

氏名(本籍)	川田浩一(千葉県)
学位の種類	博士(数学)
学位記番号	博甲第1,215号
学位授与年月日	平成6年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	Contributions to the Additive Theory of Numbers (加法整数論への寄与)
主査	筑波大学教授 理学博士 内山三郎
副査	筑波大学教授 理学博士 木村達雄
副査	筑波大学教授 理学博士 松村睦豪
副査	筑波大学教授 理学博士 宮下庸一

論文の要旨

本論文において、著者は、解析的整数論の一分野である加法整数論における四種の興味ある問題を論じ、それらに対する自然な形での解決を見出している。

第1の問題は、与えられた $k \geq 2$ 個の等差数列 $ajn + bj$ ($1 \leq j \leq k$) に対して、これらの値が同時に素数となるような整数 n がどのような条件のもとに無限に多く存在するか、というものである。この問題は非常に困難なものであって、 $k=2$ のとき、これはすでに古来有名な、そして現今未解決の難問である双子素数問題や Goldbach 予想を含む。著者は、一般の $k \geq 2$ にたいして、ある適当な条件のもとに平均的には問題は肯定的に解決されることを示す。即ち、 $(a, q) = 1$ とし Λ を von Mangoldt 関数として

$$\psi(x; q, a) = \sum_n \prod_j \Lambda(a_j n + b_j)$$

とおく。ここに和 \sum は $n \equiv a \pmod{q}$, $n \in N(x, b)$, をみたす整数 n の上に亘る。 $ajn + bj$ ($1 \leq j \leq k$) の「判別式」 $R(a, b)$ が零でなく、また付随する特異級数 $\sigma(q, a)$ も零でないとき

$$E(x; q, a) = \psi(x; q, a) - \sigma(q, a) N(x, b)$$

とおくと、任意の正数 A とあまり大きくない Q に対して

$$\sum_{q \leq Q} \max_a \max_{y \leq x} \sum_{b} |E(y; q, a)| \ll x^k (\log x)^{-A}$$

が成立つ。この不等式は、等差数列中の素数の分布に関して極めて重要な結果として知られる Bombieri-Vinogradov の平均値定理 (1965) の一般化を与えるものである。著者はまた $E(x; q, a)$ の 2 乗平均に関しても緻密な結果を得ている。

第2の問題は、自然数 n を素数 p と k 乗数 m^k の和 $n=p+m^k$ として表すときの表し方の数 $r_k(n)$ を考察することである。ここに $k \geq 2$ 。すべての自然数 n がこのような形に表されるものではないことは明らかである。著者は、密度0の例外集合 E_k を定めて、 $n \in E_k$ に対して $r_k(n)$ の漸近式を与えることに成功した。 $k=2$ の場合は R. J. Mieh (1968) がこの結果を得ている。 $k \geq 3$ の場合は、考察の本質的な部分、即ち付随する特異級数の取扱いにおいて、 $k=2$ の場合と全く異なる発想が要求される。実際、 $k=2$ に対しては良く知られた Dirichlet の L 関数の取扱でよいのであるが、 $k \geq 3$ に対しては有理数体に $n^{1/k}$ を添加して得られる代数数体の Dedekind ゼータ関数の組織的援用が不可欠であって、これには困難な長い計算を伴う。

第3、第4の問題は、それぞれ自然数 n を

$$(1) \quad n = p + m_1^k + m_2^k + \cdots + m_r^k,$$

$$(2) \quad n = x_1 x_2 \cdots x_s + m_1^k + m_2^k + \cdots + m_r^k$$

の形に表す表し方の数を考えるものであり、著者はそれらに対しても漸近式を与えることを試みる。ここに、 p は素数、 $k \geq 2$ 、 $s \geq 2$ とする。C. Hooley (1981) らによる結果を拡張しまた一部補完するものとして、著者は、 $r=4$ の場合に(1)、および(2)の $s \geq 3$ のときの表し方の数に対する漸近式を得た。その証明における議論によれば、 $k \geq 3$ 、 $r \geq 2^{k-1}$ および $k \geq 6$ 、 $r \geq 7 \cdot 2^{k-4}$ のときに同様の漸近式の成立を示すことができる。

審 査 の 要 旨

著者が本論文において取扱った問題はすべてその解決に長大かつ困難な計算を要するものであって、著者はこれを深い洞察と優れた計算力とによって処理し遂行している。得られた結果はすべて従来に対応する諸結果に対して新しい重要な知見を加えるものである。とくに、著者による Bombieri-Vinogradov の平均値定理の一般化は多くの興味ある応用をもつものと考えられる。また、著者が新たに展開した Dedekind のゼータ関数の組織的な取扱いは、この種の問題の研究に対して一つの有効な方法を与えるものとなるであろう。これらは解析的整数論への少なからざる寄与をなすものと言えよう。

よって、著者は博士(数学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。