【24】

氏 名(本 籍)	**安藤和敏**(あんどう かずとし)(**静岡県**)
学位の種類	博　士(経営工学)
学位記番号	博 甲 第 1,456 号
学位授与年月日	平成 8 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	社会工学研究科
学位論文題目	Bisubmodular Polyhedra and Bidirected Graphs (双劣モジュラ多面体と双向グラフ)

主 査	筑波大学教授	Ph. D.	高木英明
副 査	筑波大学教授	工学博士	藤重　悟
副 査	筑波大学教授	理学博士	金子　守
副 査	筑波大学助教授	工学博士	岸本一男
副 査	筑波大学助教授	工学博士	久野章子

論 文 の 要 旨

本論文では，その上の線形計画問題の最適解がいわゆる貪欲算法によって見出される「性質の良い」多面体のクラスを研究している。貪欲算法が有効な多面体のクラスは，1973年に Dunstan and Welsh によって最初に考察された。しかし，貪欲算法と双劣モジュラ性との関係は，ごく最近になって Chandrasekaran と Kabadi によって明らかにされたばかりである。双劣モジュラ・システムは従来のマトロイドを一般化したモデルに対して統一的な枠組を提供するとともに，無向グラフにおけるマッチング可能集合族や歪対称行列における正則小行列のような興味深い応用を有するという意味で重要である。

有限集合 V に対して$F\subseteq 3^V$を V の互いに素な部分集合の順序対からなる族で，簡約和$\cup$と交わり$\cap$で閉じているようなものとする。さらに，fを $\{\cup, \cap\}$ -閉族F上の双劣モジュラ関数とする。$(\emptyset, \emptyset)\in F$, $f(\emptyset, \emptyset)=0$であって$F$が$V$を張るとき (F, f) は V 上の双劣モジュラ・システムと呼ばれる。V 上の双劣モジュラ・システム (F, f) に関連する双劣モジュラ多面体は以下のように与えられる。

$$P_*(f)=\{x \mid x\in \mathbf{R}^V,\ \forall (X, Y)\in F: x(X, Y)\leq f(X, Y)\}$$

ここで，$x(X, Y)=x(X)-x(Y)$ かつ$x(X)=\Sigma_{v\in X}x(v)$ である。

第1章において，双劣モジュラ・システムを導入してその歴史的背景が述べられ，本論文の各章の構成が，その動機づけとともに述べられている。さらに双劣モジュラ・システムのいくつかの応用例を挙げている。束論，グラフ理論，多面体論及び劣モジュラ・システムの理論からの準備もこの章において議論されている。

第2章では，$\{\cup, \cap\}$ - 閉族，双劣モジュラ・システム，双向グラフに関する諸定義及び後の章で必要とされる基本的な結果が与えられている。

第3章において，双向グラフ及びネットワーク上でのいくつかの組合せ最適化問題について考察している。双向グラフ及び双向ネットワークは双劣モジュラ・システムの研究において重要である。双向ネットワークのカット関数は双劣モジュラ関数の重要なクラスを構成している。双向ネットワークの境界集合がそのカット関数に関連する双劣モジュラ多面体になることが示される。一方，各点$x\in P_*(f)$に対して，交換可能性グラフと呼ばれる双向グラフ $G(x)$が関連づけられる。交換可能性グラフ$G(x)$は x における可能方向を表し，$G(x)$のハッセ図は

xにおける接錐の端射線を表している。また，双向グラフのハッセ図を効率的に計算する方法が提案される。双劣モジュラ・システムへの応用から離れて，古典的ネットワーク・フロー問題の双向ネットワークへの一般化も考察される。双向グラフ上での最小費用循環フロー問題は有向グラフ上でのそれに帰着可能であることが示される。最大フロー問題と最小カット問題も同様に通常の有向グラフ上での対応する問題に帰着され，有名な最大フロー・最小カット定理は双向ネットワークへと一般化される。さらに，双向グラフ上の最小重みイデアル問題も考察されている。

$x \in \mathrm{P}_*(f)$が$\mathrm{P}_*(f)$の端点のとき，$G(x)$は有符号半順序集合（推移的かつ非巡回的な双向グラフ）を定義する。V. Reiner は，有符号半順序集合の概念を導入し，有名な Birkhoff の定理の有符号版であるところの，いわゆる有符号 Birkhoff 定理を示している。第4章においては，単純かつ全域的な V 上の $\{\cup, \cap\}$ - 閉族全体と V 上の有符号版順序集合全体との間に1対1対応が存在することが示される。この対応において，各有符号半順序集合 P にそのイデアルの集合 $I(P)$が対応する。この新しい知見は V. Reiner の有符号 Birkhoff 定理を強化し，双劣モジュラ関数と関連する多面体の理論を構築する上での重要な基礎となる。

第5章において，双劣モジュラ多面体の構造を有符号半順序集合と交換可能性グラフを用いて考察している。端点の特徴づけ，及び，与えられた点が端点かどうかを判定する $O(|V|^2)$時間のアルゴリズムが与えられる。ここで，双劣モジュラ関数の関数値評価のためのオラクルが仮定されている。このアルゴリズムは与えられた点が端点のときには，その端点に関連する有符号半順序集合も同時に決定する。さらに，必ずしも有界ではない双劣モジュラ多面体に対する貪欲算法を考察し，交換可能性グラフを用いた最適性条件を与えている。双劣モジュラ多面体の面の特徴付けとその次元の表現式が与えられ，端点の隣接関係が関連する有符号半順序集合のハッセ図を用いてこれらの結果が記述されることが示される。さらに，双劣モジュラ・システムの連結性及び連結成分への分解が考察される。

第6章において，双集合関数が双劣モジュラ関数であるための単純な必要十分条件が与えられる。

最後の第7章では，双向グラフを用いて記述される不等式系の解集合の整数性などの構造を考察している。$x_i + x_j \leq 1$，$-x_i - x_j \leq -1$ または $x_i - x_j \leq 0$ の形の不等式は degree-two 不等式と呼ばれる。多くの組合せ最適化問題においてその実行可能解は degree-two 不等式系の0-1解として記述することができる。本章においては，著者が分数 degree-two 多面体と呼ぶところの，degree-two 不等式系の0-1解集合の LP 緩和について考察されている。任意の分数 degree-two 多面体は双向グラフのイデアル多面体と同型であることが示され，この同型から分数 degree-two 多面体上での線形計画問題と双向グラフ上での最小重みイデアル問題との興味深い関連性が指摘される。さらに，任意の分数 degree-two 多面体は半整数であることが示され，分数 degree-two 多面体が整数になるための必要十分条件が与えられている。

審　査　の　要　旨

線形計画問題等に現れるマトロイド構造を含む，より一般的な組合せ的システムとしての双劣モジュラ・システムの構造を解明した本論文の研究は，組合せ最適化の分野に大きな理論的貢献を与えるものとして，高く評価される。双劣モジュラ・システムは，マトロイドを一般化した多くの既存のモデルに対して統一的枠組を提供するのみならず，従来のモデルの枠組を超えた応用例も含むものである。とくに，双劣モジュラ多面体の構造が，$\{\cup, \cap\}$ - 閉族の有符号半順序集合による表現を得て解明されたことが特色である。双劣モジュラ多面体はスケジューリング問題への応用が考えられ，また，双劣モジュラ・システムと深い関係がある双向グラフ上での組合せ最適化問題の考察も意義がある。

よって，著者は博士（経営工学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。