

氏名(本籍)	横 ^{よこ} 田 ^た 巧 ^{たくみ} (山梨県)		
学位の種類	博士(数学)		
学位記番号	博甲第5191号		
学位授与年月日	平成21年9月30日		
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当		
審査研究科	数理物質科学研究科		
学位論文題目	Comparison geometry of ancient solutions to the Ricci flow (リッチ流の古代解の比較幾何)		
主査	筑波大学教授	理学博士	山口孝男
副査	筑波大学教授	理学博士	磯崎洋
副査	筑波大学教授	理学博士	伊藤光弘
副査	筑波大学教授	理学博士	加藤久男

論文の内容の要旨

G.Perelman は、2002 年、2003 年に発表した論文プレプリントにおいて、1980 年代初めから R. Hamilton が開発してきたリッチ流による手法を基本的手法として用いることにより、ポアンカレ予想、そしてそれを含む 3 次元多様体の幾何化予想を解決した。この歴史的な画期的研究において、Perelman は、おおまかに述べて 2 つの重要な概念を発見し、その単調性を証明した。一つはリッチ流のエントロピーの概念であり、もう一つは簡約体積なる概念である。この内、後者の簡約体積なる概念は、Perelman の論文全般において非常に重要な役割を果たすものである。簡約体積は、一言で言えばリーマン多様体の体積の類似であるが、リッチ流に伴った熱核の類似の積分により定義されるもので、その定義は単なる体積に比べて遥かに複雑である。しかしその複雑さはリッチ流の本質を鋭く捉えるものである。もっと簡単に述べれば、Perelman は、リッチ流に対してリーマン幾何的類似による比較幾何を展開し、簡約体積なる概念を発見しその単調性を証明した、とも云えよう。また、この単調性は、リーマン幾何における Bishop-Gromov の体積比較定理の類似とも考えられる。Hamilton が越えられなかった事の中でまず問題になるのは、リッチ流の特異点が現れたときに局所非崩壊定理を得ることであった。Perelman は、簡約体積の単調性を基本的道具として、局所非崩壊定理の証明に成功し、Hamilton の前に立ちはだかっていた壁を突き破ったのであった。

本博士論文において横田巧氏は、この重要な概念であるリッチ流の簡約体積の幾何解析に取り組んでいる。但し、主な研究対象として取り上げたものは、リッチ流の中でも解が時間マイナス無限大まで定義される、古代解とよばれるリッチ流である。一般にリッチ流を走らせると特異点が現れる。リッチ流の特異点の幾何解析が、リッチ流研究の中で本質的重要性を持つことは、Perelman の論文を振り返るまでもなく自明なことであろう。特異点が現れる寸前でリッチ流をブローアップさせると極限として古代解が得られる。この事実により、リッチ流の特異点の幾何解析において古代解が重要性をもつことになる。かようにリッチ流の古代解は大変重要な研究対象である。しかしながら古代解については、現状では例の構成などの先行研究があるものの、その全体像については良く分かっていない。

横田氏は、古代解の簡約体積の時間マイナス無限大における極限を漸近簡約体積と名付け、その重要な性質を明らかにした。Perelman によれば、漸近簡約体積は常に 1 以下であり、1 に等しい場合は古代解がユ-

クリッド空間上のガウスソリトンの場合に限る。横田氏は、漸近簡約体積が1に近い全ての古代解は、実際ユークリッド空間上のガウスソリトンに限ることを証明した。このギャップ定理は、大まかに述べれば、リーマン幾何における M. Anderson の結果「漸近体積が1に近いようなリッチ平坦な完備多様体は、ユークリッド空間に等長的である」のリッチ流版とも云えるものであり、大変興味深い。この結果により、よく分かっていない古代解の全体像の中で、ガウスソリトンの近傍が解明されたと云えよう。

更に横田氏は、このギャップ定理を勾配型縮小リッチソリトンに適用した。勾配型縮小リッチソリトンとは、リーマン多様体とその上の関数の組で、その勾配があるソリトン方程式を満たす場合を云い、リッチ曲率が正のアインシュタイン多様体を拡張する概念である。勾配型縮小リッチソリトンから、ある自然な仕方でもリッチ流の古代解が得られる。すなわち、勾配型縮小リッチソリトンとは、特別な古代解に他ならない。勾配型縮小リッチソリトンもリッチ流の幾何解析において重要な研究対象となっているが、その全体像は、2次元、3次元を除いてやはりよくわかっていない。勾配型縮小リッチソリトンに対して、ガウス密度の概念が定義される。本学位論文において横田氏は、ガウス密度と簡約体積の関係を明らかにし、ガウス密度が1に近い勾配型縮小リッチソリトンはガウスソリトンに限るという、ギャップ定理を得た。この結果は、特別な場合として Carrillo-Ni の予想を肯定的に解決するものである。

また横田氏は、本学位論文において、完備でリッチ曲率が下に有界な古代解の漸近簡約体積が正であればその多様体の基本群は有限であることを証明し、漸近簡約体積が位相構造に与える興味深い影響のひとつを発見した。

審 査 の 結 果 の 要 旨

リッチ流の古代解は、リッチ流の特異点を解析する際にブローアップ極限として現れるもので、その意味でも大変重要な研究対象である。横田氏のリッチ流の古代解の漸近簡約体積に関する結果は、世界的に見ても、多くのリッチ流研究者が注目する興味深いものと認められる。この結果が既に世界的な一流数学雑誌、Communications in Analysis and Geometry に掲載されていることも、この評価を支持するものである。横田氏が定めた漸近簡約体積なる概念は古代流の重要な不変量であることが、本博士論文の結果により実証されたと云えよう。

今後、古代解の漸近簡約体積に関するより多くの結果の導出が期待される。

よって、著者は博士（数学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。