【24】

氏　名（本　籍）	印南信宏（神奈川県）
学位の種類	理学博士
学位記番号	博甲第176号
学位授与年月日	昭和58年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
審査研究科	数学研究科　数学専攻
学位論文題目	**Some aspects of convextfy in geomefry of geodesics** **（幾何学における凸性について）**

主査	筑波大学教授	理学博士	塩浜勝博
副査	筑波大学教授	理学博士	高橋恒郎
副査	筑波大学教授	理学博士	中川久雄
副査	筑波大学教授	理学博士	松村睦豪

論文の要旨

凸性の概念は数学のいろいろな分野で重要な役割を果たすきわめて基本的なものである。線型空間に於ける凸性をもった関数や集合が，測地線が定義される空間の上で自然に考えられるのは測地線が線型空間に於ける直線と同じ働きをすると考えられるからである。この意味で凸性を論ずる事が出来る最も一般的な空間はH. Busemannによって定義されたG—空間である。特に，リーマン多様体の上で凸性をもった関数や集合を考える事は多様体の大域的な性質を知るのに重要である。測地線の振舞いは多様体の距離構造や位相構造の影響を受けるので，凸性をもつ関数や集合の存在がその空間の大域的性質に与える制約を研究する事は重要な意味がある。これが本論文作成にあたっての動機である。本論文では，リーマン幾何学，位相数学，距離空間論等の手法を駆使して様々な観点から凸性がリーマン多様体及びG—空間の大域的性質に与える制約について議論されている。

第1章ではn—平面公理と凸閉についての関連が論じられる。n—平面公理の研究はBeltramiにより始まりCartan, Kleinに引き継がれ，定曲率空間の特徴づけとして古典的に知られている。ここではn—平面公理を独立なn＋1個の点の凸閉による図型と捉え，微分可能性によらない定曲率空間の特徴づけを得た。すなわち，m次元（m＞3）リーマン多様体の各点のまわりの凸球内の任意の4点の凸閉集合がそれらの2回の凸接合によって得られるならば，その多様体は定曲率空間になることが証明される。

第2章ではG—空間上の凸関数の存在が空間の位相構造に与える影響について論じられる。一般の

G—空間上の凸関数は必ずしも連続でないことはリーマン多様体上の凸関数が局所的にリプシッツ連続になる事実と大いに異なり，問題を困難なものにしている。しかしG—空間Xの次元〔次元論の意味での〕が２のとき，Xは位相多様体となり，X上の凸関数は連続になる。２次元G—空間Xが局所定数でない凸関数を許容すれば，Xは平面R^2，円柱面$S^1 \times R$，又は開メービウム帯のいづれかと同相になることが証明されている。これはCohn—Vossenの古典的定理の自然な拡張となっている。

第３章では非コンパクト完備リーマン多様体の大域的研究に重要な役割を果たすBusemann関数について論じられる。非コンパクト完備リーマン多様体M上のBusemann関数はMの曲率が非負のとき凸であるという事実はこのようなMの大域的性質を調べる上で重要である。G—空間X上のBusemann関数の可微分性を自然な方法で定義し，可微分でない点の幾何学的特徴づけを試みた。X上のあるBusemann関数の微分不可能な点の集合が空でない有界集合のときはXの端点は唯１つであり，特にXの次元が２のとき，Xの全超過が$2\pi \times$〔Xのオイラー標数〕となることが証明される。

第４章べはリーマン多様体の分解定理を凸解析の立場から論じている。Topongov，Cheeger，Gromoll，Wolf等による分解定理は曲率の符号が一定という条件下で成立している。ここでは「完備リーマン多様体Mがリーマン積$N \times R$に分解する為の必要十分条件は，Mが自明でないアフィン関数を許容することである」という定理を証明し，今迄の分解定理を完全な形で拡張した。更にアフィン関数によるユークリッド空間の特徴づけを与えている。

審　査　の　要　旨

次元論的手法を用いて得られた第１章の結果は従来の滑らかさを仮定する微分幾何学的な方法では処理出来なかったn個の点の凸接合集合に注目したもので，そのアイデアは高く評価されよう。G—曲面上の凸関数に関しては，リーマン多様体の場合と異なり，変分法及び凸球近傍の存在が欠落している為，緻密な推論が要求される。この結果はBusemann教授〔南加州大，米国〕より賞賛を得，教授の最近の論文〔Tsukuba J. Math 7 (1983), 105—136〕に引用されている。Busemann関数の可微分でない点の集合は無限遠点の切断跡と考えられるので，空間の位相との関連はNasu, Lewis等によって指摘されていた。本論文によって，いくつかの未解決な点が解明され，全超過との関連まで明らかになった。第２，３章の諸結果はBusemann，Phadke等の最近の研究に大きな影響を与えている点は注目に値するであろう。分解定理を導いた基本的アイデアはアフィン関数が計量に非常に強い制限を与えている点にあり，著者のアイデアの豊富なことを示している。

以上の諸結果は大域的幾何学の発展に大きく寄与し，将来のこの方面への研究に多くの示唆を与えている。

よって，著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。