【93】

氏　名（本籍）	天 野 勝 利（神奈川県）
学 位 の 種 類	博　　士（理　　学）
学 位 記 番 号	博 甲 第 3640 号
学位授与年月日	平成 17 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
審 査 研 究 科	数理物質科学研究科
学 位 論 文 題 目	**Relative invariants, difference equations, and the Picard-Vessiot theory** （相対不変式、差分方程式、および Picard-Vessiot 理論）

主　査	筑波大学大学院教授	理学博士	木 村 達 雄
副　査	筑波大学大学院教授	理学博士	竹 内 光 弘
副　査	筑波大学大学院教授	理学博士	伊 藤 光 弘
副　査	筑波大学大学院助教授	博士（数学）	増 岡 　 彰

論 文 の 内 容 の 要 旨

本論文は互いに関連する三つの話題にわかれている。第 1 部は，既約被約概均質ベクトル空間のなかで最も複雑な構造を持つ SL（5）× GL（4）が作用する概均質ベクトル空間の基本相対不変式を明示的に決定したものである。その手法は 4 元 2 次形式の空間へ，群の作用と両立する写像を構成するというものである。第 2 部は，簡約可能概均質ベクトル空間に付随する多変数局所ゼータ関数の明示公式を求めたもので，アメリカの井草準一教授が 1 変数の場合をやっていて，それを多変数に拡張したものである。その手法は極めて正統的なやり方を使っている。第 3 部では，アルチン単純加群代数に対する Picard‐Vessiot 理論について，次のような考察を行った。2 次，3 次，4 次などの代数方程式に対しては，16 世紀以来 Cardano，Ferarri らによる解法が知られている。5 次以上の代数方程式に対しては，そのようなベキ根による解法は存在しない。なぜ存在しないのかは，昔の数学者にとって長いこと謎であったが，19 世紀の天才的な数学者 E. Galois が，今日ガロア理論とよばれる，代数方程式（および体）と有限群とを結びつける画期的な理論を創出するに及んで，はじめて明らかにされた。方程式の解法と群論を結びつける，このガロア理論はその後代数的に洗練され美しく定式化されるとともに，様々な方向に一般化・拡張が試みられた。代数方程式の代わりに微分方程式を用いることは誰でも考え付くことであるが，微分方程式に対するガロア理論を定式化することは大変難しい。S. Lie は微分方程式に対するガロア理論を作る動機から，いわゆるリー群の概念に達した。リー群とリー代数の理論は今日，数学の大きな分野に成長しているが，ガロア理論からは逸れている。これとは別に，Picard と Vessiot は線形微分方程式に対するガロア理論が，有限群に代わりに線形代数群をもちいて構成できることを発見した。（非線形微分方程式に対しても，Drach らにより同様の試みがなされたが，成功していない。）この Picard-Vessiot 理論はその後 Ritt と Kolchin により微分体（いくつかの微分作用素を持つ体）の拡大に対するガロア理論の形に整備された。それでも Ritt-Kolchin による PV（Picard-Vessiot）拡大の定義は，余り簡明でなく，この理論はかなり難解であった。一方環論の分野では 1960 年代に M.Sweedler がホップ代数の理論を代数的に整備し，その応用として，群の代わりにホップ代数を用いたガロア理論を構成した。これは今日ホップガロア理論とよばれているが，コホモロジー代数に基盤をおく現代代数幾何学とよく整合

し，またその非可換化として，特に近年発展して来た量子群や作用素環の理論でも大変有効であることが分かってきた。竹内は 1989 年にこのホップガロア理論の観点から Ritt-Kolchin による Picard-Vessiot 理論を再構成した。この仕事で竹内は微分体のみならず，ある余代数 C の作用を受ける体の拡大について PV 拡大及びその可換ホップ代数（= アフィン代数群）を定義し，中間体とホップイデアルの間の一対一対応を証明した。その他にガロア理論で最小分解体に対応する PV 拡大の存在と一意性も示した。その後差分方程式のガロア理論が van der Put と Singer により構成された（1997）。第 2 部で展開した局所ゼータ関数と多変数 b −関数の研究で超幾何学的な差分方程式が現れる。実数体上で，基本相対不変式について本論文で行った仮定を弱めた場合の局所ゼータ関数を記述するためには，もっと複雑な差分方程式を調べることが必要になる。著者は論文の第 3 部で竹内の Picard-Vessiot 理論と van der Put-Singer の差分方程式に対するガロア理論を含む統一的な Picard-Vessiot 理論を構成した。作用域の余代数 C としては Birkhoff-Witt 型の余可換既約ホップ代数 D^1 とある群 G の半直積の形をしたホップ代数 D をとる。C の作用する体を，D の作用する，体の有限直積 $L = L_1 \times \cdot \cdot \cdot \times L_n$ で，群 G が $L_1, \cdots, L_n$ を推移的に置換するもの，これを著者はアルチン単純 D 加群代数とよんでいる，に一般化する。著者はこうした一般化に対し，竹内の結果がほとんどすべてそのままの形で成立つことを示した。D^1 が自明で, D が G の群環の場合は van der Put-Singer の理論を含むことになる。5 次以上の代数方程式がベキ根で解けないのは，一言でいえば，5 次交代群 A_5 が非可換なためである。体のガロア理論においてベキ根拡大は，定規とコンパスによる作図問題，あるいは代数的整数論における円分体やさらには類体論などの基礎となる概念である。ベキ根拡大の chain をもつ拡大は可解群をガロア群に持つガロア拡大と対応関係にあるわけであるが，これに相当することを線形微分方程式や差分方程式に対し考えることは重要である。実際第 2 部にそのような例が現れる。著者は第 3 部の後半で Liouville 拡大の理論を展開した。ベキ根拡大の類似として加法群 G_a，乗法群 G_m，有限エタル群などに（PV 理論で）対応する拡大をとる。そのような拡大の有限個の chain をもつ拡大として Liouville 拡大を定義する。微分方程式でいえば，これは積分を何回か繰り返して解けることに相当する，きわめて自然な考えである。著者は第 3 部の前半で展開した拡張 PV 理論の下で Liouville 拡大は可解代数群と理論的に対応していることを示した。

審 査 の 結 果 の 要 旨

第 1 部の内容は，40 変数 40 次の相対不変式の具体的な形を，より簡単な空間に帰着させる手法で証明したもので，結果と手法の両方とも重要なものである。第 2 部は，多変数へ井草準一教授の結果を拡張したもので，少なくとも誰かがいずれはしなければいけない標準的な結果である。

第 3 部では，多くの結果を出しており，これらの結果は著者の相対不変式の研究に応用されてさらによい結果を導くものと期待される。総合的にみて，博士論文として十分価値のある内容である。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。