルだけからでは困難である。図 3.6 (d) の $x(t)$ のパワースペクトルには 1559Hz に -20dB まで上昇している比較的大きな振動成分が存在する。

図 3.6 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタは細かい振動成分によってゆらいでいるが $p-x$ の関係はほぼ比例関係にあることがわかる。図 3.6 (f) は $p(t)$ から 3 次元相空間に再構成したアトラクタである。基本形状はリミットサイクルであるが軌道はリミットサイクルの周りに僅かではあるが回転している。これはパワースペクトルに見られる高周波成分の影響であると考えられる。この振動状態は準周期振動状態である可能性もあるが $p(t)$ のパワースペクトルにおいて高周波成分が -40dB 程度と小さく、また再構成アトラクタの形状もリミットサイクルに近いことから本論文では周期的振動状態として分類した。

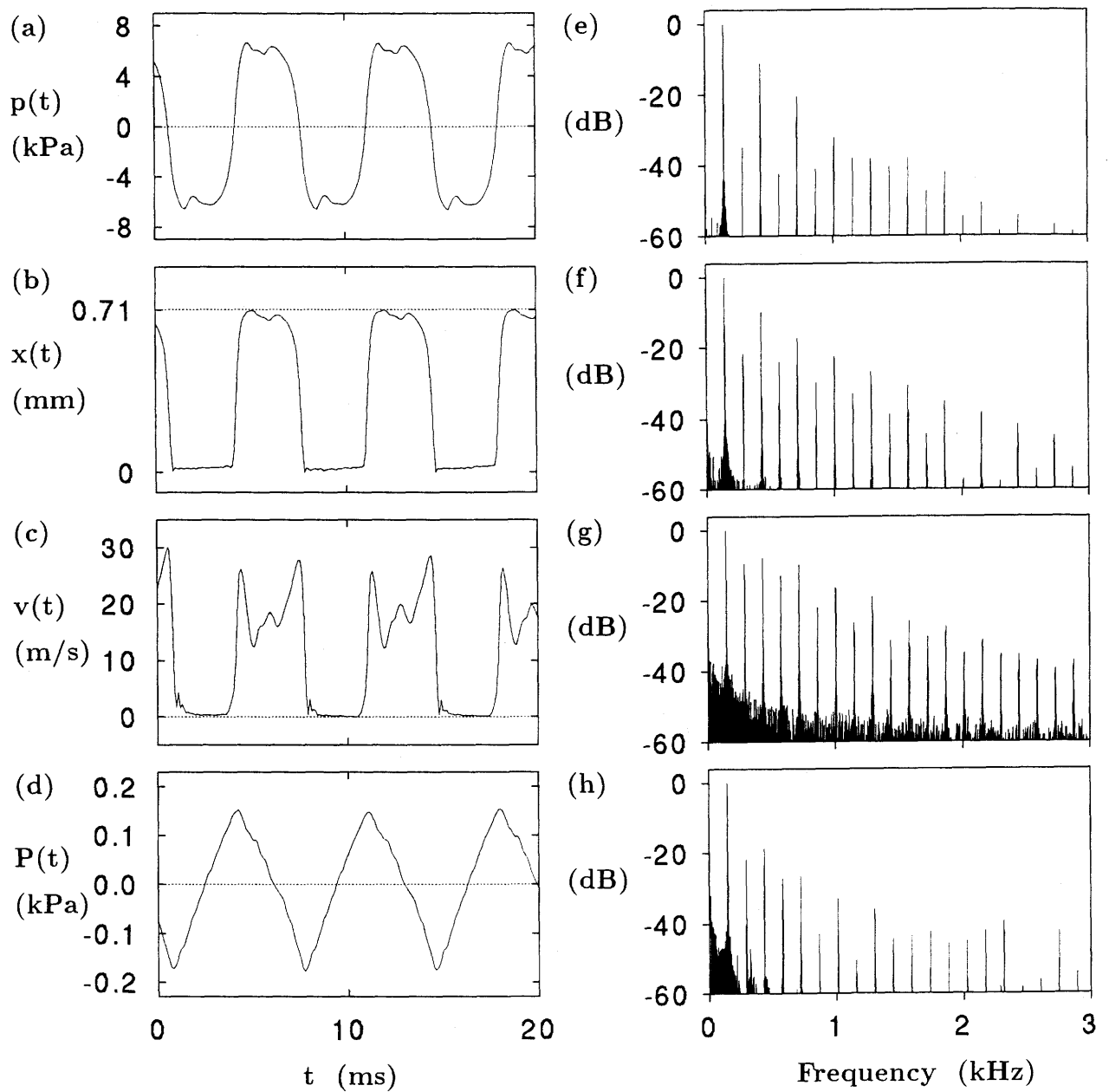


図 3.5: 振動状態 6 - D_3

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $v(t)$, (d) $P(t)$ 波形,
 (e) $p(t)$, (f) $x(t)$, (g) $v(t)$, (h) $P(t)$ のパワースペクトル

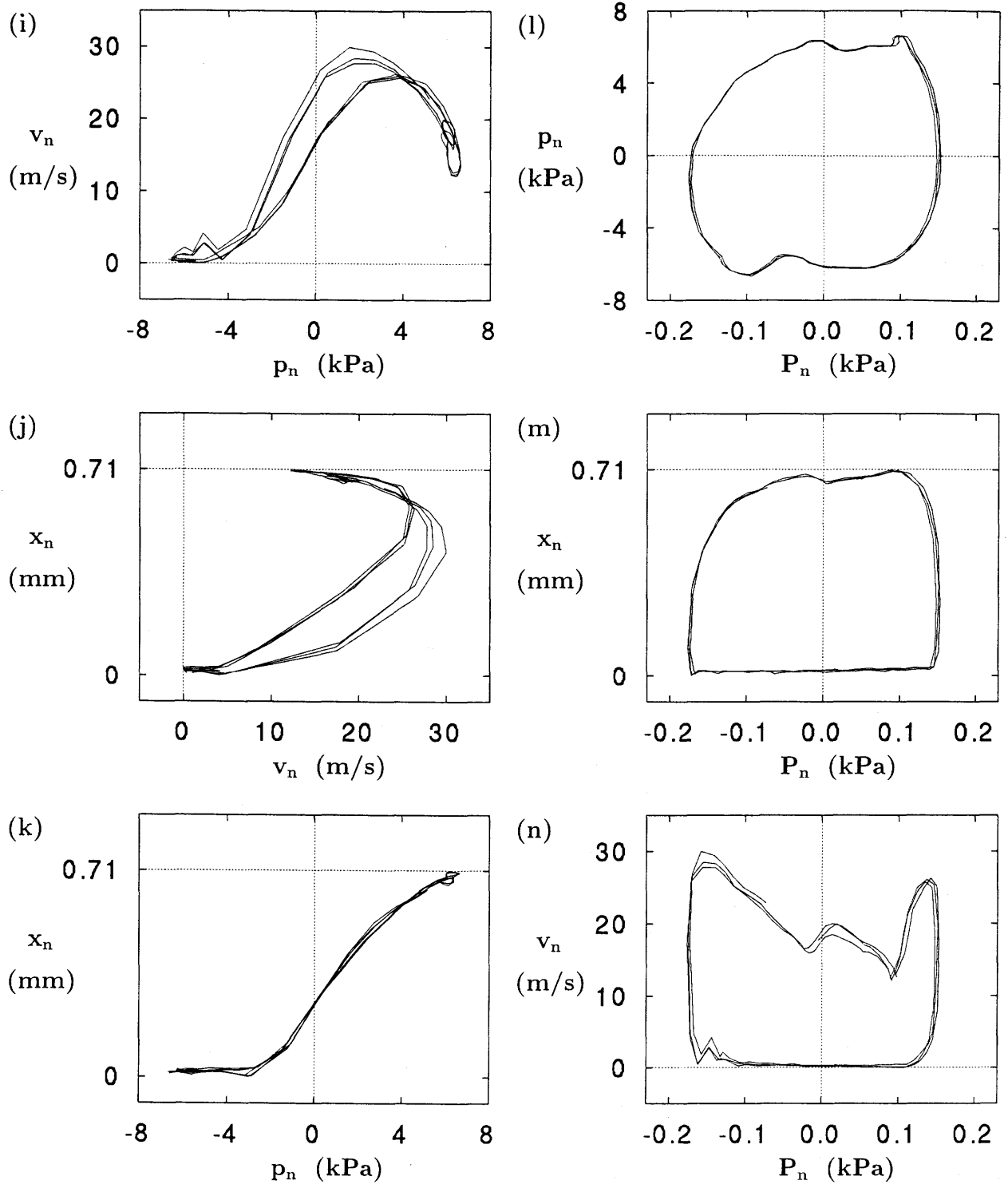


図 3.5: 振動状態 6 - D_3

(p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの (i) (p, v) 面, (j) (v, x) 面, (k) (p, x) 面, (l) (P, p) 面, (m) (P, x) 面, (n) (P, v) 面への投影

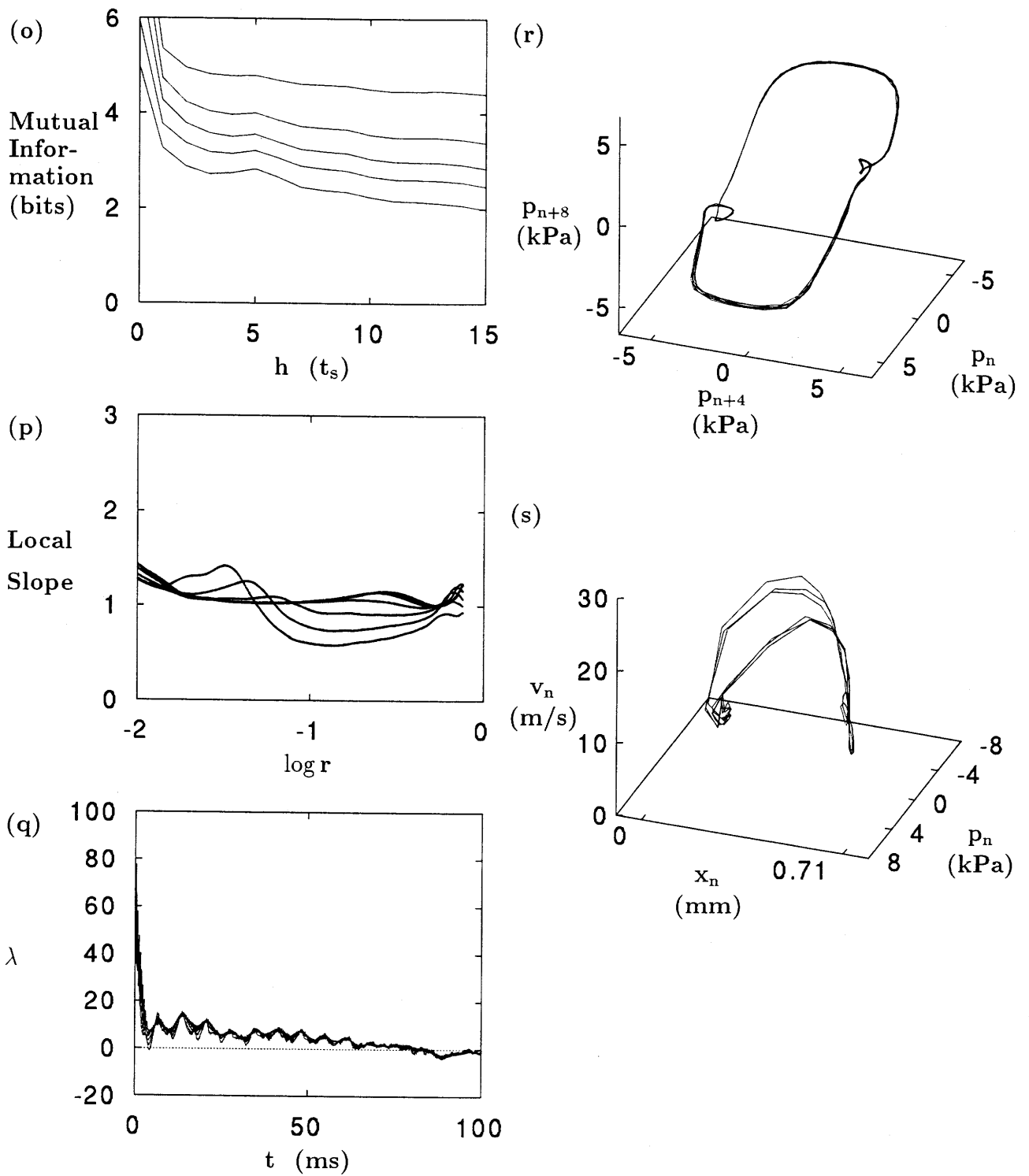


図 3.5: 振動状態 6 - D_3 (o) Mutual Information, (p) Local Slope, (q) 最大リアプノフ指数, (r) 3次元相空間における再構成アトラクタ, (s) (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタ

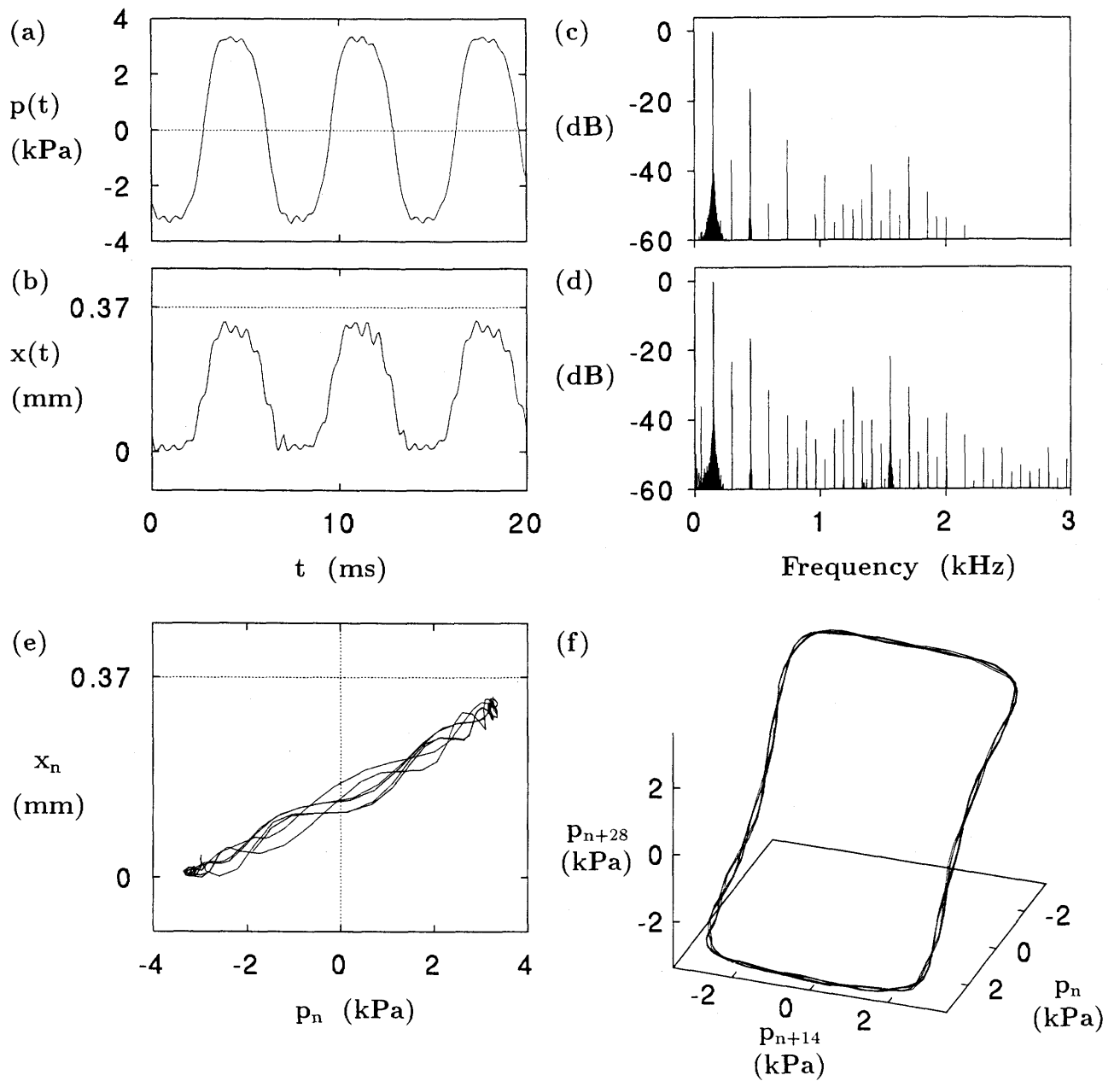


図 3.6: 振動状態 4 - D_{3L}

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,

(e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) 3次元相空間における再構成アトラクタ

3.2.2 高周波数音の吹鳴時における振動状態

振動状態 $6 - C_6^\sharp$, $6 - E_6$ はともに lip adjustment No.6 ($l = 7.0\text{mm}$, $x_0 = 0.71\text{mm}$), $P_0 = 4.8\text{kPa}$ で励起された。これらの C_6^\sharp , E_6 と名付けた振動状態においては、演奏の初心者が誤って発生させやすい高い周波数の吹鳴音 C_6^\sharp 音 (1108.7Hz), E_6 音 (1318.5Hz) に近い音が得られる。 l , x_0 を別の値に調節すると、平均律音階の D_6 音 (1174.7Hz), F_6 音 (1396.9Hz) のピッチを持つこれらに類似な吹鳴音も観測された。振動状態 $6 - C_6^\sharp$, $6 - E_6$ の特徴はよく似ているのでここでは、振動状態 $6 - C_6^\sharp$ についてより詳細に検討する。

振動状態 $6 - C_6^\sharp$

図 3.7 は振動状態 $6 - C_6^\sharp$ から得られた図である。図 3.7 (a) ~ (d) は $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ 波形である。前の例と同様に A/D 変換器のサンプリング周期は 0.1ms であり、図に示した波形の基本周波数は等しく 1122Hz である。1 周期に含まれるサンプル値は 10 点よりも少なく充分精度よく波形が再現されているとは言えない。例えば、 $p(t)$ や $x(t)$ の振幅はほとんど一定であるが $v(t)$ および $P(t)$ 波形においては振幅にゆっくりにした変化が見られ、また 図 3.7 (i) ~ (n) に示した状態空間内のアトラクタは線を束ねたように太い。しかし後に述べるように、本論文の目的にかなう程度の信頼性はあると考えられる。

$V\{p(t)\}$ は 5.2kPa であり、 $p(t)$ は p_0 ($0.3 \sim 0.35\text{kPa}$) を中心に振れる振幅 2.6kPa の正弦波に近い。 $x(t)$ 波形と $p(t)$ 波形は殆ど比例関係にあるが、 $x(t)$ は 0.71mm 以上で丸みを帯びている。 $x(t)$ の最大値は 0.75mm である。これはリード変位が人工の唇で制限されていることに原因がある。また、ここではリードがマウスピースレイに接触することは殆どない。 $P_0 = 4.8\text{kPa}$, $p_0 = 0.35\text{kPa}$, $V\{P(t)\} = 0.17\text{kPa}$, $V\{p(t)\} = 5.2\text{kPa}$ の値を用いて D_{\max} を計算すると、

$$\begin{aligned} D_{\max} &< \{p_0 + V\{p(t)\}/2\} - \{P_0 + V\{P(t)\}/2\} \\ &= \{0.35 + 5.2/2\} - \{4.8 + 0.17/2\} \\ &= -1.9(\text{kPa}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

のように -1.9kPa よりも小さく負であることが確かめられ、したがって $v(t)$ は常に正であり、空気流が楽器気柱から吹鳴器に向かうことはない。図 3.7 (a) ~ (d) の波形を拡大して子細に観測すると以下のことが知られる。 $v(t)$ が増加する途中に見られる極小値と、 $p(t)$, $x(t)$ の極大値とは同時に起こる。 $v(t)$ には 2 つの極大値が存在するが、そのうちの 1 つである最大値は約 32m/s であり、 $p(t)$ の減少時に起こる。 $v(t)$ が増加 (あるいは減少) 状態にある時間は、 $P(t)$ が減少 (あるいは増加) 状態にある時間に等しく、前者は後者に一定時間だけ遅れて見られる。

図 3.7 (e) ~ (h) は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルである。優位なスペクトル線は基本周波数 (1122Hz) とその整数倍周波数にあり、それら周波数の値は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルのすべてにおいて等しい。この振動状態のパワー

スペクトルに演奏者が通常、音孔を全て閉じた状態で発生させる D_3 (146.83Hz) の整数倍音は存在しない。図 3.7 (g) $v(t)$ および (h) $P(t)$ のパワースペクトルでは 2 倍高調波成分が最も優勢である。図 3.7 (g) $v(t)$ のパワースペクトルにはノイズによる広帯域成分が含まれる。

上記の $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$ 間の関係は、図 3.7 (i) ~ (n) に示した (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの 2 次元面への投影、(s) に示した (p, x, v) 状態空間内のアトラクタにも見られる。(i) ~ (n), (s) の図は全て 20ms 分のデータから描かせた。これらは、サンプリングの粗さや $v(t)$ に重なっているノイズのために、幾本かの細い線を束ねたように見えるが、やはりリミットサイクルと見なされる。基本的には振動状態 6 - D_3 から得られたアトラクタ (図 3.5 (i) ~ (n), (s)) と同じ形を持ち、(i) (p, v) 面への投影は、 p の上下に対して一種のヒステリシスを伴った上に凸な曲線である。そして $v(t)$ が負になることはない。

図 3.7 (r) は $p(t)$ から $h = 3$, $N = 500$ として 3 次元相空間に線で表した再構成アトラクタである。ゆらぎが重畳されているがやはりリミットサイクルである。

図 3.7 (p) は $m = 4 \sim 10$, $h = 3$, $N = 16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。 $-1.1 \leq \log r \leq -0.5$ における広い Scaling Region を持ち、式 (3.16) を満たす m の範囲で $d_2 \doteq 1.0$ が求められた。

図 3.7 (q) は $m = 4 \sim 10$, $h = 3$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。 λ の計算結果は僅かに正になった。

振動状態 6 - E_6

図 3.8 は振動状態 6 - E_6 から得られた図である。図 3.8 (a) ~ (d) は $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ 波形である。 $V\{p(t)\}$ は 4.4kPa、 $V\{P(t)\}$ は 0.13kPa である。リードは $0 \leq x \leq 0.77\text{mm}$ で変位する。流速の最大値は 41m/s であり、本研究の人工吹鳴実験で得られた全ての振動状態において最も大きい値であった。

図 3.8 (e) ~ (h) は $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルである。優位なスペクトル線は基本周波数 (1328Hz) とその整数倍周波数にあり、それら周波数の値は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルのすべてにおいて等しい。

図 3.8 (i) ~ (n) は (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの 2 次元面への投影図である。20ms 分を示した。この振動状態では図 3.8 (i), (j) に示したリミットサイクルが僅かにループを描くようになるが、故意に $p(t)$ あるいは $x(t)$ を 1 サンプル周期だけ遅らせあるいは進めると、 $x-p$ 曲線は大きなループを描く。つまり測定された $p(t)$ と $x(t)$ の間には 1 サンプル周期分の相対的遅れは存在しないと言える。

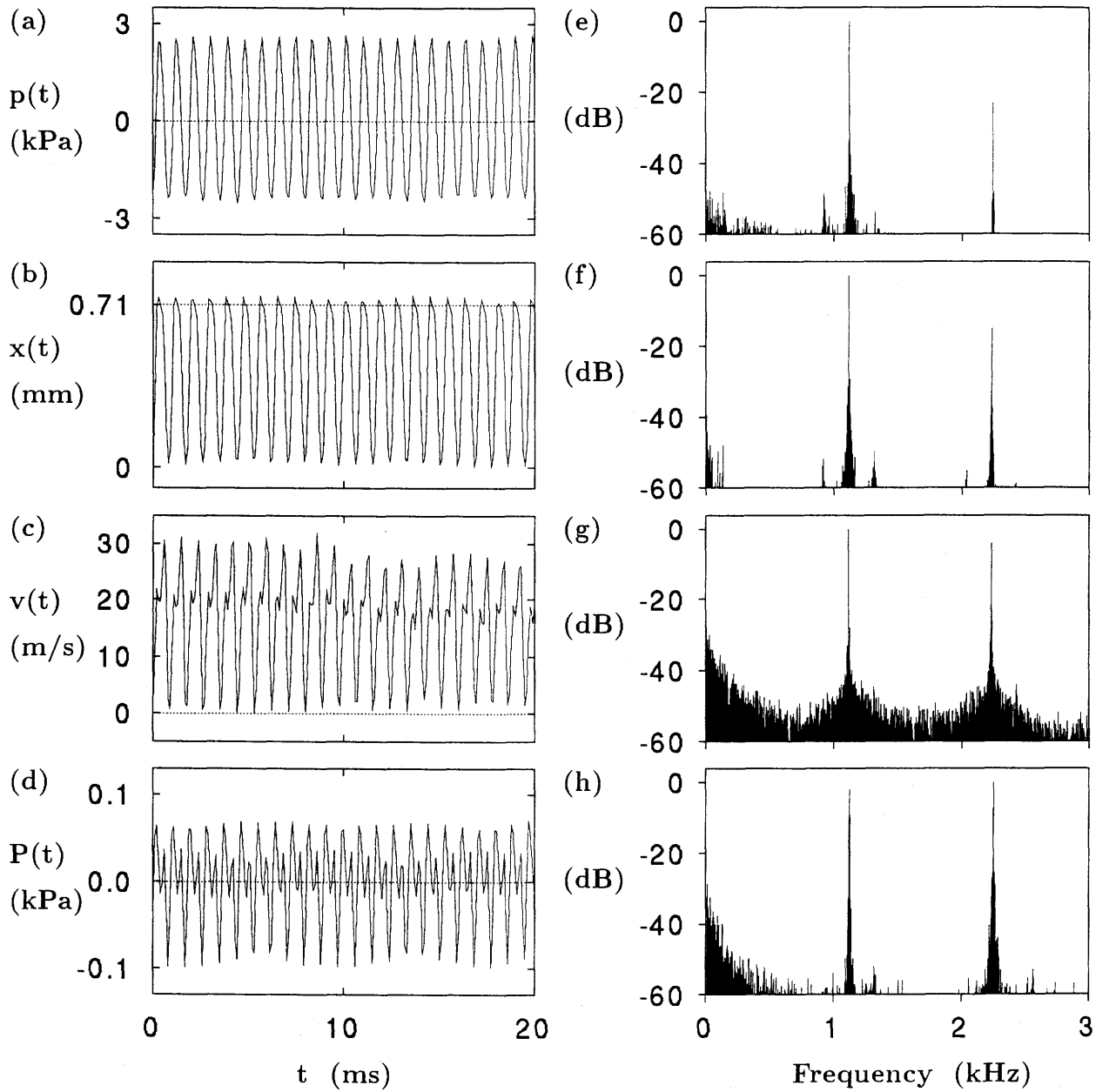


図 3.7: 振動状態 6 - C_6^{\sharp}
 (a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $v(t)$, (d) $P(t)$ 波形,
 (e) $p(t)$, (f) $x(t)$, (g) $v(t)$, (h) $P(t)$ のパワースペクトル

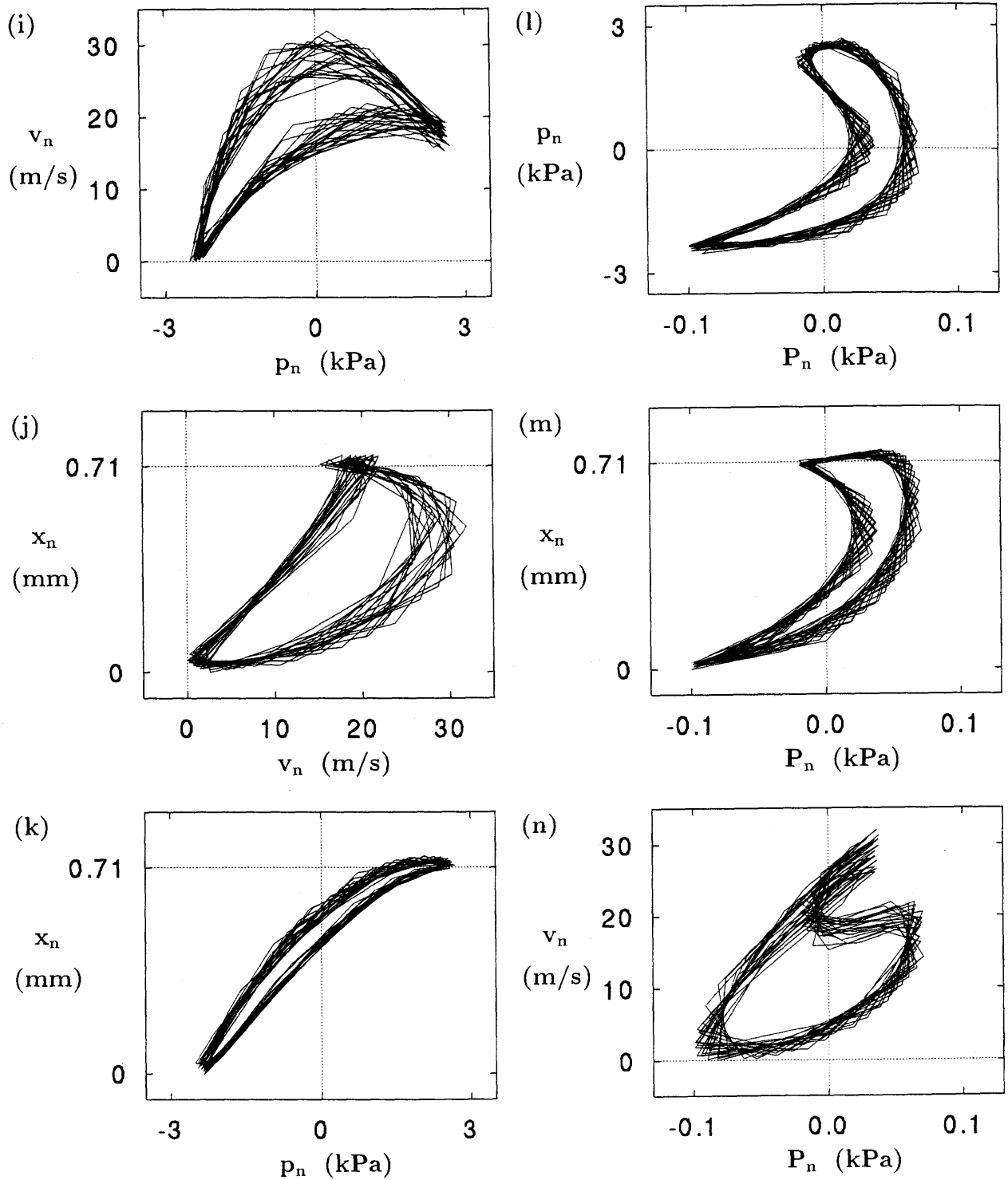


図 3.7: 振動状態 6 - C_6^\sharp
 (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの (i) (p, v) 面, (j) (v, x) 面, (k) (p, x) 面,
 (l) (P, p) 面, (m) (P, x) 面, (n) (P, v) 面への投影

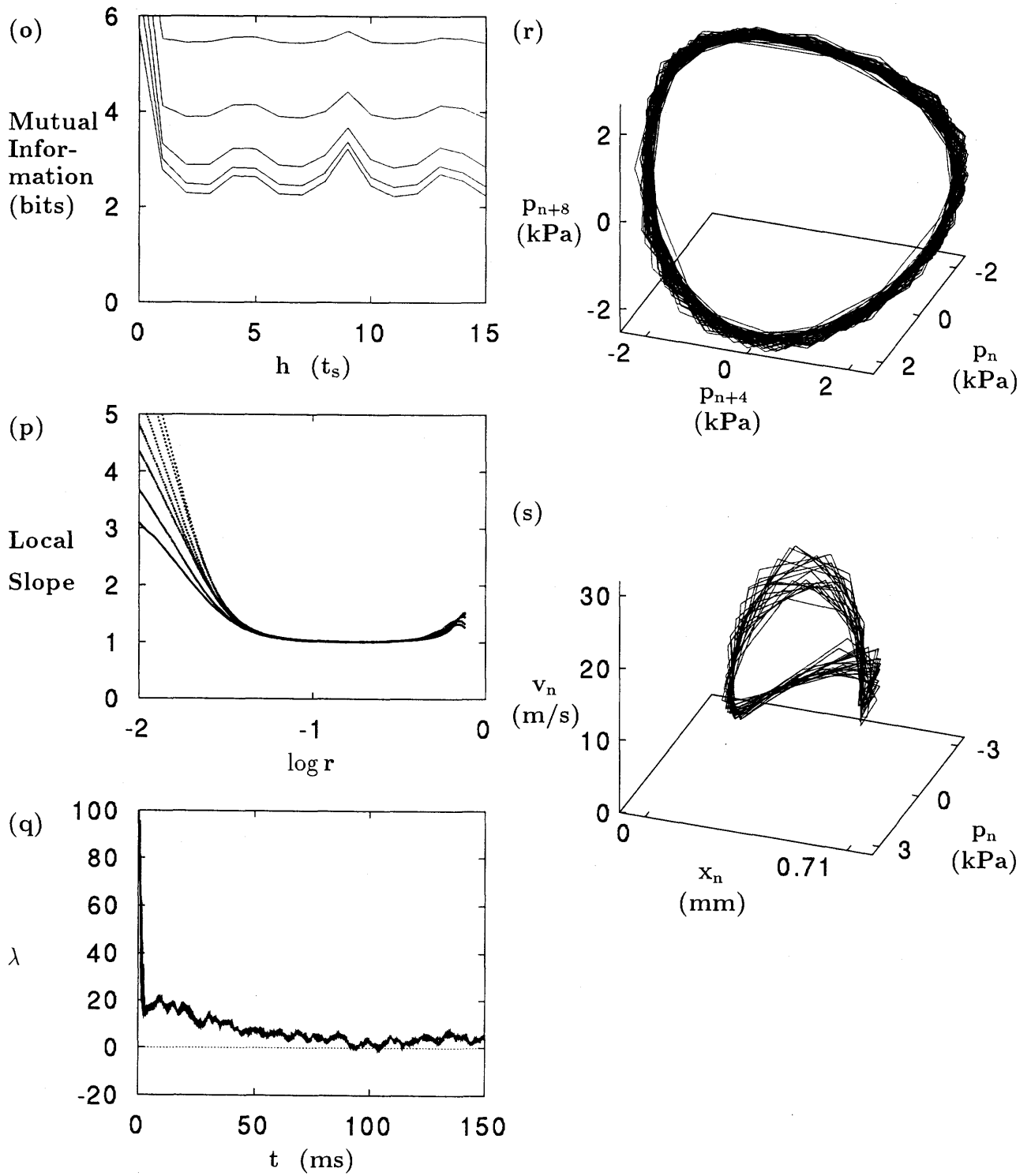


図 3.7: 振動状態 6 - C_6^H (o) Mutual Information, (p) Local Slope, (q) 最大リアプノフ指数, (r) 3次元相空間における再構成アトラクタ, (s) (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタ

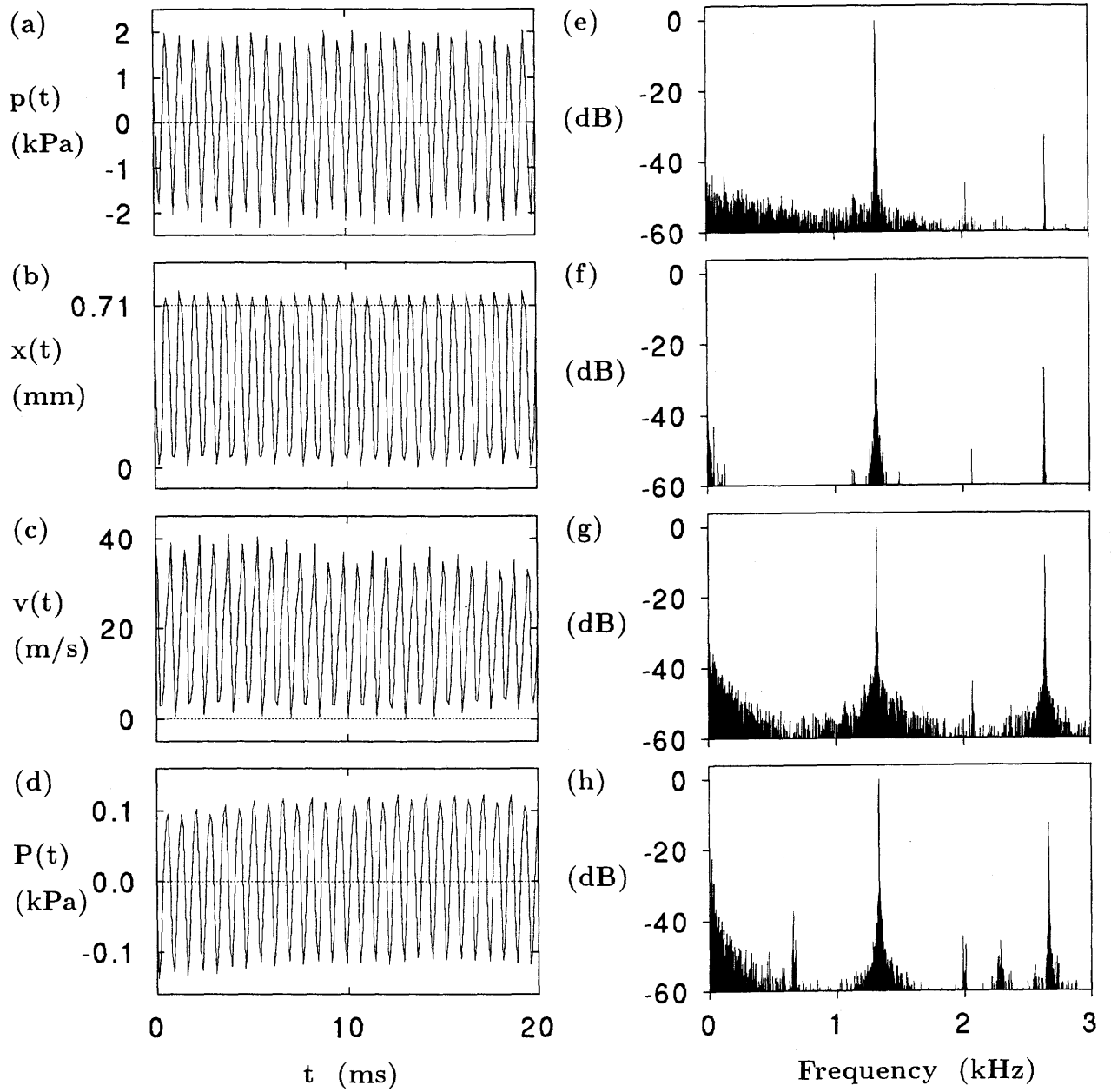


図 3.8: 振動状態 6 - E_6

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $v(t)$, (d) $P(t)$ 波形,

(e) $p(t)$, (f) $x(t)$, (g) $v(t)$, (h) $P(t)$ のパワースペクトル

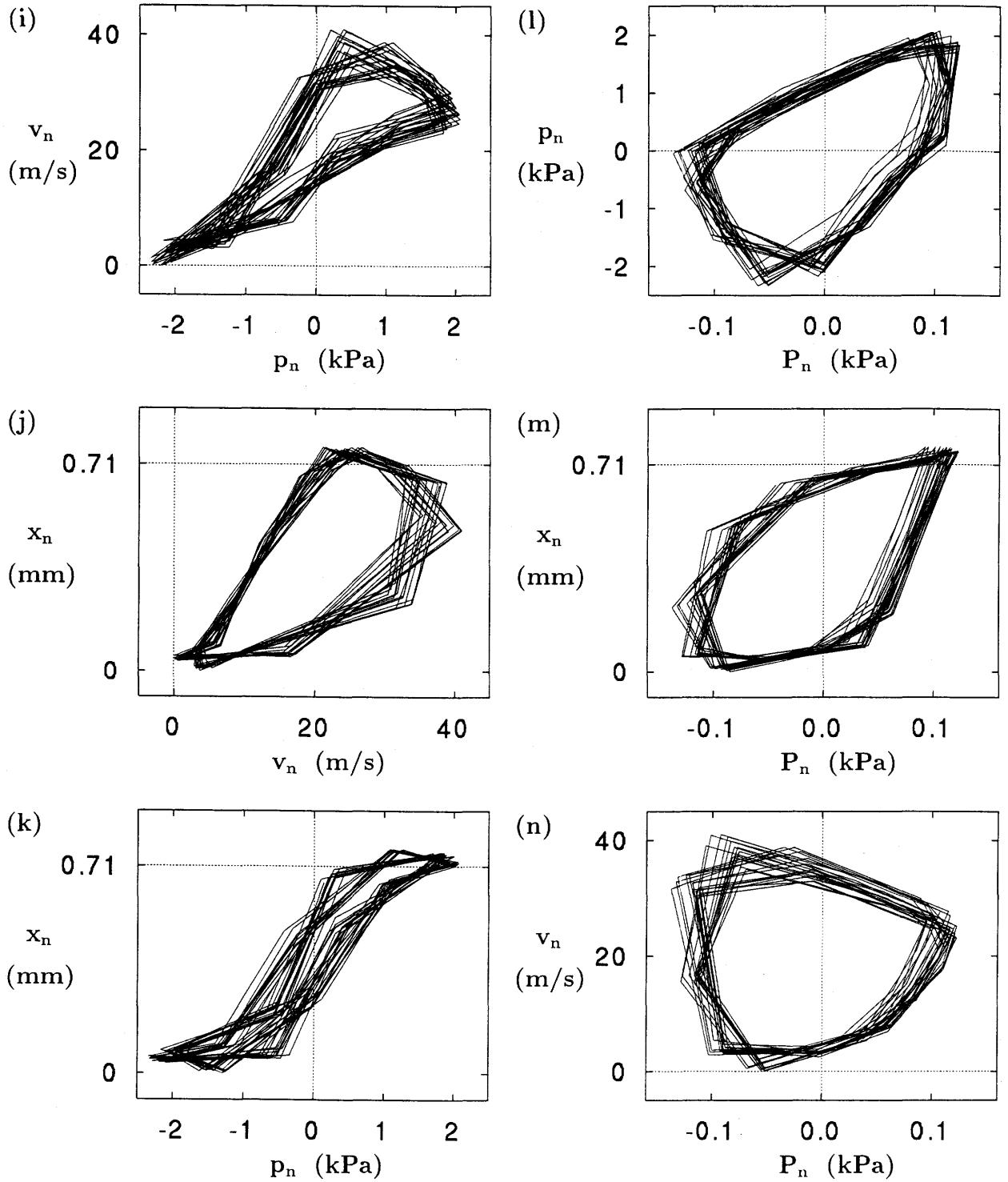


図 3.8: 振動状態 6 - E_6

(p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの (i) (p, v) 面, (j) (v, x) 面, (k) (p, x) 面, (l) (P, p) 面, (m) (P, x) 面, (n) (P, v) 面への投影

3.2.3 4倍周期分岐の関係にある振動状態

振動状態 $1 - B_3^b, 1 - B_5^b$

図 3.9 と 図 3.10 は 表 2.2 の lip adjustment No.1 ($l = 9.0\text{mm}$, $x_0 = 0.82\text{mm}$) で励起される振動状態 $1 - B_3^b$ と $1 - B_5^b$ から得られた図である。これらの振動状態は 4 倍周期分岐の関係にあると考えられる。

図 3.9 と 図 3.10 の (a) は $p(t)$ 波形、(b) は $x(t)$ 波形である。 $p(t)$ の振幅とリード変位は振動状態 $1 - B_3^b$ で $V\{p(t)\} = 3.2\text{kPa}$, $0 \leq x \leq 0.90\text{mm}$ 、振動状態 $1 - B_5^b$ では $V\{p(t)\} = 9.6\text{kPa}$, $0 \leq x \leq 0.86\text{mm}$ である。図 3.9 と 図 3.10 の (a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形を比較すると、振動状態 $1 - B_5^b$ では波形のピーク値は殆ど変わらないが振動状態 $1 - B_3^b$ ではピーク 4 つ毎に大きな値をとり、振動周期は基本となる周期の 4 倍になっていることがわかる。

このことは 図 3.9 と 図 3.10 の (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトルからも確認できる。最大ピークはともに平均律音階の B_5^b (932.3Hz) の付近であり、振動状態 $1 - B_5^b$ ではその整数倍音しか存在しないが、振動状態 $1 - B_3^b$ では B_5^b の周波数の $1/2, 1/4$ の周波数成分も存在する。

図 3.9 と 図 3.10 の (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタである。図は 20ms 分のデータから描かせた。 p と x の関係は両振動状態でほぼ比例関係にあることがわかる。

図 3.9 と 図 3.10 の (f) 3次元相空間に再構成したアトラクタにおける形状はともにリミットサイクルである。図 3.9 (f) のリミットサイクルは 4 重巻である。このことから振動状態 $1 - B_3^b$ の周期が振動状態 $1 - B_5^b$ の周期の約 4 倍となっていることを確認できる。

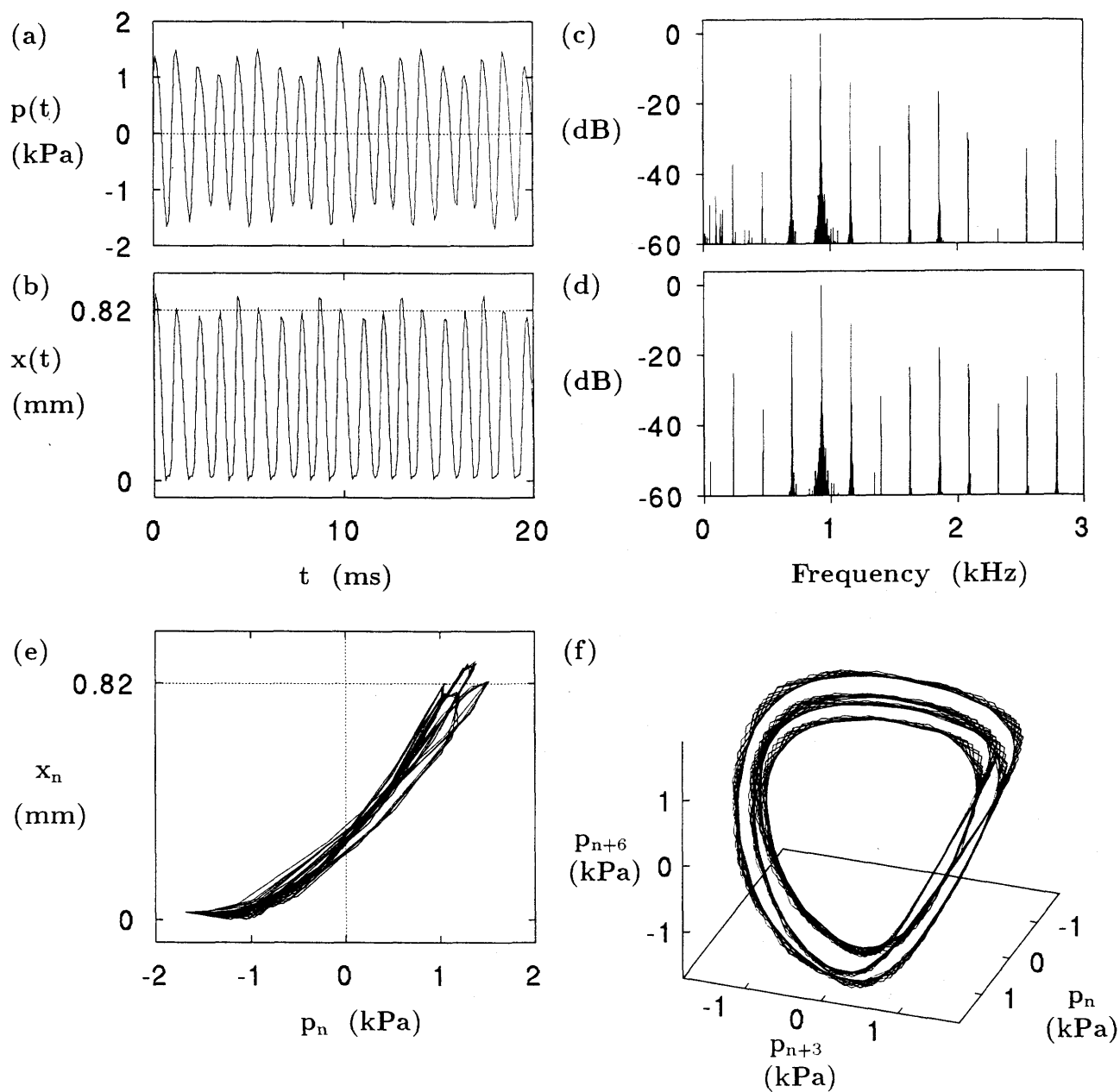


図 3.9: 振動状態 1 - B_3^b

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,

(e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) 3次元相空間における再構成アトラクタ

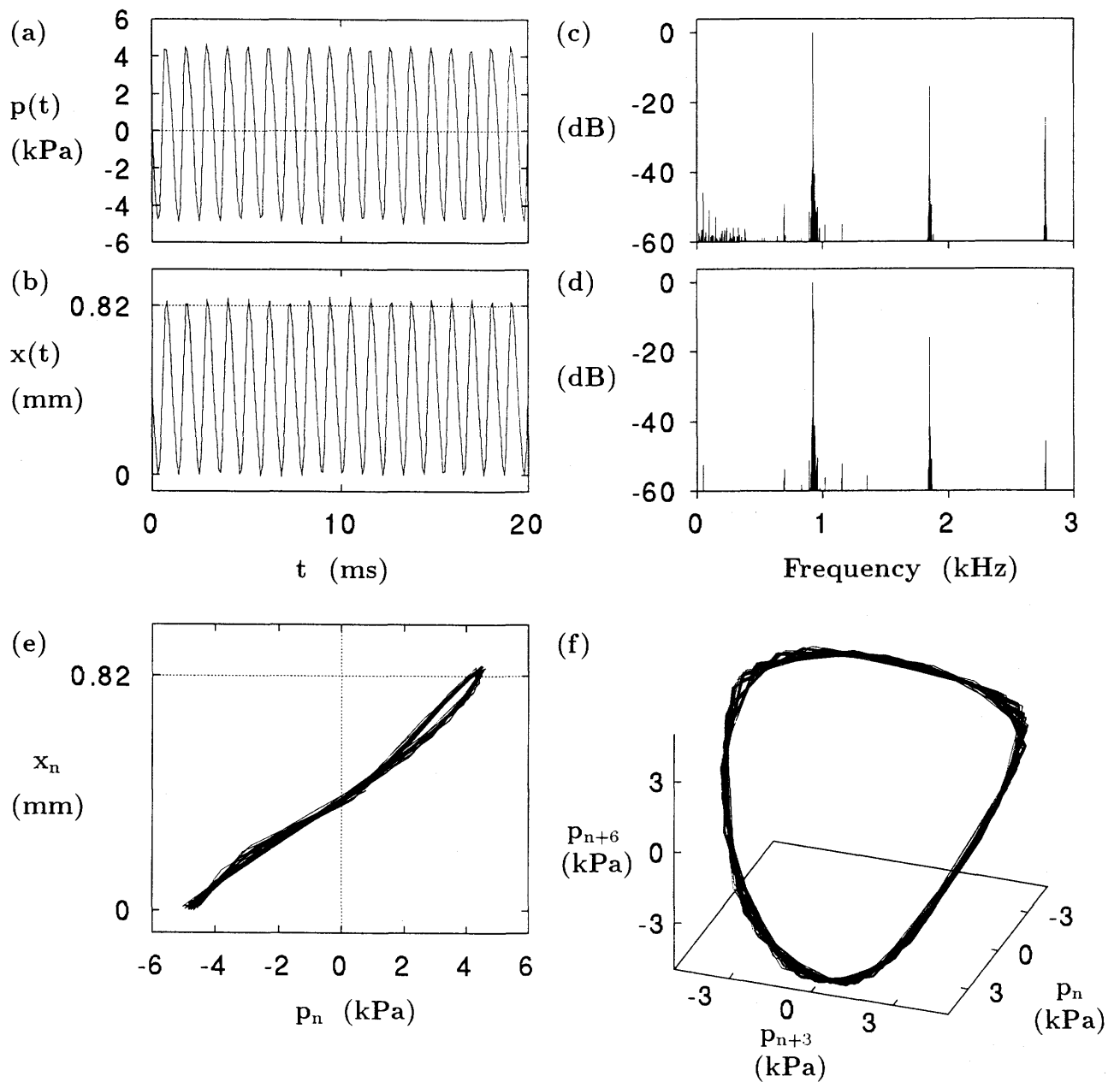


図 3.10: 振動状態 1 - B_5^b

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,

(e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) 3次元相空間における再構成アトラクタ

3.3 非周期的振動状態に対する解析

本節では、図 3.1 に示した振動状態の中から非周期的振動状態であると判断した振動状態について詳細に解析を行う。人工吹鳴実験から得られた非周期的振動状態の特徴を以下に述べる。

- (1) 波形から得られるパワースペクトルには 2 つ以上の基本となる周波数 (f_a, f_b, f_c) が存在する。
- (2) (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ、多次元相空間における再構成アトラクタの基本形状は T^2 トーラス、 T^3 トーラス、カオス的なアトラクタに分類できる。従って、再構成アトラクタから得られる相関次元は $d_2 \geq 2.0$ である。

3.3.1 節には T^2 トーラスを持つ振動状態を示す。3.3.2 節には T^3 トーラスを持つ振動状態、3.3.3 節にはカオス的なアトラクタを持つ振動状態を示す。

3.3.1 T^2 トーラスを持つ振動状態

振動状態 6 - D_{3H}

図 3.11 は lip adjustment No. 6 ($l=7\text{mm}$, $x_0=0.71\text{mm}$), $P_0=11.2\text{kPa}$ で励起された振動状態 D_{3H} から得られた図である。吹鳴音にはうなりに似た成分の音が聞こえた。単純な周期的振動とは異なり典型的な準周期的振動状態であり、詳細に調べる価値がある。

図 3.11 (a) ~ (d) はこの振動状態で得られた $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ 波形であり、図 3.5 (a) ~ (d) に示した振動と 図 3.7 (a) ~ (d) に示した高周波数の振動との非線形結合のように見える。 $p(t)$ および $P(t)$ 波形は、細かい変動が重畳されている以外は、振動状態 6 - D_3 のそれに似ている。先に挙げた振動状態 6 - D_3 , 6 - C_6^{\sharp} と全く異なる点は、 $p(t)$ 波形が、間欠的に振動する $x(t)$, $v(t)$ 波形とは全く似ていないことである。 $p(t)$ は、 $x(t)$ や $v(t)$ が 0 であっても、 p_0 を中心に上下対称に変化し、微小変動が重畳されている。 $x(t)=0$ の間を除けば、 $p(t)$ を高域ろ波器に通したときに $x(t)$ が得られるように見える。つまり $p(t)$ の波形は $x(t)$ の波形を低域ろ波器に通して得られるように見える。その原因として次の 2 点が考えられる。

- (1) マウスピース先端から 34mm の位置で $p(t)$ を測定しているためにマウスピースの内部の体積の影響を受ける。
- (2) リード振動のゲインがリードの共振周波数の付近で大きくなっている影響が現れる。

$P(t)$ 波形も基本的には振動状態 6 - D_3 のそれに似ているが、 $V\{P(t)\}=0.37\text{kPa}$ は振動状態 6 - D_3 の場合よりも僅かに大きい。この振動状態では $P_0=11.2\text{kPa}$ であり、振動状態 6 - D_3 の場合の 4.8kPa に比較して大きく、 $p(t)$ および $v(t)$ の振幅も大きくなっているためと思われる。 $P(t)$ の減少期間中に見られる微小振幅の変動は大きな振幅の $v(t)$ 変化によることは明かであるが、 $P(t)$ の増加期間中のさらに微小な振幅の変動の原因は不明である。この変動の周波数は $v(t)$ のそれよりも大きい。この変動は振動状態 6 - D_3 の場合には見られないことから、リードから見て上流側に原因があると

は思われぬ。また $x(t) = v(t) = 0$ であり $p(t)$ 波形の細かい変動とは周波数が異なるので下流からの影響とも考えられぬ。

リードは $0 \leq x \leq 0.75$ mm の間で振動する。リード変位がマウスピースレイで制限される場合を除けば、 $x(t)$ は $D(t)$ に比例する筈である。しかし、 p_0 および $V\{P(t)\}$ が $p(t)$ や P_0 に比較して極めて小さいので、 $D(t)$ は $(p(t) - P_0)$ におおよそ等しい。さらに P_0 は定数なので $x(t)$ は $p(t)$ に比例すると考えられる。しかし 図 3.11 (a) ~ (d) からはこのことは認められぬ。

この振動状態では (c) $v(t)$ は (b) $x(t)$ にほぼ比例する。 $x(t)$ の 1 周期の間に 4 ないし 5 のピークが観測され、それと同時に $v(t)$ もピークをとる。 $p(t)$ が最大値に近い時に、つまり、 $x(t)$ では中央の 2 つのピークが最も背が高く、 $v(t)$ では中央のピークよりはそれを挟む両端のピークの方が背が高い。これは、吹鳴器とマウスピースの中の圧力差が小さくなり、空気流速が減少することによる。 $v(t)$ の最小値を除いては極小値が見られないのは、短時間の間に $p(t)$ の変化が殆どないからと考えられる。 $v(t)$ は常に正である。何故なら $p_0 = 0.35$ kPa, $P_0 = 11.2$ kPa, $V\{p(t)\} = 15.4$ kPa, $V\{P(t)\} = 0.37$ kPa から計算した $D(t)$ の最大値は

$$\begin{aligned} D_{\max} &< \{p_0 + V\{p(t)\}/2\} - \{P_0 + V\{P(t)\}/2\} \\ &= \{0.35 + 15.4/2\} - \{11.2 + 0.37/2\} \\ &= -3.3(\text{kPa}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

のように、負になるからである。 $v(t)$ の最大値は 39m/s である。

図 3.11 (a) ~ (d) に示された 4 つの波形は形状の類似・関連性から見ると、2 つのグループに分けることができる。1 つは $p(t)$ と $P(t)$ である。これらは基本的には比較的ゆっくり変化し微小なゆらぎが重畳されている。他のグループは $x(t)$ と $v(t)$ から成り、これらは間欠的な激しい振動によって特徴づけられる。 $x(t)$ は $p(t)$ とリード自体の動特性によって支配され、 $v(t)$ は $x(t)$ と $p(t)$ とに依存する。 $P(t)$ は、吹鳴器の容積に起因する $-v(t)$ の積分によって得られる。 $P(t)$ に見られる積分性の波形から、我々の実験に用いた吹鳴器の体積はかなり大きめであることが知られる。結局、準周期的振動を把握するには、4 つの物理量の中、少なくとも $p(t)$ と $x(t)$ の 2 つは測定すべきであると結論できる。

図 3.11 (e) ~ (h) は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルを示している。 $p(t)$ および $x(t)$ のパワースペクトルを比較すると、両者の優勢なピークは全く同じ周波数に現れ、 $x(t)$ においては高周波数成分、特に 800Hz 以上の領域に強い成分を持つことが知られる。 $p(t)$ の場合に比較して $x(t)$ のピークは幅が広い。 $x(t)$ のパワースペクトルにおいては多くのピークがまとまって 1 つの幅の広いピークをつくっているように見える。

$p(t)$ のパワースペクトルにおいては、1143Hz のピークは 145Hz のピークよりも 17dB 低い。が $x(t)$ の場合には、この差は 3dB にすぎない。 $v(t)$ のパワースペクトルは $x(t)$ のそれに似ているが、ノイズによる広帯域成分を含んでいることは振動状態 6-D₃ の場合 (図 3.5 (g)) と同様である。 $P(t)$ のパワースペクトルは $p(t)$ あるいは $v(t)$ の積分のそれに近い。

$p(t)$ のパワースペクトルのピーク周波数を f_h ($h = 1, 2, 3, \dots$) で表すとき、 $f_a = 145\text{Hz}$, $f_b = 1137\text{Hz}$ とすると、 -40dB 以上のピークが現れる周波数 f_h ($h = 1, 2, 3, \dots$) は全て f_a と f_b の線形結合、すなわち

$$f_h = if_a + jf_b \quad (3.26)$$

によって記述することができる。ここで i, j は整数である。式 (3.26) が成り立つ周波数の精度は約 1Hz である。 $p(t)$ のパワースペクトルにおける最大ピーク周波数 f_a はその波形において大きい振幅を持った振動の周波数として理解できる。一方、 f_b は小さい振幅を持った細かい振動成分の周波数である。

$x(t)$, $v(t)$ の場合には -25dB 以上のピークについて式 (3.26) が成り立つことが確かめられた。 f_a と f_b に別の周波数を選び、式 (3.26) を用いて他のピークの周波数を記述することもできるが、本論文ではパワースペクトルにおいて最も大きいピークの周波数を f_a 、2 番目に大きいピークの周波数を f_b とした。このように選択したのは再構成アトラクタの基本的な形が振幅の大きい周波数成分により大きく左右されるからである。式 (3.26) が $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルについて成り立つことから、それらの時系列から求められる再構成アトラクタ、状態空間におけるアトラクタは T^2 トーラスとなり、得られるアトラクタの次元は 2 になることが予想される。しかし、1 周期の約半分は $x(t) = v(t) = 0$ であり、 $v(t)$ はノイズを多く含んでいるので、 $x(t)$ および $v(t)$ からの時系列を含むアトラクタの形は歪が大きく理解し難い。

図 3.11 (i) ~ (n) は $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の 4 波形から (p, x, v, P) 状態空間内に描いたアトラクタの投影図である。また、図 3.11 (t) は (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタである。これらのアトラクタは全て 500 サンプル点から成っている。 (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタは $x(t) = v(t) = 0$ の p 軸上の点の濃度が高い。これは 1 周期の半分近くの時間、リードがマウスピースに密着するためである。

図 3.11 (r) は $m = 3$, $h = 6$, $N = 500$ として線で表した再構成アトラクタである。いくらか変形されてはいるが、この再構成アトラクタは理解し易いドーナツ形でありその基本形状が T^2 トーラスであることは明瞭である。この T^2 トーラスには 図 3.5 (r) に示した リミットサイクルにおいて軌道が小さく巻いている部分とほぼ同じ位置にくびれた部分が見られる。

図 3.11 (s) は $m=3$, $h=6$, $N=16000$ として再構成したアトラクタの $p_{n+12} = 0$ に垂直な面での断面図である。これは、 $p_{n+12} = 0$ の平面を Poincaré 断面として選び、3 次元相空間内の軌道がこの平面を両方向から横切るときの交点をプロットした結果である。この断面に 2 つの閉じた輪がみられることから、再構成アトラクタは T^2 トーラスに近いことが確認される。

図 3.11 (u) は $x(t)$ から (r) と同様にしてつくった再構成アトラクタ、図 3.11 (v) は $p(t)$ と $x(t)$ からつくった再構成アトラクタである。それぞれ、500 サンプル点から成っている。これらのアトラクタは、ドーナツ形でない T^2 トーラスである。この形の原因の 1 つは、最も背の高い 144Hz のピークと第 2 に背の高い 1136Hz のピークとの差が僅か 3dB であることによる。 $p(t)$ と $x(t)$ からつくった再構成アトラクタは $x(t) = 0$ となるところで潰れたような形をしている。

図 3.11 (p) は $m = 6 \sim 10$, $h=6$, $N=16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。式 (3.16) を満たす $m \geq 6$ の 2 つの異なる Scaling Region に対してそれぞれ異なる d_2 が存在した。小さい r の範囲 ($-1.7 \leq \log r \leq -1.1$) では $d_2 \doteq 2.1$, 大きい r の範囲 ($-0.6 \leq \log r \leq -0.3$) では $d_2 \doteq 1.1$ が求められた。

図 3.11 (q) は $m = 6 \sim 10$, $h = 4$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。 λ の計算結果には微小な振動が見られるが、その平均値は僅かに正である。

以上の事実から $6 - D_{3H}$ の振動状態は準周期的であるといえる。

振動状態 2 - X_2 , 3 - X_3

図 3.12 は lip adjustment No. 2 ($l=9\text{mm}$, $x_0=0.40\text{mm}$), $P_0=6.3\text{kPa}$ で励起された振動状態 X_2 から、図 3.13 は lip adjustment No. 3 ($l=6\text{mm}$, $x_0=0.49\text{mm}$), $P_0=3.1\text{kPa}$ で励起された振動状態 X_3 から得られた図である。

図 3.12 と 図 3.13 の (a), (b) はそれぞれ両振動状態で得られた $p(t)$, $x(t)$ 波形である。 $p(t)$ の振幅とリード変位は振動状態 2 - X_2 で $V\{p(t)\} = 2.5 \text{ kPa}$, $0 \leq x \leq 0.09 \text{ mm}$ 、振動状態 3 - X_3 では $V\{p(t)\} = 2.9 \text{ kPa}$, $0 \leq x \leq 0.19 \text{ mm}$ である。これらの振動状態では極端にリード変位の振幅が小さいのが特徴である。振動状態 3 - X_3 から得られた $p(t)$ 波形に見られる波形のピークはおよそ 3 つ毎に大きな値をとり、振動周期は基本となる周期の約 3 倍になっていることがわかる。

図 3.12 (c), (d) は振動状態 2 - X_2 で得られた $p(t)$, $x(t)$ のパワースペクトルである。これらのパワースペクトルを比較すると、両者の優勢なピークは全く同じ周波数に現れる。最大ピークは $f_a = 1399\text{Hz}$ 、第 2 のピークは $f_b = 952\text{Hz}$ に存在する。 -40dB 以上のピークの周波数はすべて式 (3.26) によって記述することができる。図 3.13 (c), (d) は振動状態 3 - X_3 から得られた $p(t)$ および $x(t)$ のパワースペクトルである。最大ピークは $f_a = 1423\text{Hz}$ 、第 2 のピークは $f_b = 971\text{Hz}$ に存在する。振動状態 3 - X_3 のパワースペクトルにおけるピークは他の場合 (振動状態 5 - X を除いて) に比して鋭くなく、幅を持っている。

図 3.12 と 図 3.13 の (e) は両振動状態から得られた (p, x) 状態空間におけるアトラクタである。リード開口 $x(t)$ の振幅が極端に小さいためアトラクタは $x = 0$ の近く押しつぶされている。

図 3.12 と 図 3.13 の (g), (h) は 3 次元相空間へ再構成したアトラクタである。再構成アトラクタの構造は T^2 トーラスの一種である。図 3.12 と 図 3.13 の (i) はそれぞれ (h) に示した再構成アトラクタの p_{n+4} 軸に垂直な平面 $p_{n+4} = 0$ での断面を表す。断面上には閉じた輪の形がみられ、再構成アトラクタが T^2 トーラスの一種であることを確認できる。

図 3.12 と 図 3.13 の (p) は $m = 6 \sim 10$, $h=2$, $N=16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。これら 2 つの Local Slope からは式 (3.16) を満たす $m \geq 6$ で 2 つの異なる Scaling Region に対してそれぞれ異なる d_2 が存在した。振動状態 2 - X_2 では小さい r の範囲 ($-1.5 \leq \log r \leq -1.0$) で $d_2 \doteq 2.1$ 、大きい r の範

囲 ($-0.5 \leq \log r \leq -0.4$) で $d_2 \doteq 1.2$ が求められた。また、振動状態 3 - X_3 では小さい r の範囲 ($-1.5 \leq \log r \leq -1.1$) で $d_2 \doteq 2.2$, 大きい r の範囲 ($-0.7 \leq \log r \leq -0.4$) で $d_2 \doteq 1.1$ が求められた。

図 3.12 と 図 3.13 (k) は両振動状態に対して $m = 6 \sim 10$, $h = 2$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。振動状態 2 - X_2 に対する λ の計算結果は大きく振動している。しかし、その平均値は僅かに正である。振動状態 3 - X_3 に対する λ の計算結果には正と見られる部分が $t = 30\text{ms}$ 付近に存在する。

振動状態 1 - X, 5 - X

図 3.14 は lip adjustment No.1 ($l = 9.0\text{mm}$, $x_0 = 0.82\text{mm}$), $P_0 = 4.2\text{kPa}$ で励起される振動状態 1 - X から得られた図であり、図 3.15 は lip adjustment No.5 ($l = 8\text{mm}$, $x_0 = 0.62\text{mm}$), $P_0 = 3.4\text{kPa}$ で励起された振動状態 5 - X から得られた図である。

図 3.14 と 図 3.15 の (a), (b) はこれらの両振動状態で得られた $p(t)$, $x(t)$ 波形である。 $p(t)$ の振幅とリード変位は振動状態 1 - X で $V\{p(t)\} = 8.3\text{kPa}$, $0 \leq x \leq 0.85\text{mm}$ 、振動状態 5 - X では $V\{p(t)\} = 6.7\text{kPa}$, $0 \leq x \leq 0.65\text{mm}$ である。振動状態 1 - X の $p(t)$, $x(t)$ 波形を比較すると、 $x(t)$ の方が $p(t)$ 波形よりも細かい振動の振幅が大きくなっている。 $p(t)$ 波形は $x(t)$ 波形を低域ろ波器に通すと得られるようにも見える。

図 3.14 と 図 3.15 の (c), (d) はそれぞれ両振動状態で得られた $p(t)$, $x(t)$ のパワースペクトルである。振動状態 1 - X の $p(t)$ のパワースペクトルにはピークが $f_a = 695\text{Hz}$, $f_b = 1135\text{Hz}$ にみられる。 -40dB 以上のピークの周波数はすべて式 (3.26) によって記述することができる。また、 0kHz から 2kHz までの間には、多くの振動成分が -45dB 付近まで上昇しているのがみられる。振動状態 1 - X の $x(t)$ のパワースペクトルにおけるピークは $f_a = 1135\text{Hz}$, $f_b = 695\text{Hz}$ に存在し、 $p(t)$ の場合とは逆になっている。振動状態 5 - X の $p(t)$ のパワースペクトルにおけるピークは他の振動状態におけるピークに比して幅を持っているのが特徴的である。2つの大きいピークが $f_a = 436\text{Hz}$, $f_b = 696\text{Hz}$ にみられ、 f_a のピークに対して f_b のピークの大きさは 2.1dB だけ小さい。振幅比では $1.0 : 0.79$ である。他の -40dB 以上のピークの周波数はすべて式 (3.26) によって記述することができる。

図 3.14 と 図 3.15 の (e) は両振動状態から得られた (p, x) 状態空間におけるアトラクタである。これらのアトラクタは複雑であり、 $p-x$ の関係は周期的振動状態のように直線的な比例関係にはない。しかし、 $p(t)$ の値は x が完全に閉じているとき小さく、 x がリード静止位置に近いときには大きかった。すなわち、基本的な関係は変わらなかった。

図 3.14 と 図 3.15 の (g), (h) はそれぞれ振動状態 1 - X と 5 - X から 3次元相空間へ再構成したアトラクタである。(g) は $N = 500$ の線で表し、(h) は $N = 16000$ の点で表した。図 3.14 (i) は (h) に示した再構成アトラクタの p_{n+8} 軸に垂直な平面 $p_{n+8} = 0$ での断面図、図 3.15 (i) は (h) に示した再構成アトラクタの p_{n+10} 軸に垂直な平面 $p_{n+10} = 0$ での断面図である。これらの断面図上の点は線状に分布していることから、再構成アトラクタは面的な要素からできていることがわかる。従って、再構

成アトラクタの基本形状は T^2 トーラスの一種であると考えられる。しかし、振動状態 6-D_{3H} (図 3.11 (r)) の場合に得られたドーナツ型の T^2 トーラスの形と比較すると、かなり異なった形をしている。これは、 f_a に対する f_b の周波数成分の振幅の比が振動状態 6-D_{3H} では 0.14 であるのに対して振動状態 1-X では 0.72、振動状態 5-X では 0.79 であることによる。このように f_a と f_b の周波数成分の振幅比により T^2 トーラスの基本的な形は大きく変化する。

図 3.14 (j) に示した Local Slope は振動状態 1-X に対して $m = 6 \sim 10$, $h = 4$, $N = 16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。 $d_2 \doteq 2.1$ の値が求められた。また、図 3.15 (j) に示した振動状態 5-X に対する Local Slope ($m = 5 \sim 10$, $h = 5$, $N = 16000$) から $d_2 \doteq 2.1$ が得られた。

図 3.14 と 図 3.15 (k) は振動状態 1-X, 5-X に対して $m = 6 \sim 10$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。振動状態 1-X に対する λ の計算結果は大きく振動しているが、その平均値は僅かに正である。振動状態 5-X に対する λ の計算結果には明らかに正と見られる部分が $t = 50\text{ms}$ 付近に存在する。

振動状態 3-X₁, 3-X₂

振動状態 3-X₁, 3-X₂ はともに lip adjustment No.3 ($l = 6.0\text{mm}$, $x_0 = 0.49\text{mm}$) のもとで $P_0 = 3.1\text{ kPa}$ のときに励起された振動状態である。振動状態 3-X₁ と 3-X₂ はよく似た非周期的振動状態である。振動状態 3-X₁, 3-X₂ から得られた図をそれぞれ 図 3.16, 図 3.17 に示す。

図 3.16 と 図 3.17 の (a), (b) はそれぞれ両振動状態で得られた $p(t)$, $x(t)$ 波形である。 $p(t)$ の振幅とリード変位は振動状態 3-X₁ で $V\{p(t)\} = 4.6\text{ kPa}$, $0 \leq x \leq 0.42\text{ mm}$ 、振動状態 3-X₂ では $V\{p(t)\} = 6.3\text{ kPa}$, $0 \leq x \leq 0.43\text{ mm}$ である。振動状態 3-X₁ の $x(t)$ 波形は他の典型的な非周期的振動状態とは異なり、その平均値に関してほぼ対称に振動し、リード変位はマウスピースレイによっても唇によっても制限されていない。このような例は人工吹鳴実験から得られた振動状態では希である。

図 3.16 と 図 3.17 の (c), (d) はそれぞれ両振動状態で得られた $p(t)$, $x(t)$ のパワースペクトルである。 $p(t)$ のパワースペクトルにおけるピークは振動状態 3-X₁ では $f_a = 1181\text{Hz}$, $f_b = 1364\text{Hz}$ にみられ、振動状態 3-X₂ では $f_a = 955\text{Hz}$, $f_b = 1365\text{Hz}$ にみられる。2つの振動状態から得られる f_b の値が 1Hz しか変わらないことから、この周波数の振動成分を励起している原因は両振動状態で同一であると考えられる。 -40dB 以上のピークの周波数はすべて式 (3.26) によって記述することができる。また、 0kHz から 2kHz までの間には、多くの振動成分が $-40 \sim 45\text{ dB}$ 付近まで上昇しているのがみられる。 $x(t)$ のパワースペクトルにおけるピークは振動状態 3-X₁ で $f_a = 1364\text{ Hz}$, $f_b = 1181\text{Hz}$ 、振動状態 3-X₂ で $f_a = 1365\text{ Hz}$, $f_b = 955\text{Hz}$ に存在し、それぞれ $p(t)$ の場合とは逆になっている。

図 3.16 と 図 3.17 (e) の (p, x) 状態空間におけるアトラクタから $p-x$ の関係は基本的には比例関係にあることがわかる。

図 3.16 と 図 3.17 の (g), (h) は 3 次元相空間へ再構成したアトラクタである。(g) は $N=500$ の線、(h) は $N=16000$ の点で表した。両振動状態から得られる (g) のアトラクタの形状はかなり異なっているが長時間描かせた (h) のアトラクタは似ている。

図 3.16 と 図 3.17 (i) は (h) に示した再構成アトラクタの p_{n+4} 軸に垂直な平面 $p_{n+4} = 0$ での断面を表す。両振動状態で断面に示される形状が基本的には 2 つの閉じた輪であることから (g), (h) の再構成アトラクタは T^2 トーラスの一種であることがわかる。

図 3.16 と 図 3.17 の (j) は両振動状態に対して得られた Local Slope である。両図とも $m = 6 \sim 10$, $h=2$, $N=16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。振動状態 $3 - X_1$ に対しては 図 3.16 (j) に示すように計算結果は埋め込み次元 m を変化させると変動し、はっきりとした Scaling Region は得られなかった。 $m = 6$ で d_2 の値を求めた結果、狭い Scaling Region ($-1.1 \leq \log r \leq -1.0$) で $d_2 \doteq 2.3$ が得られた。振動状態 $3 - X_2$ に対しては比較的広い Scaling Region ($-1.2 \leq \log r \leq -0.8$) で $d_2 \doteq 2.1$ が得られた。

図 3.16 と 図 3.17 (k) は両振動状態に対して $m = 6 \sim 10$, $h = 2$, $N = 16000$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。但し、 τ の値は振動状態 $3 - X_1$ で 10ms 、振動状態 $3 - X_2$ で 5ms とした。振動状態 $3 - X_1$ に対して計算した λ の平均値は僅かに正である。振動状態 $3 - X_2$ に対して計算した λ は、ほとんど 0 に近い。

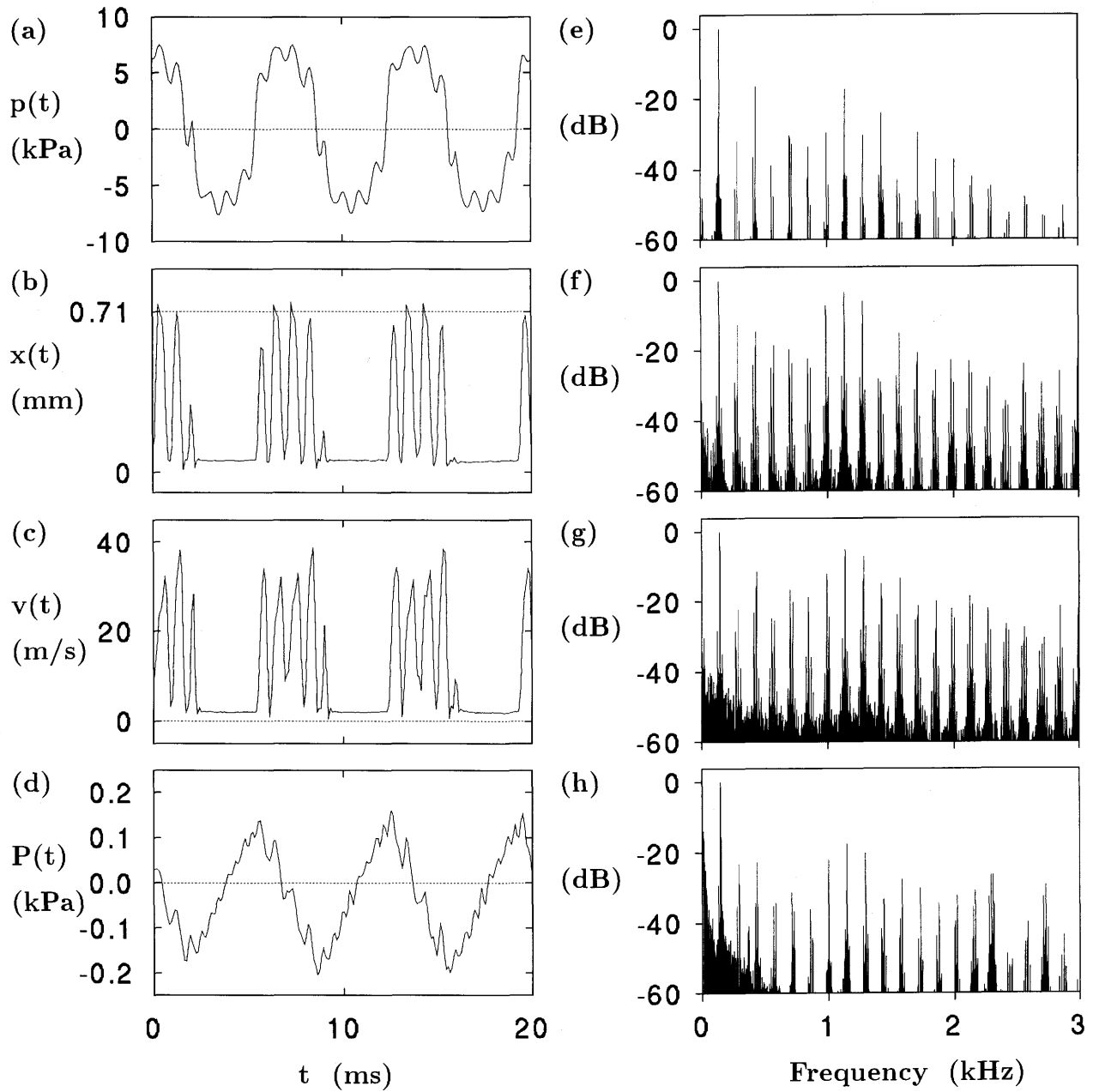


図 3.11: 振動状態 6 - D_{3H}
 (a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $v(t)$, (d) $P(t)$ 波形,
 (e) $p(t)$, (f) $x(t)$, (g) $v(t)$, (h) $P(t)$ のパワースペクトル

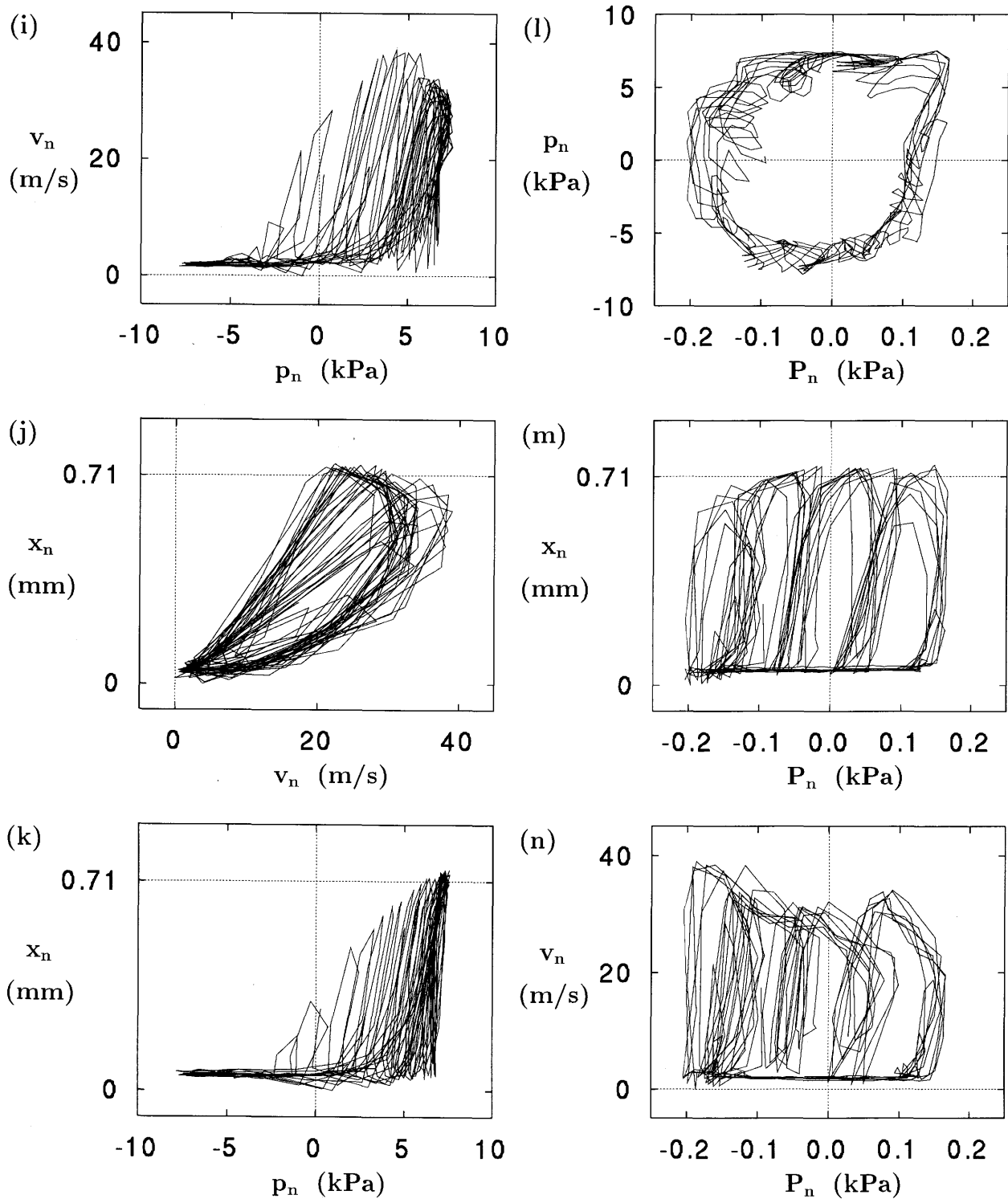


図 3.11: 振動状態 6 - D_{3H}

(p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの (i) (p, v) 面, (j) (v, x) 面, (k) (p, x) 面, (l) (P, p) 面, (m) (P, x) 面, (n) (P, v) 面への投影

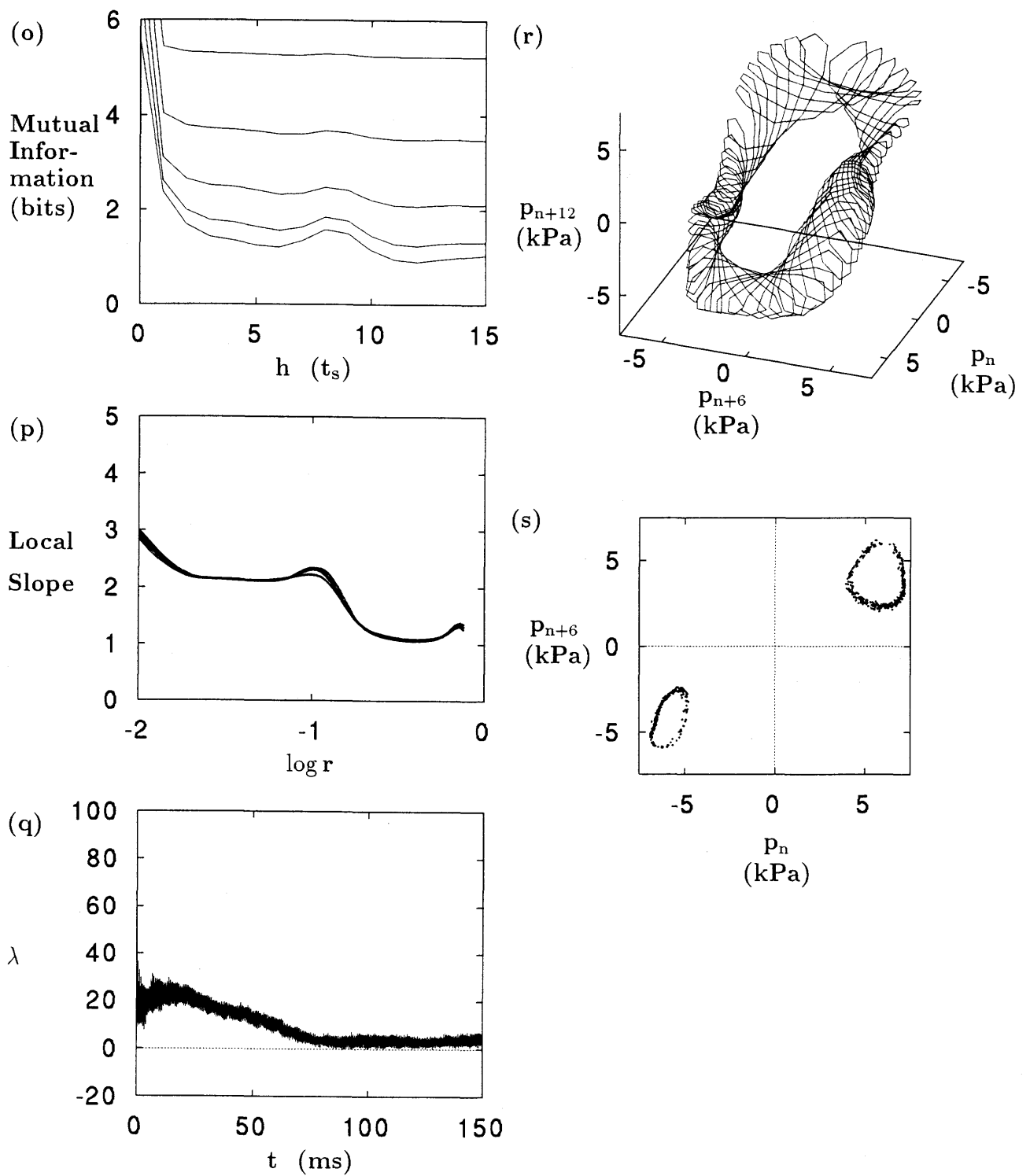
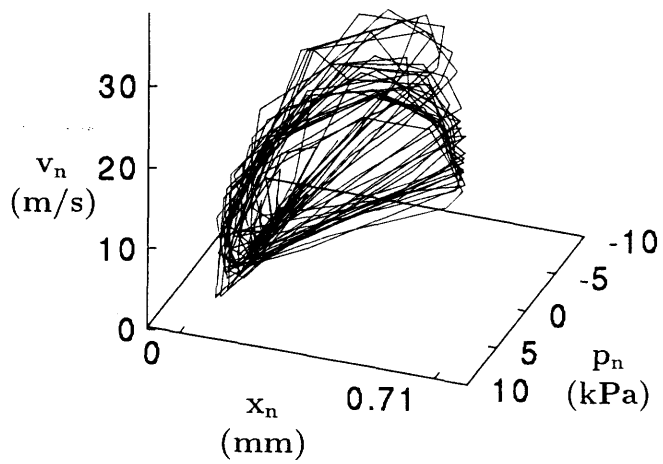
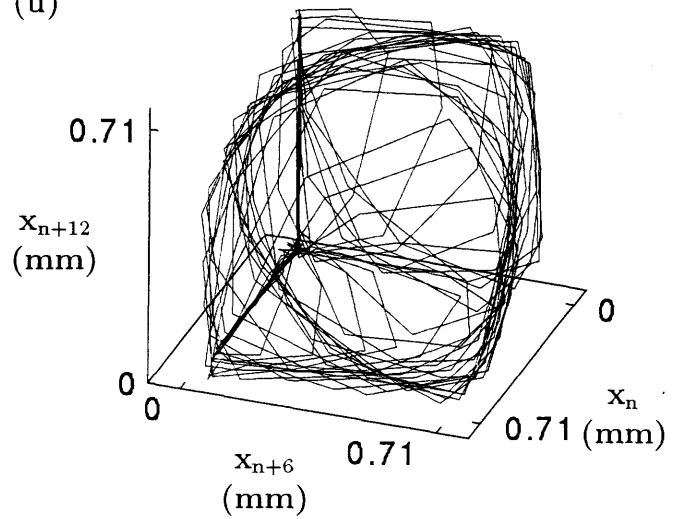


図 3.11: 振動状態 6 - D_{3H} (o) Mutual Information, (p) Local Slope, (q) 最大リアプノフ指数, (r) 3次元相空間における再構成アトラクタ, (s) (r) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+12} = 0$)

(t)



(u)



(v)

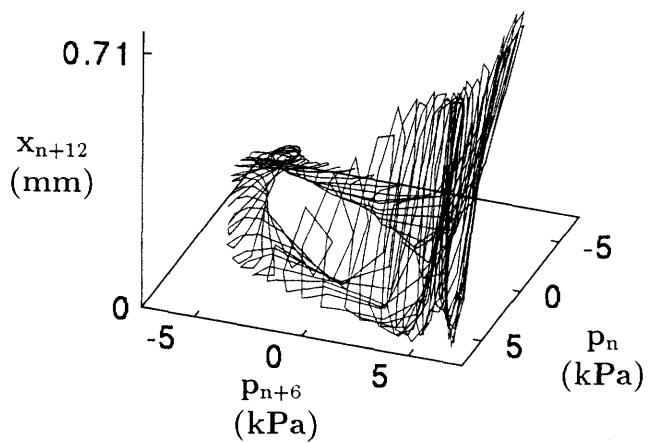


図 3.11: 振動状態 6 - D_{3H} (t) (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタ,
(u) $x(t)$ から再構成したアトラクタ,
(v) (p, p_{n+6}, x_{n+12}) 空間におけるアトラクタ

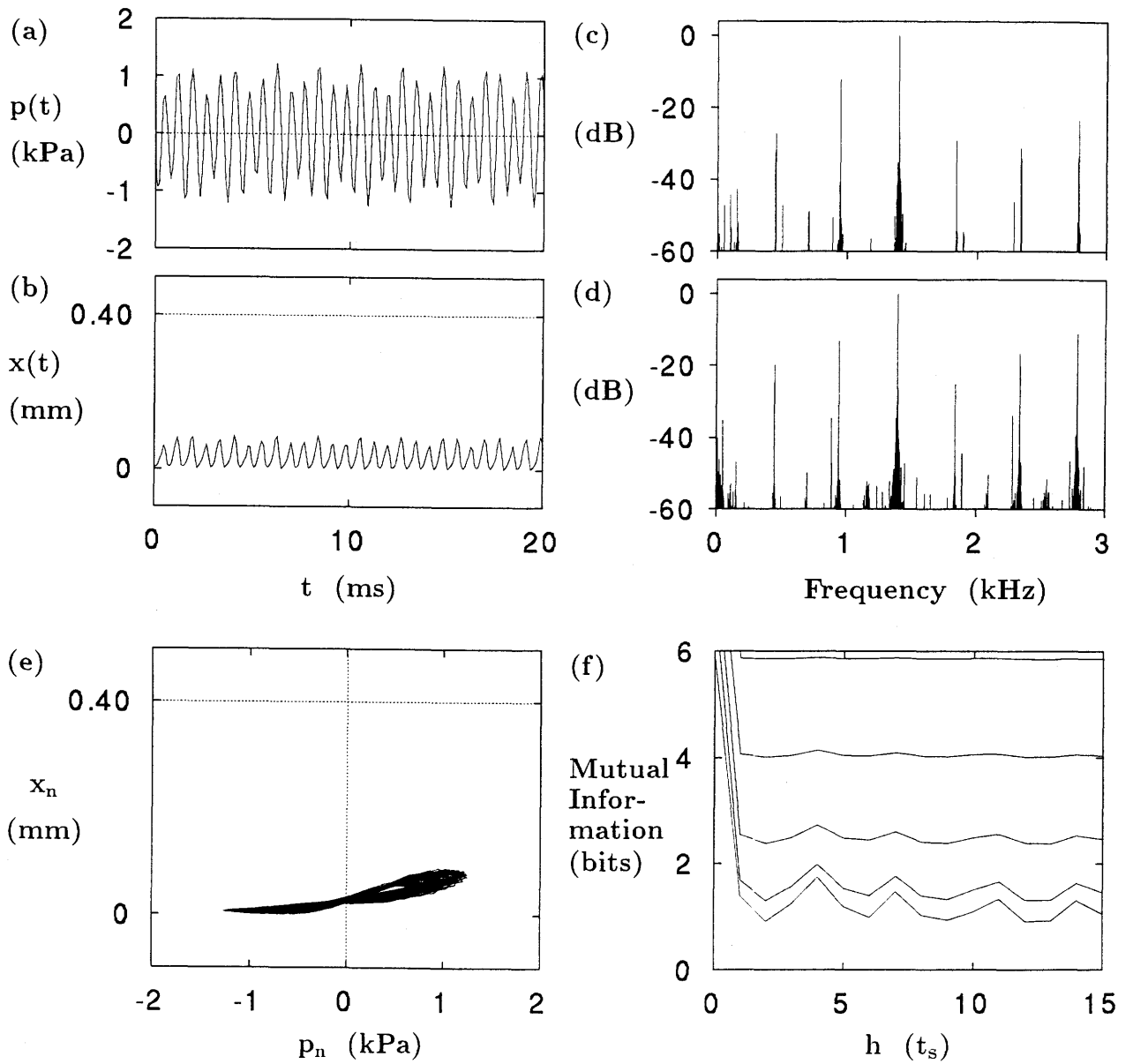


図 3.12: 振動状態 2 - X_2

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

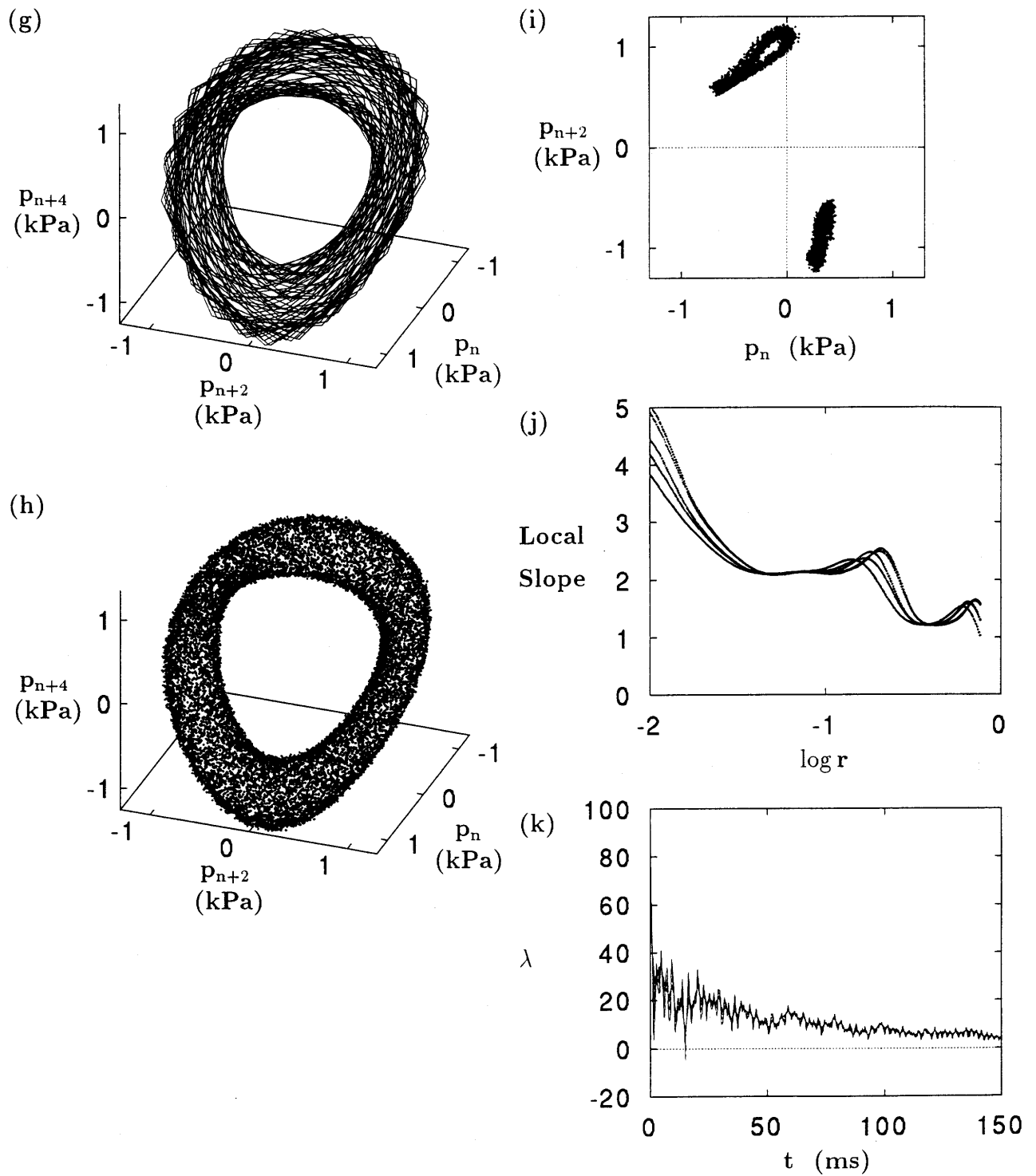


図 3.12: 振動状態 2 - X_2 (g) $N = 500$ (線), (h) $N = 16000$ (点) で表した 3 次元相空間における再構成アトラクタ, (i) (h) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+4} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

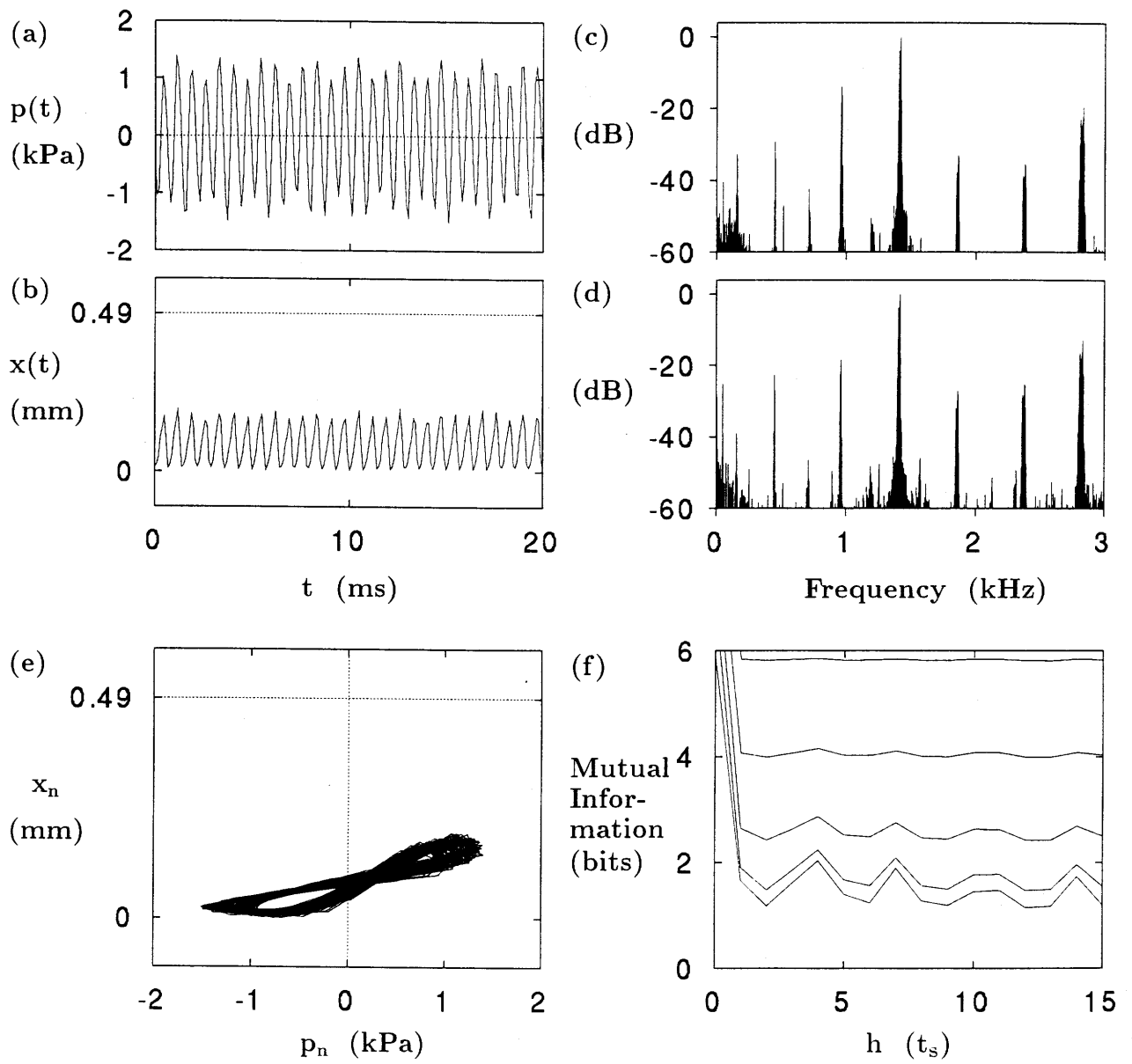


図 3.13: 振動状態 3 - X_3

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

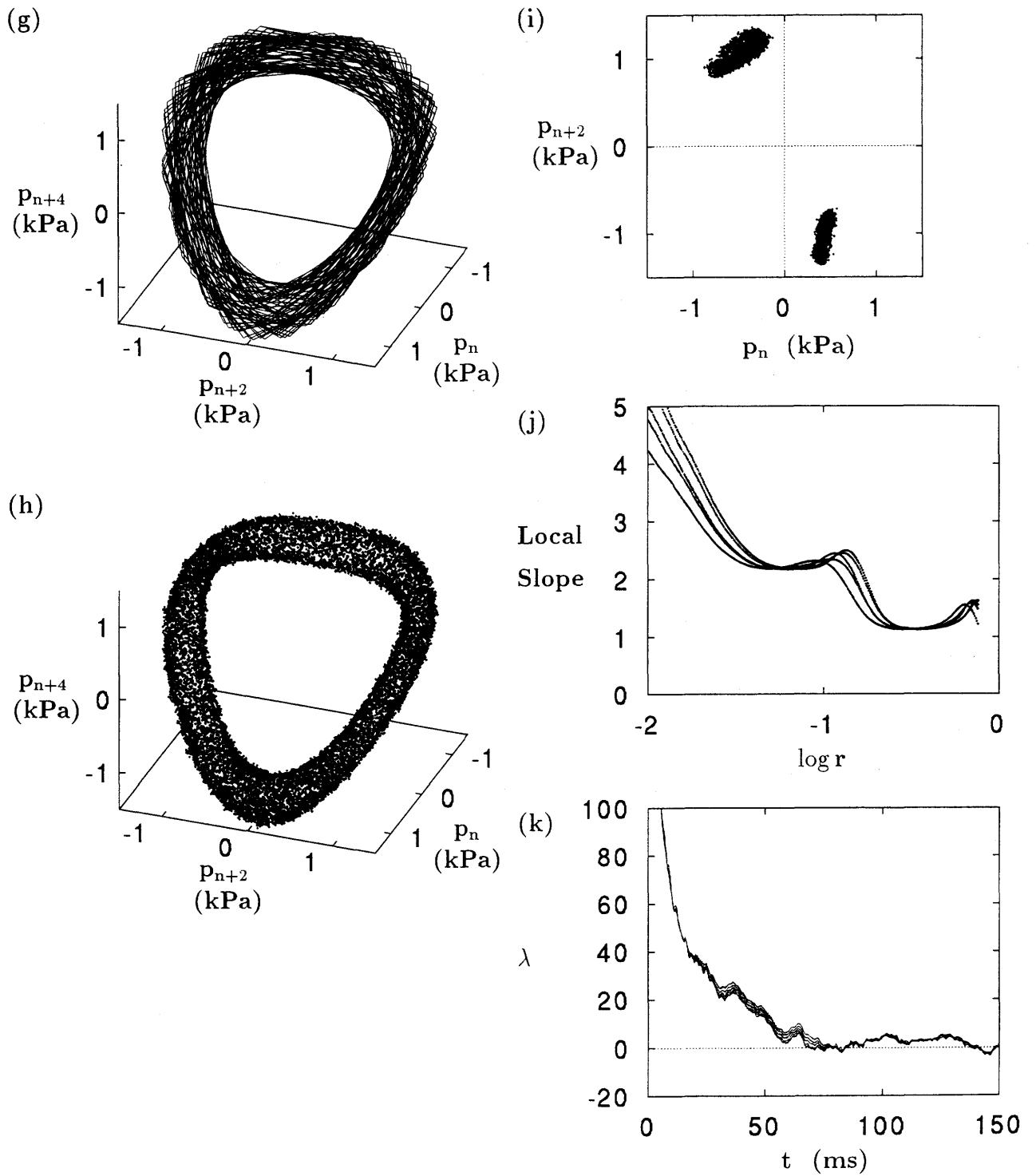


図 3.13: 振動状態 3 - X_3 (g) $N = 500$ (線), (h) $N = 16000$ (点) で表した 3 次元相空間における再構成アトラクタ, (i) (h) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+4} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

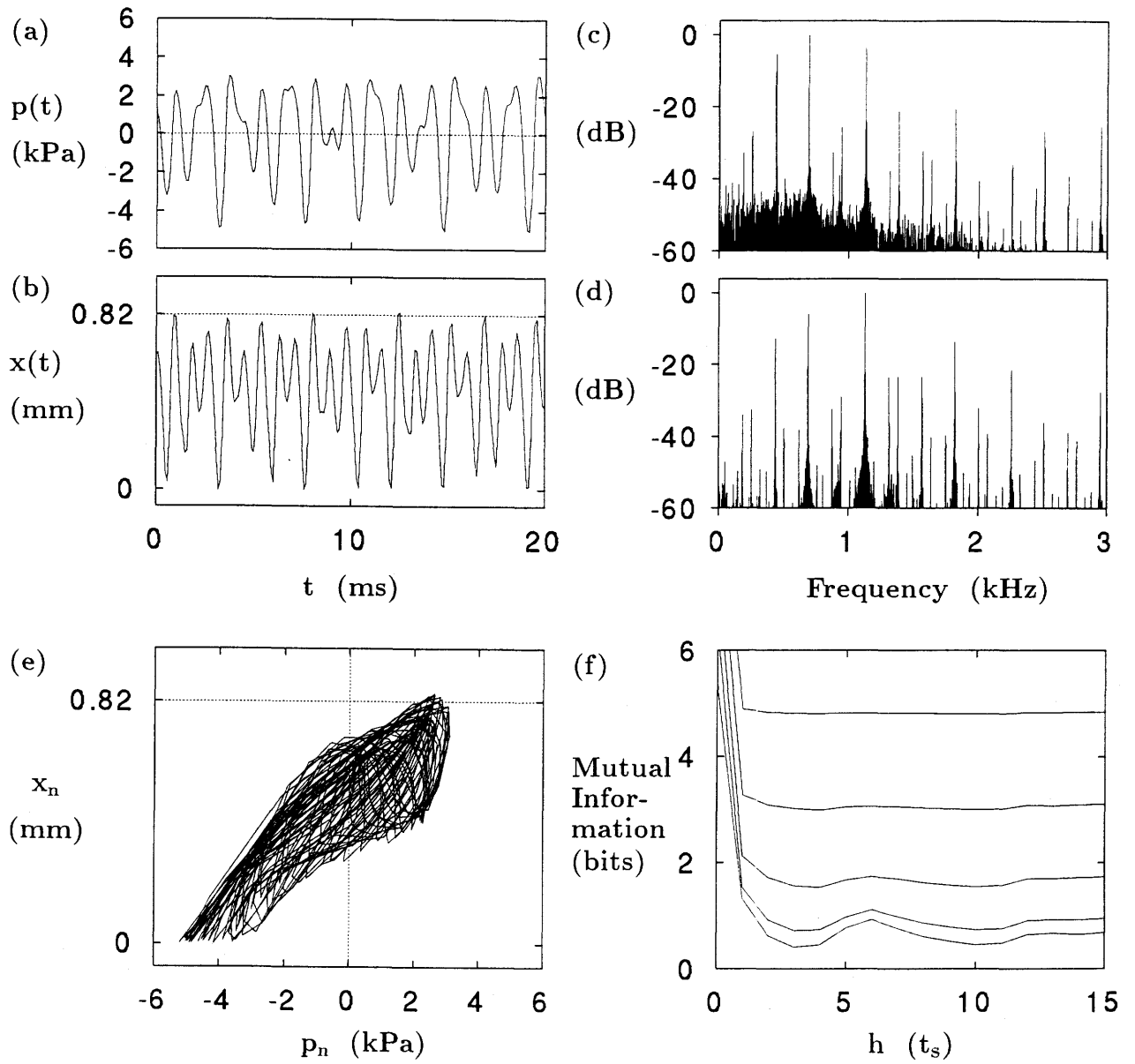


図 3.14: 振動状態 1 - X

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

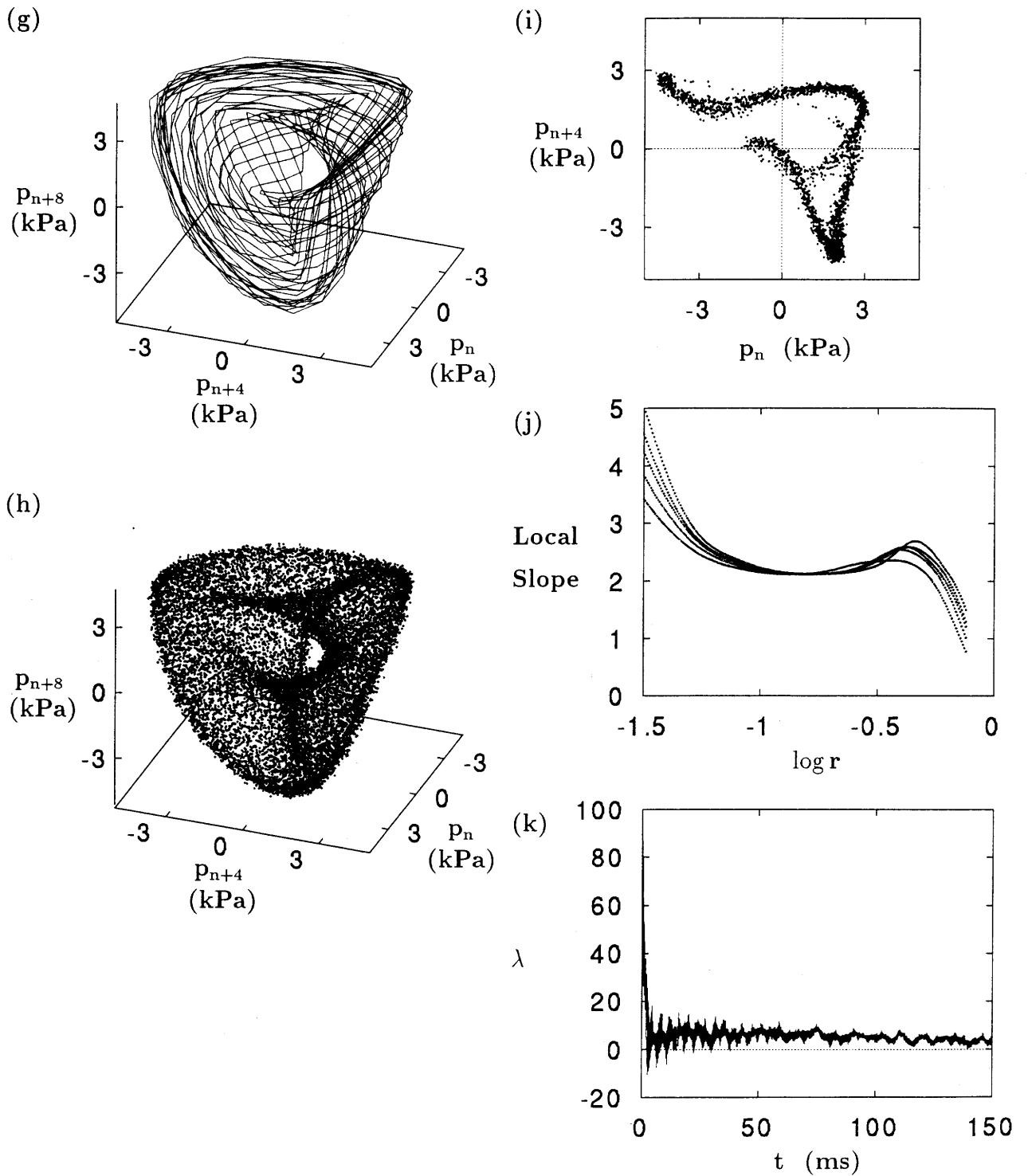


図 3.14: 振動状態 1-X (g) $N = 500$ (線), (h) $N = 16000$ (点) で表した 3 次元相空間における再構成アトラクタ, (i) (h) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+8} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

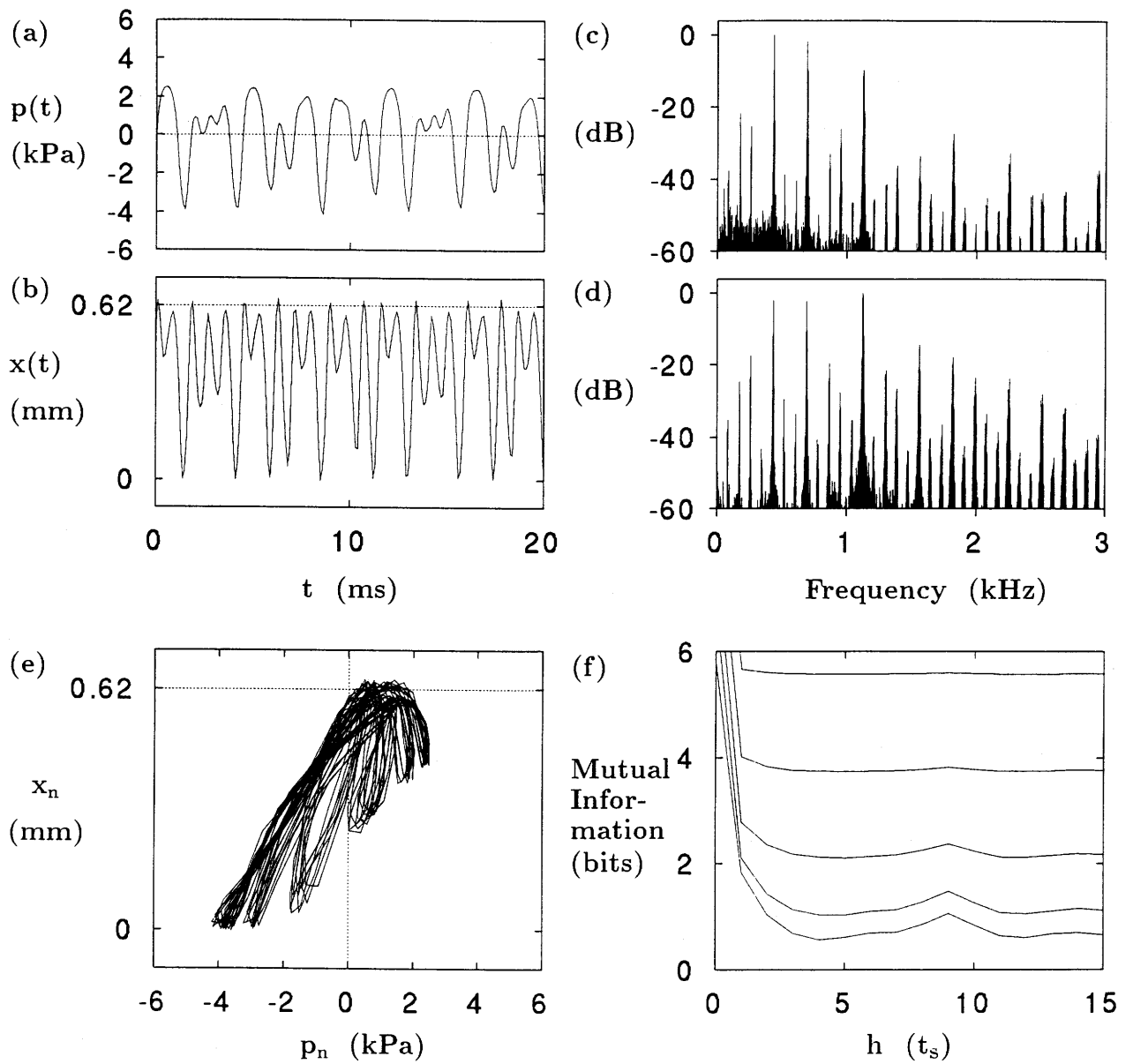


図 3.15: 振動状態 5 - X

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

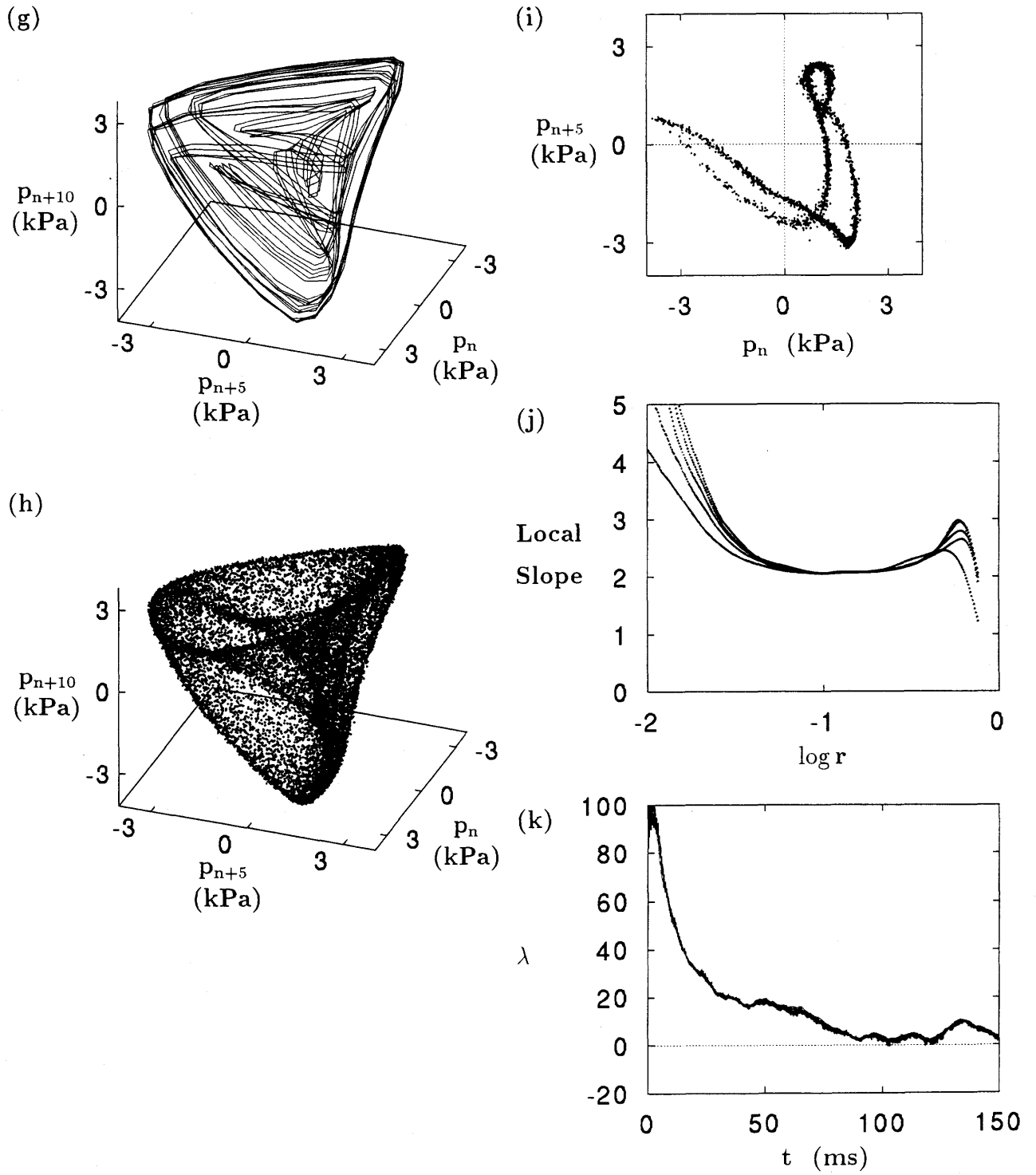


図 3.15: 振動状態 5-X (g) $N = 500$ (線), (h) $N = 16000$ (点) で表した 3 次元相空間における再構成アトラクタ, (i) (h) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+10} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

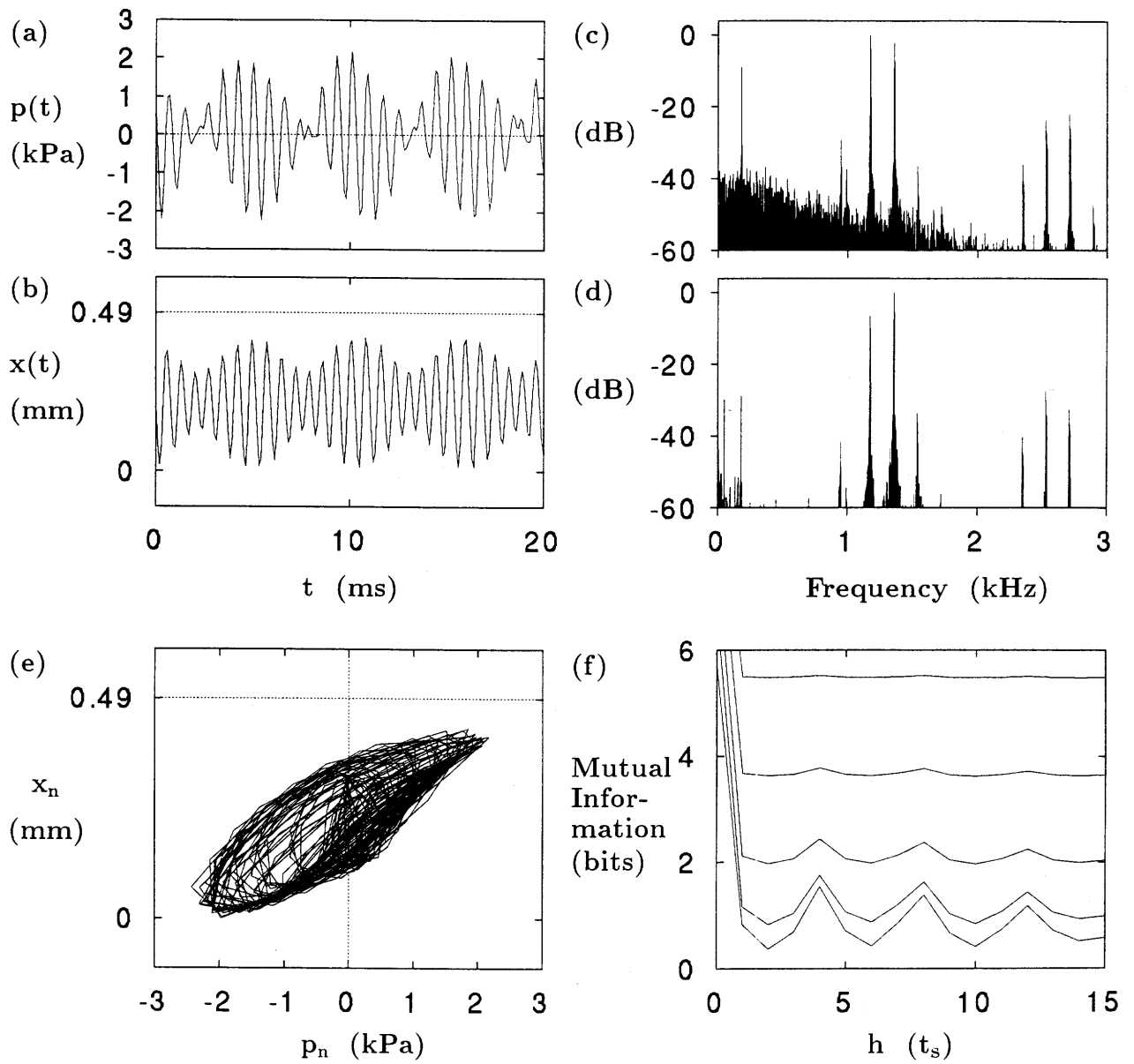


図 3.16: 振動状態 3 - X_1

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

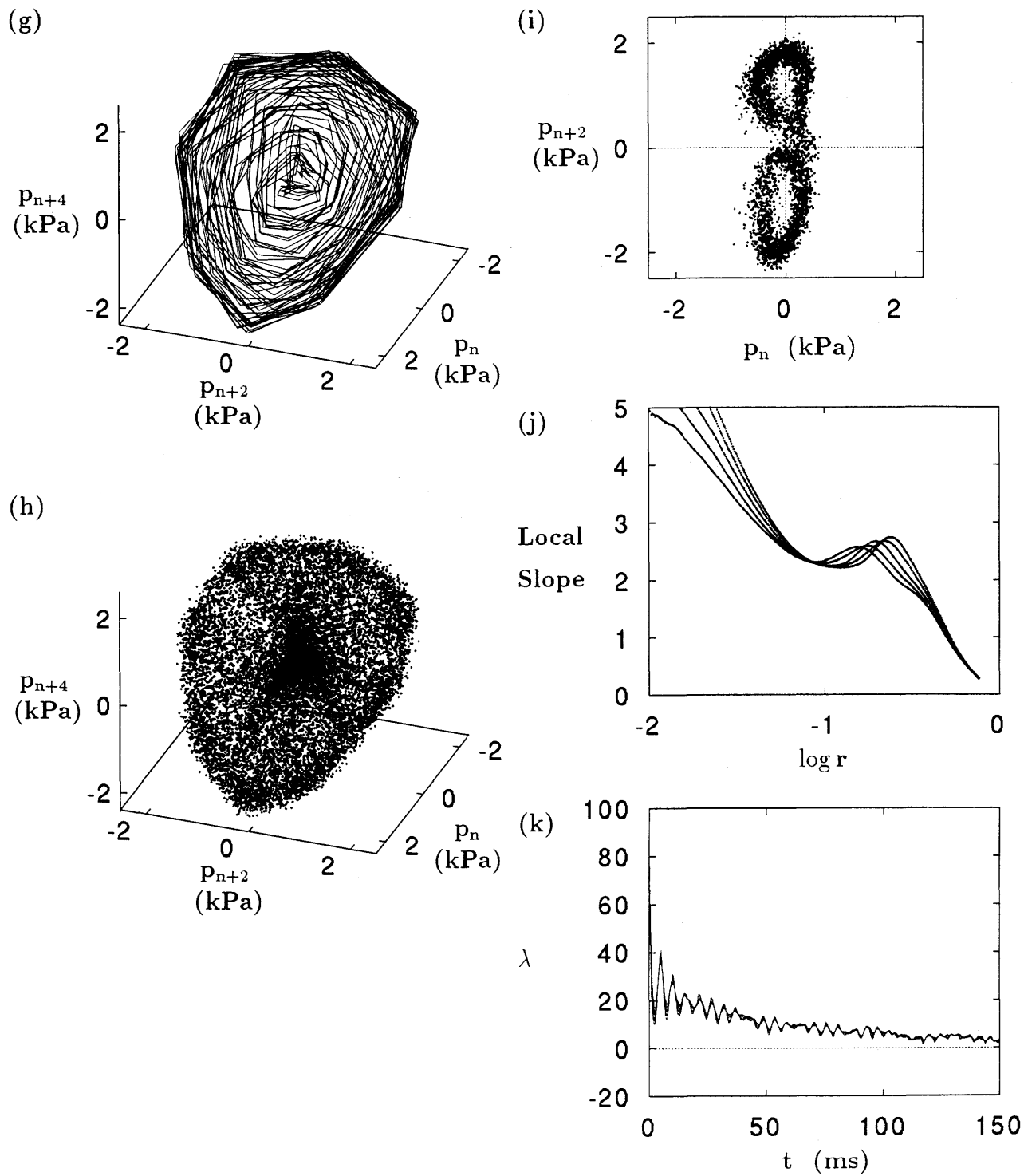


図 3.16: 振動状態 3 - X_1 (g) $N = 500$ (線), (h) $N = 16000$ (点) で表した 3 次元相空間における再構成アトラクタ, (i) (h) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+4} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

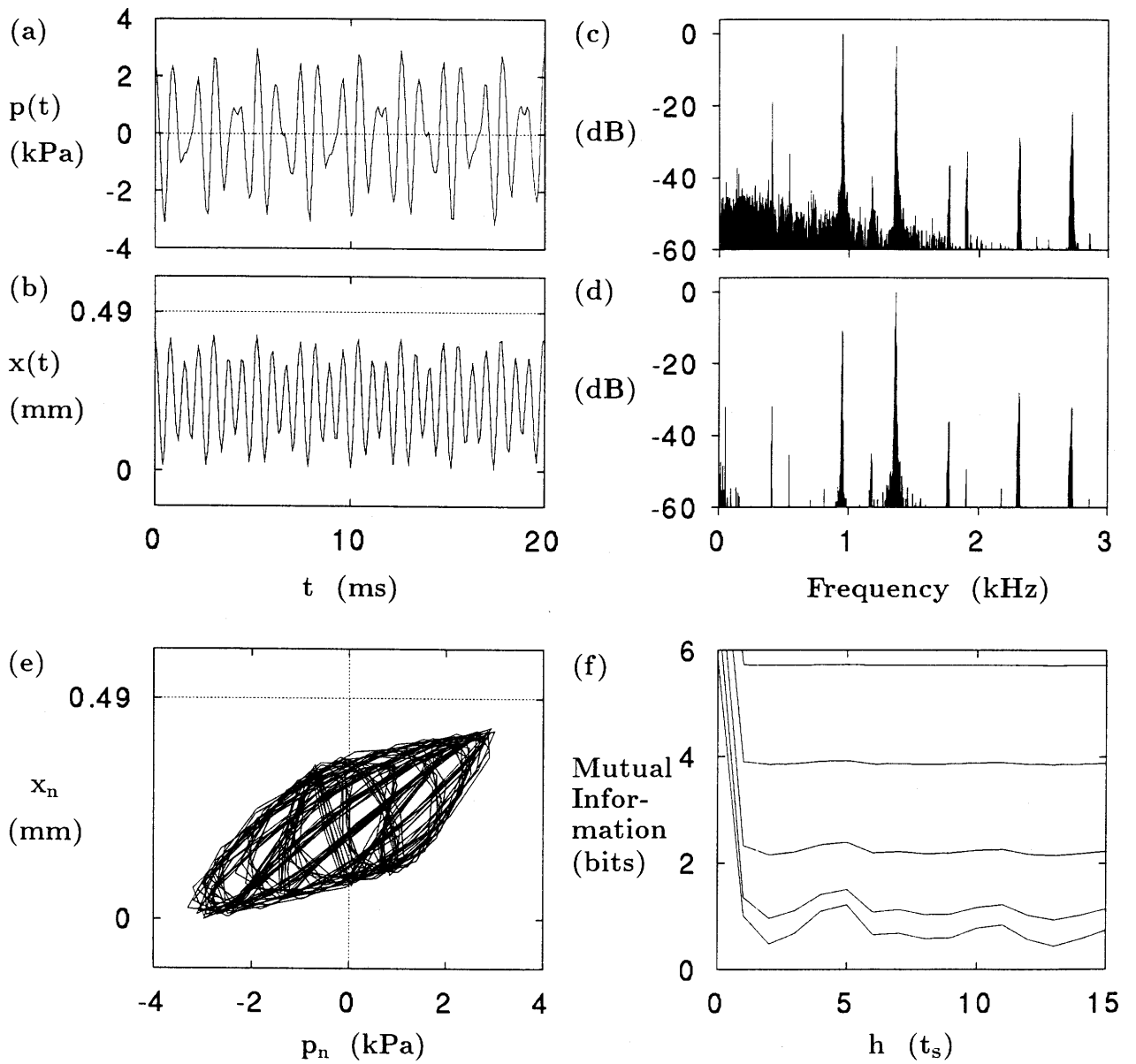


図 3.17: 振動状態 3 - X_2

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

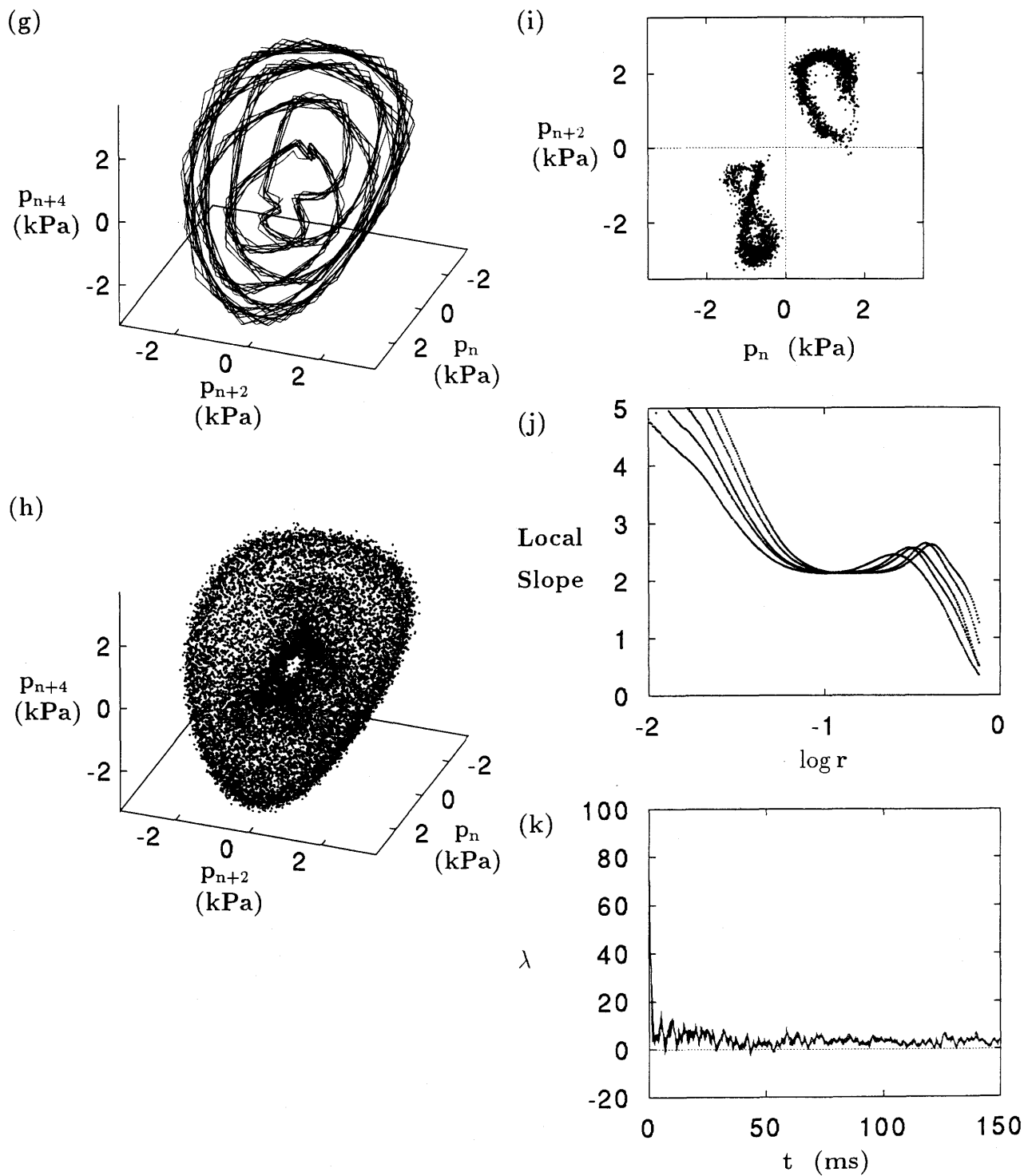


図 3.17: 振動状態 3 - X_2 (g) $N = 500$ (線), (h) $N = 16000$ (点) で表した 3 次元相空間における再構成アトラクタ, (i) (h) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+4} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

3.3.2 T³ トーラスを持つ振動状態

図 3.18 は lip adjustment No. 2 ($l = 9\text{mm}$, $x_0 = 0.40\text{mm}$), $P_0 = 3.7\text{kPa}$ で観測された振動状態 2 - X₁ から得られた図である。

図 3.18 (a), (b) はこの振動状態での $p(t)$, $x(t)$ 波形である。これらの波形は非常に複雑な動きをしている。 $p(t)$ の振幅とリード変位は $V\{p(t)\} = 3.2\text{kPa}$, $0 \leq x \leq 0.38\text{ mm}$ である。両者を比較すると $p(t)$ 波形の方が $x(t)$ 波形よりも、より低い周波数の振動成分の影響が大きいことがわかる。

図 3.18 (c) に示したこの振動状態における $p(t)$ のパワースペクトルには $f_a = 943\text{Hz}$ に最高のピークがあり、 $f_b = 1367\text{Hz}$ に第 2 に高いピーク、実験に用いたクラリネットの最低音 D₃ の周波数に近い $f_c = 150\text{Hz}$ に第 3 のピークがある。943Hz のピークに対して、1367Hz のピークは -4.2dB 小さく、150Hz のピークは -4.4dB 小さい。振幅比では 1.0 : 0.62 : 0.60 である。 $f_a = 943\text{Hz}$, $f_b = 1367\text{Hz}$, $f_c = 150\text{Hz}$ とすると -40dB 以上の $p(t)$ のパワースペクトルのピーク周波数 f_h ($h = 1, 2, 3, \dots$) は全て f_a と f_b と f_c の線形結合、すなわち

$$f_h = if_a + jf_b + kf_c \quad (3.27)$$

によって記述することができる。ここで i, j, k は整数である。式 (3.27) が成り立つ周波数の精度は約 1Hz である。パワースペクトルのピーク成分が式 (3.27) で表されることは、この振動状態から T³ トーラスが得られることを示唆している。図 3.18 (d) に示した $x(t)$ のパワースペクトルでは $p(t)$ のパワースペクトルにおいて第 2 のピークだった 1367Hz に最高のピークがあり、943Hz に第 2 に高いピーク、 $f_c = 150\text{Hz}$ に第 3 のピークがある。

図 3.18 (e) はこの振動状態から得られた (p, x) 状態空間におけるアトラクタである。 (p, x) 状態空間中の軌道は複雑であるが $p - x$ の関係は基本的には比例関係にあることがわかる。

図 3.18 (g) は $m = 3$, $h = 3$, $N = 16000$ として点で表した再構成アトラクタであるが、3 次元相空間の一部を一様に埋めてしまいその形状は定かではない。

図 3.18 (i) は 図 3.18 (g) に示した再構成アトラクタの p_{n+6} 軸に垂直な平面 $p_{n+6} = 0\text{kPa}$ での断面図である。点が断面上にほぼ一様に分布していることから 図 3.18 (g) に示した再構成アトラクタはその内部にも点がプロットされていることを確認できる。図 3.18 (h) は 4 次元相空間に $h = 3$, $N = 16000$ として再構成したアトラクタに対し、第 4 番目の軸 p_{n+9} 軸に垂直な超平面 (3 次元空間) $p_{n+9} = 0\text{kPa}$ を断面として選び、4 次元相空間内の軌道がこの超平面を横切るときの交点をプロットした結果である。この図は実際には見ることはできない 4 次元相空間における再構成アトラクタの 3 次元断面を示している。図 3.18 (h) の 3 次元断面には 2968 点がプロットされている。点数が少ないので、構造を決定するのは困難であるがその形状はおおむね 2 次元的である。線形重ね合わせの式に f_a, f_b, f_c の値とその振幅比を代入し $t_s = 0.1\text{ms}$ として作った時系列から、この場合と同様に 4 次元相空間にアトラクタを再構成し、その 3 次元断面を見たところ 図 3.18 (h) とほとんど同じ形状の断面が得られた。

図 3.18 (j) はこの振動状態に対して $m = 8 \sim 20$, $h=3$, $N=16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。相関次元はこの Local Slope の狭い Scaling Region ($-1.0 \leq \log r \leq -0.7$) から $m \geq 8$ で $d_2 \doteq 3.2$ と計算され、クラリネットの人工吹鳴実験から得られた最も大きい値であった。従って、 $m = 4$ の埋め込み次元は、この振動状態において再構成アトラクタの形を決定するために十分な値である。

図 3.18 (k) はこの振動状態に対して $m = 8 \sim 10$, $h = 2$, $N = 16000$, $\tau = 10\text{ms}$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。求められた λ_{\max} は僅かに正であった。

パワースペクトルのピーク構造が式 (3.27) で示されること、4次元に再構成したアトラクタの3次元断面の形が基本的には3つの周波数成分の線形重ね合わせの式から作られること、そして d_2 が3に近いことから振動状態 $2 - X_1$ は基本的には T^3 トーラスによって特徴づけられる準周期的振動状態である。

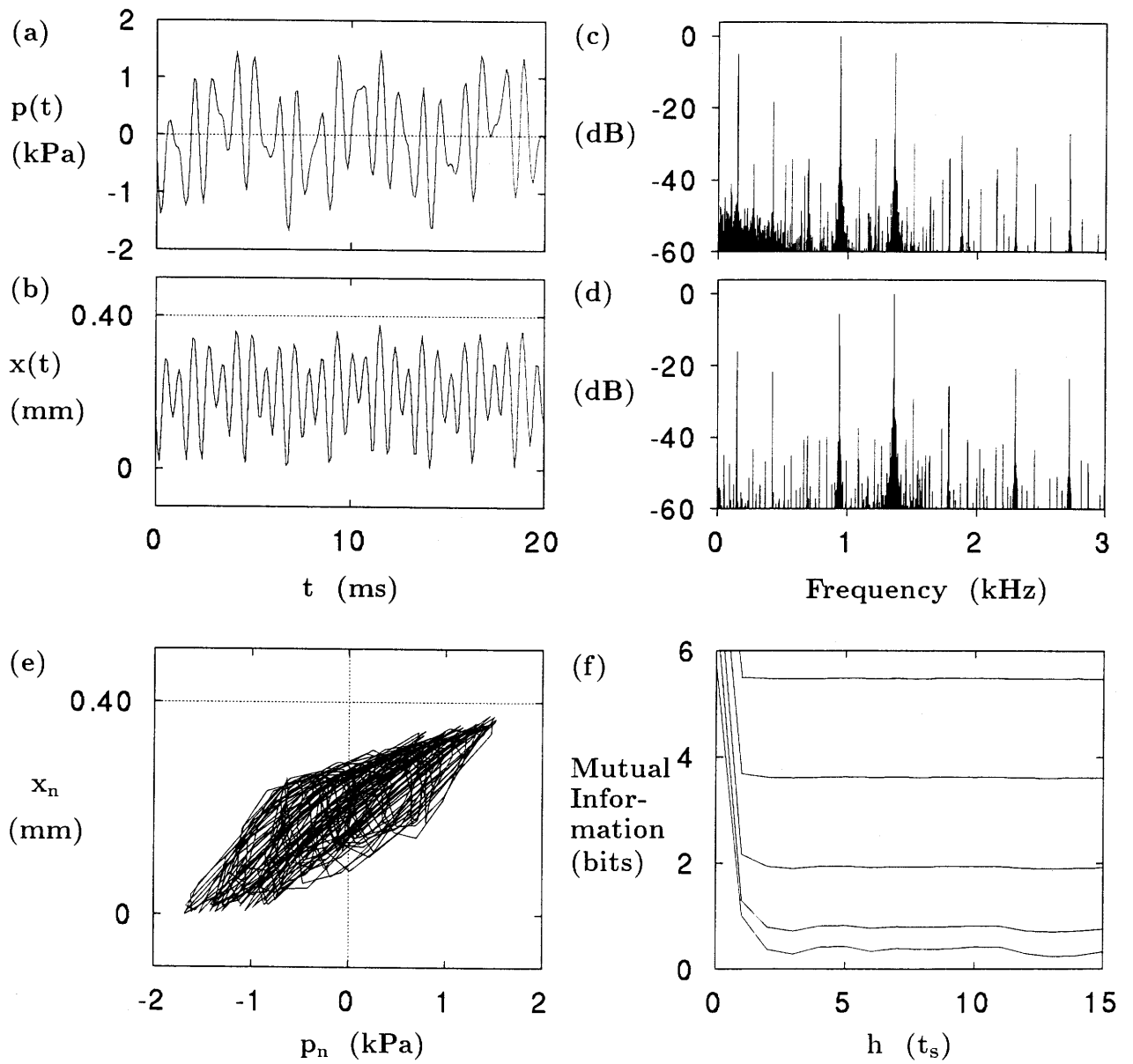


図 3.18: 振動状態 2 - X_1

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$ 波形, (c) $p(t)$, (d) $x(t)$ のパワースペクトル,
 (e) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ, (f) Mutual Information

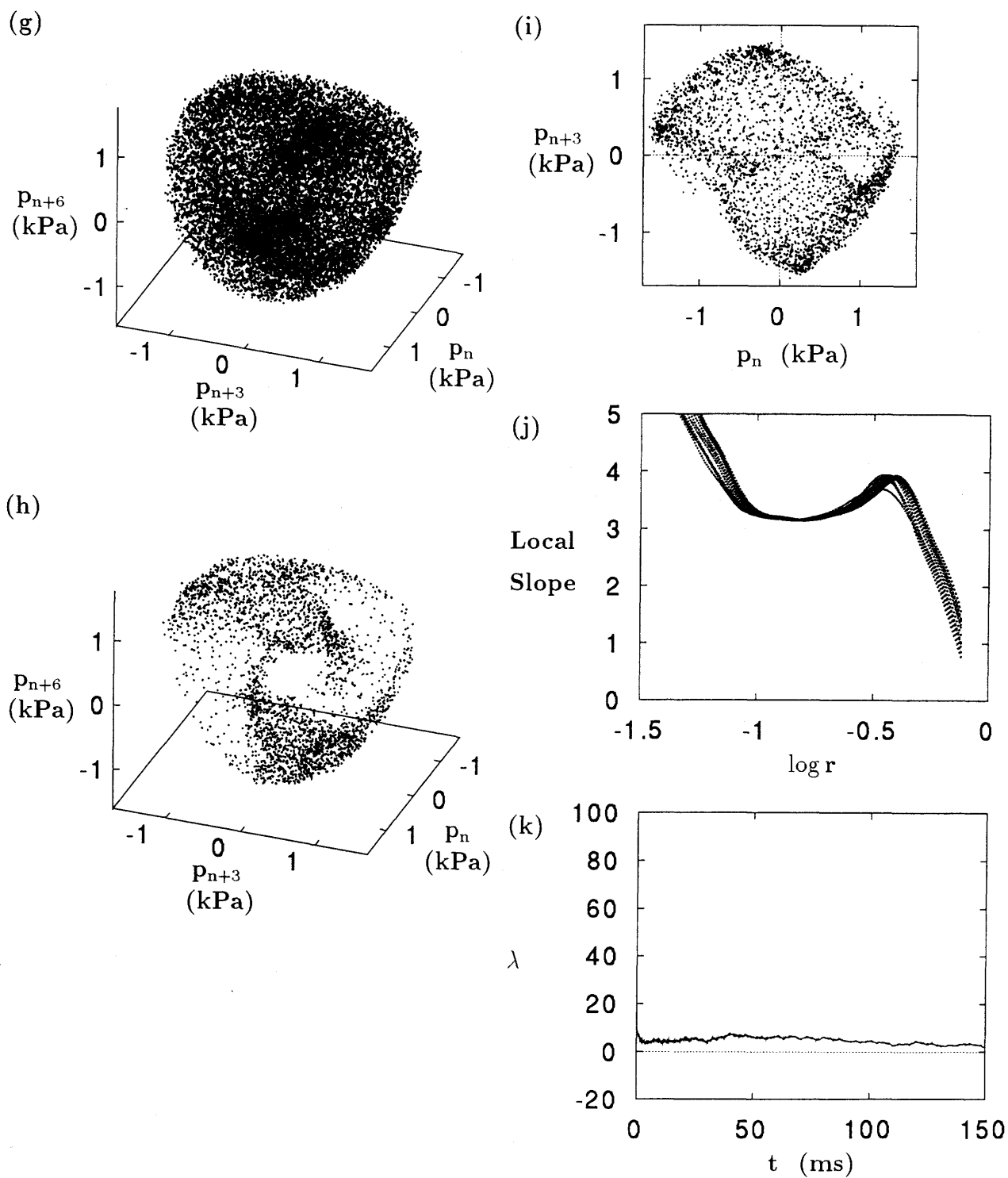


図 3.18: 振動状態 2 - X_1 (g) $N = 16000$ (点) で示した再構成アトラクタ, (h) 4次元相空間に再構成したアトラクタの3次元断面 ($p_{n+9} = 0$), (i) (g) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+6} = 0$), (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数

3.3.3 ストレンジアトラクタを持つ振動状態

図 3.19 は lip adjustment No.6 ($l = 7.0\text{mm}$, $x_0 = 0.71\text{mm}$), $P_0 = 3.7\text{kPa}$ で励起された振動状態 6-X から得られた図である。この振動状態の吹鳴音は種々の周期成分に雑音が重畳しているように聞こえる。

図 3.19 (a) ~ (d) はこの振動状態の波形を示すが、それらは他の振動状態とは異なり、かなり複雑である。 $V\{p(t)\} = 2.9\text{kPa}$, $V\{P(t)\} = 0.09\text{kPa}$, $p_0 = 0.35\text{kPa}$ から、 $D(t)$ の最大値 D_{\max} は

$$\begin{aligned} D_{\max} &< \{p_0 + V\{p(t)\}/2\} - \{P_0 + V\{P(t)\}/2\} \\ &= \{0.35 + 2.9/2\} - \{3.7 + 0.09/2\} \\ &= -1.9(\text{kPa}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

のように、負であることが計算され、 $v(t)$ は常に正、つまり空気流は常に吹鳴器から楽器気柱に向かうことを確かめ得る。 $V\{p(t)\} = 2.9\text{kPa}$, $V\{P(t)\} = 0.09\text{kPa}$ は何れもこれまでに示した例の中では最も小さい。

流速の最大値は、 P_0 の値が比較的小さいにも拘らず、 32m/s と、かなり大きい。 $p(t)$ 波形が独り他の波形とは異なるが、 $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の波形の間の関連性は顕著である。

P_0 の値が小さい故か、 $x(t)$ 波形はリード開口が大きい時間が長い。 $x(t)$ は、 $0 \leq x \leq 0.83\text{mm}$ の範囲で振動しているが、 $x(t)$ の最大値付近で波形は平坦になっていて、唇がリードの動きを制限していることを示している。図 3.11 に示した振動状態 6-D_{3H} の例ではマウスピースがリードの動きを制限していたが、この場合にはリードはマウスピースに殆ど触れない。

$x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の間の関連は 図 3.19 (a) ~ (d) を拡大して子細に観察することによって知られる。即ち、 $p_0 + p(t)$ が $P_0 + P(t)$ よりもかなり小さい時には $v(t)$ は $x(t)$ に比例するので、 $v(t)$ と $x(t)$ の下側の包絡線は極めて似た動きをし、 $v(t)$ と $x(t)$ の最小値は殆ど同時に起こる。しかし、 $p_0 + p(t)$ が $P_0 + P(t)$ よりも小さくしかもそれに近い時には、吹鳴器とマウスピース内の圧力差が小さくなり、 $v(t)$ は $x(t)$ 即ち $p(t)$ に比例しないので、 $v(t)$ の上側の包絡線が凹んだ部分では $p(t)$ の上側の包絡線が上に凸となり、 $v(t)$ の最大値は $x(t)$ の最大値よりも僅かに遅れて起こる。 $v(t)$ の最高値は 32m/s 付近にあり、 P_0 の値がそれ程大きくないにも拘らず他の場合に比してそれ程小さくならない。 $P(t)$ の増加（あるいは減少）は $v(t)$ の減少（あるいは増加）によって生ずるが、 $P(t)$ の最大値は $v(t)$ の最小値よりも少し遅れて現れる。この遅れは吹鳴器の容量に起因すると思われる。 $v(t)$ の下側の包絡線と $P(t)$ の上側の包絡線は対称形になっている。また、 $P(t)$ の下側の包絡線と $v(t)$ の上側の包絡線の間、さらに、 $P(t)$ の下側の包絡線と $p(t)$ の上側の包絡線の間にも関連が見られる。

$p(t)$ と $x(t)$ に着目して比較する。全体的に見て $x(t)$ および $v(t)$ 波形には、 $p(t)$ 波形に比べて多くの高周波成分が含まれ、 $p(t)$ は低域ろ波器の影響を受けているように見える。 $p(t)$ におけるすべての最大最小値は $x(t)$ におけるそれらには一致しない。 $p(t)$ の増加減少は常に滑らかではなく、突然ジグザグな変化によって乱れたような動きをする。また $p(t)$ の変化はゆっくりになる。そして $p(t)$ の値が僅かに下がってもリー

ド開口の減少が大きい場合とそうでない場合がある。これらは予測できないように思われる。 $V\{P(t)\}$ は 0.09kPa に過ぎないので、 $x(t)$ が $p(t)$ に比例しなければ、 $(p(t)-P(t))$ にも比例しない。このように複雑な事態はこれまでの例では見られなかった。

図 3.19 (e) ~ (h) は、 $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルである。 $p(t)$ のパワースペクトルには、数本のピークのほかに非常に多くの振動成分が -35dB 付近まで上昇しているのがみられる。 $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ においてパワースペクトルの最大ピークを持つ周波数は 1070Hz 付近であったが $p(t)$ では最大ピークを持つ周波数は 909Hz となり異なった。 $f_a = 909\text{Hz}$, $f_b = 162\text{Hz}$ とするとき、 -40dB 以上のピーク周波数は式 (3.26) によって記述できる。式 (3.26) によって予測できない、パワースペクトルの広帯域成分は $p(t)$ および $v(t)$ に見られ、 $p(t)$ の場合にはそれは決定論的なカオス振動によるものであると考えられる^{b)}。

$p(t)$, $x(t)$, $v(t)$ の 3 つのパワースペクトルにおいて、 $f_a = 161\text{Hz}$, $f_b = 1067\text{Hz}$ とするとき、式 (3.26) によって -30dB 以上のピーク周波数を記述できる。 $x(t)$ のパワースペクトルは $p(t)$ のパワースペクトルに比較して、共振のピークが強いため、広帯域成分の勢力が弱いように見える。 $v(t)$ のパワースペクトルは決定論的な広帯域成分と雑音成分が顕著である。 $v(t)$, $P(t)$ のパワースペクトルは $p(t)$ のパワースペクトルによく似ていて広帯域成分が同程度に現れる。 $P(t)$ のパワースペクトルは $p(t)$ あるいは $v(t)$ のパワースペクトルを低域ろ波器に通したものに近い。

図 3.19 (i) ~ (n) は $p(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $P(t)$ の 4 波形から (p, x, v, P) 状態空間内に描いたアトラクタの投影図である。これらは全て 500 サンプル点から成っている。また、図 3.19 (s) は 8000 点のデータから成る (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタである。その基本的な形状は、定かではないが、全体的に上に凸な傾向は見られる。

図 3.19 (r) は $x(t)$ から $h = 3$ として 3 次元相空間に再構成したアトラクタであり、8000 点のサンプル値より成る。 $v(t)$ からのサンプル値による再構成アトラクタも似た形を持つが、それらの断面は異なっている。

図 3.19 (t) に示した $m = 3$, $h = 3$, $N = 12000$ の点で表した再構成アトラクタはリミットサイクルや T^2 とは異なり、いわゆるストレンジアトラクタである。無秩序な構造を表しているが、点の集まりが密になっているところと疎になっているところがみられる。図 3.19 (t) の再構成アトラクタの形状を理解するために p_{n+6} 軸に垂直な平面を Poincaré 断面として選び、3 次元相空間内の軌道がこの平面を両方向から横切るときの交点をプロットした。その結果が 図 3.19 (u) ~ (y) の断面図である。それぞれ p_{n+6} の値が (u) 0.75, (v) 0.25, (w) -0.25 , (x) -0.75 , (y) -1.25kPa における図である。点の集まりが密になっているところと疎になっている部分が存在し、それぞれ異なる形を表している。そして、全体が折れ曲がった形を見ることができる。このことから $p(t)$ のパワースペクトルにみられる無数の振動成分の中にはノイズ成分以外の決定論的な成分が含まれていると考えられる。また、アトラクタを 4 次元相空間に再構成した。第 4 番目の軸、 p_{n+9} 軸に垂直な超平面 (3 次元空間) における断面は 図 3.19 (u) ~ (y) の断面に示された形と同様であった。従って、 $m = 3$ の埋め込み次元は、この振動状態において再構成アトラクタの形を決定するために十分な値である。図 3.19 (t) に示した再構成アトラクタの形は d_2 が 3 に近い値になっているが振動状態 $2 - X_1$ に

記述したような T^3 トーラスではない。また、パワースペクトルの -40dB 以上のピーク周波数は式 (3.26) によって記述できるが T^2 トーラスでもない。

図 3.19 (p) は $m = 7 \sim 20$, $h=3$, $N=16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。この振動状態の相関次元は $m \geq 7$ で $d_2 = 2.9$ を平均値として変動し、 m が大きくなるにつれてその振幅は大きくなった。Local Slope に Scaling Region が得られていることからパワースペクトルはノイズ以外の信号成分を含んでいる。従って、この振動状態で得られるアトラクタの形はパワースペクトルの顕著な広帯域成分に関係づけられていると考えられる。

図 3.19 (q) は $m = 7 \sim 10$, $h = 3$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 150\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。 λ の計算結果には微小な振動が見られるが、その平均値は僅かに正である。

以上の結果から、この振動状態はカオス振動であると考えられる。

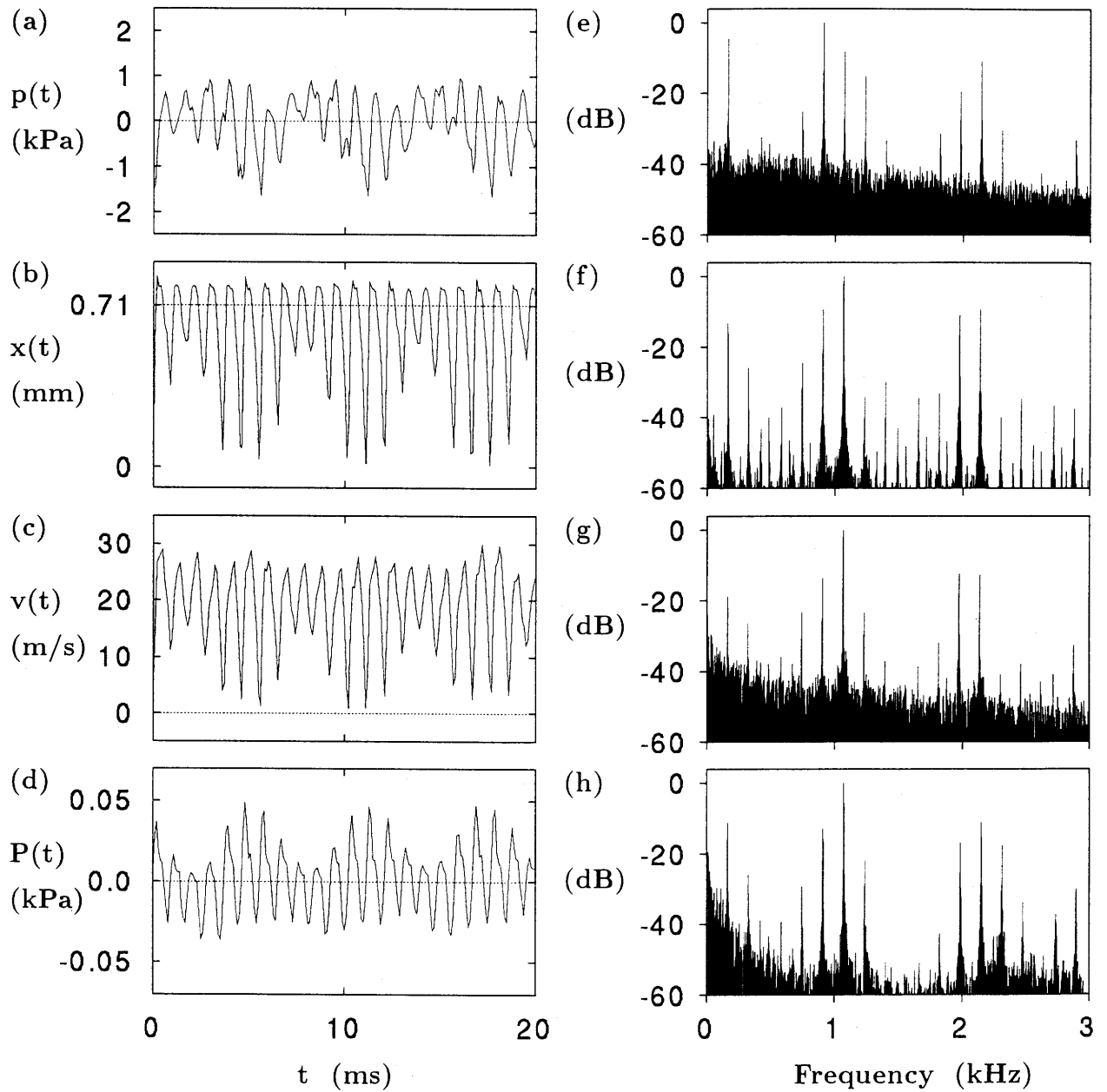


図 3.19: 振動状態 6 - X

(a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $v(t)$, (d) $P(t)$ 波形.

(e) $p(t)$, (f) $x(t)$, (g) $v(t)$, (h) $P(t)$ のパワースペクトル

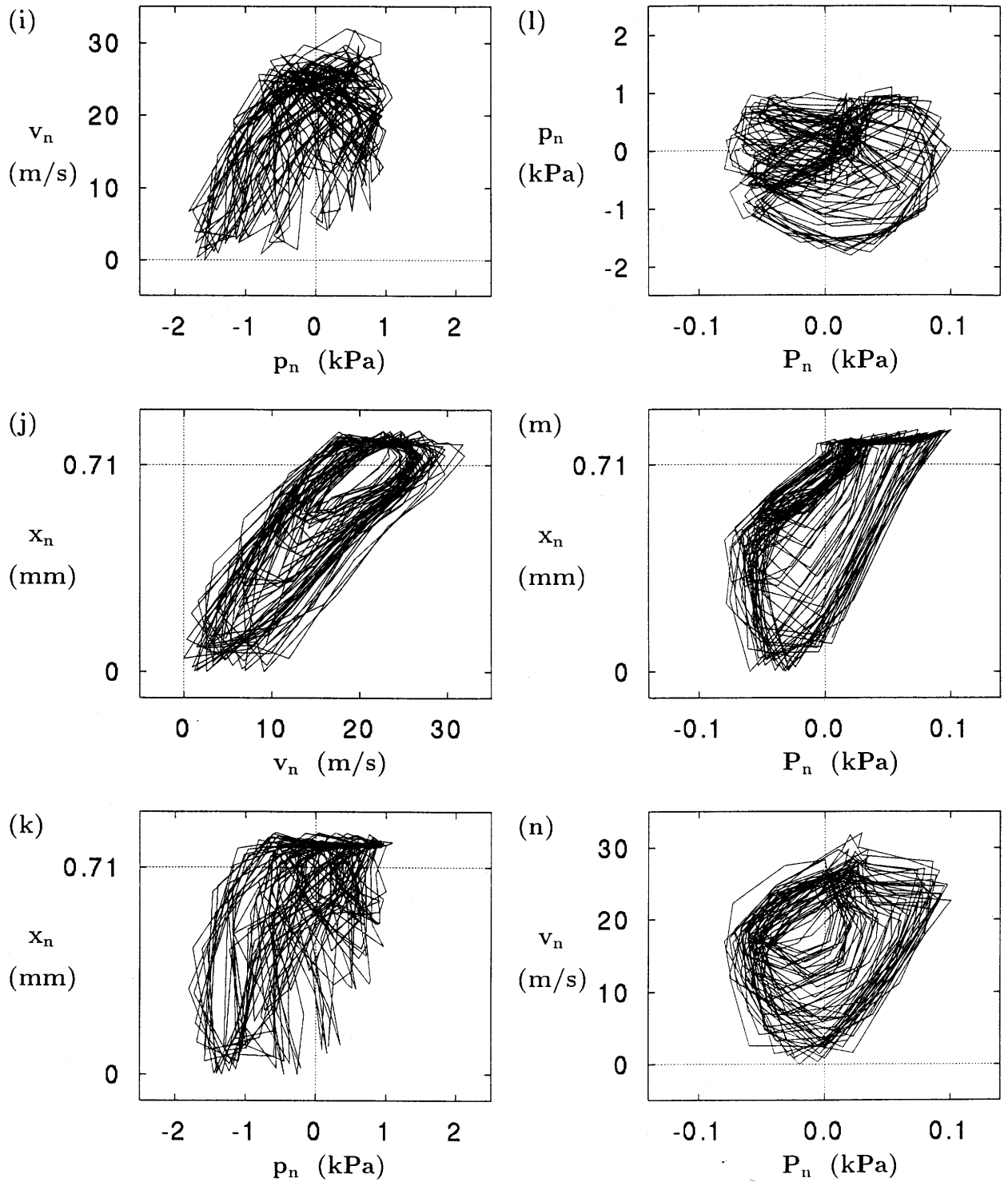


図 3.19: 振動状態 6 - X

(p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタの (i) (p, v) 面, (j) (v, x) 面, (k) (p, x) 面, (l) (P, p) 面, (m) (P, x) 面, (n) (P, v) 面への投影

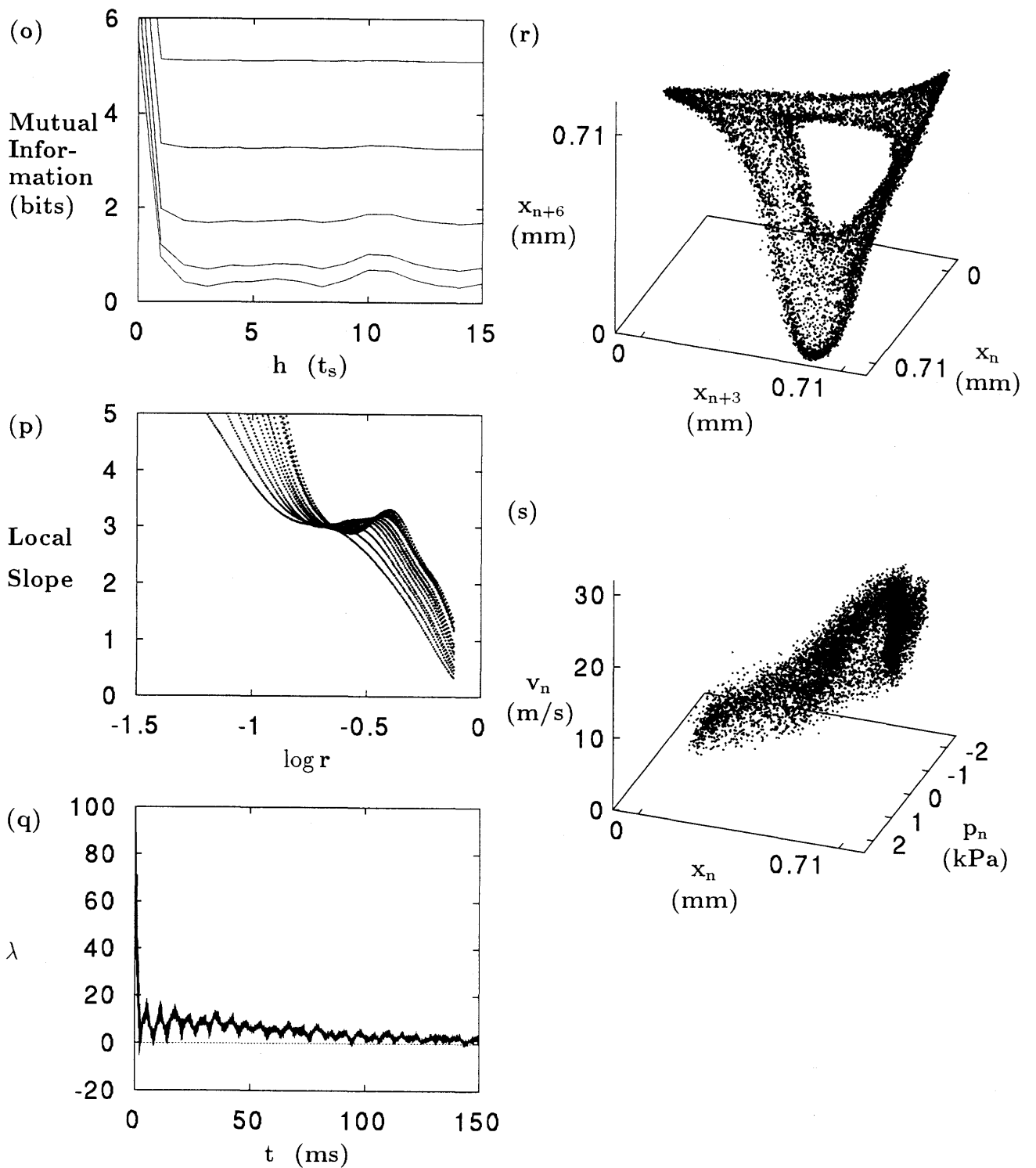
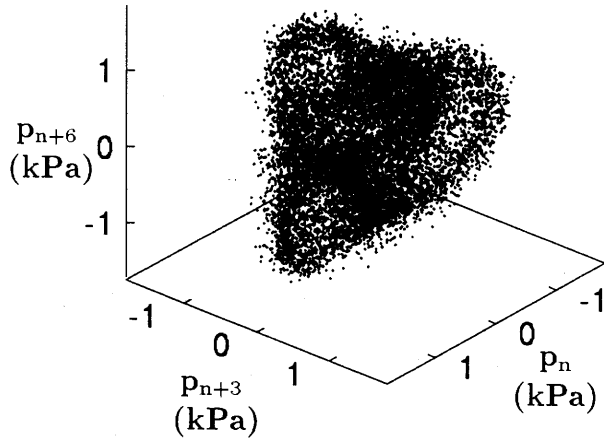
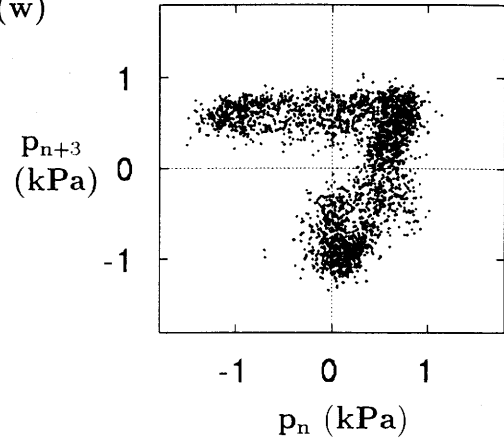


図 3.19: 振動状態 6 - X (o) Mutual Information, (p) Local Slope, (q) 最大リアプノフ指数, (r) $x(t)$ から再構成したアトラクタ, (s) (p, x, v) 状態空間におけるアトラクタ

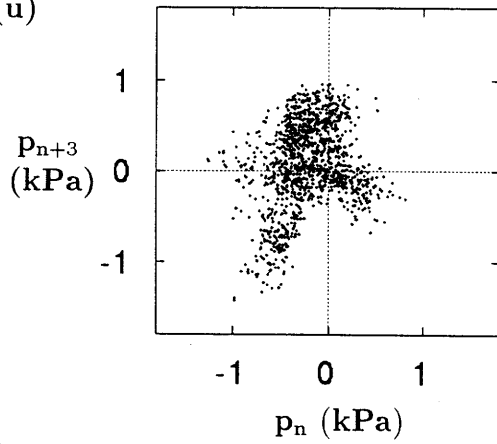
(t)



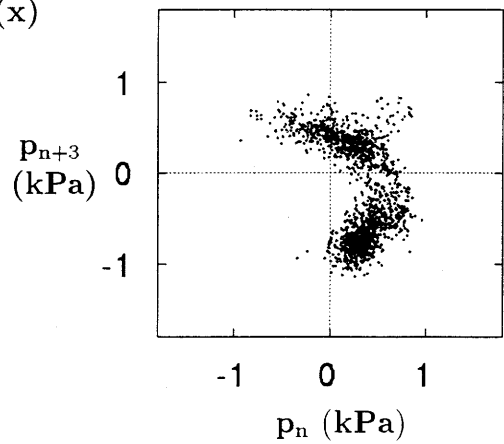
(w)



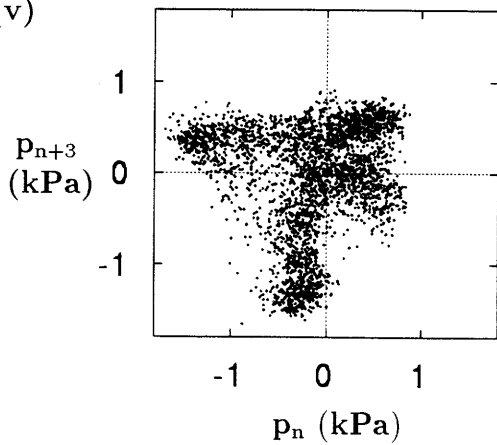
(u)



(x)



(v)



(y)

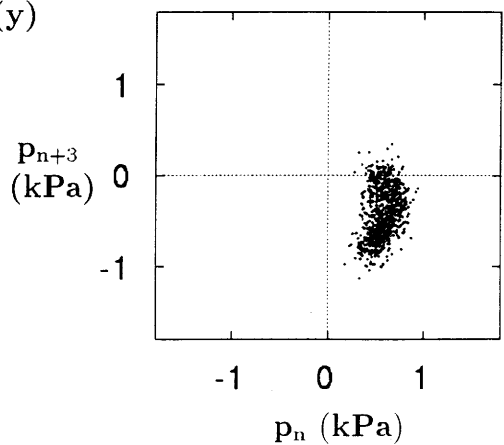


図 3.19: 振動状態 6 - $X(t) p(t)$ から 3 次元相空間に再構成したアトラクタ, 及び、その断面 (u) $p_{n+12} = 0.75\text{kPa}$, (v) $p_{n+12} = 0.25\text{kPa}$, (w) $p_{n+12} = -0.25\text{kPa}$, (x) $p_{n+12} = -0.75\text{kPa}$, (y) $p_{n+12} = -1.25\text{kPa}$.

3.4 考察

クラリネットの人工吹鳴実験から得られた典型的な周期的振動状態 (3.2 節)、非周期的振動状態 (3.3 節) に対して解析を行った。マウスピース内圧力変化 $p(t)$ 、リード開口 $x(t)$ 、吹鳴器から気柱に流れ込む空気流速 $v(t)$ 、吹鳴器内圧力変化 $P(t)$ 波形を示し、そのパワースペクトルを計算した。また、 (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ、多次元相空間における再構成アトラクタも各典型的例について示した。アトラクタの基本形状は振動状態を分類するのに重要である。再構成アトラクタは主に時系列 $p(t)$ から得た。クラリネットの人工吹鳴において、カオス振動を除いては、 $p(t)$ 波形は対称性がよく、したがって $p(t)$ 波形のみからの再構成アトラクタは理解し易い形になる。アトラクタを再構成する際には、デジタル時系列 $\{p_n\}$ と $\{p_{n+h}\}$ の Mutual Information を計算し、その計算曲線の最初の極小値から決定される最適な時間遅れを用いた。Mutual Information は注目する時刻での $\{p_n\}$ が与えられているときに平均して予測される $\{p_{n+h}\}$ の情報量を表す。Mutual Information の計算から求められた時間遅れを採用することで形の良い再構成アトラクタを得ることができた。状態空間内のアトラクタの形は、 $p(t)$ からの再構成アトラクタに比して理解し易いとは言えない。観測値 $p(t)$ 、 $x(t)$ 、 $v(t)$ から得られたアトラクタでは $x(t) = 0\text{mm}$ 、 $v(t) = 0\text{m/s}$ となる時間が長いとその部分でアトラクタの形が大きく歪んだが、 $p(t)$ のみから再構成したアトラクタでは歪みの小さいほぼ対象な形を得ることができた。それ故、振動状態を特徴づけるためには、主に $p(t)$ のパワースペクトルと $p(t)$ から再構成したアトラクタの基本形状を考慮した。実験で得られたアトラクタの基本形状は リミットサイクル、 T^2 トーラス、 T^3 トーラス、そしてそのどちらとも決定できないカオス的なアトラクタである。再構成アトラクタの相関次元 d_2 と最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の値は参考のために用いた。良く知られているように、非周期的振動状態から得られる再構成アトラクタの d_2 の計算には大きな誤差が含まれる¹⁶⁾。アトラクタの次元の正確な推定は今後の検討課題である。また、最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} を時系列から計算する方法を採用したがその結果、多くの場合で計算曲線の平均値は僅かに正となった。しかし、計算曲線は変動が大きく明瞭に λ_{\max} が一定になる t の範囲を決定することは困難であった。本論文では式 (3.21) の計算結果のみを示し、最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の値は決定しなかった。従って振動状態の分類は主に $p(t)$ のパワースペクトルと $p(t)$ から再構成したアトラクタの基本形状によって行い、相関次元 d_2 の値、最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の計算結果は参考のために用いた。

測定した波形の解析から得られる重要な結果を以下に述べる。

周期的振動状態は波形、パワースペクトル、リミットサイクルの再構成アトラクタ、そして $d_2 \doteq 1.0$ の値から容易に認識することができる。周期的振動状態の波形のパワースペクトルには基本となる周波数及びその整数倍の周波数にピークが存在する。 $p(t)$ の変化は、 p_0 の上下にほぼ対称である。 $p(t)$ と $x(t)$ 波形は全ての周期状態で極めて良く似ている。 $x(t)$ の測定は一見無駄なように見えるが、真の理解のためには $x(t)$ の測定が必要と思われる。リードがマウスピースレイに密着するとき $x(t)$ 波形は 図 3.5 (b) に示すように $x = 0$ でクリップされる。しかし、上記のマウスピースや唇に

よる制限を除けば、周期的振動状態では $x(t)$ と $p(t)$ は殆ど比例する。周期的振動状態の (p, x, v, P) 状態空間内のアトラクタ、再構成アトラクタは $d_2 \doteq 1.0$ のリミットサイクルであり容易に理解可能である。 $p(t)$ と $x(t)$ から再構成したアトラクタでは $x(t)$ が $x=0$ でクリップされるところでリミットサイクルの一部が直線になる。しかし、これらのアトラクタに本質的な違いは見られない。

非周期的振動状態では振動波形は複雑であるが互いに関連を持って変化している。 $p(t)$ の変化は、準周期的振動状態においては、 p_0 の上下にほぼ対称であるが、カオス振動状態では p_0 の上下に対称ではない。 $p(t)$ と $x(t)$ の関係は周期的振動状態のように直線的な比例関係にはない。 $p(t)$ が比較的低い範囲では、 $x(t)$ と $v(t)$ は良く似ている。吹鳴器の容積のため、 $P(t)$ はおよそ $-v(t)$ の積分に比例し、 $V\{p(t)\}$ や P_0 の値に比較して、狭い範囲内で変化する。したがって、非周期的振動の挙動の理解のためには、少なくとも、 $p(t)$ と $x(t)$ の2つの波形の観測が必要である。 $p(t)$ と $x(t)$ の挙動の差は非周期的振動において重要であると考えられる。

振動状態 $2-X_1, 6-X$ を除く非周期的振動状態において、パワースペクトルの主な部分は線状ピークから成り、アトラクタの基本形状は T^2 トーラスである。ここで T^2 トーラスはパワースペクトルに現れるピークが式 (3.26) によって記述できるような振動状態に対応するアトラクタの形状である。振動状態 $1-X, 2-X_1, 3-X_1, 3-X_2$ のパワースペクトルには弱い広帯域成分が見られる。振動状態 $3-X_3, 5-X$ のパワースペクトルにおけるピークは幅を持っている。 T^2 トーラスは式 (3.26) における f_a と f_b 成分の振幅比に依存して異なる形状を持つ。アトラクタの基本形状が T^2 トーラスであることによって特徴づけられるこれらの振動状態に対して計算された d_2 は 2.0 あるいはそれよりも僅かに大きい値になった。Local Slope 曲線の Scaling Region の幅は振動状態に依存する。各振動状態に対して得られた d_2 とその値を求めるのに用いた埋め込み次元 m 、Scaling Region の値は表 3.4 に示した。振動状態 $6-D_{3H}, 2-X_2, 3-X_3$ に対しては2つの Scaling Region が観測された。非周期的振動状態から得られた再構成アトラクタの d_2 は多くの場合において非整数である。

振動状態 $6-D_{3H}$ ではリード振動の振幅が大きく、リードがマウスピースレイに密着するとき $x(t)$ 波形は $x=0$ でクリップされる。そのときでさえ、 $p(t)$ 波形はその平均値に関して対称であり、十分になめらかである。従って、 $p(t)$ から再構成したアトラクタは対称であり、簡単に理解し易い形状を持つ。また、同振動状態において、 $p(t)$ と $x(t)$ から、また、 $x(t)$ だけから再構成したアトラクタも比較のために示した。これらのアトラクタは $p(t)$ のみから再構成したアトラクタとかなり異なった形をしている。その断面に閉じた曲線が得られることから、再構成アトラクタは T^2 トーラスであることがわかるが $p(t)$ のみから再構成したアトラクタと比較して理解し易いとはいえない。

振動状態 $2-X_2, 3-X_3$ において $p(t)$ と $x(t)$ から再構成したアトラクタは幾らか変形された T^2 トーラスである。しかし、 $p(t)$ のみから再構成したトーラスと比較しても本質的な違いは無いように思われる。それ以外の非周期的振動状態では $p(t)$ と $x(t)$ から再構成したアトラクタと $p(t)$ のみから再構成したアトラクタは良く似た形状になった。

本来、クラリネットの振る舞いを記述するためには無限次元相空間が考慮されるべきである。人工吹鳴実験のデータから得られた再構成アトラクタの d_2 の最高値は振動

状態 $2 - X_1$ から計算された 3.2 である。従って、本論文の実験結果を記述するには最高 4 次元の空間で十分であった。振動状態 $2 - X_1$ から得られた 4 次元相空間における再構成アトラクタの 3 次元断面には T^3 トーラスの断面に近い形が示された。

カオス振動のアトラクタの理解は容易ではない。振動状態 $6 - X$ から得られた 3 次元相空間におけるアトラクタの形状はアトラクタの形状は T^2 トーラスでも T^3 トーラスでもない。アトラクタの奇妙な形はパワースペクトルにおける明らかに強い広帯域成分に対応していると考えられる。さらに、このアトラクタに対して計算された d_2 は 2.9 - 3.0 であった。 d_2 の値はそれほど信用できないが、上記の事実は、この振動がカオス的であることを示唆している。

非周期的振動状態における $p(t)$ と $x(t)$ 波形の差異は重要な意味を含んでいるように思われる。 $p(t)$ においては気柱の共振が優勢であり、 $x(t)$ においてはリードの共振が優勢であると考えられる。我々が実験に用いたバリ社のプラスチックリードにおいては、優勢な共振が 800Hz, 2000Hz 付近に観測された³⁸⁾。 $x(t)$ のパワースペクトルには、大抵の場合、800Hz, 2000Hz あるいはその間に優勢なピークが観測された。唇の圧力下でマウスピースレイ上のリード振動に関してはさらなる実験が必要であろう。

$p(t)$ に低域フィルタがかかるのが明瞭になるのは、準周期振動やカオス振動のときのように、低周波数の振動モードと高周波数の振動モードが混在する振動状態の場合である。 $p(t)$ の測定はリードの近くではあるが、少しく離れた場所にある。これが $p(t)$ には低域フィルタがかかったように見える原因かも知れない。

リードの性質に関する知識の欠如に加えて人工の唇の性質の経時変化の問題がある。ある lip adjustment の下で得た振動状態遷移の列は 1 月後には容易に得られたが、6 月後には、 l, x_0 を慎重に調節したにも拘らず、同じ遷移の列を得られなかった。

Schumacher⁷⁾ は multiphonic の指使いによって得られる振動状態の $p(t)$ 波形とそのパワースペクトルを示している。この multiphonic 振動に対して得られるパワースペクトルのピーク周波数は本論文で示した非周期的振動状態におけるいくつかの場合に得られる値に等しい。Keefe¹⁵⁾ は multiphonic の指使いを用いてクラリネットを演奏者により吹鳴し放射される multiphonic 音から再構成アトラクタ及びそのアトラクタの非整数相関次元の値を示した。しかしながら、これらは特別な指使いによって放射された音に対しての報告である。本論文で示した非周期的振動状態は音孔を全て閉じた状態で吹鳴されたクラリネットにおいて得られた。同じクラリネットで機械ではなく演奏者によっても、音孔を全て閉じた状態でこれらの振動状態のいくつかを得られることを確認した。さらに、音孔を全て閉じた状態で演奏者は通常用いない非音学的な音を数多く吹鳴することができた (第 5 章参照)。

空気流速 $v(t)$ はマウスピース内圧力 $p(t)$ があまり高くないときは、およそリード開口 $x(t)$ に比例する。しかしながら、 $p(t)$ が増して吹鳴器内圧力 $P_0 + P(t)$ とマウスピース内圧力 $p_0 + p(t)$ の差が小さくなるにつれ、 $x(t)$ が増しても $v(t)$ は減少する。実験から得られた $v - p$ の関係には周期的振動状態、非周期的振動状態に関わらず何れの場合にも基本的には 図 5.3 に示した上に凸な関数の形が現れた。 (v, p) , (v, x) 状態空間における軌道にはヒステリシスが存在する。これは空気質量の慣性によるものであると考えられる。

$D(t) = \{p_0 + p(t)\} - \{P_0 + P(t)\}$ は、我々が観測した範囲では常に負であったから、 $v(t)$ は常に正であり、楽器気柱から吹鳴器に向かう空気の逆流の存在は認められなかった。したがって流れの方向を区別できない熱線計流速でも、気柱に流れ込む空気の流れの速度測定は可能であったことが知られた。 $D(t)$ の測定には $p(t)$, $P(t)$, P_0 は同時に測定し、後に p_0 の測定を行った。 p_0 の測定値は数種の振動状態において $0.3 \sim 0.35\text{kPa}$ にあった。また、lip adjustment No. 6 で励起された振動状態について測定した空気流速 $v(t)$ の最大値は 41m/s 、最小値は 30m/s であった。1 周期の半分の間リード開口が 0.71mm であると仮定するとき、内径 15mm の円筒管の中の流れの風速は約 1m/s となる。従って、オーダーとして $0.3 \sim 0.35\text{kPa}$ 程度の p_0 の値は妥当と思われる。

lip adjustment No. 1 ~ 5 において得られた 27 の振動状態について、 $V\{p(t)\}/2$ と P_0 の値を比較した。大部分の場合には、 P_0 は $V\{p(t)\}/2$ よりもはるかに大きいので、空気流は吹鳴器から楽器気柱に向かっていることが確かめられた。僅かの例において、振動状態 6 - D_3 のように、 P_0 と $V\{p(t)\}/2$ の差が小さくなり、空気流の方向の決定が不可能であった。lip adjustment No. 1 ~ 5 においては、 $P(t)$ の測定を行わなかったため正確な結論は得られなかったが、 $V\{p(t)\}/2$ が P_0 よりも明瞭に大きくなることはなかった。

リード変位は低周波数領域では、マウスピース内圧力と口の中の圧力の差 $D(t)$ に完全に比例する。 p_0 および $V\{P(t)\}$ は小さいので、 $D(t)$ は $(p(t) - P_0)$ にほぼ等しく、さらに P_0 は定数なので、 $x(t)$ は $p(t)$ に比例して変化すると考えられる。これは周期的振動の場合には成り立つが、非周期的振動の場合には成り立たなかった。

リードの運動自体も複雑である。数種の振動状態において、リード変位はマウスピースレイによって制限され (例えば 図 3.5 (b))、他の幾つかの振動状態においては、 $x(t)$ は x_0 よりも大となり、その時唇によって制限された (例えば 図 3.19 (b))。多くの場合リード変位はマウスピースレイと唇の両方によって制限される。何の制限も受けないリード変位はむしろ希であるが、そのような例を 図 3.16 (b) に示した。この例は振動状態 3 - X_1 から得られた。

我々の観測した範囲ではリード変位の制限に関する規則は見いだし得なかった。それは振動状態の周期性非周期性によるものではなく、むしろ吹鳴圧力と lip adjustment によるものと思われる。リード変位が制限を受けている振動状態においてパラメータ l , x_0 , P_0 を適当に調節することによって制限を受けなくすることもできた。高周波数の振動状態の場合にはリード静止位置を越えて振れる場合もあるし、マウスピースレイによって制限され、極端に振れ幅の小さいものもあった。他のパラメータ、例えばクラリネットの軸と吹鳴器のなす角の導入が必要かもしれない。この角は、同じ振動状態遷移の列を得るためには常に注意して調節する必要があった。

これらの実験に使用した人工の口の中の圧力は、実験中ほぼ一定に保たれていたためクラリネット系の振動には殆ど関与しないと考えられる。 $P(t)$ の変化は小さいが、それはほぼ $-v(t)$ の積分 (時間遅れを伴う) に比例する。 $V\{P(t)\}$ が小さいので $P_0 + P(t)$ は殆ど定数 P_0 に等しい。したがって実験に使用した吹鳴器はクラリネットに励起される振動には殆ど関与しない。しかし真の演奏においては、演奏家と楽器から成る系を考える必要がある¹⁰⁾。

第 4 章

計算機シミュレーション

4.1 Schumacher 方程式

Schumacher 方程式は以下の式 (4.1) - 式 (4.5) から成る非線形連立微積分方程式である。式に含まれる変数とパラメータを図 4.1、表 4.1 に示す。

式 (4.1) はリードの運動方程式であり、リード開口 $x(t)$ に関する 2 階微分方程式で与えられている。 $(x - x_0)$ はリード平衡位置からの変位をあらわす。右辺第 2 項はベルヌーイ力を表すが、この項の有無によって結果に生ずる差はシングルリードの場合極めて小さいので、Schumacher 自身の論文において解の計算を行う際にはこの項は無視されている。

$$\ddot{x} + g_r \dot{x} + \omega_0^2(x - x_0) = \frac{p - P_0}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{w} \frac{U^2}{x(\tan 30^\circ) \mu S_r} \quad (4.1)$$

式 (4.2) はスリットを通過して気柱に流入する空気の運動方程式であり、口から楽器気柱に流入する空気の体積流量 $U_f(t)$ を用いて記述されている。 M_e はスリットを通過する空気の等価質量であり、式 (4.3) で与えられる。

$$M_e \dot{U}_f = P_0 - p - \frac{|U_f|^{3/2} \cdot \text{sgn}(U_f)}{A^{3/2} x^2} \quad (4.2)$$

$$M_e = \frac{\rho}{2\pi w} \sqrt{\frac{w}{x}} \left\{ 1 + 2 \ln \left(\frac{2w}{x} \right) \right\} \quad (4.3)$$

気柱に流入する空気の全体積流量 $U(t)$ は $U_f(t)$ とリードが振動することにより生ずる流れの和であり、式 (4.4) で与えられる。ここでは、リードが閉じる方向に動く ($\dot{x} < 0$) とき空気が楽器の中に押し込まれると考えている。

$$U = U_f - S_r \dot{x} \quad (4.4)$$

マウスピース内音圧変化 $p(t)$ は $U(t)$ と Z_0 の積により生じる圧力と反射関数 $r(t)$ を用いて計算される反射波の圧力との和であり、式 (4.5) で与えられている。

$$p = Z_0 U + \int_0^\infty r(t') \cdot \{ Z_0 U(t - t') + p(t - t') \} dt' \quad (4.5)$$

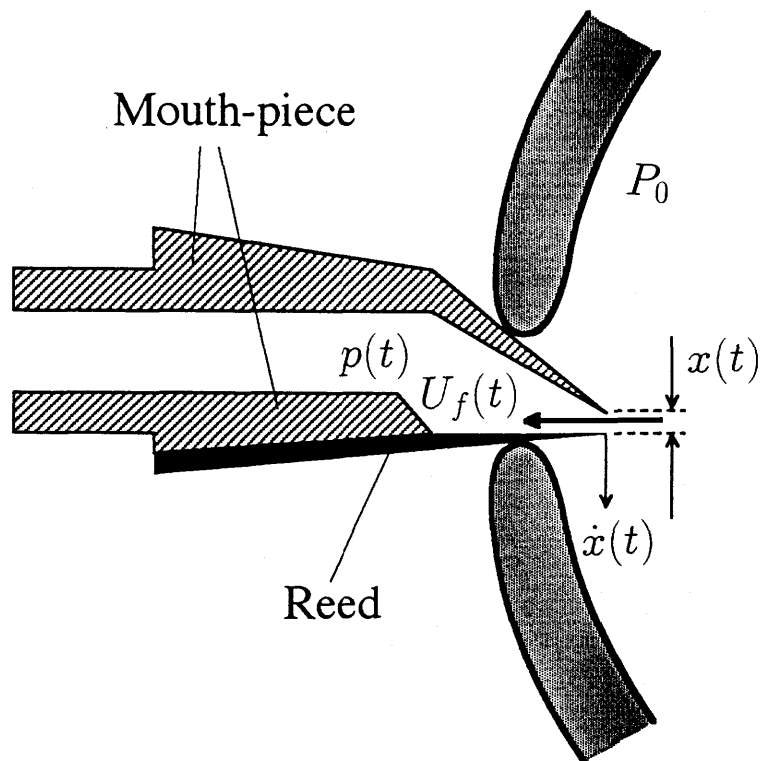


図 4.1: Schumacher 方程式中に現れる変数

- $p(t)$ マウスピース内圧力,
- $x(t)$ リード開口 (静止時: x_0),
- $\dot{x}(t)$ $x(t)$ の一階微分,
- $U_f(t)$ 口から楽器気柱に流入する空気の体積流量,
- P_0 吹鳴圧力

記号	物理量	値
μ	リードの質量/面積	0.0231 kg/m ²
S_r	リードの実効面積	1.46×10 ⁻⁴ m ²
$\omega_0/2\pi$	リードの共振周波数	3700 Hz
g_r	リードの減衰定数	3 000 s ⁻¹
x_0	静止時リード開口	0.9 mm
w	スリット幅	14.0 mm
ρ	空気密度	1.205 kg/m ³
A	流れに関する定数	0.0797 mks units
Z_{00}	管の直流抵抗	0.01 Z_0

表 4.1: Schumacher 方程式中に現れるパラメータ

4.2 計算方法

4.2.1 差分方程式への置き換え

Z_0, P_0 の値を変化させて式 (4.1) - 式 (4.5) の解を計算する。パラメータは表 4.1 にある値をそのまま用いた。式 (4.1) の右辺第 2 項のベルヌーイ力は簡単のため無視した。以下に用いる数値計算法に関する用語は文献³⁴⁾による。式 (4.2), 式 (4.3) には非線形項が含まれるので陽解法よりも解の発散する可能性が少ない陰解法を用いる方が計算誤差が少ないと考えられる。本論文では式 (4.1), 式 (4.2), 式 (4.4) の微分方程式を以下の 2 次の陰解法である台形法を使用した差分方程式に置き換えて計算した。

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{t_s}{2} \cdot \{ \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) \} \quad (4.6)$$

t_s をサンプリング周期とする。 \mathbf{y}_i は方程式中に現れる変数の $t_i = it_s$ における値を成分とするベクトル、 $\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$ は t_i における各変数の導関数を成分とするベクトルを表す。 q 次の数値解法では丸め誤差を無視するとき、その近似値のテイラー級数は真の解のテイラー展開の q 次の項まで一致する³⁴⁾。台形法によればサンプリング周期 t_s を 0.01ms 以下とすると t_s による解の変化はほとんど認められなかった。それに反して文献⁷⁾の付録に示されている計算アルゴリズム (後退型オイラー法)

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + t_s \cdot \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) \quad (4.7)$$

ではさらに t_s を小さくしても解には誤差が存在した。後退型オイラー法はこれから求めようとしている解が式の中に含まれているので陰解法であり 1 次の公式である。

本論文では台形法を用い $t_s = 0.01\text{ms}$ として計算を行った。初期条件は $t < 0$ で

$$\begin{cases} p(t) &= 0 \text{ kPa} \\ x(t) &= x_0 \text{ mm} \\ U_f(t) &= 0 \text{ m}^3/\text{s} \end{cases} \quad (4.8)$$

とした。また、リード変位はマウスピースにより制約を受けるので $x(t) < 0\text{mm}$ となることはない。計算上 $x(t) < 0\text{mm}$ の状態になるときは $x(t) = 0\text{mm}$, $U_f(t) = 0\text{m}^3/\text{s}$ とした。

4.2.2 反射関数 $r(t)$

式 (4.5) に用いられる $r(t)$ には解の性質を把握しやすくし、しかも計算時間を節約するために McIntyre ら⁸⁾ と同様に簡単な Gauss 関数

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ d \exp\{-e(t - t_R)^2\} & (t \geq 0) \end{cases} \quad (4.9)$$

を用いた。ここで d, e はそれぞれ Gauss 関数による反射波の深さ、半値幅により決まる定数である。 t_R は反射波の最深部が現れるまでの時間を表し round trip time である。本報告では半値幅が 0.2ms となるように e を決定した。この数値は内径 14.5mm の円筒管の $r(t)$ のそれに近い。また、 d は以下の積分

$$\int_0^\infty r(t) dt = \frac{Z_{00} - Z_0}{Z_{00} + Z_0} \simeq -0.98 \quad (4.10)$$

を満たすように決定した。表 4.1 に示したように $Z_{00} = 00.1Z_0$ としたので式 (4.10) の積分値は約 -0.98 となる。三つの t_R の値 $t_R = 0.5, 1.0, 3.4\text{ms}$ について計算を行った。実験^{b, e)} で用いた B^b 管のクラリネットの最低音は D₃ 音 (146.83 Hz) である。最低音周波数は 2 倍の t_R の逆数にほぼ等しいので $t_R = 0.5 \times 1/146.83 \simeq 3.4\text{ms}$ となる。 $t_R = 0.5, 1.0\text{ms}$ はマウスピース部分や気柱の太さの不連続箇所が生じる反射波の round trip time に近い値を想定している。 t_R を 0.5ms 以下にとると $r(t)$ は $t = 0$ で $r(t) \neq 0$ となり無視しえない不連続が生ずる。式 (4.9) で $t_R = 0.5, 1.0, 3.4\text{ms}$ としたときの $r(t)$ を 図 4.2 (a), (b), (c) に示す。図 4.2 (d), (e), (f) は $t_R = 0.5, 3.4\text{ms}$ の 2 つの反射波を考えた場合の $r(t)$ である。この場合にも $r(t)$ が式 (4.10) を満たすようにそれぞれの反射波の深さを決定した。 $t_R = 0.5$ と 3.4ms の反射波の深さの比は (d) $1 : 1$, (e) $1 : 2$, (d) $1 : 10$ である。

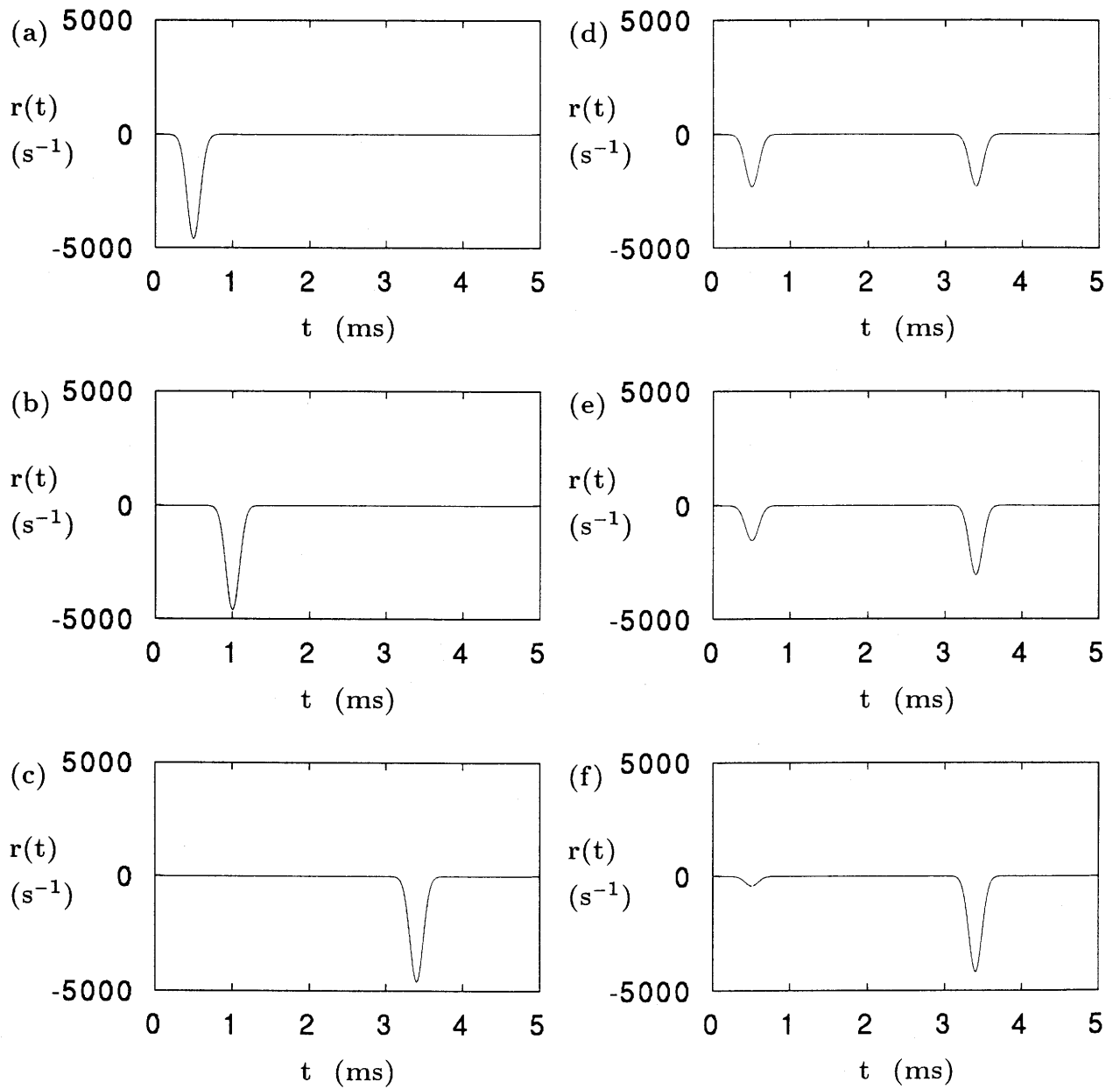


図 4.2: Gauss 関数を用いた反射関数 $r(t)$ (a) $t_R = 0.5$ ms, (b) $t_R = 1.0$ ms, (c) $t_R = 3.4$ ms, (d) ~ (f) $t_R = 0.5, 3.4$ ms の 2 つの反射波 ; 振幅比 (d) 1 : 1, (e) 1 : 2, (f) 1 : 10

4.2.3 特性インピーダンス Z_0

Z_0 は管の断面積を S_t として

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S_t} \quad (4.11)$$

から決定される。ここで ρ は空気密度、 c は音速である。文献⁷⁾ で用いられた $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ は内径 15.1mm の円柱管体の断面積から式 (4.11) により求められる値に等しい。しかし、実際の楽器ではマウスピース部分は管体部分よりも断面積が小さくなっている。さらにマウスピース部分の内径は不連続でありリード先端に向かって細くなっている。本論文では得られる振動解がどのように Z_0 の値に依存するかを見るために、 Z_0 の値として $Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の三つの値を用いた。リード開口の面積はリードの幅を 14mm とするとリード静止時で、 $0.9 \times 14 = 12.6 \text{mm}^2$ であるから、この値から計算すると Z_0 の値は $7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ をはるかに越える。5.00, $7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の値は $2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の約 2 倍、約 3 倍という意味で適宜決めた。

4.2.4 吹鳴圧力 P_0

P_0 は時間の関数として以下の二通りの方法で変化させる。

(1) 第一の方法では吹鳴圧力を 図 4.3 に示すように時刻 $t < 0$ における 0 kPa から、 $t = 0$ でステップ関数状に、着目する値 P_0 まで変化させる。この着目する P_0 の値は、零から始め、リードが全閉となり振動が励起される上限の値まで離散的に変化させる。図 4.3 中の T_0 は、振動の過渡状態が減衰し定常な振動を観測するために吹鳴を持続させる時間を表す。また、 P_l, P_u は振動解が得られる P_0 の下限、上限を表す。 P_0 が P_l よりも低い値のときリードは振動しない。 P_u よりも高い値のときにはリードが完全に閉じて振動が停止する。振動解は $P_l \leq P_0 \leq P_u$ の範囲で得られる。

(2) 第二の方法では $P_0(t)$ を 図 4.4 に示すように $t = 0$ で $P_0(t) = 0$ kPa から始めて一定の吹鳴時間 T_0 経過する毎に一定量 ΔP_0 ずつ階段状に次第にリードが全閉になるまで上昇させ、ついでその状態から同様に階段状に次第に下降させる。この方法を以後、 P_0 の階段状変化と呼ぶ。(a) が P_0 を上昇させる場合、(b) が P_0 を下降させる場合である。 P_0 をこのように変化させることにより振動状態遷移のヒステリシスを調べることができる。Schumacher の原論文⁷⁾ にはこのような場合についての記述は含まれていない。 P_s, P_c はそれぞれ吹鳴圧力を上昇させるときに振動解が得られる P_0 の下限、上限、 P_{th}, P_r は下降させるときに振動解が得られる P_0 の下限、上限を表す。はじめに (a) に示すように時刻 $t = 0$ で $P_0(t) = 0$ kPa から吹鳴時間 T_0 毎に ΔP_0 ずつ上昇させる。 P_0 が十分に低い間、リードは振動しないが P_s に達すると振動が励起される。さらに P_0 を上昇させ P_c を越えるとリードがマウスピースに密着して振動が停止する。 P_c より P_0 を上昇させても振動解は得られない。この状態になった後は (b) に示すように P_0 を P_c から吹鳴時間 T_0 毎に ΔP_0 ずつ下降させる。 P_0 を下降させていってもしばらくはリードがマウスピースに密着している状態が続き振動解は得られない。 P_r に達すると再び振動解が得られる。さらに P_0 を下降させ P_{th} よりも小さな

値になるとリード振動は停止する。 P_{th} より P_0 を下降させても振動解は得られない。従って P_0 の上昇過程に振動解が得られる範囲は $P_s \leq P_0 \leq P_c$, 下降過程に振動解が得られる範囲は $P_{th} \leq P_0 \leq P_r$ である。

P_0 を変化させる方法をステップ関数状にしても階段状にしても式 (4.9) 中の t_R を長くすると振動解が定常状態に落ちつくのに要する時間が長くなる。本論文では吹鳴時間 T_0 を t_R によって変化させて計算を行い、振動解の過渡状態を避けるために T_0 を以下のように選択した。 $t_R = 0.5\text{ms}$ のときには $T_0 = 1500\text{ms}$, $t_R = 1.0\text{ms}$ のときには $T_0 = 3000\text{ms}$, $t_R = 3.4\text{ms}$ のときには $T_0 = 5000\text{ms}$ とした。場合によってはこれらの T_0 よりも大きい値を用いた。また、図 4.4 で P_0 を変化させる量 ΔP_0 は階段関数的ではあるが P_0 の変化が急激にならないように小さくとった。本論文に示した例では $\Delta P_0 = 0.1 \text{ kPa}$ とした。

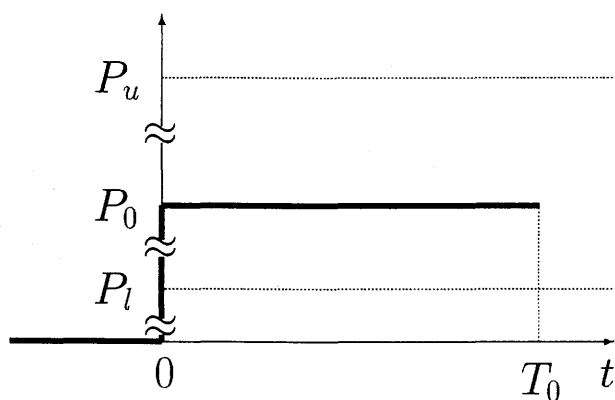


図 4.3: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させる方法

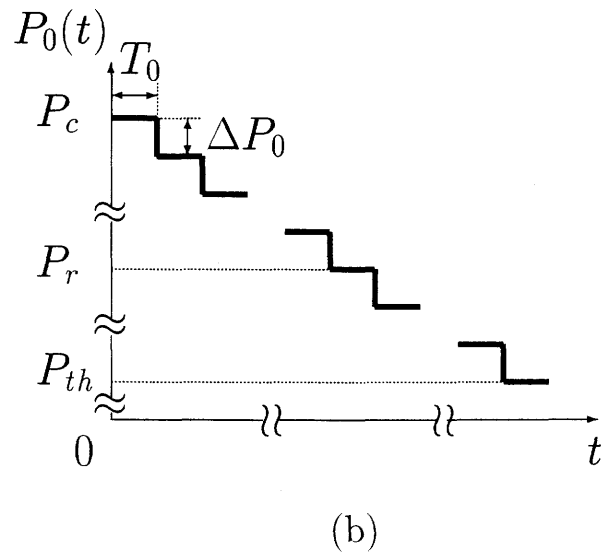
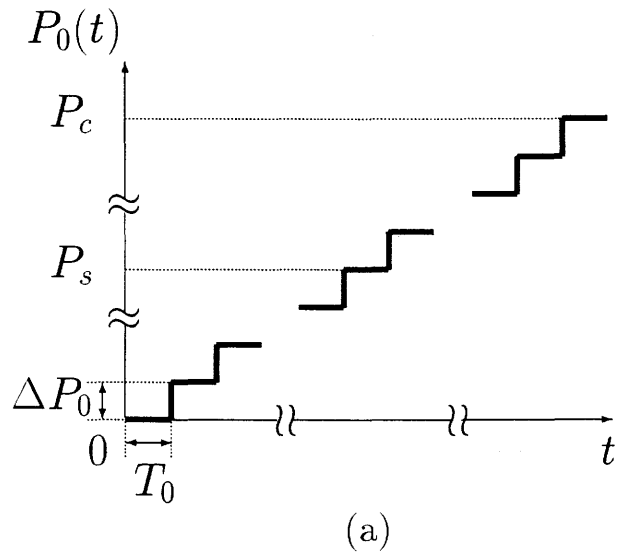


図 4.4: 吹鳴圧力を階段状に変化させる方法
 (a) P_0 を上昇させる場合, (b) P_0 を下降させる場合

4.2.5 分岐図を得る手順

$0 \leq t \leq T_0$ ms の間で $t_s = 0.01$ ms 毎に式 (4.1) - 式 (4.5) を計算した。初期の過渡状態が過ぎた後で得られる定常状態の振動解を調べるために、 $T_0 - 500 \leq t \leq T_0$ ms に計算された時系列から波形のサンプル値

$$\left. \begin{aligned} \{p_n\} &\equiv \{p(nt_s)\} \\ \{U_{fn}\} &\equiv \{U_f(nt_s)\} \\ \{x_n\} &\equiv \{x(nt_s)\} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (4.12)$$

を求めた。ここで $N = 50001$ である。

横軸に P_0 をとり縦軸に式 (4.12) で得られた $x(t)$ 波形データの極大値 x_m

$$\{x_m\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (4.13)$$

をとって分岐図を描かせた。ここで M は極大値の個数である。 x_m は、 $x(t)$ の時間に関する一回微分を $\dot{x}(t)$ として2次元位相空間 (x, \dot{x}) で考えると $\dot{x} > 0$ から $\dot{x} < 0$ の方向に $\dot{x} = 0$ を横切るときの x の値を示している。 $p(t)$, $U_f(t)$ からも同様な分岐図を得ることができる。これらの分岐図から P_0 の変化による振動状態の変化を簡単に見ることができる。

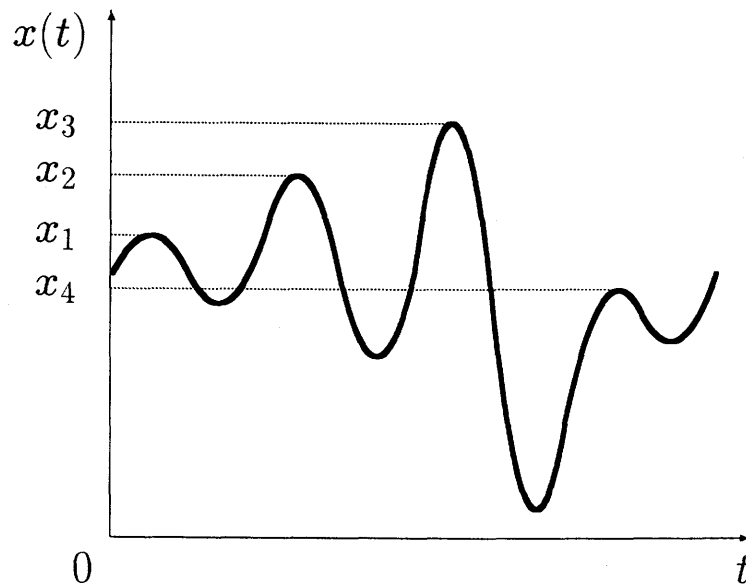


図 4.5: $x(t)$ 波形の極大値 x_m

また、各分岐図に対してプロットされる点分布のエントロピーを計算し、励起される振動状態の複雑さを定量的に評価した。本論文で計算したエントロピーは相対的な量である。

計算法を以下に述べる。Schumacher 方程式の計算から得られた分岐図において x_m の値は全て $-0.9 \leq x_m \leq 0.4\text{mm}$ に存在する。従って、この区間を 1000 個の小区間に分割し、全区間にプロットされた点数に対する i 番目の小区間 s_i にプロットされた点数の比 $P(s_i)$ ($1 \leq i \leq 1000$) を求める。そのとき系のエントロピーは

$$S = - \sum_{i=1}^{1000} P(s_i) [\log_{10} P(s_i)] \quad (4.14)$$

として求められる。この量は、系の不規則性の定量的な目安あるいは系の状態を指定するのに必要な情報量と解釈することができる。もしどの小区間にも等しく点がプロットされ $s_i = 1/1000$ ならば、エントロピーは $S = \log_{10} 1000 = 3$ になる。これは S のとり得る最大値である。逆に、ある特定の小区間に確実にあることが知られているならば、そのエントロピーは最小値 $S = 0$ である。周期的振動状態では x_m は比較的小数の小区間にプロットされるので、エントロピーは低い。しかし、非周期的振動状態では x_m は多数の小区間にプロットされ、エントロピーは高くなる。従って、分岐図の点分布のエントロピーの値を計算することにより振動状態の周期性、非周期性の度合いをある程度は調べることができる。

本論文では、リード開口の極大値 x_m による分岐図とその点分布のエントロピーを用いて吹鳴圧力 P_0 あるいは特性インピーダンス Z_0 によって励起される振動状態が変化する様子を調べた。

4.3 計算結果

クラリネット気柱の反射関数は負の Gauss 関数で近似し、その最小値は $t_R = 0.5, 1.0, 3.4\text{ms}$ に現れると想定した。実験^{b, e)} で用いたクラリネットの最低音から t_R を逆算すると $t_R \simeq 3.4\text{ms}$ である。またクラリネットの特性インピーダンス Z_0 は $Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の三通りの値をとりうるものとした。文献⁷⁾ では $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ が用いられている。

4.3.1 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答

吹鳴圧力は $t < 0$ では 0kPa に保たれ、リードは静止の状態にある。 $t = 0$ で吹鳴圧力をステップ関数状に P_0 まで増加させるとき、クラリネットにはどのような振動が励起されるかを計算した。 $t = 0$ における 0 から P_0 までのステップ関数状の変化量は 0.00kPa から始めて 0.05kPa 刻みで、リード振動が励起される上限の値 P_u まで増加させた。

三通りの t_R の値 ($t_R = 0.5, 1.0, 3.4\text{ms}$) と三通りの Z_0 の値 ($Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$) の何れの組み合わせに対しても、 $P_l \leq P_0 \leq P_u$ なる範囲で振動解が得られた。表 4.2 に吹鳴圧力をステップ関数状に変化させた場合に振動解が得られる P_0 の範囲を示す。複雑な振動は P_0 が比較的低い範囲で発生した。以下に、 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の場合の例、 $t_R = 3.4\text{ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の場合の例を示す。その他の、 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の場合、さらに $t_R = 3.4\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の場合にも、 P_0 が比較的低い範囲で複雑な振動や倍周期分岐が見られた。

t_r (ms)	Z_0 ($\times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$)		
	2.31	5.00	7.50
0.5	$4.25 \leq P_0 \leq 12.30\text{kPa}$	$3.95 \leq P_0 \leq 14.90\text{kPa}$	$3.90 \leq P_0 \leq 17.50\text{kPa}$
1.0	$3.95 \leq P_0 \leq 12.60\text{kPa}$	$3.90 \leq P_0 \leq 15.15\text{kPa}$	$3.85 \leq P_0 \leq 17.85\text{kPa}$
3.4	$3.80 \leq P_0 \leq 12.65\text{kPa}$	$3.85 \leq P_0 \leq 15.15\text{kPa}$	$3.85 \leq P_0 \leq 17.85\text{kPa}$

表 4.2: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させた場合に振動解が得られる範囲

$$(P_l \leq P_0 \leq P_u)$$

$$t_R = 0.5\text{ms}, Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$$

図 4.6 は $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $T_0 = 1500\text{ms}$ として P_0 を 図 4.3 のようにステップ関数状に変化させたときの結果である。(a) は分岐図、(b) はエントロピーである。図 4.6 の横軸状のプロットの間隔は 0.05kPa である。図 4.6 (a) の分岐図にプロットされる点の縦座標は $x(t)$ 波形の極大値をあらわしている。詳細に言えば、極大値には僅かなゆらぎが見られ 図 4.6 (a) にプロットされた点は縦方向の微少な範囲内に分布する点の集合である。 $x_m = 0.9\text{mm}$ に引いた線はリードが静止しているときの開口を示している。 $P_l = 4.25$, $P_u = 12.30\text{kPa}$ である。

図 4.7 は 図 4.6 の $P_0 = 8.0\text{kPa}$ で得られる振動解である。(a) ~ (c) は $p(t)$, $x(t)$, $U_f(t)$ 波形である。波形は 20ms 分を示した。(d) ~ (f) は $p(t)$, $x(t)$, $U_f(t)$ のパワースペクトルである。パワースペクトルは $N = 32768$ のサンプル値に Hamming 窓を施した離散値から FFT の計算によって得られた。本論文で示されるパワースペクトルの分解能は全て $100 \text{kHz}/32768 \simeq 3.05\text{Hz}$ である。図 4.7 (d) ~ (f) に示したパワースペクトルの最大ピーク周波数は 894Hz である。

図 4.7(g) は (p, U_f) 状態空間、(h) は (p, x) 状態空間における軌道である。状態空間における軌道は $N = 10001$ のサンプル値から得られた。得られた振動解は周期的であるので軌道はリミットサイクルになる。図 4.6 の $4.25 \leq P_0 \leq 12.30$ で得られる振動解は全て 図 4.7 に示した振動解と同様な周期振動解である。

$$t_R = 0.5\text{ms}, Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$$

$Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ として前と同様に横軸に P_0 をとって描いた分岐図が 図 4.8 であり $P_l = 3.95$, $P_u = 14.90\text{kPa}$ である。 $3.95 \leq P_0 \leq 4.70\text{kPa}$ では周期振動解が得られるが $P_0 = 4.75\text{kPa}$ で不安定化し、 $4.75 \leq P_0 \leq 5.45\text{kPa}$ では二倍周期の振動解が安定化する。すなわち周期が二倍になり倍周期分岐が起きている。 $5.50 \leq P_0 \leq 14.90\text{kPa}$ では再び周期振動解が得られる。この例では、 P_0 の一定範囲で二倍の周期振動解が得られるがそれ以上の倍周期分岐は起きている。すなわち、不完全倍周期カスケードが得られる。

$$t_R = 0.5\text{ms}, Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$$

$Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ にしたときの分岐図が 図 4.9 であり、倍周期カスケードが得られる。図 4.9 (a), (b) は P_0 を $0.0 \leq P_0 \leq 20.0\text{kPa}$ の範囲で 0.05kPa 刻みで変化させた値を用いたときの結果である。 $P_l = 3.90$, $P_u = 17.50\text{kPa}$ である。図 4.9 (c), (d) は P_0 を $4.35 \leq P_0 \leq 4.65\text{kPa}$ の範囲で 0.001kPa 刻みで変化させた値を用いたときの結果である。 $4.45 \leq P_0 \leq 6.20\text{kPa}$ の範囲で各 P_0 に対してプロットされる点がグラフ上で縦方向に連続した線のように見える部分ではカオス振動解が得られている。 k 回目の倍周期分岐が起きるときの P_0 を $P_{0(k)}$ として、 $2^5 = 32$ ($k = 5$) 周期までの分岐点を 0.0001kPa の精度で調べた。これらの値から

$$\frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \frac{P_{0(k)} - P_{0(k-1)}}{P_{0(k+1)} + P_{0(k)}} = 4.66 \pm 0.04 \quad (4.15)$$

が得られた。これは Feigenbaum 定数 $\delta = 4.6692 \dots$ に極めて近い値である。

図 4.10 に振動解の周期が 2 倍、4 倍、... と増加する様子を示す。図 4.10 (I) は $P_0 = 4.3660\text{kPa}$ で得られた周期倍分岐が起きる前の周期振動解である。図 4.10 (II) $P_0 = 4.4472\text{kPa}$, (III) $P_0 = 4.4649\text{kPa}$, (IV) $P_0 = 4.4687\text{kPa}$ に示した図より周期が 2 倍、4 倍、... となるのに対応してパワースペクトルには $1/2$ 、 $1/4$ 、... の周波数にピークが現れ、 (p, U_f) 状態空間における軌道は 2 重、4 重、... に巻いていくことがわかる。

図 4.11 は $P_0 = 4.49\text{kPa}$ のときに得られたカオス振動解である。図 4.11 (d) ~ (f) のパワースペクトルには非常に多くの振動成分が現れ 図 4.11 (g) (p, U_f) 状態空間における軌道には自己相似構造が見られる。図 4.11 (h) (p, x) 状態空間におけるアトラクタにおいて、 $p - x$ の関係は直線的な比例関係にある。図 4.11 (i) はこの振動解の $p(t)$ から Mutual Information を計算した結果である。最適な時間遅れは $\tau = 36t_s$ と決定された。図 4.11 (l) は $p(t)$ から 3 次元相空間へ再構成したアトラクタである。N = 10000 のデータを線でつないで表した。アトラクタは線分布が密になっている部分と粗になっている部分があり、自己相似構造が見られる。この再構成アトラクタは典型的なストレンジアトラクタである。図 4.11 (j) に示した Local Slope は $m = 5 \sim 10$, $h = 36$, $N = 16000$ として式 (3.15) を計算した結果から得られた Local Slope である。 $d_2 \doteq 1.8$ ($m = 5$, $-1.7 \leq \log r \leq -1.0$) の値が求められた。図 4.11 (k) は λ に対して $m = 5 \sim 10$, $N = 16000$, $\tau = 5\text{ms}$, $0 \leq t \leq 30\text{ms}$ として式 (3.21) を計算した結果である。 λ の計算結果には明らかに正と見られる部分が $0 \leq t \leq 10\text{ms}$ に存在する。パワースペクトルにおける広帯域成分、ストレンジアトラクタ、そして最大リアプノフ指数 λ_{\max} が明確に正となることから、この振動解は明らかにカオス振動解である。

$$t_R = 3.4\text{ms}, Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$$

図 4.12 は $t_R = 3.4\text{ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $T_0 = 5000\text{ms}$ として得られた分岐図である。 $P_l = 3.85$, $P_u = 15.15\text{kPa}$ である。 $t_R = 3.4\text{ms}$ は実験^{b, e)} で用いたクラリネットの最低音から逆算した値である。この場合にも P_0 の低い範囲でカオス振動や倍周期分岐が得られる。

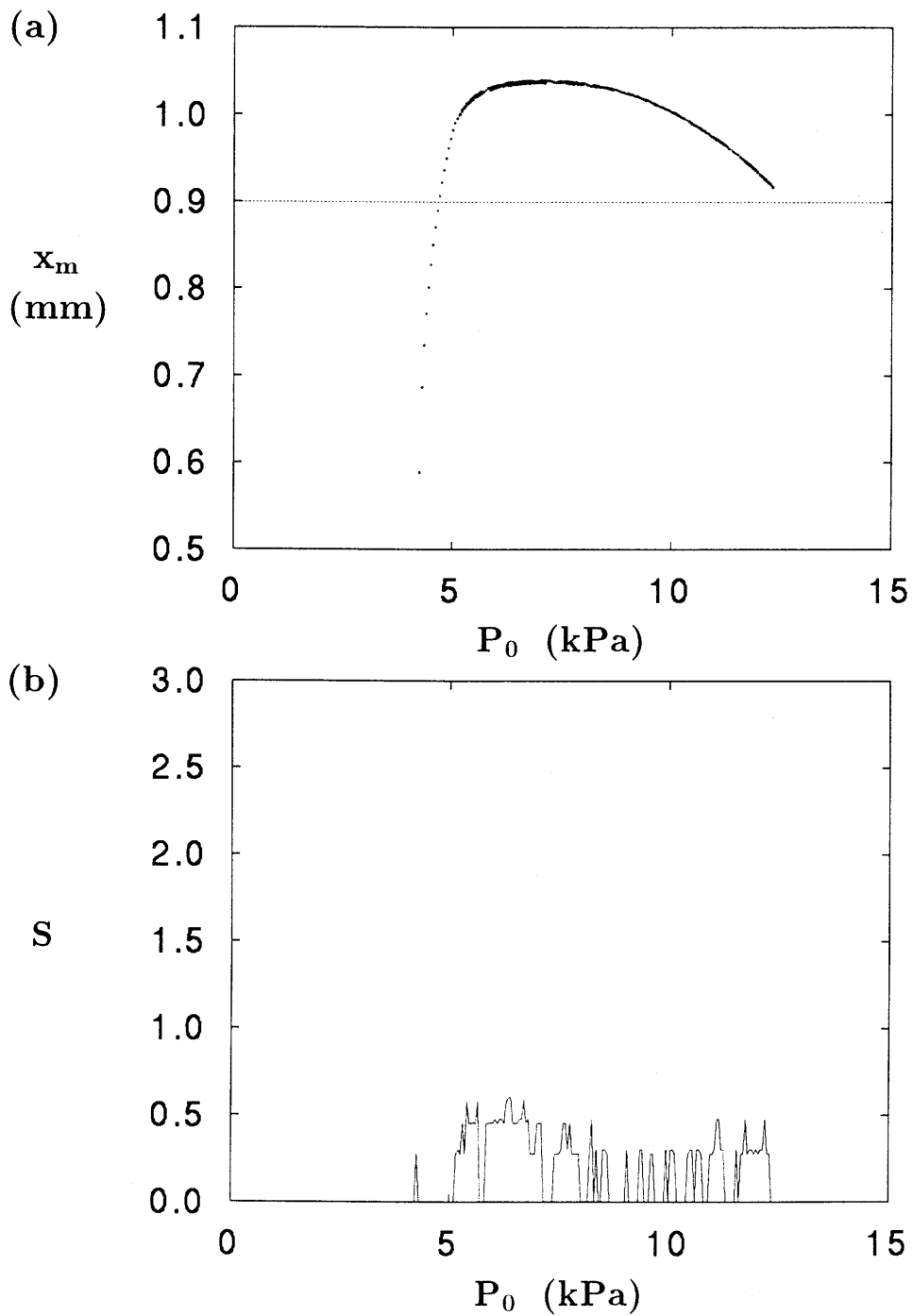


図 4.6: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,
 $P_l = 4.25\text{kPa}$, $P_u = 12.30\text{kPa}$

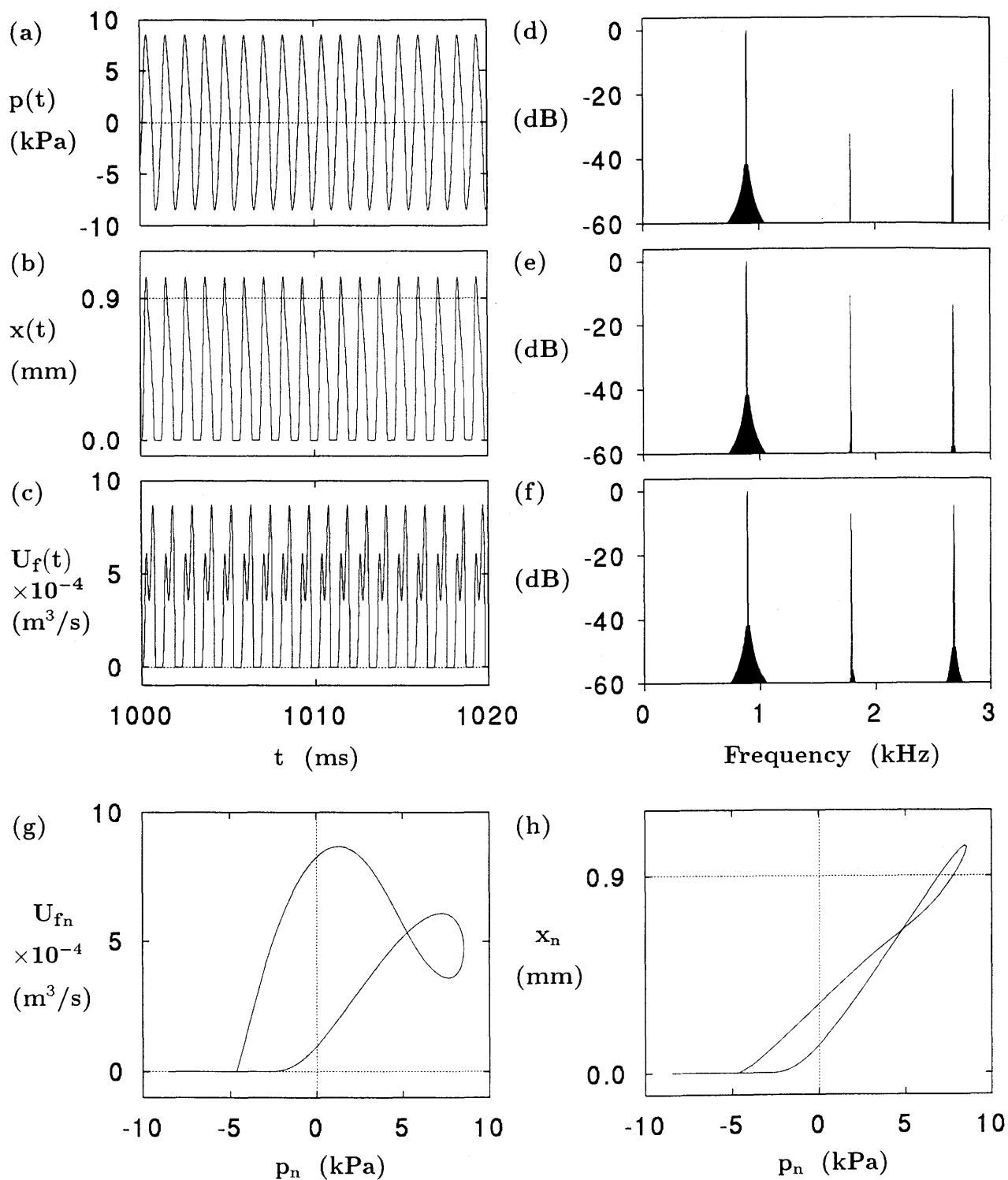


図 4.7: 振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 8.0\text{kPa}$, $T_0 = 1500\text{ms}$,
 (a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $U_f(t)$ 波形, (d) $p(t)$, (e) $x(t)$, (f) $U_f(t)$ のパワースペクトル,
 (g) (p, U_f) 状態空間におけるアトラクタ, (h) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ

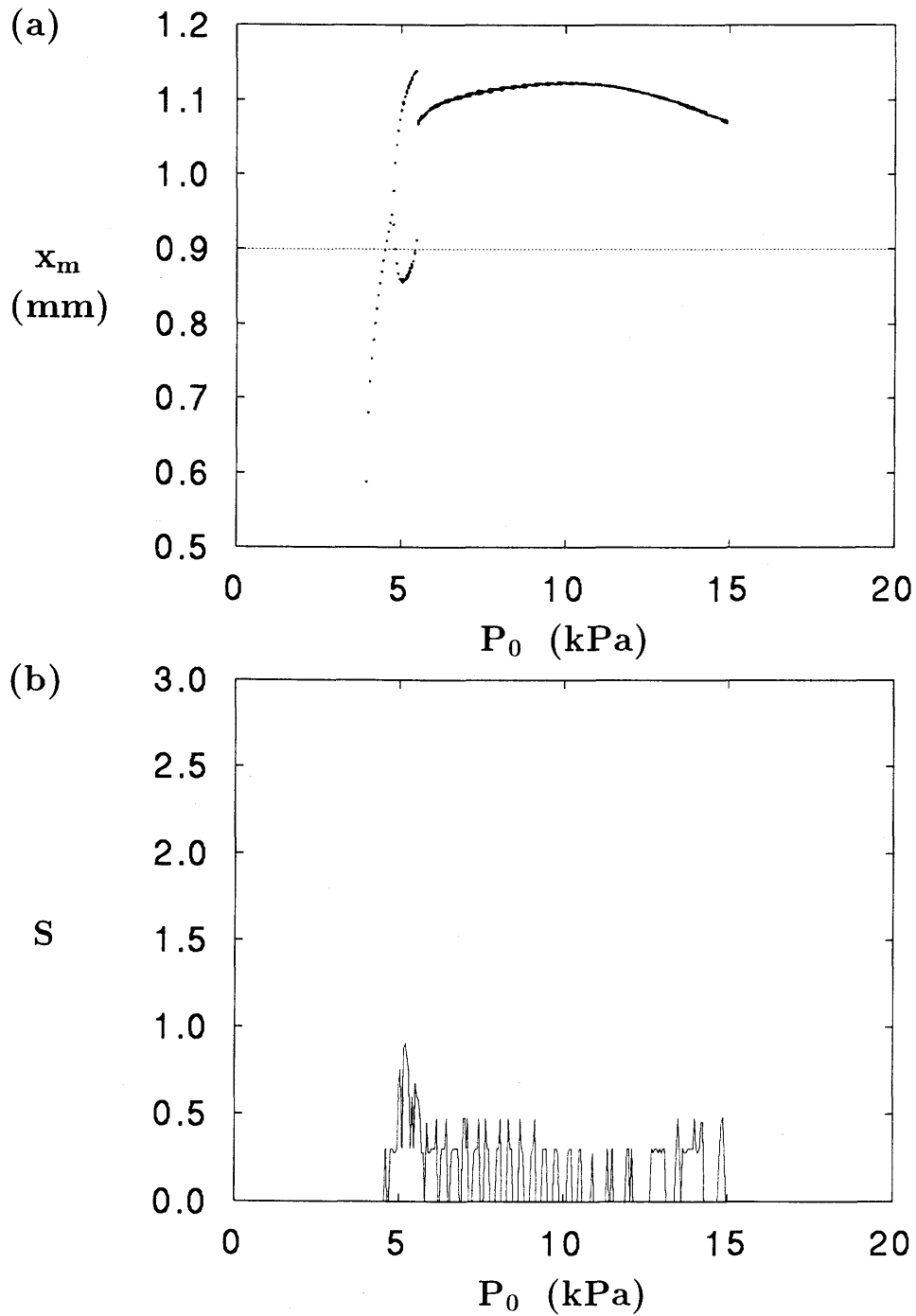


図 4.8: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,
 $P_l = 3.95\text{kPa}$, $P_u = 14.90\text{kPa}$

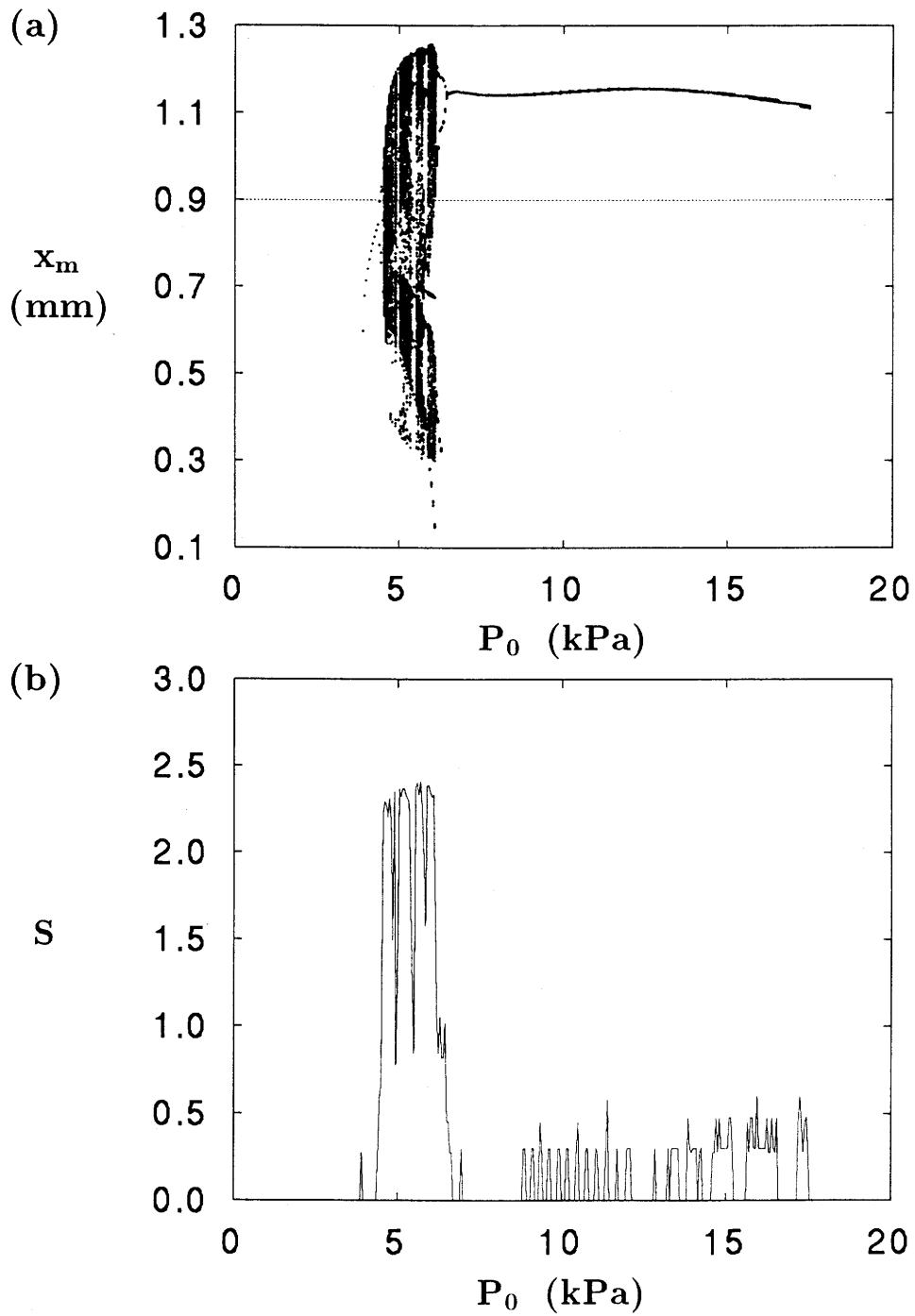


図 4.9: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,
 $P_l = 3.90\text{kPa}$, $P_u = 17.50\text{kPa}$

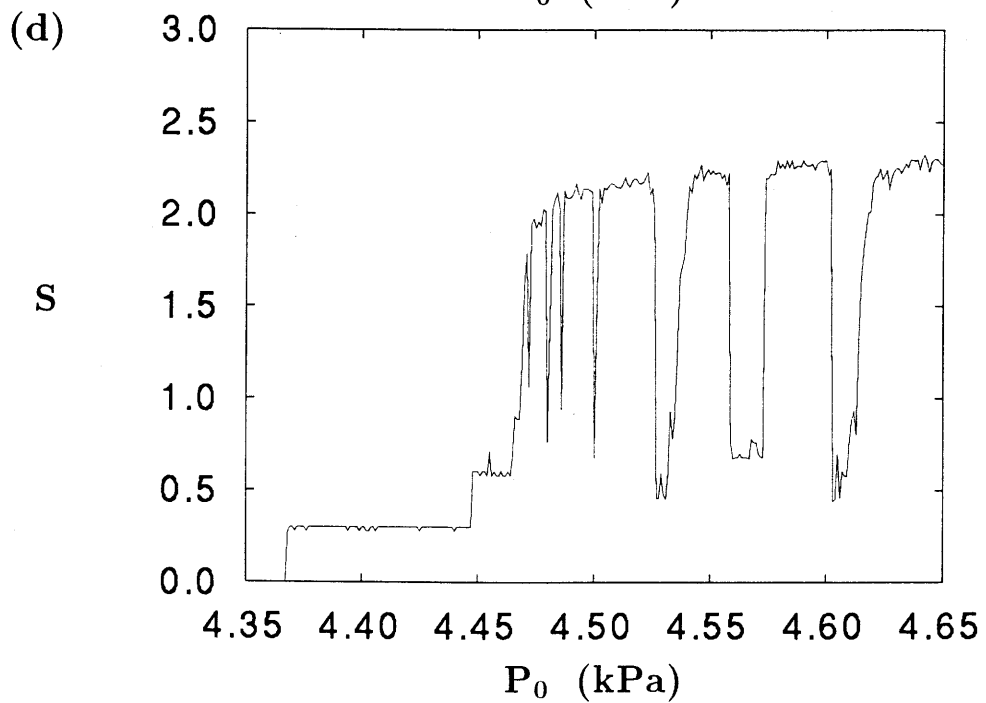
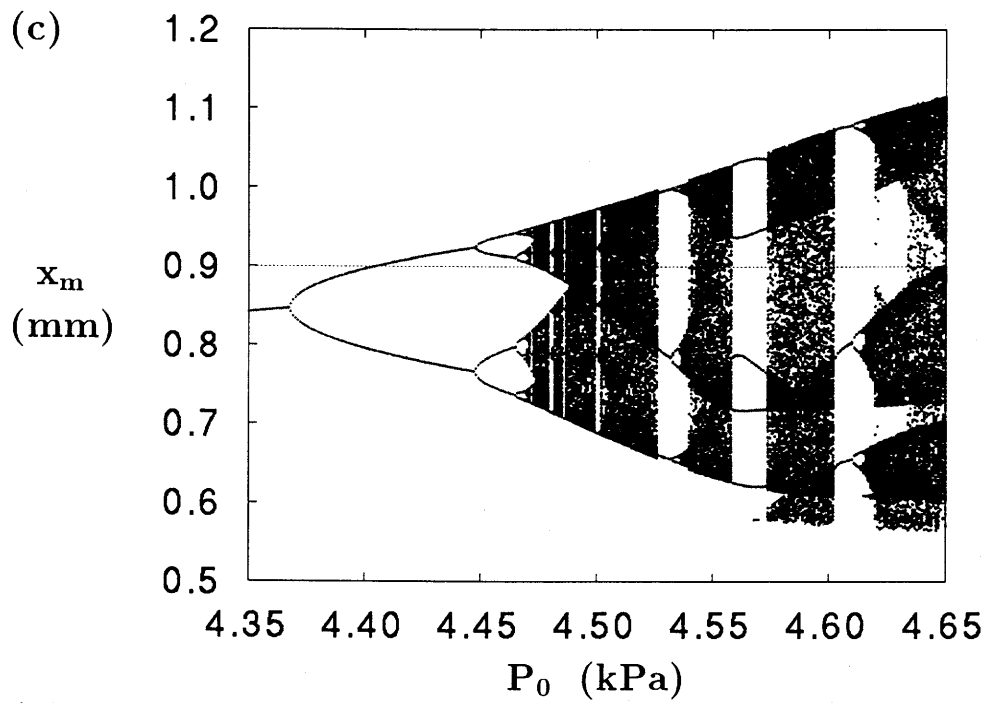


図 4.9: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答
 (c) 分岐図, (d) エントロピー, $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,

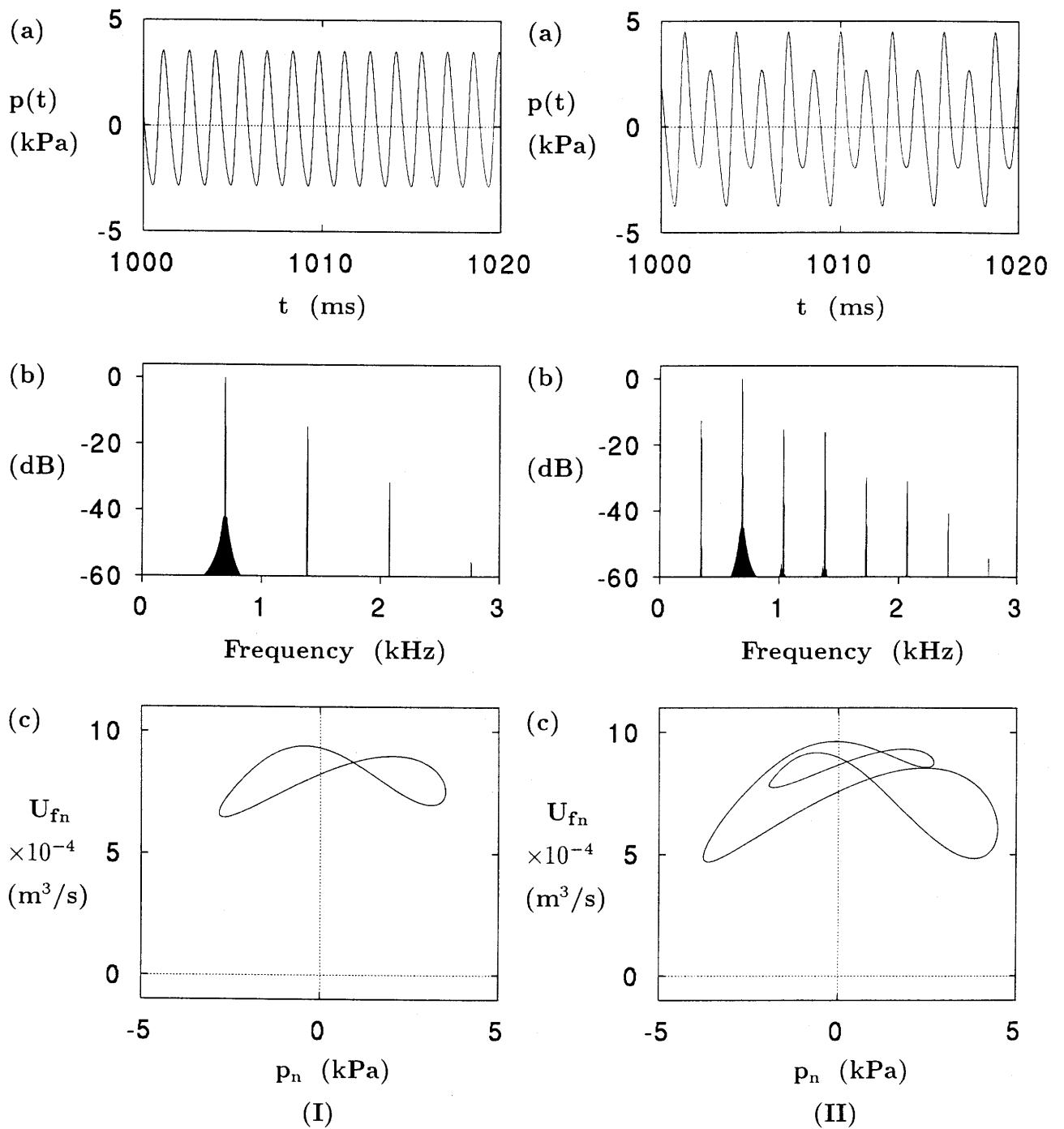


図 4.10: 倍周期分岐における振動解 $t_R = 0.5 \text{ ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4 \text{ s}$,
 (a) $p(t)$ 波形, (b) $p(t)$ のパワースペクトル, (c) (p, U_f) 状態空間におけるアトラクタ,
 (I) $P_0 = 4.3660 \text{ kPa}$, (II) $P_0 = 4.4472 \text{ kPa}$

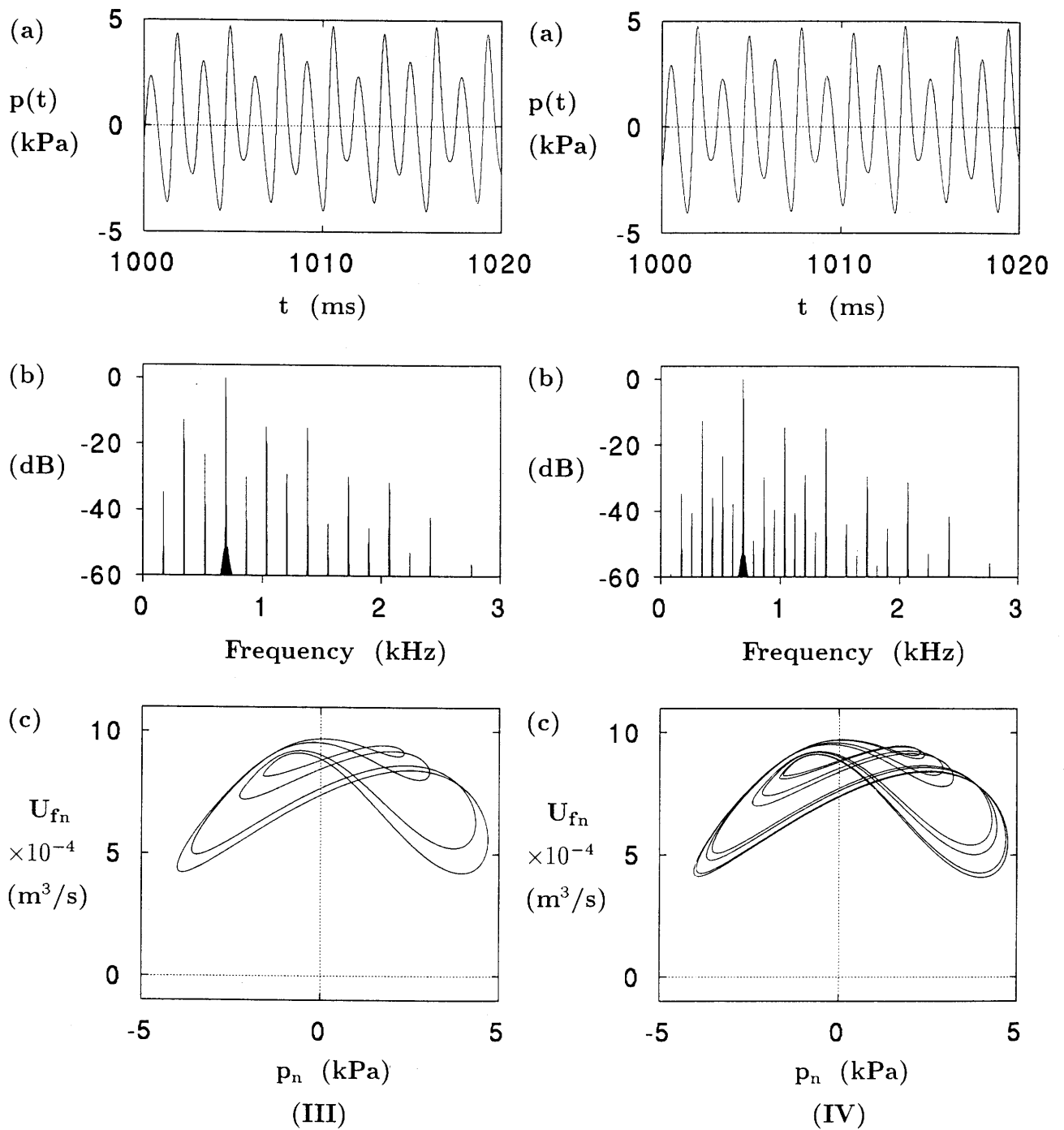


図 4.10: 倍周期分岐における振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,
 (a) $p(t)$ 波形, (b) $p(t)$ のパワースペクトル, (c) (p, U_f) 状態空間におけるアトラクタ,
 (III) $P_0 = 4.4649\text{kPa}$, (IV) $P_0 = 4.4687\text{kPa}$

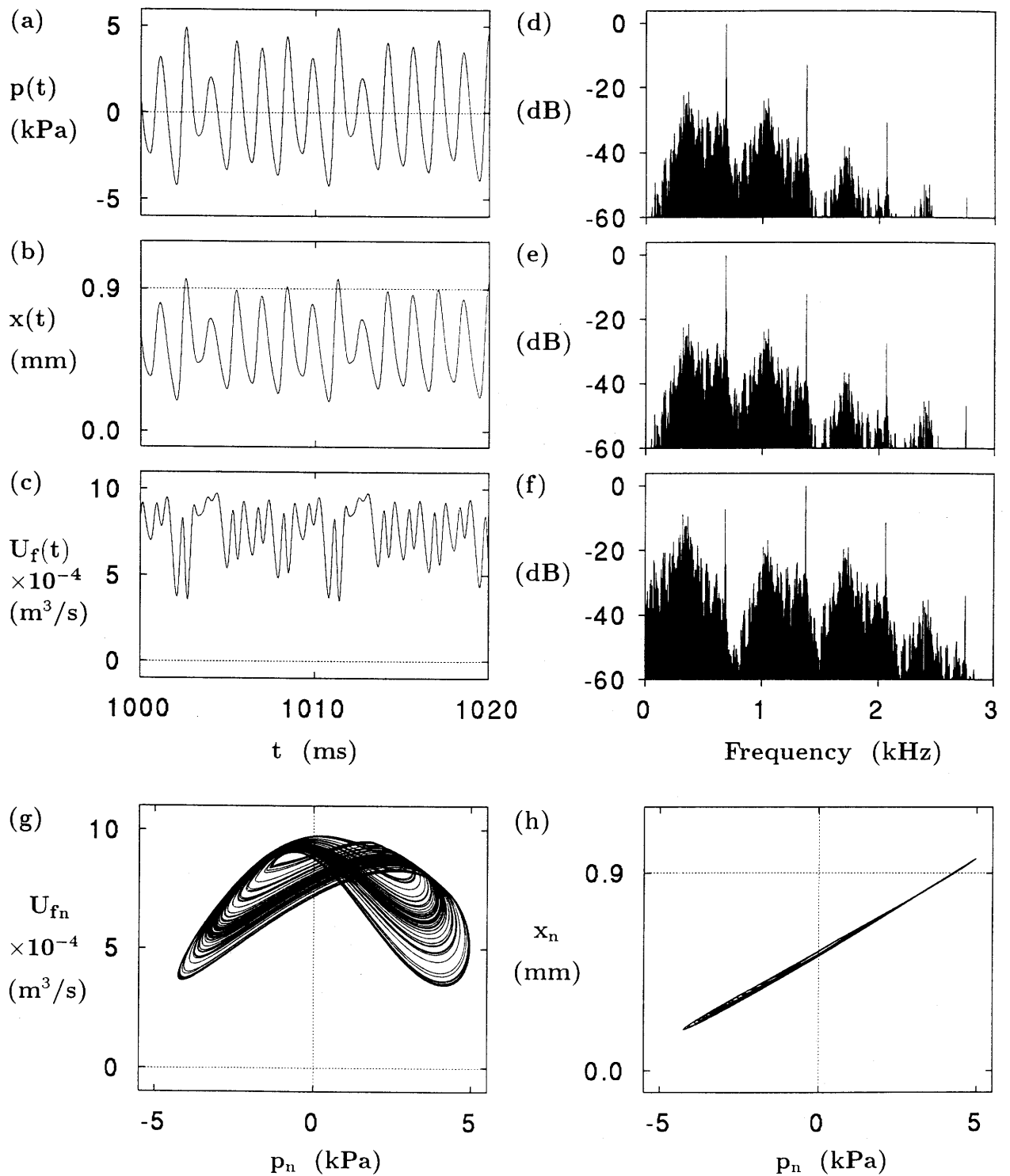


図 4.11: 振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 4.49\text{kPa}$, $T_0 = 1500\text{ms}$, (a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $U_f(t)$ 波形, (d) $p(t)$, (e) $x(t)$, (f) $U_f(t)$ のパワースペクトル, (g) (p, U_f) 状態空間におけるアトラクタ, (h) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ

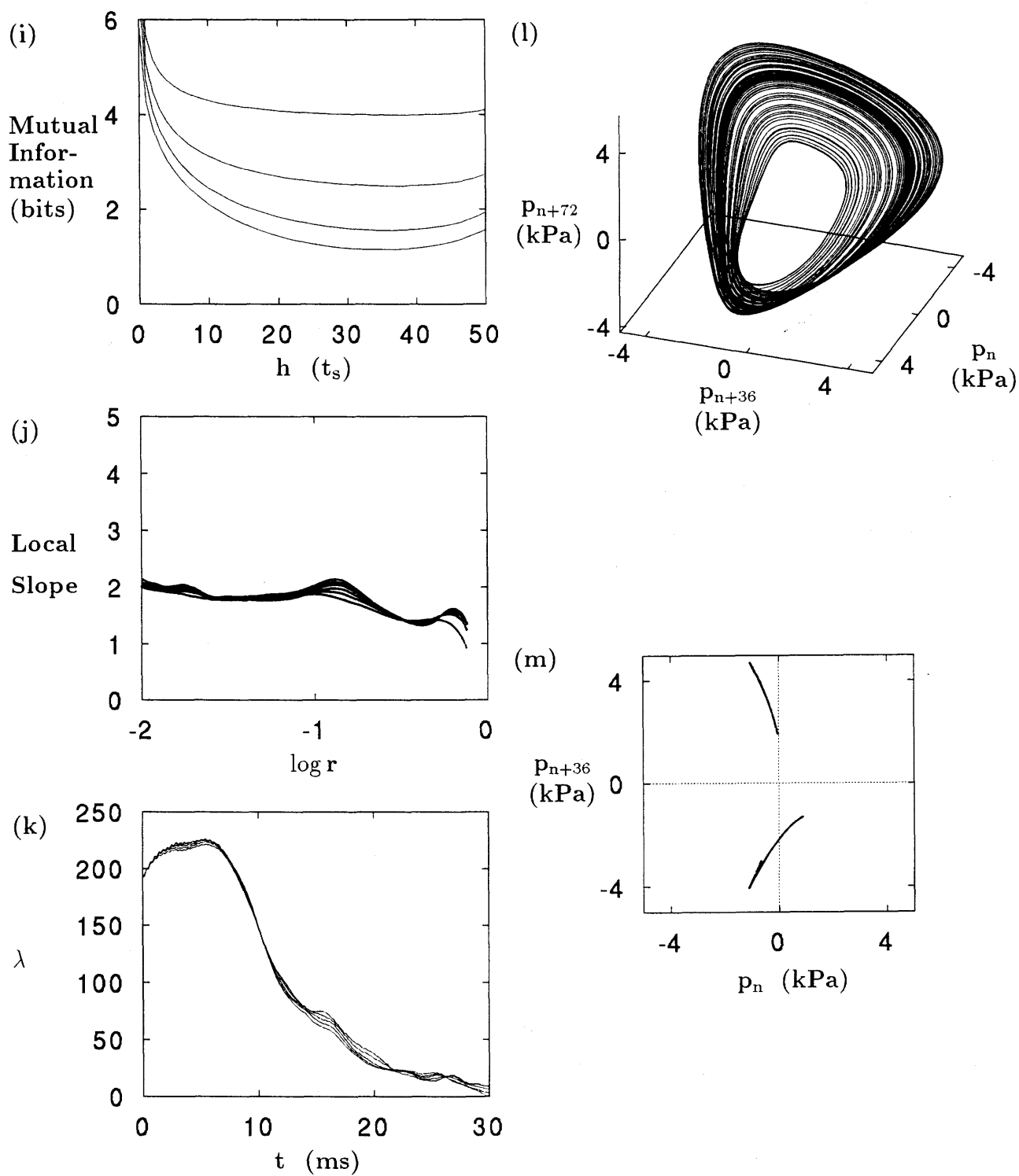


図 4.11: 振動解 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 4.49 \text{ kPa}$, $T_0 = 1500\text{ms}$,
 (i) Mutual Information, (j) Local Slope, (k) 最大リアプノフ指数, (l) 3次元相空間
 における再構成アトラクタ, (m) (l) に示した再構成アトラクタの断面 ($p_{n+72} = 0$)

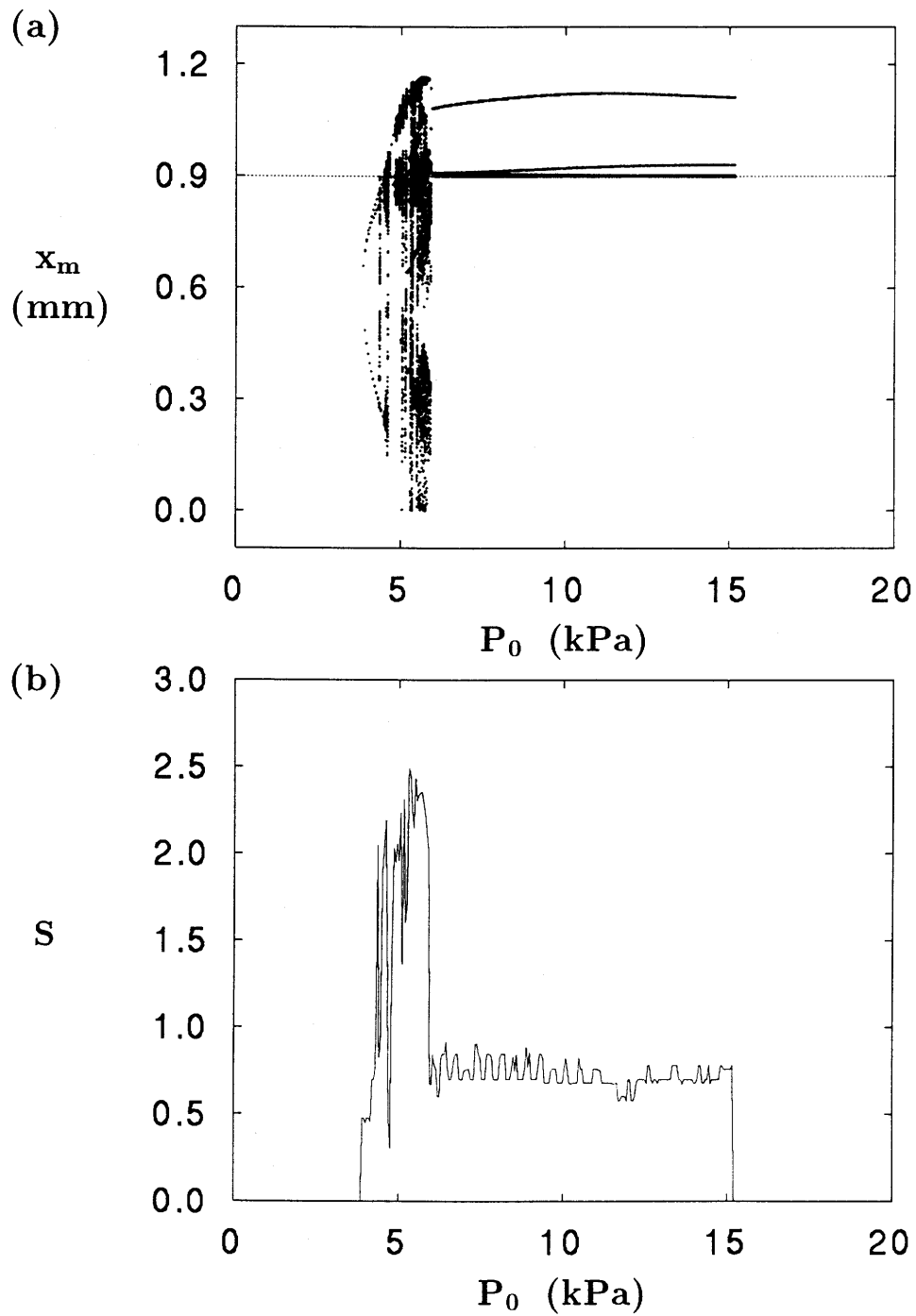


図 4.12: 吹鳴圧力をステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 3.4\text{ms}$, $Z_0 = 5.00 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,
 $P_l = 3.85\text{kPa}$, $P_u = 15.15\text{kPa}$

4.3.2 吹鳴圧力を階段状に次第に上昇下降させるときの応答

P_0 を $t = 0$ で $P_0(t) = 0\text{kPa}$ から始めて一定の吹鳴時間 T_0 経過する毎に一定量 ΔP_0 ずつ階段状に次第にリードが全閉になるまで上昇させ、ついでその状態から同様に階段状に次第に下降させるときの応答を計算した。この計算により、振動状態遷移のヒステリシスを調べることができる。三通りの t_R の値 ($t_R = 0.5, 1.0, 3.4\text{ms}$) と三通りの Z_0 の値 ($Z_0 = 2.31, 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$) の何れの組み合わせに対しても、 P_0 を上昇させるときと下降させるときでは振動解が得られる P_0 の範囲が異なった。 P_0 を上昇させるときには $P_s \leq P_0 \leq P_c$ なる範囲で振動解が得られ、下降させるときには $P_{th} \leq P_0 \leq P_r$ なる範囲で振動解が得られた。表 4.3 に吹鳴圧力を階段状に変化させた場合に振動解が得られる P_0 の範囲を示す。これらの圧力の間には $P_s = P_{th} < P_r < P_c$ なる関係がある。同じ反射関数、特性インピーダンスの値を用いて P_0 を (1) の方法 (図 4.3) により変化させた場合に振動解が得られる範囲 $P_l \leq P_0 \leq P_u$ と比較すると、振動解が得られる P_0 の下限については $P_s = P_{th} = P_l$ 、上限については $P_r < P_u < P_c$ の関係が成り立つ。以下に $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の場合の例について示す。また、同じ P_0 でも上昇時と下降時で得られる振動解が異なる場合の例 ($t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$) を示す。このような結果は $t_R = 3.4\text{ms}$ のときに $Z_0 = 5.00, 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ でも見られた。

t_r (ms)	Z_0 ($\times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$)		
	2.31	5.00	7.50
0.5	$4.3 \leq P_0 \leq 14.8\text{kPa}$	$4.0 \leq P_0 \leq 20.7\text{kPa}$	$3.90 \leq P_0 \leq 25.4\text{kPa}$
	$4.3 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$	$4.0 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$
1.0	$4.0 \leq P_0 \leq 24.7\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 32.6\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 37.3\text{kPa}$
	$4.0 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$
3.4	$3.9 \leq P_0 \leq 31.8\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 39.6\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 43.8\text{kPa}$
	$3.9 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$	$3.9 \leq P_0 \leq 11.2\text{kPa}$

表 4.3: 吹鳴圧力を階段関数状に変化させた場合に振動解が得られる範囲

各項の上側 : 上昇過程に振動解が得られる範囲 ($P_s \leq P_0 \leq P_c$)

各項の下側 : 下降過程に振動解が得られる範囲 ($P_{th} \leq P_0 \leq P_r$)

$$t_R = 0.5\text{ms}, Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$$

図 4.13 は $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $T_0 = 1500\text{ms}$, $\Delta P_0 = 0.1\text{kPa}$ として P_0 を 図 4.4 のように変化させたときに得られた計算結果である。(a) が P_0 を上昇させる場合、(b) が下降させる場合の分岐図である。図中の矢印は P_0 を変化させる方向を示している。 $P_s = 4.3\text{kPa}$, $P_c = 14.8\text{kPa}$, $P_r = 11.2\text{kPa}$, $P_{th} = 4.3\text{kPa}$ であるから、 P_0 の上昇過程に振動解が得られる範囲 $P_s \leq P_0 \leq P_c$ と下降過程に振動解が得られる範囲 $P_{th} \leq P_0 \leq P_r$ は異なる。

$$t_R = 1.0\text{ms}, Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$$

図 4.14 は $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $T_0 = 3000\text{ms}$, $\Delta P_0 = 0.1\text{kPa}$ として得られた計算結果である。 $P_s = 3.9\text{kPa}$, $P_c = 37.3\text{kPa}$, $P_r = 11.2\text{kPa}$, $P_{th} = 3.9\text{kPa}$ である。 $P_0 \simeq 6 \sim 11\text{kPa}$ では同じ P_0 であっても上昇時と下降時に得られる振動状態が異なっている。実際に P_0 上昇時と下降時に $P_0 = 9.0\text{kPa}$ で得られる振動状態を 図 4.15 (P_0 上昇時) と 図 4.16 (P_0 下降時) に示す。上昇時に得られる $p(t)$ のパワースペクトルの最大ピーク周波数は $f = 1309\text{Hz}$ である。 $p(t)$ 波形は $p(t) = 0\text{kPa}$ に関して非対称に振動している。この振動解は実際の吹鳴においてリードミスと呼ばれている振動状態に近い。下降時に得られる $p(t)$ のパワースペクトルの最大ピーク周波数は $f = 433\text{Hz}$ である。 $U_f(t)$ 波形から $U_f(t) < 0 \text{ m}^3/\text{s}$ 、すなわち逆流となる部分が存在することがわかる。 (p, U_f) 状態空間における軌道は小さなループを持っている。この振動解は演奏に用いられる吹鳴状態の振動に近い^{b, e)}。

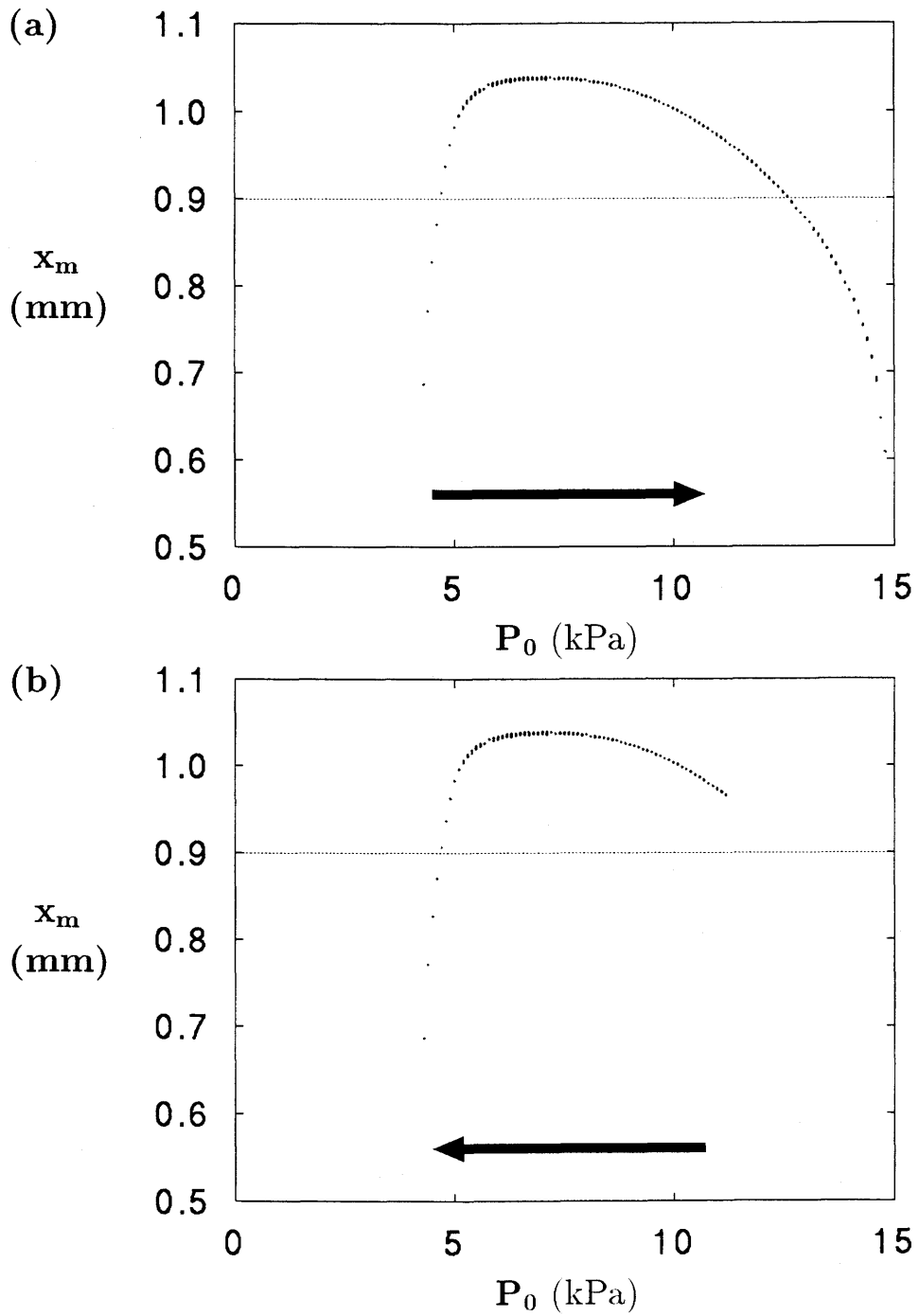


図 4.13: 吹鳴圧力を階段状に次第に上昇下降させるときの応答
 (a) P_0 上昇過程, (b) P_0 下降過程 $t_R = 0.5\text{ms}$, $Z_0 = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/m}^4\text{s}$,
 $P_s = 4.3\text{kPa}$, $P_c = 14.8\text{kPa}$, $P_r = 11.2\text{kPa}$, $P_{th} = 4.3\text{kPa}$

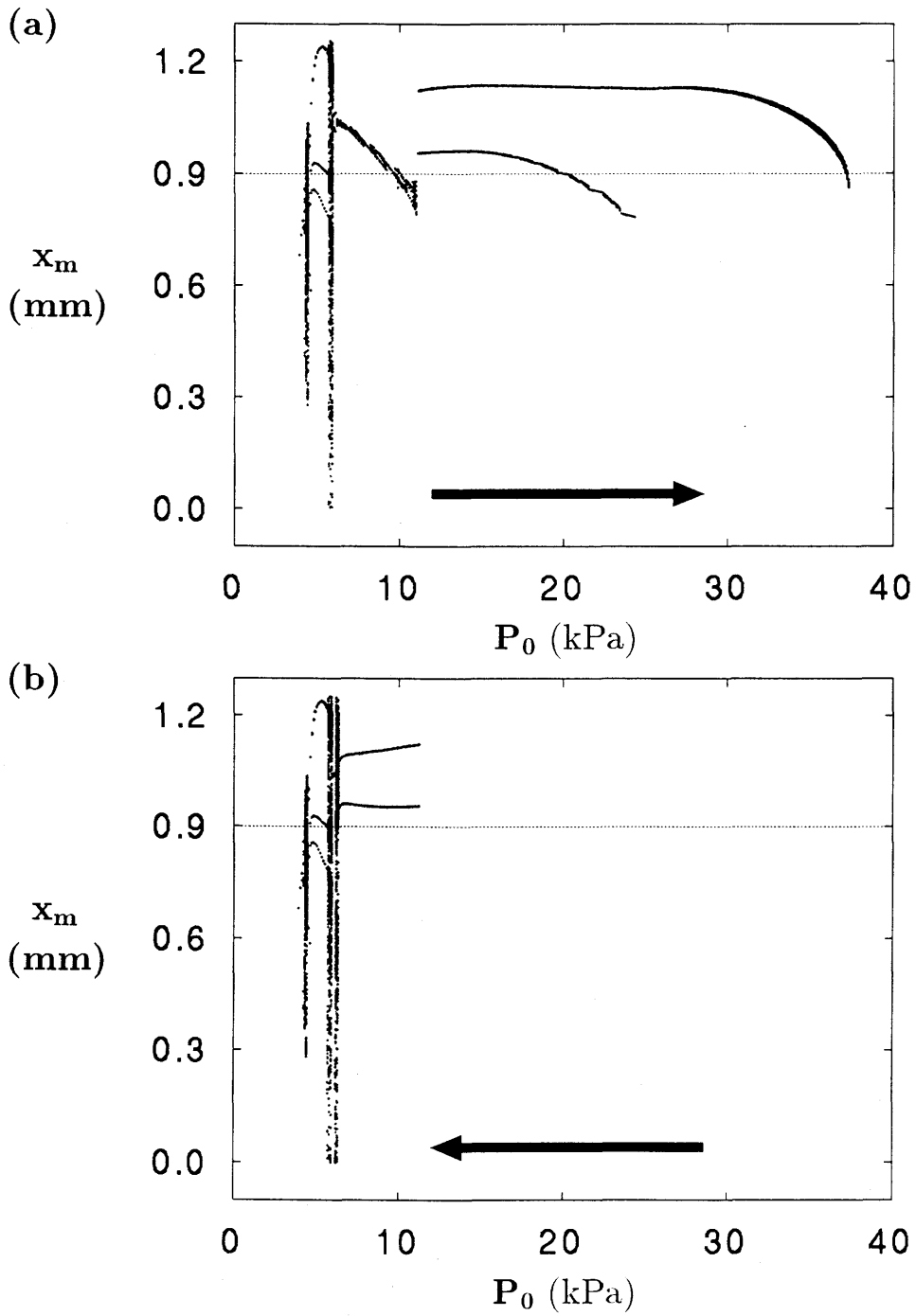


図 4.14: 吹鳴圧力を階段状に次第に上昇下降させるときの応答
 (a) P_0 上昇過程, (b) P_0 下降過程 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$,
 $P_s = 3.9\text{kPa}$, $P_c = 37.3\text{kPa}$, $P_r = 11.2\text{kPa}$, $P_{th} = 3.9\text{kPa}$

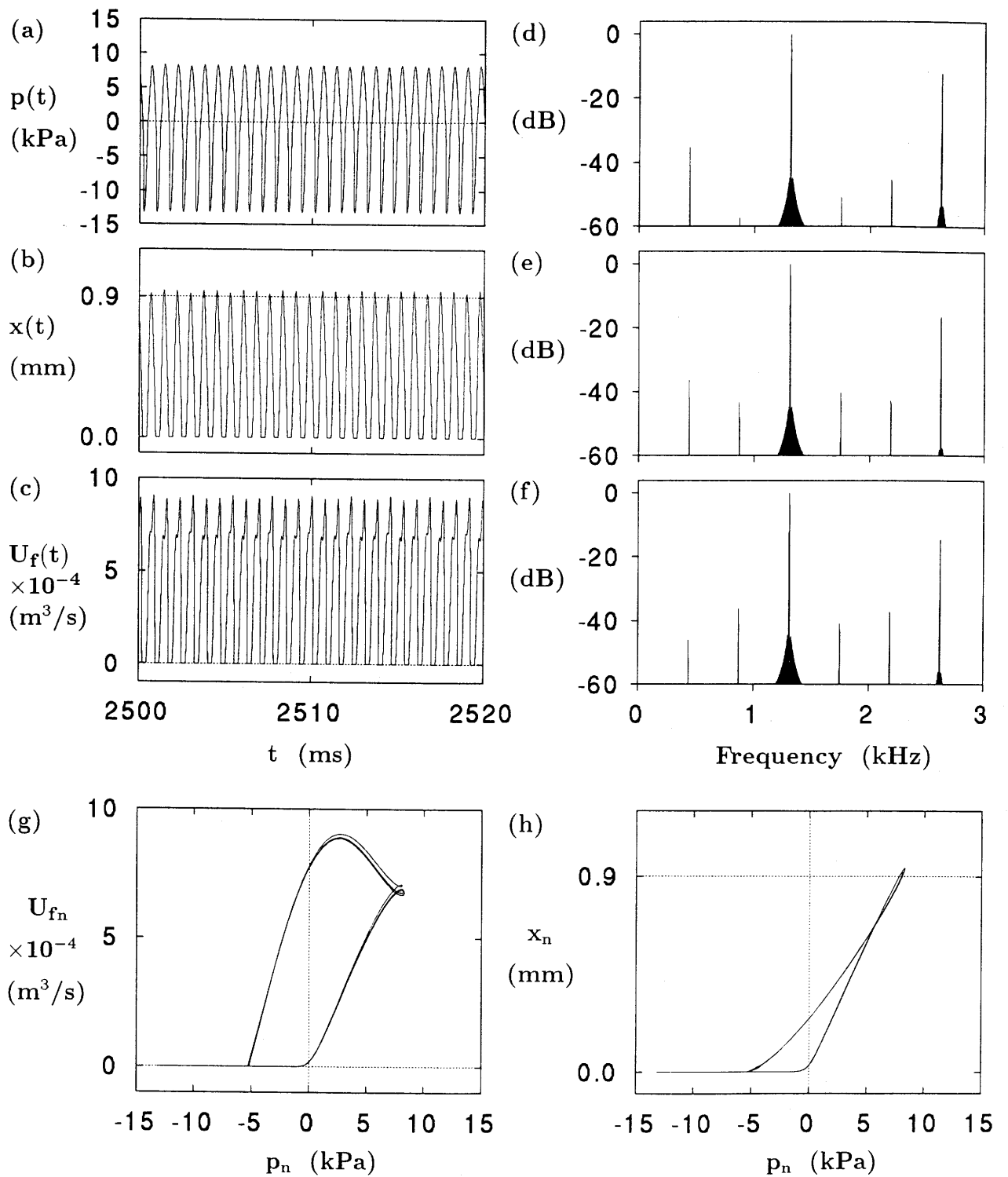


図 4.15: 振動解 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 9.0\text{kPa}$ (P_0 上昇時),
 (a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $U_f(t)$ 波形, (d) $p(t)$, (e) $x(t)$, (f) $U_f(t)$ のパワースペクトル,
 (g) (p, U_f) 状態空間におけるアトラクタ, (h) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ

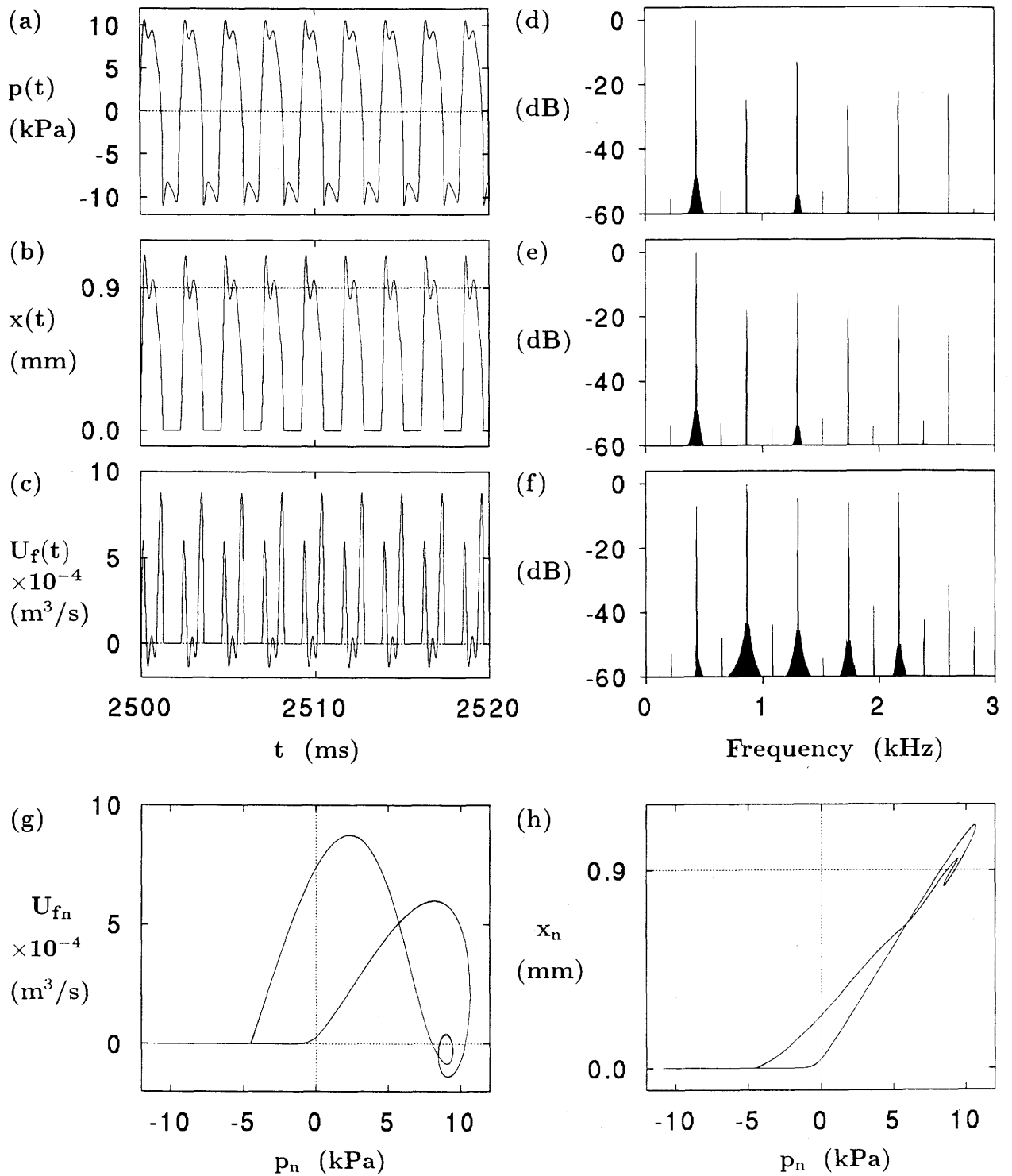


図 4.16: 振動解 $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 9.0\text{kPa}$ (P_0 下降時),
 (a) $p(t)$, (b) $x(t)$, (c) $U_f(t)$ 波形, (d) $p(t)$, (e) $x(t)$, (f) $U_f(t)$ のパワースペクトル,
 (g) (p, U_f) 状態空間におけるアトラクタ, (h) (p, x) 状態空間におけるアトラクタ

4.3.3 特性インピーダンスをステップ関数状に変化させるときの応答

4.3.1 節では特性インピーダンス Z_0 を一定にし吹鳴圧力 P_0 をステップ関数状に変化させるときの応答について述べた。ここでは逆に P_0 を一定にして Z_0 をステップ関数状に変化させるときの応答について述べる。特性インピーダンスは $t < 0$ では $0\text{kg/m}^4\text{s}$ に保たれ、リードは静止の状態にある。 $t = 0$ で特性インピーダンスをステップ関数状に Z_0 まで増加させるとき、クラリネットにはどのような振動が励起されるかを計算した。 $t = 0$ における 0 から Z_0 までのステップ関数状の変化量は $0.00 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ から始めて $0.05 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ 刻みで、 $20.00 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ まで増加させた。

以下に、 $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 4.5, 7.0, 10.0\text{kPa}$ の場合の例を示す。 $P_0 = 4.5\text{kPa}$ とした場合にはカオス振動解、倍周期分岐の例が得られた。しかし、 $P_0 = 7.0, 10.0\text{kPa}$ とした場合には周期振動解しか得られなかった。 $t_R = 1.0, 3.4\text{ms}$ にした場合にも複雑な非周期振動解、倍周期分岐は $P_0 = 4.5\text{kPa}$ ときに得られ、 $P_0 = 7.0, 10.0\text{kPa}$ のときには周期振動解しか得られなかった。

$t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 4.5\text{kPa}$

図 4.17 は $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 4.5\text{kPa}$, $T_0 = 1500\text{ms}$ として Z_0 をステップ関数状に変化させたときの結果である。 $Z_0 \geq 1.65 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ で振動解が得られる。非周期振動解は大体 $7.0 \leq Z_0 \leq 14.0 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ の範囲で得られている。また、倍周期カスケードも示されている。

$t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 7.0\text{kPa}$

図 4.18 は $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 7.0\text{kPa}$, $T_0 = 1500\text{ms}$ として Z_0 をステップ関数状に変化させたときの結果である。 $Z_0 \geq 0.65 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ で振動解が得られる。各 Z_0 に対してプロットされる点は多いところでは 8 ~ 9 点に収束している。しかし、プロットされる点がグラフ上で縦方向に連続した線のように見える部分はなく非周期振動解は得られていない。

$t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 10.0\text{kPa}$

図 4.19 は $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 10.0\text{kPa}$, $T_0 = 1500\text{ms}$ として Z_0 をステップ関数状に変化させたときの結果である。 $Z_0 \geq 0.40 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ で振動解が得られる。このように P_0 がある値よりも大きくなると Z_0 を広い範囲で変化させても非周期振動解、倍周期分岐は得られなかった。 $12.3 \leq Z_0 \leq 20.0 \times 10^6\text{kg/m}^4\text{s}$ では二点がプロットされているが下側の点は波形の極大値が最大値以外にも得られることを示している。

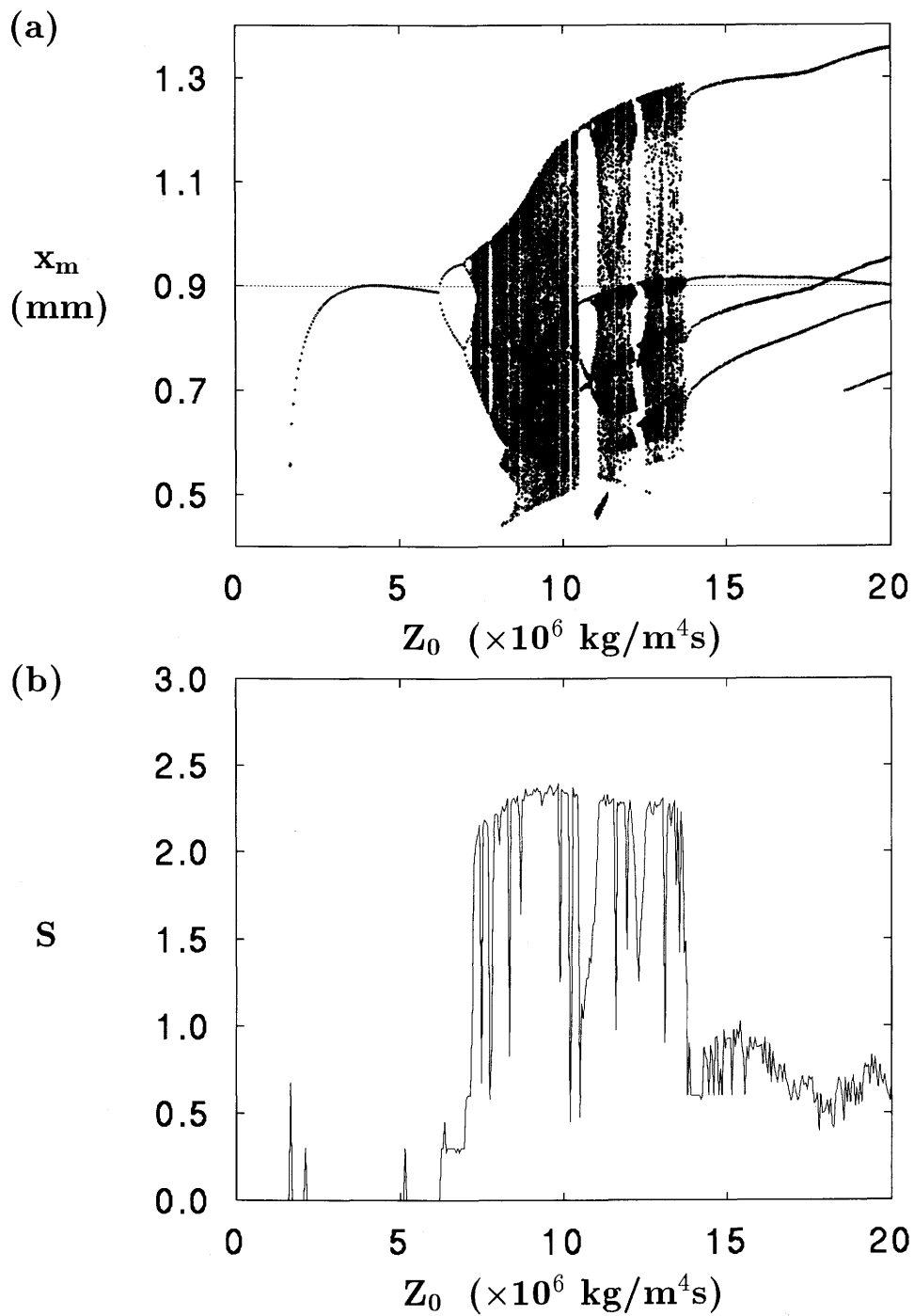


図 4.17: 特性インピーダンスをステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 0.5$ ms, $P_0 = 4.5$ kPa

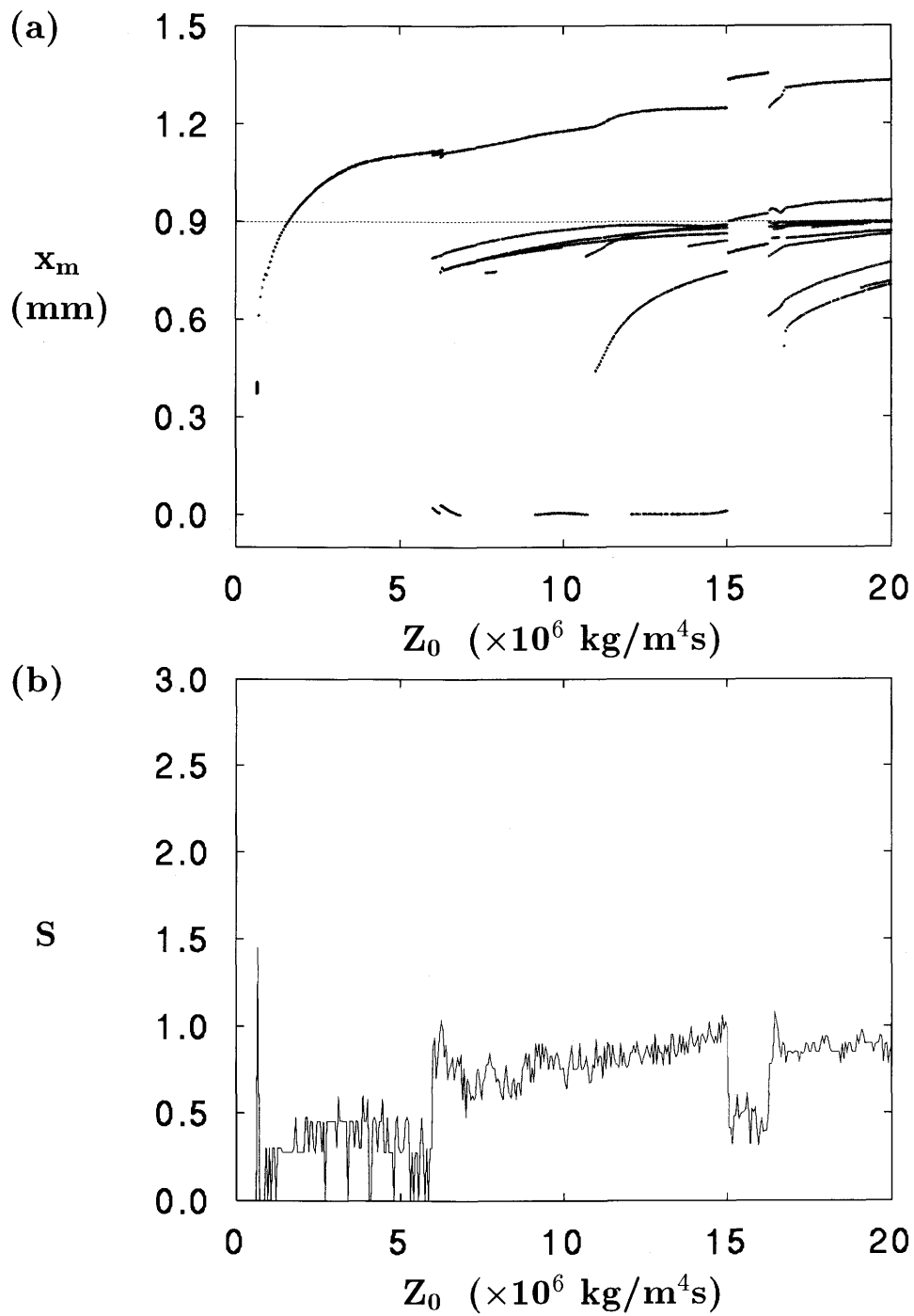


図 4.18: 特性インピーダンスをステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 7.0\text{kPa}$

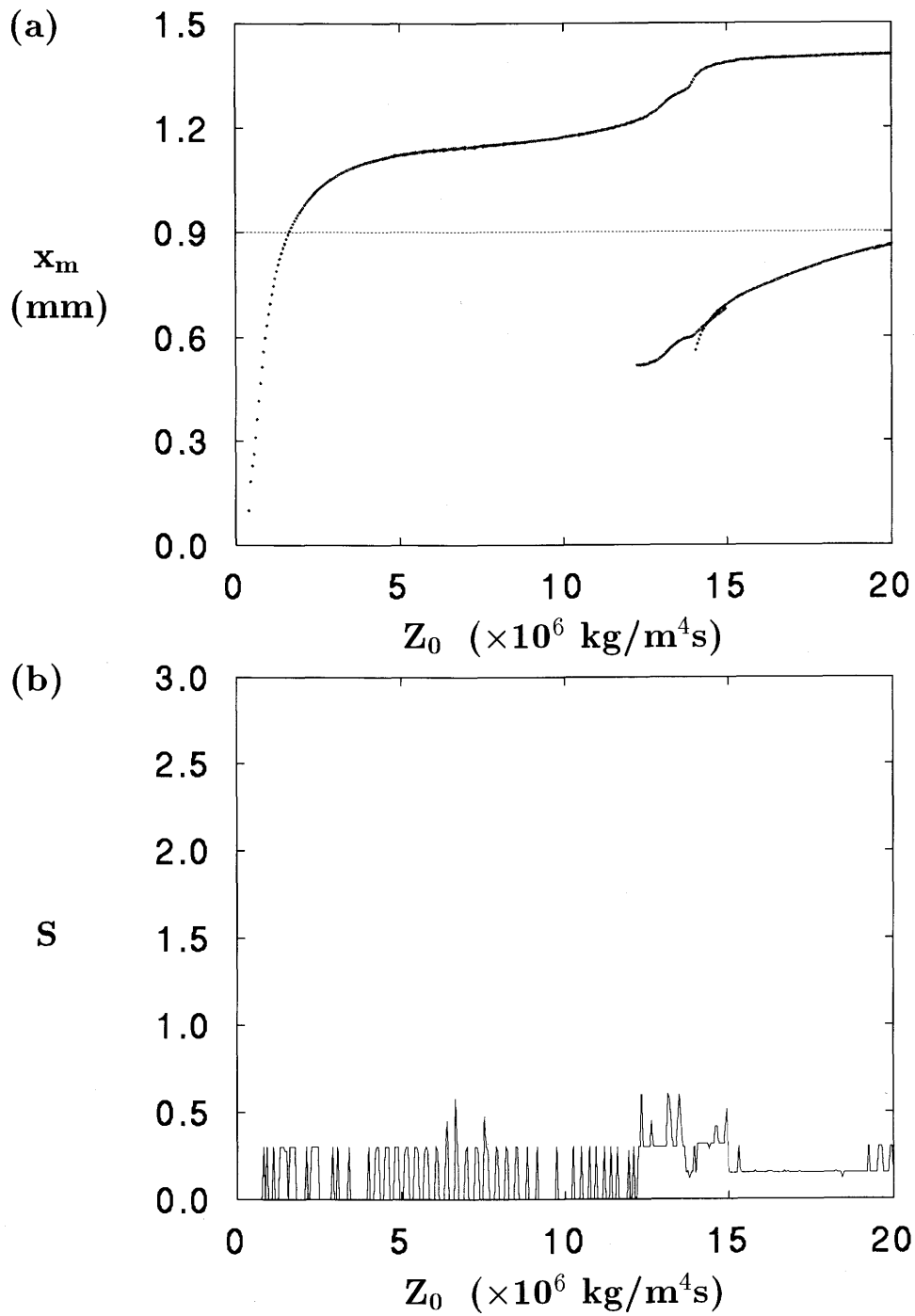


図 4.19: 特性インピーダンスをステップ関数状に変化させるときの応答
 (a) 分岐図, (b) エントロピー, $t_R = 0.5\text{ms}$, $P_0 = 10.0\text{kPa}$

4.4 考察

人工吹鳴実験によって得られた、クラリネットが D_3 音を発する励起状態における $p(t)$, $x(t)$, $U_f(t)$ 波形は、Schumacher が彼の論文⁷⁾ に示した方法そのままを適用して極めてよく再現できるが、そのためにはクラリネットのそのときの状態を無視したパラメータ設定が必要である^{b)}。その原因の一つは、Schumacher の式には唇がリード及びマウスピースをくわえる深さを表すパラメータ l が含まれていないためと考えられる。筆者らの実験によれば、lip adjustment の設定は励起される気柱振動に重要な影響を与えるが、Schumacher の理論におけるパラメータ l の不足は彼の理論と筆者らの実験条件との対応関係を不明確にする。理論あるいは理論式に含まれるパラメータと実験条件の対応関係について予想されるもう一つの難しい問題は、常に開閉を繰り返すリードの変位に従って断面積を変えるマウスピース内部の複雑な構造を、反射関数 $r(t)$ と特性インピーダンス Z_0 にどのように反映させるかである。

Schumacher 方程式の解を計算し、我々が人工吹鳴実験によって得たクラリネットの音響学的挙動と定性的に比較した。第 1 節に述べたように、本論文では反射関数 $r(t)$ を比較的短時間しか持続しない 1 つのガウス関数で近似した。言うまでもなくクラリネットの気柱は完全な円柱でなく、また管尻にはベルが存在することによって、 $r(t)$ の形状はガウス関数からは程遠い。しかし McIntyre らはやはりガウス関数によって木管楽器の反射関数を近似した⁸⁾。また Schumacher は一応 $r(t)$ をガウス関数よりはより現実に近い形で求める努力をしたが、マウスピース部分を無視した⁷⁾。両者ともにクラリネットの真の $r(t)$ を用いしなかったがクラリネットの理解において大きく前進した。本論文では、計算時間を短縮する目的もあって、1 個のガウス関数で $r(t)$ を近似したが Schumacher 方程式がカオスの解を持つ t_R , Z_0 , P_0 の領域を見いだした。 $r(t)$ の形状が真のクラリネット気柱に合致するようにした場合にもこの t_R , Z_0 , P_0 の領域がそのままカオス振動解の領域になるとは考え難いが、本章は Schumacher 方程式にカオス振動解存在の可能性を示したことになるであろう。しかし計算によって見出されたのは倍周期分岐を経てカオスに到る経路であり、筆者らの測定結果に見られた準周期的振動やそこからカオスに到る経路は発見できなかった。ただし倍周期分岐の経路において Feigenbaum 定数として真の値に近いものが得られたことは計算の精度の良さの目安としてよいであろう。

本章では Schumacher 方程式の構造は認めるが、そこに含まれるパラメータについては特にクラリネットを意識せず、カオス振動解や振動状態遷移のヒステリシスの存在を求める立場をとった。しかし 2 つのパラメータ t_R , Z_0 に着目するに到った経過はクラリネットを意識したものである。ここで t_R (あるいは $r(t)$) および Z_0 は、それぞれ 4.2.2 節および 4.2.3 節に示したように、クラリネット気柱の形状によって、独立に定まる。

本文中に示した例では t_R の値を、0.5, 1.0, 3.4ms としたが、このうち 3.4ms はクラリネットのすべての音孔を閉じて吹奏するとき得られる最低音から逆算した値である。しかし奏者がそのつもりになれば、音孔をすべて閉じたクラリネットを用いて、より高い多くの振動数の音が吹奏可能である^{b)}。このことはクラリネットの中にその原

因が存在することを示している。特にマウスピース部分の複雑な構造からは、 $r(t)$ に、短い t_R の反射波の存在が容易に予想できる。0.5ms の値はマウスピース部分の長さから算出した。このような理由からすれば、クラリネット気柱を近似する際、2つのガウス関数を重ね合わせて 0.5ms と 3.4ms に極小値を持つ $r(t)$ を用いればよりよい近似になる筈である。しかしここでは、計算結果が理解し易いように、1つのガウス関数による $r(t)$ の近似に止めてある。 $r(t)$ に2つの極小値を仮定すると計算やその結果は格段に複雑になった。実際の $r(t)$ では複数の極大値や極小値が存在するから問題は容易ではない。なお第4節に示した例では、 $t_R = 0.5\text{ms}$ の場合が多く、その他の場合が少ないが、その理由は倍周期分岐やカオスを示す典型的な図が $t_R = 0.5\text{ms}$ の場合に多く得られたからである。図 4.12 に示す分岐図からも倍周期分岐は見てとれるが 図 4.9 程明瞭ではない。

本文中に示した例では Z_0 の値を、2.31, 5.00, $7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ としたが、このうち $2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ は Schumacher が用いた値である。リード開口の面積はリード静止時で、 $0.9 \times 14 = 12.6 \text{mm}^2$ であるから、この値から計算すると Z_0 の値は $7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ をはるかに越える。5.00, $7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の値は $2.31 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ の約2倍、約3倍という意味で適宜決めた。 $P_0 = 4.5 \text{kPa}$ とし、 Z_0 を0から $20 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ まで変化させたときには $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$ でカオス振動解が得られた。リード開口やマウスピース内部気柱の構造を考慮すると Z_0 の値をこの程度大きくとっても非現実的な値とは言えない。

Schumacher は彼の論文⁷⁾の中で、「リード振動を記述する式(4.1)中のベルヌーイ力を表す右辺第2項の有無は、シングルリード楽器の場合、計算結果に無視しうる程度の僅かな差しかもたらさない」と述べている。本論文では t_R , Z_0 に従来とは大きく異なる値を使用したので、幾つかの例で確かめて見たが、やはり計算結果には僅かの差しか認められなかった。

t_R の値が大きくなるとともに、 P_0 の値を変化させた後に振動解が定常状態に落ちつくまでの時間は長くなる。 T_0 の値は過渡状態を避けるために充分大きくとった。特に P_0 の値を階段状に変化させてヒステリシスの存在を確かめる際には T_0 を変えて計算を行い、同じ結果が得られるかどうか調べた。例えば $t_R = 1.0\text{ms}$, $Z_0 = 7.50 \times 10^6 \text{kg/m}^4\text{s}$, $P_0 = 9.0 \text{kPa}$ においては、 P_0 の上昇時と下降時にそれぞれ 1309Hz, 433Hz の周期振動解が得られた。この結果は $T_0 = 3000, 5000, 10000\text{ms}$ の何れでも同じであった。解の定性的性質を調べるには、 $t_R = 1.0\text{ms}$ の場合 $T_0 = 3000\text{ms}$ 以下で十分である。 $t_R = 0.5\text{ms}$ の場合には $T_0 = 1500\text{ms}$ で問題はなかった。

本論文で示した (p, U_f) 状態空間内のアトラクタは p が上昇下降するときと同じ経路を通らずループを描く。Maganza らは McIntyre らの論文⁸⁾から出発し、1本の上に凸な曲線を (p, U_f) 空間内に仮定して、倍周期分岐やカオス振動を得た¹¹⁾。倍周期分岐やカオス振動に限れば、 (p, U_f) 空間内のアトラクタとして、ループ状のあるいは1本の上に凸な曲線を考えるかは本質的な問題ではなさそうである。なおクラリネットの真の $r(t)$ を用いて本論文で示したような分岐図を描かせるには、相当に計算速度の速い計算機の使用が必要である。速度が 30MIPS 程度の計算機を使用する限りでは、 $r(t)$ をガウス関数で近似して例えば 図 4.12 のようなひとつの分岐図を描くのに最低

24 時間は必用である。真の $r(t)$ を用いるのでなければ、ガウス関数以外のもの $r(t)$ を近似する理由は特に見当たらない。

マウスピース内部の形状はかなり複雑であり、その形状寸法から Z_0 および $r(t)$ を計算するのは困難であろう。さらにリードは気柱振動に伴って開閉しているので、マウスピース内部の形状は放射される音と等しい周波数で時間と共に変化している。このような状況をどのように $r(t)$ に反映させるかは相当に難しい問題である。

始めにも述べたように、Schumacher の理論には、 $r(t)$ 以外にもクラリネットにおける現実の条件をそのままに反映しない部分がある。まず、唇がリード及びマウスピースをくわえる深さを表すパラメータ l が含まれていない。次に、理論では口内圧力 P_0 は時間とともに変化する量ではない。しかし、筆者らが実験に用いた人工の口の容積は有限であたために、リードの開閉に伴って人工口内圧力 P_0 には変動 ($p(t)$ の振幅の 2 ~ 4%) が見られた。演奏者の口内圧力も同様であろう。理論はこの点を考慮に入れる必要があるだろう。Schumacher 方程式の問題点を現時点で整理してみると、第 1 に、どのようにすれば正しい反射関数が得られるかを解決する必要がある。マウスピース内部の形状はかなり複雑である。さらにリードは気柱振動に伴って開閉しているので、マウスピース内部の形状は放射される音と等しい周波数で時間と共に変化している。しかし、現在までのところ、反射関数、特性インピーダンスにこのような状況は考慮していない。第 2 に、Schumacher 方程式の解としては、倍周期分岐の結果としてカオス振動が得られたが、実験で観測された多くの準周期的振動状態、またそれに関連してのカオス振動の存在はまだ確かめられていない。その原因の究明が必要である。

クラリネットに関する Schumacher の方程式を解き、各種の周期振動解に加えて、倍周期分岐の結果としてのカオス振動解が得られた。しかしこれまでのところ、準周期解は得られていない。カオス振動解は比較的低い吹鳴圧力範囲で得られた。また、振動状態遷移にはヒステリシスが存在することも確かめられた。その結果、Schumacher 方程式の解は、準周期解が得られないことを除いて、定性的な範囲ではあるが、実験で明らかになったクラリネットの音響学的挙動の特徴を示した。

第 5 章

考察

5.1 実験結果と理論との比較

Schumacher 方程式から得られる計算結果との比較

クラリネットの発音機構に関しては、いくつかの理論³⁾⁻¹¹⁾が公表されているが、その中でも Schumacher 方程式⁷⁾は我々の計測結果と直接比較できるという点において特に重要である。Schumacher 方程式からはマウスピース内圧力変化 $p(t)$ 、リード開口 $x(t)$ 、口から楽器気柱に流入する空気の体積流量 $U_f(t)$ の解が得られる。

クラリネットが最低音 D_3 を放射している状態での振る舞いは、彼の方程式のパラメータを試行錯誤によって適切に調節することで、良く再現できる。調節は必要である。なぜなら、彼の方程式はクラリネットの振動状態を決定するのに重要な役割を持つ、本論文で l と示されたパラメータ (吹鳴器の中へマウスピースが突き出した部分の長さ) を含んでいないからである。以下で D_3 音を放射している振動状態について、本論文で行った実験結果と Schumacher 方程式から得られる計算結果との比較を行う。

計算に用いた反射関数 $r(t)$ は、ベルの形状を考慮し、音孔の影響を無視して計測したクラリネット気柱の寸法値から計算したインピーダンスより求めた^{17),18),37)}。図 5.1 (a) はクラリネットのベル部分の形状を実測した結果である。ベル端からマウスピースの方向へ 200mm 分の長さについて 1mm 毎にその位置での管の半径を示した。図 5.1 (b) はベル部の形状を考慮せず、長さ 665mm、内径 14.5mm 円筒管から求められた反射関数である。図 5.1 (c) は (a) に示したデータを長さ 465mm、内径 14.5mm 円筒管に付けた場合の反射関数である。図 5.1 (b) と比較すると反射波の形が大きく変形され、ベルによる影響が大きいことがわかる。

図 5.2 (a) ~ (c) は人工吹鳴実験で観測された振動状態 $6 - D_3$ での (a) (p, v) , (b) (v, x) , (c) (p, x) 状態空間におけるアトラクタである。図 5.1 (c) に示した反射関数を用い $x_0 = 0.5\text{mm}$, $P_0 = 3.3\text{kPa}$ として Schumacher 方程式を計算した結果を図 5.2 (d) ~ (f) に示す。図 5.2 (d) ~ (f) はそれぞれ (d) (p, U_f) , (e) (U_f, x) , (f) (p, x) 状態空間におけるアトラクタである。Schumacher 方程式の計算は基本的に彼の論文中にあるパラメータ値をそのまま用い サンプルング周期 $t_s = 0.01\text{ms}$ で行った。ベルスー

イ力は無視した。図 5.2 (a) ~ (f) はいずれも 20ms 分を示している。人工吹鳴実験で $U_f(t)$ は測定しなかったが $x(t), v(t)$ の測定結果とリードの幅 w を用いれば $U_f(t) \doteq w \cdot x(t) \cdot v(t)$ である。しかし、 w は一定値であり、クラリネットが D_3 音 (楽器の最低音) を放射している状態では $v(t)$ が 0 でない範囲では $x(t)$ は殆ど一定値をとるから、 $U_f(t)$ と $v(t)$ はほぼ比例する。

図 5.2 (a) (p, v), (b) (v, x), (d) (p, U_f), (e) (U_f, x) 状態空間の軌道にはヒステリシスが存在する。図 5.2 (c) (p, x), (f) (p, x) 状態空間の軌道にはヒステリシスは存在せず、 $p-x$ の関係は比例関係にある。図 5.2 (a) (p, v) 状態空間の軌道において p が高いところで小さなループが現れる箇所が存在するが、これは 図 5.2 (d) (p, U_f) 状態空間の軌道においても対応するところに現れる。同様に 図 5.2 (b) (v, x) 状態空間、(e) (U_f, x) 状態空間の軌道に現れるループも対応するところに現れる。

以上に示した様に D_3 音を放射している周期的振動状態について、本論文で行った実験結果と Schumacher 方程式から得られた計算結果を状態空間内のアトラクタを用いて比較した結果は定性的には良く似ていた。

McIntyre 理論との比較

口の中の圧力がマウスピース内の圧力よりも高ければリード開口は x_0 よりも小さく、空気は口から楽器の中へ流れ込む。口の中の圧力を一定と仮定するとき、 $U_f(t)$ はマウスピース内圧力の関数と考えることが可能であり、例えば Benade の著書²⁰⁾ や McIntyre らの論文⁸⁾ においては、 $U_f - p$ 曲線を一本の放物線

$$U_f(t) \doteq k(p - P_0)(p_1 - p) \quad (5.1)$$

あるいは 3 次曲線の一部と仮定している。図 5.3 は McIntyre らの仮定した U_f と p の関係を表した図である。図 5.3 において、曲線の水平な部分ではマウスピース内圧力が小さくリードが閉じ、その結果 $U_f = 0$ である。マウスピース内圧力が少し上昇するとリードは少し開き $U_f > 0$ となる。マウスピース内圧力の上昇と共に U_f も増加するが、次第に口中とマウスピース内の圧力差が小さくなるので U_f は再び減少に転ずる。マウスピース内圧力が口中の圧力よりも大となると空気は楽器から口の中に逆流する。

図 5.3 は静的な特性であり、本論文での測定や Schumacher 方程式から得られる動的な特性とは異なる。また、図 5.3 は $p(t) > P_0$ の部分で $U_f(t) < 0$ となるが、本論文で示した実験結果では多くの場合で $v(t) > 0$ であった。 $v(t) < 0$ となり、 $U_f(t) < 0$ となる明確な証拠は見あたらなかった。

本論文に示す p, x, v, P 波形の関連については、なぜそうなるのかまだ不明な点がある。クラリネットの発音機構に関する理論の今後の発展にとって重要である。本論文に示す実験事実を説明する理論の出現が望まれる。

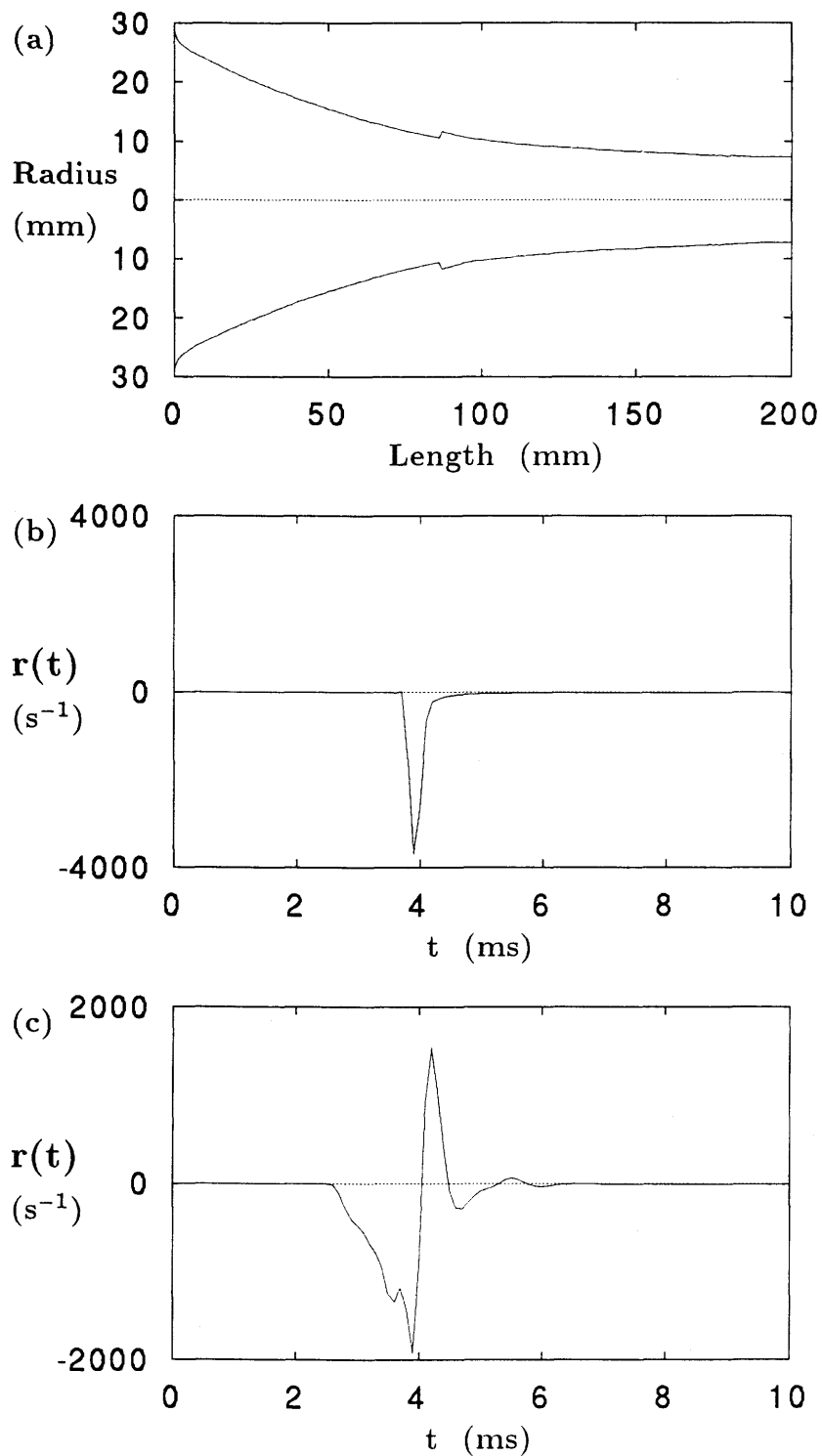


図 5.1: ベルの形状を考慮した反射関数 $r(t)$ (a) 実測したベル部分の形状, (b) 円筒管 (長さ 665mm, 内径 14.5 mm) の $r(t)$, (c) (a) に示したデータ + 円筒管 (長さ 465mm, 内径 14.5 mm) の $r(t)$

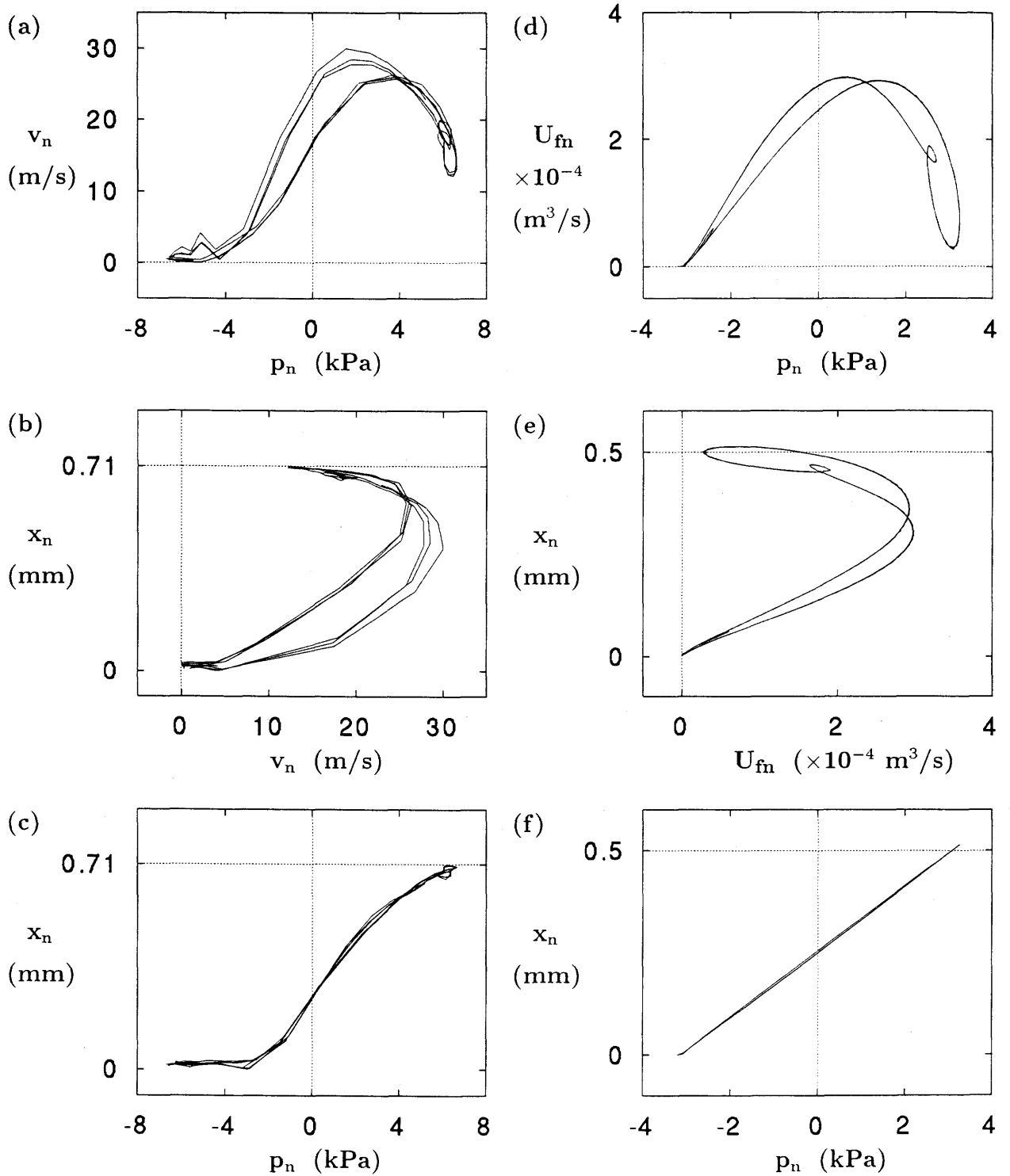


図 5.2: 人工吹鳴実験と Schumacher 方程式から得られる状態空間アトラクタの比較
 [左列] 人工吹鳴実験から得られた振動状態 6 - D₃
 [右列] Schumacher 方程式から得られる振動解 ($x_0=0.5\text{mm}$, $P_0=3.1\text{kPa}$)

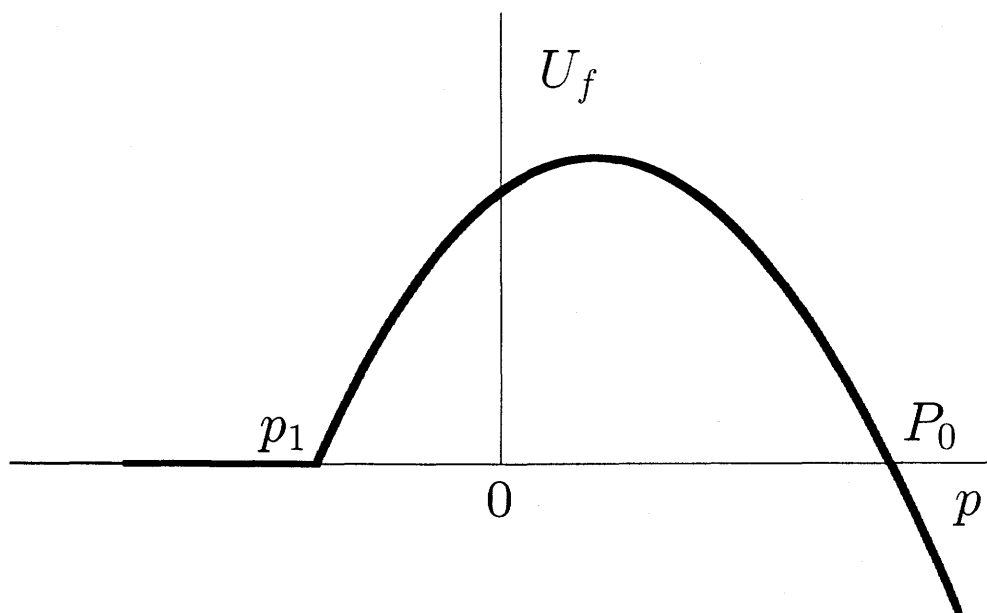


図 5.3: McIntyre らの仮定した $U_f - p$ 曲線

5.2 高周波数の音の原因

音孔を全て閉じた管体気柱の基本周波数よりも高い振動周波数はおそらくマウスピース、リード、唇、あるいはそれらの複雑な非線形相互作用によって生じると考えられる。

表 5.1 は気柱の長さによって吹鳴される音との関係を示す³⁶⁾。表 5.2 は表 5.1 に現れる平均律音階の音名の周波数を表す。クラリネット管体をベルの部分から順に取り除いていくにしたがって、演奏家が励起できる振動状態の最低音周波数は高くなっていく。しかし、高周波数の音は管体の長さに関係なく吹鳴される。lip adjustment を調節することによって表 5.1 に示した以外にも多くの音が放射される。

一方、マウスピースと唇圧力下のリードの共鳴周波数は lip adjustment に大きく依存することが報告されている³⁸⁾。

励起される高周波数の音の原因について、lip adjustment、気柱内部の形状、リードの共鳴周波数との正確な関係を確かめるためには、さらなる実験が必要である。

Bore length	Radiated tones
Complete Clarinet	D ₃ F ₅ B ₅ ^b D ₆ F ₆ B ₆ ^b
Clarinet without bell	D ₃ [#] F ₅ [#] C ₆ E ₆
Clarinet without lower joint	B ₃ F ₅ [#] D ₆ A ₆ ^b
Mouthpiece and barrel only	squeals higher than D ₅
Mouthpiece alone	squeals higher than A ₅

表 5.1: 気柱の長さによって吹鳴される音との関係

notes	frequency (Hz)	notes	frequency (Hz)
D ₃	146.83	B ₅ ^b	932.33
D ₃ [#]	155.56	C ₆	1046.5
B ₃	246.94	D ₆	1174.7
D ₅	587.33	E ₆	1318.5
F ₅	698.46	F ₆	1396.9
F ₅ [#]	739.99	A ₆ ^b	1661.2
A ₅	880.00	B ₆ ^b	1864.7

表 5.2: 平均律音階における音名の周波数

5.3 演奏者により吹鳴されたクラリネットの非周期振動

本節では、音孔を全て閉じた状態で演奏者により吹鳴されたクラリネットから放射される非周期振動について述べる。ここで示すデータはヤマハ株式会社 AE 開発グループ (元楽器研究所) の渡辺 邦彦 氏が吹鳴したクラリネットから得られた。使用した楽器、マウスピース、リードを表 5.3 に示す。

渡辺氏はクラリネットの吹鳴音を楽器前方 70cm に置いたワンポイント・ステレオマイク (SONY ECM - 990F) と DAT (Digital Audio Tape) レコーダにより録音した。

使用クラリネット	: ヤマハ社 モデル 350
使用マウスピース	: ヤマハ 4C
使用リード	: Vandoren 3
吹奏音程	: 最低音 D ₃ 付近

表 5.3: 演奏者による吹鳴に使用した楽器

録音テープから DAT 再生器 (SONY MODEL NO. DTC-77ES) により得られる再生信号を遮断周波数 9.46kHz、それ以上の周波数では 24dB/Octave の減衰を持つ低域ろ波器に通した後、サンプリング周期 $t_s = 0.05$ ms で A/D 変換を行い、計算機に取り込んだ。

A/D 変換後の時系列をここでは、

$$\{a_n\} \equiv \{a(nt_s)\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (5.2)$$

と表す。ここで N はサンプリング点数である。本章で示す測定波形やパワースペクトル、アトラクタはすべて計算機に記憶されたデジタル時系列からの出力である。

図 5.4 はその結果得られた典型的な波形とそのパワースペクトルである。パワースペクトルは、 $t_s = 0.05$ ms でサンプルされた離散データにハミング窓をかけた後、FFT (高速フーリエ変換) により求めた。FFT の点数は $2^{14} = 16384$ である。従って、パワースペクトルの分解能は $20\text{kHz}/16384 = 1.22\text{Hz}$ である。

人工吹鳴実験から得られた多数の周期的、非周期的な振動状態の吹鳴音は、実際に熟練した演奏者によっても出し得た。また、Keefe¹⁵⁾ は、クラリネットの音孔を特別な運指でおさえることにより吹鳴される multiphonic 音について非線形振動の立場から報告を行っている。これらのことから人工吹鳴実験で得られた振動状態は機械により人工的に吹鳴したために作り出された特別な振動ではないことが判る。

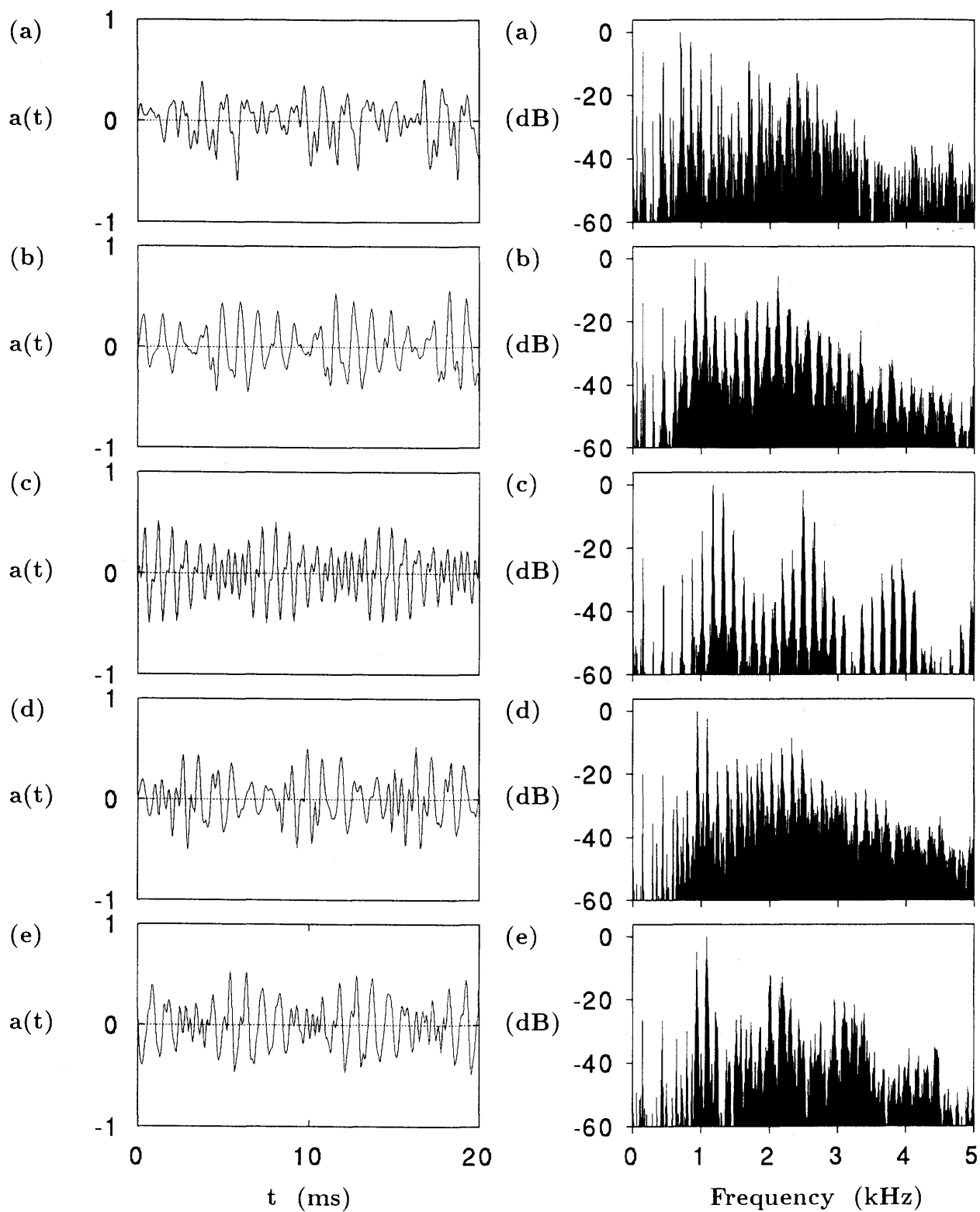


図 5.4: 演奏者により吹鳴されたクラリネットの非周期振動
 [左列] 波形, [右列] パワースペクトル

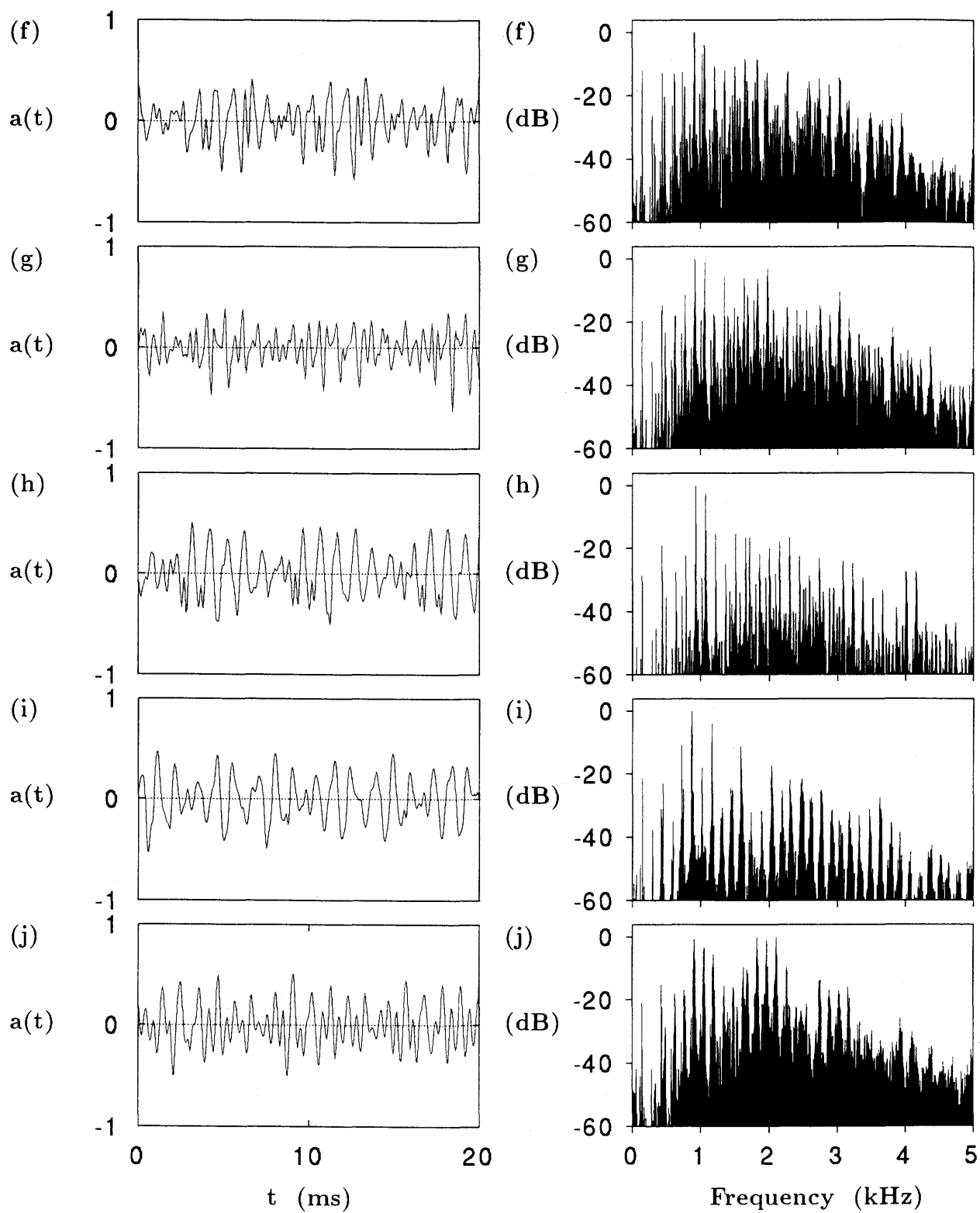


図 5.4: 演奏者により吹鳴されたクラリネットの非周期振動
 [左列] 波形, [右列] パワースペクトル

第 6 章

結論

クラリネットの発音機構を解明する目的で、その人工吹鳴実験を行い、またその音響学的挙動の計算機シミュレーションを行った。さらに参考データとして、吹奏されたクラリネットの非周期音の例を第 5 章に示した。以下に結論を述べる。

人工吹鳴実験に対する結論 クラリネットの音孔を全て閉じ、機械により人工的に吹鳴する実験を行った。人工の唇がマウスピースをくわえる深さと強さ、すなわち lip adjustment を固定した状態で吹鳴器内の平均圧力を 0 からリードが閉じるまでの広い範囲で上昇あるいは下降させ、音孔をすべて閉じたクラリネットに励起される振動状態とその振動状態間の遷移について観測した。励起された各振動状態においてマウスピース内圧力変化 $p(t)$ 、リード開口 $x(t)$ 、吹鳴器から気柱に流れ込む空気流速 $v(t)$ 、吹鳴器内圧力変化 $P(t)$ を測定した。その結果明らかになった主な事柄は次の 3 点である。

(1) lip adjustment を適切に調節すると、吹鳴圧力の比較的高い範囲で、音楽の演奏中に用いられるような良質の D_3 音が得られる。これはバスーン、オーボエ、そしてソプラノサクソフォンなどのような円錐気柱楽器とはまさに正反対である。円錐気柱楽器では音楽的に好ましいと思われる音は低い吹鳴圧力範囲で得られる。

(2) 吹鳴圧力を広い範囲で上昇あるいは下降させるとき、クラリネットからは様々な音が放射される。それらは、実験に用いた楽器の最低音である D_3 音以外に、通常リードミスと呼ばれる高いピッチの音、さらに準周期あるいはカオス的な非周期音である。これらの音は、クラリネット気柱に励起されたそれぞれの気柱振動によるものである。人工吹鳴実験から得られた多数の周期的、非周期的な振動状態の吹鳴音は、実際に熟練した演奏者によっても発生された。このことから実験で得られた振動状態は機械により人工的に吹鳴したために作り出された特別な振動ではないことが判る。

(3) lip adjustment を一定に保った状態でしかも同じ吹鳴圧力のもとでも、吹鳴圧力を上昇させるかあるいは下降させるかによって異なる気柱振動状態が励起される場合がある。すなわち、吹鳴圧力の上昇下降に伴って生じる振動状態遷移にヒステリシスが見れる。どの振動状態が励起されるかは直前に励起されていた振動状態と吹鳴圧力の変化方法に依存する。この結果は他のリード木管楽器（バスーン、オーボエ）についても観測されている。

測定結果の解析に対する結論 人工吹鳴実験で得られた典型的な振動状態を主に非線形振動論の手法を用い、以下の 5 項目に着目して解析した。

- (i) $p(t), x(t), v(t), P(t)$ の波形とパワースペクトル、
- (ii) $p(t), x(t), v(t), P(t)$ から得られる (p, x, v, P) 状態空間におけるアトラクタ、
- (iii) 多次元相空間における再構成アトラクタ、
- (iv) 再構成アトラクタの相関次元 d_2 、
- (v) 再構成アトラクタの最大リアプノフ指数 λ_{\max} 。

その結果からクラリネットには多くの周期的、準周期的振動、ならびにカオス振動が励起されることが明らかになった。実験で得られたアトラクタの基本形状は T^2 トーラス、 T^3 トーラス、そしてカオス的なアトラクタである。振動状態の分類は主に $p(t)$ のパワースペクトルと $p(t)$ から再構成したアトラクタの基本形状によって行い、相関次元 d_2 の値、最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} の計算結果は参考のために用いた。良く知られているように、非周期的振動状態から得られる再構成アトラクタの d_2 の計算には大きな誤差が含まれる。また、最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} を時系列から計算する方法を採用した。その結果、多くの場合で計算曲線の平均値は僅かに正となった。アトラクタの次元、Lyapunov 指数の正確な推定は今後の検討課題である。

測定した波形の解析から得られる重要な結論は以下の通りである。

- (1) 周期的振動状態においては、リード開口はリードの動きが唇あるいはマウスピーススレイによって制限されることを除いては、マウスピース内圧力に比例する。
- (2) 非周期的振動状態においては、少なくとも マウスピース内圧力と リード開口の両方を測定すべきである。なぜならこれらはあまり関係なく変化するからある。
- (3) 空気流速は マウスピース内圧力があまり高くないときは、およそ リード開口に比例する。しかしながら、マウスピース内圧力が増して吹鳴器内圧力と マウスピース内圧力の差が小さくなるにつれ、リード開口が増しても空気流速は減少する。
我々の実験結果に関する限り、楽器気柱から吹鳴器に向かう空気の逆流の存在は認め

られなかった。マウスピース内圧力が吹鳴器内圧力よりも大となる振動状態は発見されず、マウスピースから吹鳴器への空気流の明確な証拠は見られなかった。

(4) 殆どの振動状態において、リード振動の振幅は、マウスピースレイまたは人工の唇またはその両方に制限されるが、小数の状態では何れにも制限されない。リード変位の制限と吹鳴パラメータ（唇の調節と吹鳴圧力）の間に関連した規則は見いだせなかった。

(5) これらの実験に使用した人工の口の中の圧力は、実験中ほぼ一定に保たれていたのでクラリネット系の振動には殆ど関与しないと考えられる。

Schumacher 方程式を用いたシミュレーションに対する結論 クラリネットの発音機構を記述する Schumacher の方程式 [Acustica 48, 71-85, (1981)] の解を計算した。気柱の反射関数は簡単な Gauss 関数とし、微分方程式は台形法による差分方程式に置き換えた。解の計算に際しては、クラリネット気柱の特性インピーダンスの値、および反射関数において極小値が現れるまでの時間は、Schumacher の論文で用いられている値から出発したが、それには固執せずに、カオス振動解および振動状態遷移のヒステリシスが得られるまで変化させた。これらの値はマウスピースの構造を考えると非現実的な値ではないと考えられる。計算の結果は、定性的な範囲ではあるが、実験で明らかになったクラリネットの挙動の特徴を示した。

(1) 連立非線形微積分方程式の解として、各種の周期振動解に加えて、倍周期分岐の結果としてのカオス振動解が得られた。カオス振動解は従来よりも高い特性インピーダンスを用いるとき比較的低い吹鳴圧力範囲で得られた。

(2) 吹鳴圧力を上昇下降させるとき振動状態の遷移にはヒステリシスが見られた。

謝辞

本研究は筑波大学名誉教授となられた井戸川徹先生(元・筑波大学物理工学系教授、現・埼玉工業大学教授)のご指導のもとに行われました。先生にはクラリネットの発音機構に関する貴重な研究の機会を与えて頂き、学部4年生の研究開始から修士過程での研究の間は指導教官として、研究を進めるに当たっての考え方から論文執筆に至るまで丁寧に御指導頂きました。筑波大学を退官された後も研究全般にわたって終始暖かいご指導をして頂きました。ここに深く感謝の意を表します。

筑波大学物理工学系永井啓之亮教授には研究室に入ってから6年間、特に博士後期過程の3年間は指導教官として厚くご指導頂きました。修士課程からの研究を続けさせて頂き、公私にわたり多くのことを教えて頂きました。同教授に厚く感謝致します。

筑波大学物理工学系水谷孝一講師には研究の進め方、また論文執筆に対する心構えについて有意義な議論を頂きました。ここに深く感謝致します。

筑波大学物理工学系井上多門教授、小川泰教授、鈴木哲郎教授には論文をまとめるにあたり、有益な助言と励ましのお言葉を頂きました。ここに深く感謝致します。

日本音響学会音楽音響部門では講演発表を通じて多くの方々からご意見を頂きました。厚く感謝致します。

また、「音響系・光学系におけるカオス」のテーマで行われた研究会では元京都大学基礎物理学研究所教授池田研介教授、及び九州工業大学高橋公也助教授に御教示を頂きました。深く感謝致します。

物理工学系平田隆幸講師には非線形振動論について、折りにふれて御教示を頂きました。厚く感謝致します。

さらに研究を進めるにあたって多くの有益な議論をして頂いた筑波大学物理工学系井戸川・永井・水谷研究室の歴代の皆様に感謝致します。

最後にここに至るまで、常に励まし援助してくれた我が両親に感謝します。

参考文献

- [1] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments* (Springer-Verlag, New York), 71-85 (1991).
- [2] J. Backus, "Vibration of the reed and the air column in the clarinet," *J. Acoust. Soc. Am.* **33**, 806-809 (1961).
- [3] J. Backus, "Small vibration theory of the clarinet," *J. Acoust. Soc. Am.* **35**, 305-313 (1963).
- [4] W. E. Worman, Self-sustained non-linear oscillations of medium amplitude in clarinet-like systems," Ph. D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, OH (1971).
- [5] R. T. Schumacher, "Self-Sustained oscillations of the clarinet: an integro-differential equation approach," *Acoustica* **40**, 298-309 (1978).
- [6] S. Thompson, "The effect of the reed resonance on woodwind tone production," *J. Acoust. Soc. Am.* **66**, 1299-1307 (1979).
- [7] R. T. Schumacher, "Ab Initio Calculations of the Oscillations of a Clarinet," *Acoustica* **48**, 71-85 (1981).
- [8] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse, "On the oscillations of musical instruments," *J. Acoust. Soc. Am.* **74**, 1325-1345 (1983).
- [9] S. Stewart and W. Strong, "Functional model of a simplified clarinet," *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 109-120 (1980).
- [10] S. Sommerfeldt and W. Strong, "Simulation of a player-clarinet system," *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1908-1918 (1988).
- [11] C. Maganza, R. Causse, and F. Laloe, "Bifurcations, period doublings and chaos in clarinet-like systems," *Europhys. Lett.* **1** (6), 295-302 (1986).
- [12] V. Gibiat, "Phase space representations of acoustical musical signals," *J. Sound Vib.* **123**, 529-536 (1988).

- [13] M. Shimizu, T. Naoi, and T. Idogawa, "Vibrations of the reed and the air column in the bassoon," *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)* **10**, 269-278 (1989).
- [14] T. Idogawa, M. Shimizu, and M. Iwaki, "Acoustical behavior of an oboe and a soprano saxophone artificially blown," in *Proceedings of the Symposium on Some Problems on the Theory of Dynamical Systems in Applied Sciences* (World Scientific, Singapore, 1991), Vol. 10.
- [15] D. H. Keefe and B. Laden, "Correlation dimension of woodwind multi-phonetic tones," *J. Acoust. Soc. Am.* **90**, 1754-1765 (1991).
- [16] W. Lauterborn and U. Parlitz, "Methods of chaos physics and their application to acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1875-1993 (1988).
- [17] G. Plitnik and W. Strong, "Numerical method for calculating input impedances of the oboe," *J. Acoust. Soc. Am.* **65**, 816-825 (1979).
- [18] R. Causse, J. Kergomard, and X. Lurton, "Input impedance of brass musical instruments — Comparison between experimental and numerical models," *J. Acoust. Soc. Am.* **75**, 241-254 (1984).
- [19] W. Lauterborn and E. Cramer, "Subharmonic Route to Chaos observed in Acoustics," *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1445-1448 (1981).
- [20] A. H. Benade, *Fundamentals of Musical Acoustics* (Oxford University Press, New York), 435-439 (1976).
- [21] J. Gilbert, J. Kergomard and E. Ngoya, "Calculations of the steady-state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique," *J. Acoust. Soc. Am.* **86**, 35-41 (1989).
- [22] C. J. Nederveen, *Acoustical Aspects of Woodwind Instruments* (Frits Kumpf, Amsterdam), pp. 28-37 (1969).
- [23] P. Bergè, Y. Pomeau, and C. Vidal, "Order within chaos," John Wiley and Sons, (1984).
- [24] F. C. Moon, "Chaotic vibrations," John Wiley and Sons, (1987).
- [25] 高安 秀樹, "フラクタル科学," 朝倉書店, (1987).
- [26] F. Takens, "Detecting Strange attractors in Turbulence," *Lect. Notes in Mathematics*, **898**, 366-381 (1981).
- [27] P. Grassberger and I. Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," *Physica*, **9D**, 189 (1983).

- [28] P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of Strange Attractors," Phys. Rev. Lett, **50**, 346-349 (1983)
- [29] P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal," Phys. Rev. **28A**, 2591-2593 (1983).
- [30] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," Physica, **16D**, 285 (1985).
- [31] M. Sano and Y. Sawada, "Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series," Phys. Rev. Lett, **55**, 1082-1085 (1985).
- [32] S.Sato, M. Sano, and Y. Sawada, "Practical Method of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimension Chaotic systems," Prog. Theor. Phys, **77**, 1/5 (1987).
- [33] 石橋 雅裕, 井戸川 徹, "バスーンにおけるリードの振動とボーカル入口音圧," 日本音響学会誌, **41**, 752 (1985).
- [34] 名取 亮, "数値解析とその応用," コロナ社, (1990).
- [35] 石橋 雅祐, "バスーンの定常発音," 筑波大学工学研究科博士論文, (1985).
- [36] 岩城 正和, "オーボエとクラリネットにおけるリード振動波形の測定," 筑波大学理工学研究科修士論文, (1990).
- [37] 小室 孝治, "シングルリード木管楽器における気柱振動の計算機シミュレーション," 筑波大学工学研究科修士論文, (1990).
- [38] 小野寺 健一, "クラリネットリードの力学的性質," 筑波大学理工学研究科修士論文, (1993).

著者文献

- [a] Tokihiko Kobata and Tohru Idogawa, "Attractors of stable vibrations excited in the clarinet artificially blown," Proceedings of International Symposium on Musical Acoustics 92, Tokyo, 155-158 (1992).
- [b] Tohru Idogawa, Tokihiko Kobata, Kouji Komuro, and Masakazu Iwaki, "Nonlinear vibrations in the air column of a clarinet artificially blown," J. Acoust. Soc. Am. **93**, 540-551 (1993).
- [c] Tokihiko Kobata and Tohru Idogawa, "Measurement of the variables concerned in the sounding of a clarinet artificially blown," Proceedings of the STOCKHOLM MUSIC ACOUSTICS CONFERENCE JULY 28-AUGUST 1, 1993, the Royal Swedish Academy of Music No 79, Stockholm, 501-504, (1994).
- [d] Tohru Idogawa and Tokihiko Kobata, "Complicated behaviors of a clarinet artificially blown," Towards the Harnessing of Chaos, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 227-239 (1994).
- [e] Tokihiko Kobata and Tohru Idogawa, "Pressure in the mouthpiece, reed opening, and air-flow speed at the reed opening of a clarinet artificially blown," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) **14**, 417-428 (1993).
- [f] 井戸川 徹, 小島 時彦, "リード木管楽器の人工吹鳴実験," 物性研究, **62**, 620-633 (1994).
- [g] 小島 時彦, 井戸川 徹, "Schumacher 方程式から得られる分岐図," 物性研究, **62**, 652-663 (1994).
- [h] 小島 時彦, 井戸川 徹, "クラリネットに関する Schumacher 方程式から得られる倍周期分岐、カオス、及び振動状態遷移のヒステリシス," 日本音響学会誌 (投稿中), (1994).
- [i] 岩城 正和, 小島 時彦, 井戸川 徹, "クラリネットを励振する空気流速波形の測定," 日本音響学会平成 2 年度春期研究発表会, 講演番号 2-6-11, (1990).

- [j] 岩城 正和, 小島 時彦, 井戸川 徹, "人工吹鳴されるクラリネットの音響学的振舞," 日本音響学会音楽音響研究会資料, MA90-2, (1990).
- [k] 小島 時彦, 井戸川 徹, "クラリネットにおける気柱振動の first return map," 日本音響学会平成 2 年度秋期研究発表会, 講演番号 2-4-18, (1990).
- [l] 小島 時彦, 井戸川 徹, "クラリネットの非線形振動," 日本機械学会 [No.910-41] 環境工学総合シンポジウム'91 講演論文集 215, 川崎市, (1991).
- [m] 井戸川 徹, 小島 時彦, "管楽器研究におけるカオス物理学の手法," 日本音響学会音楽音響研究会資料, MA91-9, (1991).
- [n] 小島 時彦, 井戸川 徹, "クラリネット気柱の非線形振動," 日本音響学会音楽音響研究会資料, MA91-10, (1991).
- [o] 小島 時彦, 井戸川 徹, "クラリネットに類似な系の気柱振動における反射関数の影響," 日本音響学会平成 4 年度春期研究発表会, 講演番号 3-6-2, (1992). (日本音響学会 粟屋 潔 学術奨励賞受賞候補者として第 1 次選定)
- [p] 小島 時彦, 永井 啓之亮, 井戸川 徹, "クラリネット気柱振動のリアプノフ指数," 日本音響学会平成 4 年度秋期研究発表会, 講演番号 2-7-12, (1992).
- [q] 小島 時彦, 永井 啓之亮, 井戸川 徹, "クラリネットに類似な系に励起される振動状態遷移のヒステリシス," 日本音響学会平成 5 年度春期研究発表会, 講演番号 2-3-7, (1993).
- [r] 小島 時彦, 井戸川 徹, 永井 啓之亮, 水谷 孝一, "クラリネットに類似な系に励起される振動 (数値計算)," 日本音響学会平成 5 年度秋期研究発表会, 講演番号 1-6-11, (1993).
- [s] 小島 時彦, 井戸川 徹, 水谷 孝一, 永井 啓之亮, "Schumacher 方程式から得られる周期倍分岐," 日本音響学会平成 6 年度春期研究発表会, 講演番号 2-2-17, (1994).
- [t] 小島 時彦, 井戸川 徹, 水谷 孝一, 永井 啓之亮, "Schumacher 方程式から得られる振動状態遷移," 日本音響学会平成 6 年度秋期研究発表会, 講演番号 2-9-6, (1994). (日本音響学会 粟屋 潔 学術奨励賞受賞候補者として第 1 次選定)
- [u] 小島 時彦, "クラリネットを励振する空気流の速さ測定," 筑波大学基礎工学類卒業論文, (1990).
- [v] 小島 時彦, "クラリネット気柱の非線形振動," 筑波大学工学研究科修士論文, (1992).

付録

Schumacher 方程式の台形法を用いた解法

Schumacher 方程式は式 (A.1) - 式 (A.6) から成る非線形連立微積分方程式である。式中に含まれる変数およびパラメータについては 4.1 節に示した。式 (A.5)、式 (A.6) に現れる変数 p_{inc} は反射関数 $r(t)$ を用いて計算される反射波の圧力である。ここでは台形法を用いた式 (A.1) - 式 (A.6) の解法を示す。

$$\ddot{x} + g_r \dot{x} + \omega_0^2(x - x_0) = \frac{p - P_0}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{w} \frac{U^2}{x(\tan 30^\circ)\mu S_r} \quad (\text{A.1})$$

$$M_e \dot{U}_f = P_0 - p - \frac{|U_f|^{3/2} \cdot \text{sgn}(U_f)}{A^{3/2} x^2} \quad (\text{A.2})$$

$$M_e(x) = \frac{\rho}{2\pi w} \sqrt{\frac{w}{x}} \left\{ 1 + 2 \ln \left(\frac{2w}{x} \right) \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$U = U_f - S_r \dot{x} \quad (\text{A.4})$$

$$p = Z_0 U + p_{inc} \quad (\text{A.5})$$

$$p_{inc} = \int_0^\infty r(t') \cdot \{Z_0 U(t - t') + p(t - t')\} dt' \quad (\text{A.6})$$

数値計算

式 (A.1) はリードの運動方程式であり、リード開口 $x(t)$ に関する 2 階微分方程式で与えられている。これを $x(t)$ の 1 階微分 $v(t)$ を用いて 2 つの 1 階微分方程式で表すと

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{p - P_0}{\mu} - g_r v - \omega_0^2(x - x_0) \quad (\text{A.8})$$

簡単のため、ベルヌーイ力は無視した。ベルヌーイ項の有無によって結果に生ずる差はシングルリードの場合極めて小さいので、Schumacher 自身の論文においても解の計算を行う際にはこの項は無視されている。

式 (A.2) はスリットを通過して気柱に流入する空気の運動方程式であり、口から楽器気柱に流入する空気の体積流量 $U_f(t)$ を用いて記述されている。この式を変形すると

$$\frac{dU_f}{dt} = \frac{1}{M_e(x)} \left\{ P_0 - p - \frac{|U_f|^{3/2} \cdot \text{sgn}(U_f)}{A^{3/2} x^2} \right\} \quad (\text{A.9})$$

となる。

台形法を用いて式 (A.7) - 式 (A.9) の 1 階微分方程式を近似公式で置き換えると

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\delta t}{2} \cdot \{v_i + v_{i+1}\} \quad (\text{A.10})$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\delta t}{2} \cdot \left\{ \frac{p_i + p_{i+1} - 2P_0}{\mu} - g_r(v_i + v_{i+1}) - \omega_0^2(x_i + x_{i+1} - 2x_0) \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$(U_f)_{i+1} = (U_f)_i + \frac{\delta t}{2} \cdot \{\zeta_i + \zeta_{i+1}\} \quad (\text{A.12})$$

が得られる。ここで ζ_i は

$$\zeta_i = \frac{1}{M_e(x_i)} \left[P_0 - p_i - \frac{|(U_f)_i|^{3/2} \cdot \text{sgn}\{(U_f)_i\}}{A^{3/2} x_i^2} \right] \quad (\text{A.13})$$

である。

x_{i+1} を求めるためには式 (A.10)、式 (A.11) から

$$x_{i+1} = \frac{1}{\eta} \left\{ \left(\frac{2}{\delta t} + g_r - \frac{\delta t}{2} \omega_0^2 \right) x_i + 2v_i + \frac{\delta t}{2} \cdot \frac{p_i + p_{i+1} - 2P_0}{\mu} + \omega_0^2 x_0 \delta t \right\} \quad (\text{A.14})$$

を計算する。ここで η は

$$\eta = \frac{2}{\delta t} + g_r + \frac{\delta t}{2} \omega_0^2 \quad (\text{A.15})$$

である。

v_{i+1} は計算された x_{i+1} を用いて式 (A.11) から逆算する。

式 (A.4)、式 (A.5) を式 (A.14) に代入すると

$$\alpha |(U_f)_{i+1}|^{3/2} \cdot \text{sgn}\{(U_f)_{i+1}\} + \beta (U_f)_{i+1} - \gamma = 0 \quad (\text{A.16})$$

が得られる。ここで α, β, γ はそれぞれ

$$\alpha = A^{-3/2} \quad (\text{A.17})$$

$$\beta = \left\{ \frac{2M_e(x_{i+1})}{\delta t} + Z_0 \right\} (x_{i+1})^2 \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma = \left\{ P_0 - (p_{inc})_{i+1} + Z_0 S_r v_{i+1} + \frac{2\{M_e(x_{i+1})\}(U_f)_i}{\delta t} + \{M_e(x_{i+1})\}\zeta_i \right\} (x_{i+1})^2 \quad (\text{A.19})$$

である。式 (A.16) を解くにはニュートンの反復法を用いて

$$(U_f)_{n+1} = (U_f)_n - \frac{\alpha|(U_f)_n|^{3/2} \cdot \text{sgn}\{(U_f)_n\} + \beta(U_f)_n - \gamma}{(3/2)\alpha|(U_f)_n|^{1/2} + \beta} \quad (\text{A.20})$$

を

$$\left| \frac{(U_f)_{n+1} - (U_f)_n}{(U_f)_n} \right| < 10^{-3} \quad (\text{A.21})$$

となるまで計算し、そのときの $(U_f)_{n+1}$ を $(U_f)_{i+1}$ とする。

リード変位はマウスピースにより制約を受けるので $x(t) < 0\text{mm}$ となることはない。計算上 $x(t) < 0\text{mm}$ の状態になるときは $x(t) = 0\text{mm}$, $U_f(t) = 0\text{m}^3/\text{s}$ とした。

式 (A.6) で与えられている (p_{inc}) は

$$(p_{inc})_i = \sum_{j=0}^{\infty} [r_j \{Z_0(U_f)_{i-j} + p_{i-j}\} \delta t] \quad (\text{A.22})$$

を計算し、近似的に求めた。

初期条件は $t \leq 0$ で

$$\begin{cases} p(t) & = 0 \text{ kPa} \\ x(t) & = x_0 \text{ mm} \\ U_f(t) & = 0 \text{ m}^3/\text{s} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

とした。