【51】

氏　名(本　籍)	馬　馬　秋　雄（埼玉県）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	博甲第 1,212 号
学位授与年月日	平成 6 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 1 項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	THE CAUCHY PROBLEM FOR THE SCHRÖDINGER TYPE EQUATIONS （シュレンデンガー型方程式に対する初期値問題）

主　査	筑波大学教授	理学博士	梶谷邦彦
副　査	筑波大学教授	理学博士	松村睦豪
副　査	筑波大学教授	理学博士	保科隆雄
副　査	筑波大学助教授	理学博士	若林誠一郎

論　文　の　要　旨

本論文は，複素数値ベクターポテンシャル $a(x)=(a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x))$ を持ったシュレデンガー作用素 $L=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{i}{2}\Sigma_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+ia_j(x)\right)^2$ に対する初期値問題の解の存在と解の一意性についての研究である。$a(x)$ が実数値の場合には L に対する初期値問題は 2 乗可積分関数空間 L^2 において解の存在と一意性が成立することが知られている。

$a(x)$ が複素数値の場合，L に対する初期値問題が L^2 空間で解の存在と一意性が成り立つためには，$\Sigma_{j=1}^{n}\ a_j(x)\ \xi_j$ の $|\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$ に対応するハミルトンフローに沿っての積分が有界であることが必要であることが知られている。又初期値問題がソボレフ空間で解の存在と一意性が成り立つための必要条件としては，$\Sigma a_j(x)\ \xi_j$ の $|\xi|^2$ に対応するハミルトンフローに沿っての積分が $\log|\xi|$ $(|\xi|\to\infty)$ の増大度を持つことであることが知られている。

この論文では，$a(x)$ が $|x|\to\infty$ のとき，$|x|^{-\sigma}$ で減少するとき，L に対する初期値問題は $\sigma>1$ の場合 L^2 空間で，$\sigma=1$ の場合ソボレフ空間で解の存在と一意性が成立することを証明した。$a(x)=0(|x|^{-\sigma})\ (|x|\to\infty)$ をみたす $a(x)$ は，$\sigma\geq 1$ のとき上記の必要条件を満たしている。

定理の証明の本質な部分は，表象 $e^{A(x,\xi)}$ を持った擬微分作用素 $e^A(x, D)$ を用いて，L を変換して $L_A=e^A(x, D)\,Le^A(x, D)^{-1}$ とし，L_A に対する初期値問題が L^2 空間で一意的に解けるようにすることである。すなわち $L_A=\frac{\partial}{\partial t}-P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ と表したとき，表象 $A(x, \xi)$ を次の 1 ）及び 2 ）を満足するようにとると作用素 $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ の実数部分が負の作用素となり，L_A に対する初期値問題が L^2 で一意的に解けることが容易に導ける。

1）$\Sigma_{j=1}^{n} \xi j \frac{\partial}{\partial xj} \Lambda(x, \xi) + \Sigma_{j=1}^{n} I_m aj(x) \xi j \leq 0$

2）$\Lambda(x, \xi) \leq C$,（$\sigma > 1$のとき）。

$\Lambda(x, \xi) \leq C \log(|\xi| + 2)$,（$\sigma = 1$のとき）。

ここで，$I_m aj(x)$ は $aj(x)$ の虚数部分を表す。著者は1），2）をみたす$\Lambda(x, \xi)$を擬微分作用素の表象を表す$S_{1,0}$クラスの中で構成することによって，交換子の計算を容易にし，証明を簡明にしている。

$\sigma < 1$の場合，もはや$a(x)$は上記の必要条件を満たしていないが，初期値をジュブレイ空間で与えることによって，解の存在と一意性を導いている。

審　査　の　要　旨

擬微分作用薬$e(x, D)$を用いて変換することにより，負の実部をもつ作用素に帰着するという方法は新しい着想であり，又上記の1），2）をみたす$\Lambda(x, \xi)$を（1，0）ークラスの表象として構成することによって，$a(x)$の実部に対する仮定なしでLに対する初期値の解の存在と一意性を証明したことは，高く評価できる。さらに，この論文で得られた$\Lambda(x, \xi)$の構成方法は，変係数のシュレデンガー方程式の研究に，大きな寄与があると期待されている。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。