

氏名(本籍)	山田耕三(大阪府)
学位の種類	博士(数学)
学位記番号	博乙第803号
学位授与年月日	平成4年7月31日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	Topological properties of free topological groups (自由位相群の位相的性質)
主査	筑波大学教授 理学博士 中川良祐
副査	筑波大学教授 理学博士 赤平昌文
副査	筑波大学教授 理学博士 宮下庸一
副査	筑波大学助教授 理学博士 保科隆雄

論文の要旨

位相空間 X から生成される自由位相群 $F(X)$ および自由可換位相群 $A(X)$ についてその位相的構造を単位元の近傍系で表現し、それによってこれら位相群の位相的性質を解明することが本論文の目的である。 $F(X)$ 及び $A(X)$ の存在性と唯一性の証明は、既に1941年 A. A. マルコフによって与えられ、次いで中山、角谷らによってそれぞれ改良されている。しかしそれらはいずれも構成的なものでなく、位相的構造の内容はなお不明であった。その後 M. I. グラエフの擬距離による位相の導入で、具体的空間 X に対する $F(X)$ 及び $A(X)$ の位相構造についての研究は若干進展したが、1980年代に入って A. V. アルハンゲルスキーを中心とするモスクワ大学のグループにより、その位相を単位元の近傍系で表現する方法が発見され、以後の急速な発展につながった。本論文で著者は、その方法の改善を計り、いくつかの新しい結果を得、特に $A(X)$ についてその近傍系の比較的簡単な表現に到達し、それを用いて $A(X)$ とその部分空間 $A_n(X)$ の新しい性質を導いている。

論文は4章よりなる。第1章、第2章では、先ず位相群、自由位相群の基本的性質を論じ、マルコフ、グラエフ、アルハンゲルスキーらの結果の紹介とその証明の補足、及び後の議論のための整理が行われている。第3章で $A(X)$ の単位元の近傍系 W 及び各自然数 n について $A_{2n}(X)$ の単位元の近傍系 W_n の構成が与えられ、その性質が示される。これを用いて第4章で $A_n(X)$ 及び $F_n(X)$ について調べられる。まず次の性質をもつ3つの特殊な空間 M_1, M_2, M_3 が構成される。(1)各自然数 n に対して $A_n(M_1)$ は k -空間である。(2) $A_3(M_2)$ は k -空間でない。(3) $A_4(M_3)$ は k -空間でない。これらをテスト空間として用いて、次の定理が証明される。(1)距離空間 X について、各自然数 n に対して $A_n(X)$ が k -空間であることと $A_4(X)$ が k -空間であることは同値である。(2)パラコ

コンパクト空間 X について、 $A_2(X)$ が k -空間であることと X^2 が k -空間であることは同値である。更に距離空間 X について、 $A_3(X)$ が k -空間であるための条件が示され、 $A_2(X)$ は k -空間であるが $A_3(X)$ は k -空間ではない、 $A_3(Y)$ は k -空間であるが $A_4(Y)$ は k -空間ではない例が与えられる。最後に $F_n(X)$ 及び $A_n(X)$ が局所コンパクトなら $F(X)$ 及び $A(X)$ が k -空間であること、従って離散でない距離空間に X については、次が同値であることが示されている。(a)各 n について $F_n(X)$ がコンパクトである。(b)各 n について $F_n(X)$ が局所コンパクトである。(c) X がコンパクトである。

審 査 の 要 旨

自由位相群の位相的構造はその代数的構造に比べ、極めて複雑である。この論文で著者は位相の導入に工夫を凝らし、それによって自由位相群特に自由可換位相群の構造を明らかにした。 $F(X)$ 及び $A(X)$ が局所コンパクトになるのは、 X が離散空間のときのみであることが知られているから、これらの位相的性質として k -空間に関して調べるのは当然の方向であり、この論文以前にも多くの研究が知られている。しかし $A_n(X)$ の k -空間性についてのこの論文の主定理は、明確かつ画期的で、それ自身興味深いものであり、また懸案の解決にも応用されることが示されている。これらの点から、この論文は高く評価することができる。

よって、著者は博士（数学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。