生命保険契約における潜在的デリバティブ評価及びヘッジ手法の研究

筑波大学審査学位論文(博士)

2009

門田伸一

筑波大学大学院
ビジネス科学研究科 企業科学専攻

目 次

表目次

図 目 次

第1章　序論

本稿は伝統的な保険数理からの視点に加え, 数理ファイナンスの視点から生命保険契約を俯瞰し, 非完備市場におけるデリバティブとしての価格評価及び投資戦略に関する研究成果をまとめるものである.

1.1　背景

International Association of Insurance Supervisors[2006] は, 保険会社における 11 の ALM の要件の二点において, 「ALM は経済価値に基づくべきであり, 様々なシナリオから生ずる経済価値における変化を考えるべきであること」, 「保険会社は新契約及び既契約に埋め込まれるオプションにより引き起こされるリスクを考慮すべきであること」, 「契約者間の公平性を確保するのであれば, 当該オプションの影響を緩和する手段を見つけること」を要求している.

保険料や留保すべき責任準備金の評価には, Halley[1693] に端を発する保険数理が確立されているにも拘わらず, 監督者が上掲の要求を行う背景には, 世界各国で観測された生命保険経営における失敗がある. 象徴的な事件は 2000 年 12 月英国における世界最古の相互保険会社 Equitable Life の経営破綻であろう. 本件の原因究明調査報告書としては日本アクチュアリー会 [2005] が発表されており, 今日では破綻に到る直接的な要因が給付利率保証型年金商品にあったものと理解されている.

年金額は年金原資を年金現価率で除することにより決定されるが, 給付利率保証型年金商品は年金現価率の算定基礎率を契約時に保証するため, 契約締結時より給付開始時の金利が低下している場合には保証年金額が実勢額よりも高くなる. すなわち, 保険会社は年金給付を約すると同時に, 当該年金額の上に書かれるプット・オプションを販売することになる.

もちろん, プット・オプションに対応する価格が保険料として徴収され, ヘッジ・ポジションが採られているのであれば問題の顕在化する可能性は抑制される. 然るに定常状態を前提とする保険数理においては, 将来における状態変化を反映した保険料設定及び責任準備金評価は行われない. 安全割増として計算基礎等にバッファは与えられているものの, 無償提供された権利が行使されれば, 契約者の享受する利得は保険者の損失を実現させることになる. 当該損失が許容範囲を超えるならば, 経営の存続が不能となる

契約者間の公平性を鑑みれば, 締結される保障の対価としての保険料に定常状態を想定することは否定されるものではない. 同種同保険金額の保険契約の保険料が昨日と本日で異なることがあれば, 消費者の混乱を招くことになるだろう. 然るに, 必要とされる内部留保水準の把握, 投資戦略の決定に際しては, 保険契約を構成するリスクの本質について, 当該時点の水準及び将来における状態変化を反映することが必要不可欠である. 例えば, 同種保険商品であっても予定利率 1.5%の契約と 4.5%の契約に同一の配当率を適用するならば, 後者について蓄積すべき内部留保が放出される. 当該財源の調達は, 前者の配当可能財源削減により行われるのであるから, 経営の健全性及び契約者間の公平性確保を意図するならば, 当該経営行動は回避すべきである. 保証する予定利率水準の差異, すなわち, リスクの本質は配当率に反映されなければならない.

監督当局, 実務担当者及び研究者間で問題意識が共有されているにも拘わらず, 事実上流通市場を持たない日本の生命保険市場において保険契約の公正価値, 所謂時価が社外の利害関係者に必要とされる状況は「経営破綻処理」, 「M&A」, 「相互会社から株式会社, 若しくは株式会社から相互会社への会社組織の変更」, 「再保険の出受」等限定的である. 結果として, 経営者, 投資家及び契約者等が, 保険契約が保険事故に対する保障に付随して提供する諸権利を会計情報等により定量的に認識する機会も限定的となる. 経営行動, 投資判断及び消費判断を適切に行うためには, 保険契約を構成するリスクの本質を評価し, 処理する枠組の確立が望まれる.

1.2　目的

本研究の目的は, International Association of Insurance Supervisors[2006] が「保険契約に埋め込まれたオプション」と表現する, 保障に付随して提供される諸権利価値の評価及びヘッジ手法の確立である.

当該権利の種類は, Gatzert[2007] が配当金受取方法, 保険料支払方法, 契約解除, 延長定期保険, 契約者貸付等を例示し, 包括的な概観を示している. このうち, 先行研究で多く取り組まれている対象の一つは契約解除, すなわち, 解約権評価である. アメリカン・タイプのプット・オプションの枠組を適用することで当該権利価値の評価は行われるが, 保険者の保有するリスク特性を鑑みれば, 権利行使時点で保障が消滅することを前提とした問題設定には疑問を持つ. 解約権行使により得た利得の一部又は全てを財源として同一保険会社における新たな保険契約を購入する場合, 契約の連続性は断たれているものの, 当該被保険者に付される保障は存続し, また, 払済若しくは延長定期保険への変更により保険料の払込を停止する場合にも, 保障は消滅しないためである. 支払能力の確保を意図した内部留保水準の把握には, 保険契約の継続を前提とした問題設定が必要であろう. このため, 保険契約者が従前の契約を担保としてより有利な条件の契約に切り替えることを想定し, 複数の権

利行使を許容する転換権評価を行う.

一方, 保険業は保険業法をはじめとする規制の下で成立している. 規制内容は価値評価の前提であり, 法改正は最適な権利行使行動を変化させる可能性がある. 従って, 改正内容の定量的評価を行えば, 改正趣旨との整合性, 経済的効果を確認することができるだろう. そこで, 「破綻処理」に限定されていた保険業法に「契約条件の変更」を追加した条文変更が保険会社経営に与えた影響を, 権利価値及び状態変数 (利子率及び死亡率) の最適権利行使領域の変化から定量的に評価する.

保険契約において投資財源となる保険料には, 既述したように保障に付随して提供される権利価値の対価が明示的に含まれる例は少ない. 然るに, 当該権利行使により納付される保険料, 約される保険金及び責任準備金の額は変化する. また, 一般的に保険料は平準的に払い込まれる. 従って, 対応する負債に対して必ずしも財源は十分ではない条件を想定し, 投資行動を実践する必要も生ずる. そこで最低保証を付した変額年金保険を対象に, 追加的な資金投入を想定しない「自己資金充足的戦略」を, 保障及び保証内容, 保険料払込方法, 保証料徴収方法を所与とし, 目的関数へ適用する関数形の自由度を高め, 任意の投資対象資産等に対応する多期間動的最適化に基づき構築する.

1.3 本稿の構成

第 2 章では保険数理の基礎概念に関する解説を行う.

議論の中心に置かれる保険数理において, その概念は連立一次方程式までの数学的知識があれば理解することは可能である. 然るに, その記法はやや特殊であり, 過去に接した経験がなければ混乱することが懸念される. そこで生命表の構造を示した後, 「基数」と呼ばれる保険数理固有の記法を概説, 収支相当の範囲を被保険者個人に限定する場合の保険料・責任準備金等の評価手法を例示する.

第 3 章では先行研究のサーベイを行う.

保障に付随して提供される諸権利を含めた公正価値評価の手法は幾つかのものが提唱されているが, 本研究ではファイナンス理論と整合したリスク調整の行われる「測度変換法」を採用する. 原資産の非完備性を想定する場合の測度変換例として「エッシャー変換」と「ディストーション変換」, 確率過程としての死亡率記述に関する先行研究を紹介した後, 保険契約に付随する権利価値評価及びリスク分散策を概観し, 本研究との関係を示す.

第 4 章では生命保険契約における転換権の価値評価に関する研究成果を示す.

死亡率過程にリー・カーター・モデル, 利子率過程にハル・ホワイト・モデルを適用, それぞれに期間構造を与え, 契約者が保険料の引き下げ若しくは保険金の引き上げ等を通じ, 権利行使前後の公正価値を交換することを想定した価値評価を行う. 問題設定においては保障継続を想定, 複数回の権利行使を許容するモデルを構築し, 権利行使 2 回までの数値解

析結果を求め, 付随する成果として, ワン変換のパラメータ推定方法を提示する.

第5章では契約条件の変更が保険業法に加えられたことによる経済的影響を破綻処理と比較した研究結果を示す.

権利の付与は保険契約者には限定されず, 規制内容の変化を通じて保険者にも付与される. 保険事業の継続が困難となった場合に, 締結した契約条件若しくは事業継続を放棄する権利である契約条件の変更及び破綻処理は典型的な例である. 前者は締結された条件の不履行という意味では所謂デフォルトと認識されるが, 責任準備金削減の禁止, 下限予定利率の設定, 更に全ての契約者に類が及ばない等, 後者とは異なる処理が行われる. 保険者の経済合理性を前提に, 利子率 (CIR モデル) 及び死亡率過程 (リー・カーター・モデル) の期間構造の上で両者の価値評価及び権利行使領域を確認し, 法律条文の変更が保険者の経営行動・意思決定に与えた影響に対する定量的検証を提示する.

第6章は不確実性を有する負債に対応する投資戦略に関する研究成果を示す.

Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] をアセット・オンリー・アプローチから ALM アプローチに拡張し, 保障及び保証内容, 保険料払込方法, 保証料徴収方法を所与とし, 目的関数へ適用する関数形の自由度を高め, 任意の投資対象資産等に対応するシミュレーション型多期間動的最適化手法を構築, 最低保証を付した変額年金保険について数値解析結果を提示する.

第7章では本研究の総括を行い, 今後の展望を述べる.

第2章　保険数理の基礎概念

本研究は保険契約を非完備市場のデリバティブとして表現することにより, 保険数理と数理ファイナンスの融合を図るものである. ただし, 論理展開の一翼を担う保険数理の記法はやや特殊である. 契約者間・世代間の公平性確保等, 背景にある基本的な考え方も含め, 過去に接したことがなければ混乱することが懸念される. そこで本章では保険数理の基礎概念を解説する. より詳細な解説については, Gerber[1997], 黒田等 [2003] 等が参考となる.

2.1　生命表

生命表とは年齢別の脱退者数, 残存者数から導出される統計値を掲載したものである.

表 2.1: 生命表の基本構造

年齢	生存者数	死亡者数	死亡率	生存率	平均余命
x	l_x	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$q_x = \frac{d_x}{l_x}$	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$	$\mathring{e}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}$
0	$l_0 = 1$	d_0	q_0	p_0	$\mathring{e}_0 =$ 平均寿命
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega - 1$	$l_{\omega-1}$	$d_{\omega-1} = l_{\omega-1}$	$q_{\omega-1} = 1$	$p_{\omega-1} = 0$	$\mathring{e}_{\omega-1} = 0$
ω	$l_\omega = 0$				

表 2.1 は対象群団からの脱退事由を死亡に限定したものであり, 当該生命表により推定される死亡率 q_x は, カプランーマイヤー・モデルにおけるハザード率の推定に準じたものとなる. すなわち, 時刻 τ_j 直前の被保険者群団内の保険事故未発生数 (生存者数) を n_j, τ_j 時点の保険事故発生数 (死亡者数) を d_j とし, 生存関数 $S(t)$ の推定量 $\hat{S}(t)$ を

$$\hat{S}(t) = \prod_{\tau_j < t} (1 - \frac{d_j}{n_j}), \quad 0 < t \leqq T \tag{2.1}$$

とする. 従って, ハザード率 $\hat{h}(t_j)$ の推定量は次のとおりとなる.

$$\hat{h}(t_j) = \frac{d_j}{n_j} \tag{2.2}$$

そして死亡率 q_x が所与となれば, 対象となる人口における生存者及び死亡者等を表 2.1 のように求めることが可能となる.

2.2　保険数理

2.2.1　基数

基数そのものは非常にシンプルな内容であり, 作成された生命表に基づく年齢 x 歳の生存者数 l_x, 同死亡者数 d_x, 予定利率 i に基づく割引率 $v = \frac{1}{1+i}$ に対し, 年齢 x 歳の関数として $D_x = v^x \cdot l_x$, $C_x = v^{x+1} \cdot d_x$, $N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$, $M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$ と定義するだけである. 当該記号が如何に適用されるかを以下に示す.

2.2.2　離散的表現

今, 年齢 x の被保険者に対し, 死亡時に保険金額 1 を期末に支払う, 保険期間 n の定期保険契約を締結することを考える. 計算基礎となる予定死亡率を q_x, 予定利率 i に基づく割引率を $v = \frac{1}{1+i}$ とすると, 当該契約の給付現価を評価するためには, 表 2.2 に基づき, 次のように考えればよい.

まず, 時点 0 では保険事故は発生していない. 従って, キャッシュフローはゼロである. 続く時点 1 では, 契約者数 l_x のうち, $l_x \cdot q_x = d_x$ に対して保険金額 1 が支払われる. 時点 2 では, 時点 1 における残存者数 $l_x \cdot (1 - q_x)$ のうち, $l_x \cdot (1 - q_x) \cdot q_{x+1}$ に対してキャッシュフローが発生する. 以下同様にして, 時点 $n - 1$ までのキャッシュフローが求められる. ただし, 定期保険は満期保険金を持たないため, 時点 n の残存者に対する給付は発生しない.

給付現価

x 歳加入, 保険期間 n で被保険者の死亡時に保険金 1 を期末払する保障の給付現価を $A^1_{x:\overline{n}|}$ と書く. ここで x の上にある添字 1 は死亡保障を意味する. 純粋な生存保障の場合には n の上に 1 を置き, 生死混合保障の場合には添字を置かない. 契約時人数は l_x であるので, 当該契約群団の総給付現価は

$$l_x \cdot A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1+i} \cdot l_x \cdot q_x + \sum_{t=1}^{n-1} (\frac{1}{1+i})^{t+1} \cdot l_x \cdot \prod_{k=0}^{t-1} (1 - q_{x+k}) \cdot q_{x+t}$$

表 2.2: 残存者及び死亡者の推移

時点	年齢	期始残存者数	期末死亡者数
0	x	l_x	$l_x \cdot q_x$
1	$x+1$	$l_x \cdot (1-q_x)$	$l_x \cdot (1-q_x) \cdot q_{x+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$x+t$	$l_x \cdot \prod_{k=0}^{t-1}(1-q_{x+k})$	$l_x \cdot \prod_{k=0}^{t-1}(1-q_{x+k}) \cdot q_{x+t}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x+n-1$	$l_x \cdot \prod_{k=0}^{n-2}(1-q_{x+k})$	$l_x \cdot \prod_{k=0}^{n-2}(1-q_{x+k}) \cdot q_{x+n-1}$

となる．両辺を l_x で除してやれば, 基準化された $A^1_{x:\overline{n}|}$ を定義できる．

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1+i} \cdot q_x + \sum_{t=1}^{n-1} (\frac{1}{1+i})^{t+1} \prod_{k=0}^{t-1} (1-q_{x+k}) \cdot q_{x+t} \tag{2.3}$$

式 (2.3) を変形してみよう．右辺第 1 項は

$$\frac{1}{1+i} \cdot q_x = \frac{1}{1+i} \frac{d_x}{l_x} = \frac{v^{x+1}}{v^x} \frac{d_x}{l_x} = \frac{C_x}{D_x} \tag{2.4}$$

となる．また,

$$\prod_{k=0}^{t-1} (1-q_{x+k}) \cdot q_{x+t} = \prod_{k=0}^{t-1} \frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}} \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} = \frac{d_{x+t}}{l_x} \tag{2.5}$$

であるので, 右辺第 2 項は

$$\sum_{t=1}^{n-1} (\frac{1}{1+i})^{t+1} \cdot \frac{d_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x} \tag{2.6}$$

となる．結果として,

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{2.7}$$

を得る．基数を用いれば, 式 (2.3) を式 (2.7) のように平易に記述できるのである．また, 当該記法においては, 時間経過の反映も容易である．定常状態の前提の下では, 時間経過に伴い変化する要素は年齢及び保険契約の残存期間に限定すればよい．従って, t 時点経過後, 残存 $n-t$ 期間に対応する給付現価は

$$A^1_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}}$$

とすればよい．

保険料収入現価

同様にして x 歳加入, 保険期間 n で被保険者の生存時に年金額 1 を期始に支払う, 期始払年金現価 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を見てみよう．これは加入即時に給付が発生するので,

$$\begin{aligned} l_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1}(\frac{1}{1+i})^t \cdot l_{x+t} \\ \therefore \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1}(\frac{1}{1+i})^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned} \tag{2.8}$$

である．t 時点経過後, 残存 $n-t$ 期間に対応する期始払年金現価は

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

とすればよい．保険料は必ず先払いとなるので, 拠出が平準的に行われるものとすれば, 保険料収入現価は

$$P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{2.9}$$

として定義される．

保険料の決定

次に保険料を計算してみよう．x 歳加入, 保険期間 n で被保険者の死亡時に保険金 1 を期末払する保障について, 契約時に一括して払い込む「一時払保険料」は $A^1_{x:\overline{n}|}$ に他ならない．保険期間 n に亘り分割して払い込む「平準払保険料」を考える場合の基本原則は収支相当, すなわち, 契約群団において収支をバランスさせるということである．平準払保険料 $P^1_{x:\overline{n}|}$ に対する契約時収入現価は $P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ である．これが契約時給付現価に一致するように保険料を定めればよいのだから,

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{2.10}$$

とすればよい．ここまでのプロセスを追えば, 保険制度が被保険者群団において生存者が毎期払い込む保険料と死亡者に対して支払われる保険金額のスワップに過ぎないこと, 結果として保険料が一次方程式により求められるものであることを理解できよう．

責任準備金

ところで, 約定した給付を全うするためには必要財源を確保しておかなければならない. これが責任準備金であり, x 歳加入, 保険期間 n で被保険者の死亡時に保険金 1 を期末払する保障の t 期間経過時点における金額を ${}_tV^{1}_{x:\overline{n|}}$ と書く. 責任準備金の評価方法は 2 通りの考え方がある. 一つは評価時点を起点とし, 当該時点の給付現価から保険料収入現価を控除する「将来法」であり, 式 (2.11) に対応する. もう一つは当該時点迄に収受した保険料から既に給付された保険金額を控除する「過去法」であり, 式 (2.12) に対応する.

$$
\begin{aligned}
{}_tV^{1}_{x:\overline{n|}} &= A^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} - P^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} && (2.11)\\
&= \frac{M_{x+t}-M_{x+n}}{D_{x+t}} - P^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&= \frac{M_x - M_x + M_{x+t}-M_{x+n}}{D_{x+t}} - P^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{N_x - N_x + N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&= P^{1}_{x:\overline{n|}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} && (2.12)
\end{aligned}
$$

上に示すとおり, 両者の値は一致する. ただし, ここでは保険料が収支相当しており, 保険事故発生率及び運用収益率が予定死亡率及び予定利率に一致するという前提で式展開を施していることに留意しなければならない. 予定と実績に差異があれば, 当然に過不足が生ずることとなる.

ファクラーの再帰式

x 歳契約, 保険期間 n, 給付事由発生時に保険金 1 を期末に支払う保険契約について, 第 t 時点の責任準備金を V_t, 保険料を P とする. 第 $t+1$ 時点の責任準備金は, 第 t 時点の責任準備金及び拠出保険料に予定利率 i で 1 期間付利し, 期末に当該年度に発生する給付金を控除すればよいので, 次掲のように記述される.

$$
l_{x+t+1} \cdot V_{t+1} = l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot (1+i) - d_{x+t} \qquad (2.13)
$$

ただし, ここでは期中での解約を想定していない.

式 (2.13) の両辺に v^{x+t+1} を乗ずれば,

$$
D_{x+t+1} \cdot V_{t+1} = D_{x+t} \cdot (V_t + P) - C_{x+t} \qquad (2.14)
$$

を得る. $t = 0 \sim (n-1)$ まで辺々加えれば,

$$
\begin{aligned}
D_{x+n} \cdot V_n &= D_x \cdot V_0 + P \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} \\
\therefore P &= \frac{D_{x+n} \cdot V_n - D_x \cdot V_0 + (M_x - M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} && (2.15)
\end{aligned}
$$

契約時責任準備金 (V_0) を 0, 満期時責任準備金 (V_n) を定期保険については 0, 養老保険については 1 とすれば保険料が得られる.

同様にして, $t = 0 \sim (t-1)$ まで辺々加えれば過去法責任準備金,

$$V_t = \frac{D_x \cdot V_0(=0) + P \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} \tag{2.16}$$

$t = t \sim (n-1)$ まで辺々加えれば将来法責任準備金

$$V_t = \frac{D_{x+n} \cdot V_n - P \cdot (N_{x+t} - N_{x+n}) - (M_{x+t} - M_{x+n})}{D_{x+t}} \tag{2.17}$$

が得られる. 予定と実績が一致していれば, 式 (2.16) と式 (2.17) は当然に等価となる.

2.2.3　連続的表現

連続表現は離散表現と本質的にかわるものではない. 時間間隔を瞬間的に捉えるだけである. ただし, 計算基礎率の呼称は異なり, 瞬間的な死亡率を死力 $\mu_x(= -\frac{d}{dx}\ln l_x)$, 同利率を利力 $\delta(= \ln(1+i))$ と呼んでいる.

年齢 x の被保険者に対する保険金額 1, 保険期間 n, 連続払の養老保険の保険料 $\bar{P}_{x:\overline{n|}}$ 及び任意の時点 t における責任準備金 ${}_t\bar{V}_{x:\overline{n|}}$ は前項と同様にして求められる.

給付現価

養老保険の給付現価 $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ は

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt + e^{-\delta n}{}_np_x & (2.18) \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}\mu_{x+t}dt + e^{-\delta n} \cdot e^{-\int_0^n \mu_{x+s}ds} & (2.19) \end{aligned}$$

となる.

収入現価

連続払年金現価 $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ は,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n e^{-\delta t}{}_tp_xdt & (2.20) \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}dt & (2.21) \end{aligned}$$

であるので, 収入現価は

$$\bar{P}_{x:\overline{n}|} \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|} \tag{2.22}$$

となる.

保険料の決定

収支相当の原則により, 連続払保険料 $\bar{P}_{x:\overline{n}|}$ は次のように求められる.

$$\bar{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{2.23}$$

責任準備金

「将来の給付を賄うために現時点で留保しておくべき金額」を評価すれば, 任意の時点 t における将来法責任準備金 ${}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|}$ が求められる.

$${}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}_{x:\overline{n}|} \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{2.24}$$

第3章　先行研究のサーベイ

3.1　公正価値評価の基本的概念

American Academy of Actuaries[2002] は, 金融商品の公正価値評価にあてはまる原則, 基本的なアプローチ及び具体的な手法を示しており, 評価方法の階層構造を次の三段階としている.

第一段階 評価対象商品が市場性を持つ場合には, 当該市場価格を適用する.

第二段階 評価対象商品が市場性を持たないが, 評価対象に準ずる商品が市場性を持つ場合には, 評価対象商品との差異を調整し, 当該市場価値を適用する.

第三段階 評価対象商品が市場性を持たず, 利用可能な同様の商品も市場に存在しない場合には, 将来キャッシュフローの期待現在価値を適用する. ただし, 当該価値はリスク調整を含むべきである.

第三段階のモデルは非常に柔軟性が高く, 不確実性を反映することができる. 多くの金融商品が不確実なキャッシュフローを有することを鑑みれば, これは重要な特徴である. 事実上流通市場を持たず, 代替商品を持たない保険契約に適用するモデルも第三段階のモデルが適切であろう. 荻原 [2008] は「経済価値ベースの負債評価」について, リスクをヘッジ可能なものとヘッジ不可能なものに分離し, 前者には市場の情報を反映 (Mark-to-Market-Approach), 後者にはモデル化による計量化 (Mark-to-Model-Approach) する考え方を紹介し, その上で流通市場の乏しい保険商品は Mark-to-Model-Approach に依らざるをえないだろうとしている.

Casualty Actuarial Task Force[2000] では割引率でリスク調整する CAPM 法, 再保険の取引価格を基準とする再保険法, 資産と資本の公正価値差額より負債の公正価値を評価する間接法, 損失分布の確率測度変換によりリスク調整を行う測度変換法が例示されている.

測度変換に視点を置いてみよう. 木島・田中 [2007] を引用すると「リスク資産の価格付けのためには, 現実の生起確率をリスク中立確率に変換 (測度変換) する必要がある」. ここで現実の生起確率 P をリスク中立確率 Q に変換する係数をラドン・ニコディム微分係数 $\frac{dQ}{dP}$ という. 留意すべき点は完備市場では $\frac{dQ}{dP}$ が一意に特定されることに対し, 非完備市場で

は一意に特定されないことである．ただし, $\frac{dQ}{dP}$ を定義する幾つかの変換手法が提唱されている．準備となる知識を付録に掲載し, 代表的な二例を以下に示す.

3.1.1　非完備市場における確率測度変換

エッシャー変換

定常独立増分を持つ確率過程 $\{X(t); t \geqq 0\}$ を考える． 各時点 t の $X(t)$ が積率母関数 $E^P[e^{hX}]$ を持つとき, エッシャー変換は次掲のように定義できる.

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{e^{\lambda X}}{E^P[e^{\lambda X}]} \tag{3.1}$$

パラメータ λ はリスク回避度に相当するものである．λ を正値とすれば損失分布の大小を強調し, ゼロとすればリスク調整を行わない.

Esscher[1932] は価格を決定するための測度変換法ではなく, 確率分布の積率を近似的に評価するための手法を示したものである．当該手法を価格決定に適用できることを示した成果が Gerber and Shiu[1994] であることを森平 [2004] は指摘している.

エッシャー変換の適用例としては小島 [2005][2006], 森平 [2003] 等が掲げられる.

ディストーション変換

確率測度 P の下で分布関数 $F^P(x)$ を持つ確率変数 X, $S^P(x) = 1 - F^P(x)$ で定義される生存関数 $S^P(x)$ を考える.

ここで区間 [0,1] 上で非減少, 且つ $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ を満足するディストーション関数 g を導入し,

$$S^Q(x) = g[S^P(x)] \tag{3.2}$$

とするとき, $S^Q(x)$ を生存関数に対応するディストーションとする．同様にして, 分布関数に対応するディストーションを得ることができる.

$$F^Q(x) = \bar{g}[F^P(x)] \tag{3.3}$$

ただし, $\bar{g}$ はデュアル・ディストーション関数と称され,

$$\bar{g}(u) = 1 - g(1 - u) \tag{3.4}$$

により定義される.

g 及び $\bar{g}$ が微分可能であればディストーション変換による確率密度関数 $f^Q(x)$ は次により求められる.

$$\begin{aligned} f^Q(x) &= \frac{d}{dx}F^Q(x) \\ &= f^P(x)\cdot\frac{d}{dx}g[S^P(x)] \quad (3.5) \\ &= f^P(x)\cdot\frac{d}{dx}\bar{g}[F^P(x)] \quad (3.6) \end{aligned}$$

従って, ラドン・ニコディム微分係数として,

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{d}{dx}g[S^P(x)] = \frac{d}{dx}\bar{g}[F^P(x)] \quad (3.7)$$

を得る. 代表的なディストーション関数を表 3.1 に示す.

表 3.1: 代表的なディストーション関数

ディストーション名称	ディストーション関数 $g(u)$	関数 g が凹となる条件
ベータ	$\int_0^u \frac{1}{\beta(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$	$a<1,\ b>1$
比例ハザード	u^a	$0<a<1$
ガンマ	$\int_0^u Kt^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$	$0<a<1,\ c>0$
指数	$\frac{1-exp(-\frac{u}{c})}{1-exp(-\frac{1}{c})}$	$c>0$
正規	$\Phi[\Phi^{-1}(u)-\lambda]$	$\lambda<0$
区分線形 (C-VaR)	$1\ (1-\alpha\leqq u\leqq 1);\ \frac{u}{1-\alpha}\ (0\leqq u\leqq 1-\alpha)$	$0<a<1$
区分線形 (VaR)	$1\ (1-\alpha\leqq u\leqq 1);\ 0\ (0\leqq u\leqq 1-\alpha)$	−

(出典)McLeish and Ressor[2003]
(備考) ディストーション関数の形状は, 付録 A の図 A.1 から図 A.6 で確認できる.

Wang[2002] の提唱するワン変換は, 分布関数に対応する正規ディストーションである. ワン変換の適用例は Lin and Cox[2004a][2004b][2006] がある.

3.2　死亡率過程

保険契約において不確実性を有する要素は, 定額保険においては利子率及び死亡率, 変額保険においては利子率, 死亡率及び対象となる資産価格 (例えば株価等) である. 当該原資産の将来経路における不確実を表現するためには, 価格過程のモデルの選択が必要となる. 株価・利子率の代表的なモデルの解説は Clewlow and Strickland[1998], 木島 [1999], 宮原 [2003], 木島・田中 [2007] 等に譲り, 本節では死亡率の代表的なモデルを概観する.

3.2.1　パラメトリック・モデル

保険価格設定に際しては死亡率 (生命表) を如何に表現するかが課題となろう. 第一には静態的・動態的の何れにより記述するか, 第二には何れの適用モデルを採用するかである.

静態的な表現を選択する場合には, 死亡率は定数として扱われる. この場合, 価格評価が比較的平易なものとなる長所の一方で, トレンドが反映されないという短所を持つ. 後掲される図 3.1 に観測されるように, 日本国をはじめとする先進国においては死亡率低下が顕著であるが, 当該傾向を無視することは, 生存保障商品にとっては割安な, 一方, 死亡保障商品にとっては割高な評価となる.

なお, 死亡率の設定はテーブルに限定する必要はなく, 年齢の関数として与えることも可能である. 代表的な死亡法則として次掲のモデルが知られている.

表 3.2: 代表的な死亡法則

死亡法則	死力	生存数
De Moivre (1725)	$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$	$l_x = l_0(1 - \frac{x}{\omega})$
Gompertz (1825)	$\mu_x = Bc^x$	$l_x = kg^{c^x}$
Gompertz-Makeham (1860)	$\mu_x = A + Bc^x$	$l_x = ks^x g^{c^x}$

ただし, 小暮・長谷川 [2005] が指摘するように, これらのパラメトリック・モデルでは一部の年齢における適合度の犠牲を余儀なくすることに留意が必要である. 当該問題点の解決策として, 例えば荒井 [2001] では, 直列ワイブル分布を死力にあてはめることにより, 適合度の向上を試みている.

動態的な表現を選択する場合には, 死亡率を時間の関数として, 更に誤差項を与えることにより, 確率過程として扱うこととなる. 前掲式 (2.19) 及び (2.21) を見ると, 「年齢 x の被保険者が t 年生存する」確率は ${}_tp_x = \exp[-\int_0^t \mu_{x+s} ds]$ と表現されている.

ここで Duffie-Singleton Model に代表される誘導型の信用リスク・モデルを参照しよう．信用リスクに晒される割引債価格は次式により定義される．

$$P(t,T) \;=\; E^Q[\exp[-\int_t^T \{r_s + (1-\delta)\,h_s\,\}ds] \mid \mathcal{F}_t] \tag{3.8}$$

r_t：スポット・レート

δ ：回収率

h_t：ハザード・レート

すなわち, 保険数理の連続表現は, 死力 (force of mortality)μ_x をハザード・プロセスとする誘導型 (reduced-form) アプローチの信用リスク・モデルと見做すことができる．従って, ハザード・レート (死力) の表現により, モデルを特徴付けることができるが, それは表 3.3 に掲げられるような代表的な利子率モデルにより代替することが可能である．

表 3.3: 代表的な利子率モデル

名称	定義式
Vasicek Model(1977)	$dr_t = a\,(\bar{r} - r_t)dt + \sigma dW_t^Q$
Cox-Ingersoll-Ross Model(1985)	$dr_t = a\,[\bar{r} - r_t]\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^Q$
Ho-Lee Model(1986)	$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t^Q$ $\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t$
Black-Derman-Toy Model(1990)	$d\log r_t = [\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\log r_t]dt + \sigma(t)dW_t^Q$
Black-Karasinski Model(1991)	$d\log r_t = [\theta(t) - \alpha(t)\ \log r_t]dt + \sigma(t)dW_t^Q$
Heath-Jarrow-Morton Model(1992)	$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T,f(t,T))[\int_t^T \sigma_i(t,u,f(t,u))du]$ $df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T,f(t,T))dW_i(t)$
Fong-Vasicek Model(1992)	$dr_t = [\alpha(\bar{r} - r_t)]\,dt + \sqrt{\nu_t}\,dW_1^Q$ $d\nu_t = [\gamma(\bar{\nu} - \nu_t)]\,dt + \xi\sqrt{\nu_t}\,dW_2^Q$ $dW_1^Q \cdot dW_2^Q = \rho\,dt$
Longstaff-Schwartz Model(1992)	$dx_t = [\gamma - \delta x_t]\,dt + \sqrt{x_t}\,dW_1^Q$ $dy_t = [\eta - \theta y_t]\,dt + \sqrt{y_t}\,dW_2^Q$ $\nu_t = \alpha^2 x_t + \beta^2 y_t$
Hull-White Model(1993)	$dr_t = [\theta(t) - ar_t]\,dt + \sigma(t)dW_t^Q$
Hull-White Model(1994)	$dr_t = [\theta(t) + u(t) - ar_t]\,dt + \sigma_r dW_1^Q(t)$ $du_t = -bu_t dt + \sigma_{u_t} dW_2^Q(t)$

Milvesky and Promislow[2001] では, Gompertz 法則を拡張し, 時点 t, 年齢 x の死力 $\mu_{x,t}$ について, $\mu_{x,t} = \xi_0 e^{\xi_t x + Y_t}$, $dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma dW_t$ とすることにより平均回帰性を与えている. 山本・上田 [2003], Dahl[2004] 等では, Hull-White Model の適用により平均回帰性を, 更に Cox-Ingersoll-Ross Model の適用により非負制約の反映を可能としている. Schrager[2006] も同様の“Gaussian Stochastic Thiele Model”, “Gaussian Stochastic Makeham Model”を提唱している. また, Biffis[2005] は Gompertz-Makeham 法則 $\mu_t = m(t) + \eta_t \cdot Y_{t-}$ を拡張し, 状態変数 Y にジャンプ拡散過程 $dY_t = \gamma\{\bar{y}(t) - Y_t\}dt + \sigma dW_t - dJ_t$ を適用している.

然るに, Cairns, Blake and Dowd[2006] は死亡率に平均回帰性を持たせることは批判的である. その根拠は, 平均回帰性が強いのであれば, 図 3.1 に見られるような世界的に観測される死亡率の低下トレンドが反転し, 悪化トレンドを持つこととなり, 医学の進歩に対して正当化することが困難であろうというものである. また, 短期的には医学及び製薬業界の最新事情を分析することでトレンドの変化を把握可能かもしれないが, 持続性を判断することは困難であろうともしている.

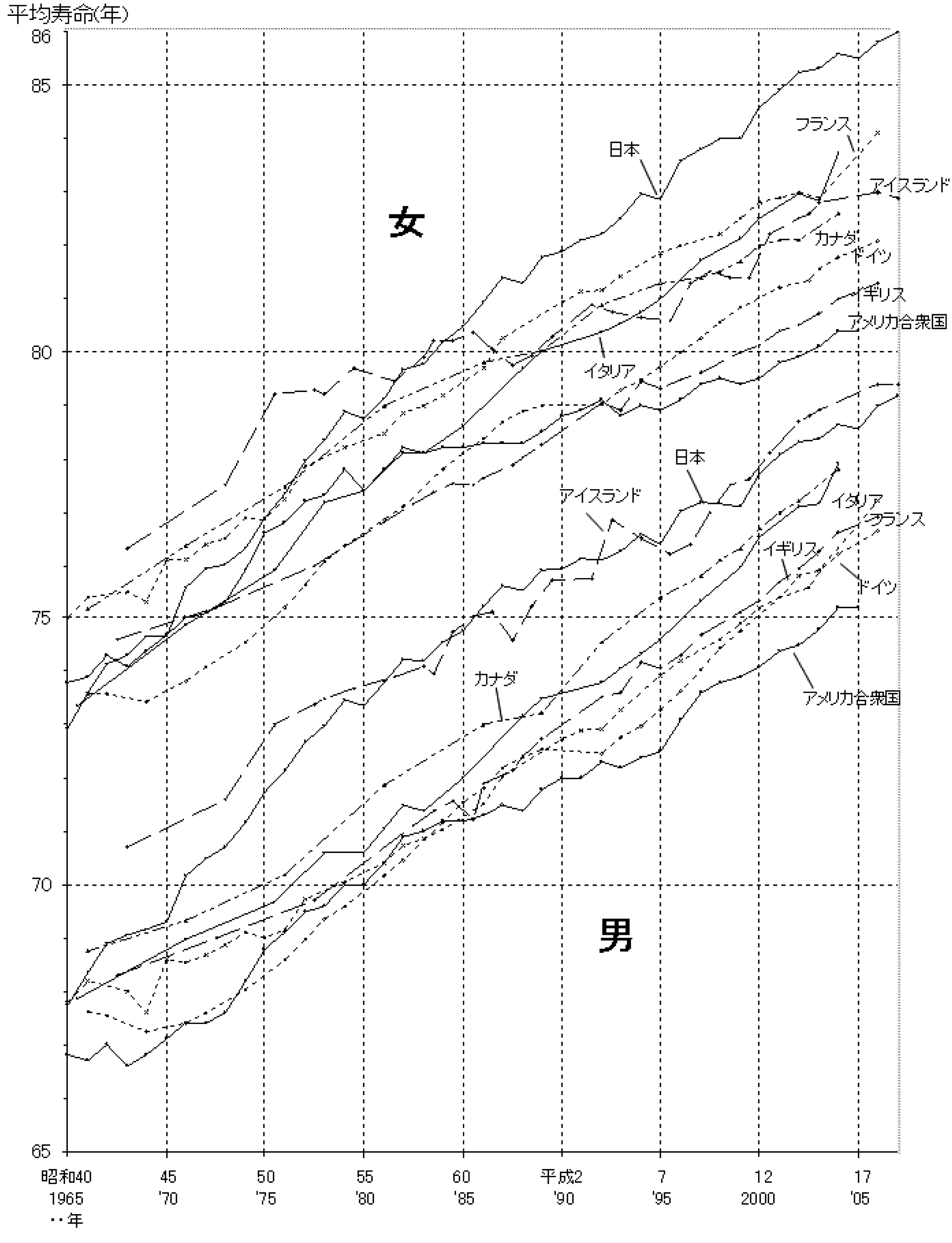
ジャンプを適用する他の研究例では, Lin and Cox[2006] が壊滅的な死亡率の変動を表現するため, 対数正規過程に基づく標準死亡率 q_t にジャンプ・イベントによるショックを計上し,

$$\tilde{q}_t = \begin{cases} q_t Y_{[N_t - N_{t-h}]} & (\text{ジャンプ発生; 確率 } p) \\ q_t & (\text{ジャンプ未発生; 確率 } 1-p) \end{cases} \tag{3.9}$$

としている. ここでは平均回帰性は反映されていない.

Lin and Cox[2004a] は死亡率改善予測が困難であることを指摘しているが, 渋谷・華山 [2004] は極値理論を適用することによる日本人男性寿命分布の上限値を推定しており, 年齢上限を与えた上での動的死亡率表現等モデルの拡張が期待される.

図 3.1: 諸外国における平均寿命の推移



(出典) 厚生労働省大臣官房統計情報部 [2008a],「日本人の平均余命 平成 19 年簡易生命表」, 2008 年 7 月 31 日. (図 3 を転載している.)

3.2.2　ノンパラメトリック・モデル

カプランーマイヤー・モデル

静態的な表現としては, カプランーマイヤー・モデルを代表例として掲げることができる.

カプランーマイヤー・モデルでは, 時刻 τ_j 直前の被保険者群団 (コーホート) 内の保険事故未発生数 (残存者数) を n_j, τ_j 時点の保険事故発生数を d_j とするとき, 生存関数 $S(t)$ の推定量を

$$\hat{S}(t) = \prod_{\tau_j < t} (1 - \frac{d_j}{n_j}), \quad 0 < t \leqq T \tag{3.10}$$

とする. 従って, ハザード率の推定量は次のとおりとなる.

$$\hat{h}(t_j) = \frac{d_j}{n_j} \tag{3.11}$$

定常状態を仮定すれば, 時間 t の推移は全て年齢に帰着することから, 上掲生存関数及びハザード率は

$$\hat{S}(x+t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \quad 0 < t \leqq T \tag{3.12}$$

$$\hat{h}(x+t) = \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} \tag{3.13}$$

として求められる. ただし, d_x は年齢 x の保険事故発生者数, l_x は同生存者数であり, 生存関数及びハザード率は特定の分布型には依存しない.

リー・カーター・モデル

一方, 動態的な表現としては Lee and Carter[1992] の提唱したモデルが代表例である. 国立社会保障・人口問題研究所 [2002] では当該モデルを拡張した手法が適用されているようである. 石井 [2008] は当該モデルのレビューを行い, 当該モデルを G7 諸国の死亡率推計に適用し, 有効性を示した研究成果として Tuljapurkar, Li and Boe[2000] を紹介している.

p 因子のリー・カーター・モデルは前掲死亡法則に依存せず, 時点 t, 年齢 x の死亡率 $q_{x,t}$ の対数値を,

$$\begin{aligned}
\ln(q_{x,t}) &= \alpha_x + \sum_{i=1}^{p} \beta_x^i \gamma_t^i + \varepsilon_{x,t} \qquad (3.14) \\
\sum_x \beta_x^i &= 1 \\
\sum_t \gamma_t^i &= 0
\end{aligned}$$

と年齢要因 (α,β) 及び経年要因 (γ) に分解する手法であり, 誤差項 $\varepsilon_{x,t}$ にあてはめる分布の選択により様々に拡張できる. 例えば, 第 t 時点における誤差項を年齢に依存しない正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2 t)$ とすれば, 対数死亡率 $\ln(q_{x,t})$ は正規分布 $\mathcal{N}(\alpha_x+\sum_{i=1}^{p}\beta_x^i\gamma_t^i,\sigma^2 t)$ に従うこととなる.

パラメータの推定

T をデータの観測期間, ω を生命表の最終年齢とする. ただし, $T<\omega$ を前提とする. このとき, 最大因子数は T となるので, 式 (3.15) におけるパラメータは,

$$\begin{aligned} &minimize && \sum_{x=0}^{\omega}\sum_{t=1}^{T}\{\ln(q_{x,t})-(\alpha_x+\sum_{i=1}^{T}\beta_x^i\gamma_t^i)\}^2 \\ &\equiv && L_1[\alpha_0,\cdots,\alpha_\omega;\beta_0^1,\cdots,\beta_\omega^T;\gamma_1^1,\cdots,\gamma_T^T] \\ &subject\,to && \sum_{x=0}^{\omega}\beta_x^i=1,\quad \sum_{t=1}^{T}\gamma_t^i=0\quad(i=1,\cdots,T) \end{aligned} \tag{3.15}$$

を解くことで容易に推定できる.

具体的な推定プロセスを以下に示す. まず α_x は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha_x}L_1 &= -2\sum_{t=1}^{T}\{\ln(q_{x,t})-(\alpha_x+\sum_{i=1}^{T}\beta_x^i\gamma_t^i)\}\to 0 \\ \therefore\hat{\alpha_x} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln(q_{x,t}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

とすればよい. 然るに, 同様の処理により β_x^i 及び γ_t^i を求めることはできない. そこで次の段階では $z_{x,t}=\ln(q_{x,t})-\hat{\alpha_x}$ に対する最小二乗解を特異値分解 (Singular Value Decomposition) により確保する.

$$\begin{aligned} minimize\quad L_2 &= \sum_{x=0}^{\omega}\sum_{t=1}^{T}(z_{x,t}-\sum_{i=1}^{T}\beta_x^i\gamma_t^i)^2 \\ z_{x,t}-\sum_{i=1}^{T}\beta_x^i\gamma_t^i &\to Y=\begin{pmatrix} y_{0,1} & \cdots & y_{0,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\omega,1} & \ddots & y_{\omega,T}\end{pmatrix} \\ SVD[Y] &= \mathbf{U\Delta V}^{transpose} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{0,0} & \cdots & u_{0,\omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\omega,0} & \ddots & u_{\omega,\omega}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_{0,1} & \cdots & \delta_{0,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\omega,1} & \ddots & \delta_{\omega,T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\omega,1} & \ddots & v_{\omega,T}\end{pmatrix}^{transpose}$$

β_x^i は行列 U の第 i 列に対応する．ただし,$\sum_{x=0}^{\omega} u_{x,i} = 1$ を満足しなければならない．従って,$\mathbf{U}$ の T 列までについて

$$[{\beta_0}^i, \cdots, {\beta_\omega}^i] = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} u_{x,i}}[u_{0,i}, \cdots, u_{\omega,i}] \tag{3.17}$$

として基準化する． 同様にして ${\gamma_t}^i$ を求めればよい． すなわち, $\mathbf{\Delta V}^{transpose}$ の第 i 列に $\sum_{x=0}^{\omega} u_{x,i}$ を乗じた結果が ${\gamma_t}^i$ となる．最終的に $p \leqq T$ の範囲で因子数 p を決定すればよい．

ただし, 最小二乗推定に批判的な意見もある．Brouhns, Denuit and Vermunt[2002] は式 (3.14) による予測結果と経験値の乖離要因が特異値分解を通じた最小二乗推定の前提を等分散としていることと指摘し, 誤差項にポアソン分布をあてはめている．また, リー・カーター・モデルの留意点として, 医学の進歩及び環境変化に関する過程を考慮せず, 既往歴以外の情報は反映されないことを指摘している．ただし, アクチュアリーの視点からは当該主張を肯定することはできない．価格の公平性及び公正性, 計算基礎率の客観性及び保守性を鑑みれば, 希望的観測を恣意的に反映すべきではないためである．

小暮・長谷川 [2005], 小暮 [2005] は誤差項に正規分布を過程する標準的なリー・カーター・モデルとポアソン双線形回帰モデルを比較し, 年齢パラメータ (α, β) は両者の推定値が一致するものの, 暦年パラメータ (γ) には相当程度の誤差が生ずること, 標準的なリー・カーター・モデルの残差分析から, 高齢者層における誤差項の分散不均一性を確認し, 分散不均一性を明示的に考慮するポアソン双線形回帰モデルの方が信頼度が高いだろうと予想している．

なお, Cairns and Dowd[2008] は, 全ての年齢に連動した1変量モデルであること, 予測におけるバイアスの問題等をリー・カーター・モデルの欠点として指摘し, Renshaw and Haberman[2003][2006] による Multifactor age-period Model, Cohort Model 等改良されたモデルの紹介を行っている．

数値解析結果

図 3.2 から図 3.5, 表 3.4 及び表 3.5 は, 1962 年から 2005 年の簡易生命表 (男性) の死亡率に対するリー・カーター・モデルの適用結果である．ただし, 図 3.3 から図 3.5 は第一因子のみを可視化している．図 3.4 及び図 3.5 に示す γ を見ると, 時間経過に伴う死亡率低下が顕著となっている．また, 図 3.5 からは 1995 年の阪神淡路大震災, 1998 年の自殺死亡者増加の影響を伺うこともできる．

図 3.2: リー・カーター・モデルの α (年齢)

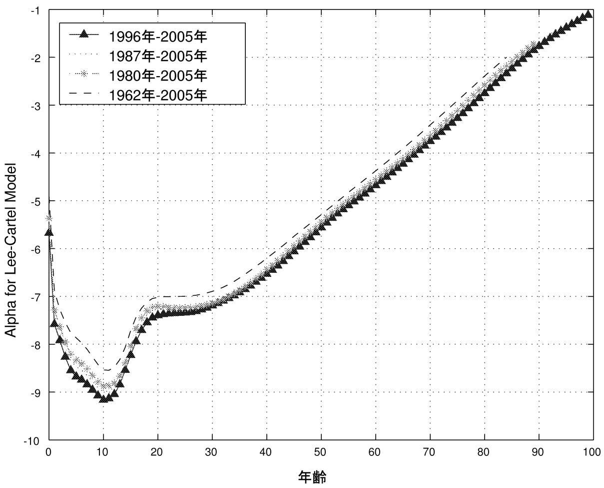


図 3.3: リー・カーター・モデルの β (年齢)

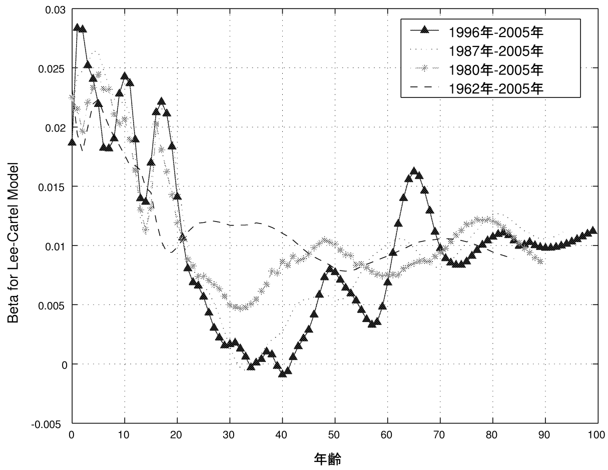


図 3.4: リー・カーター・モデルの γ (年数)

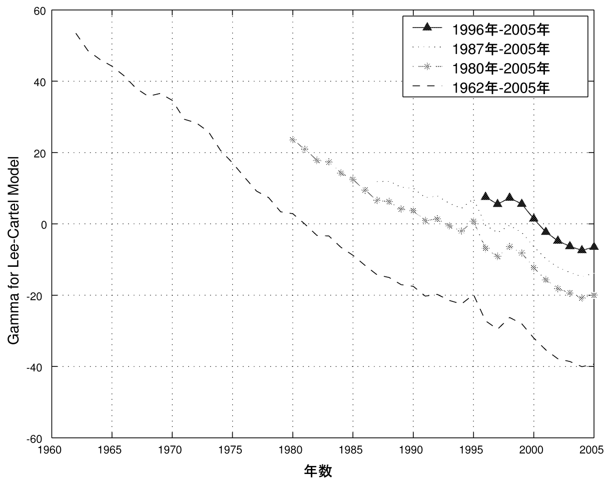


図 3.5: リー•カーター•モデルの γ (1986-2005)

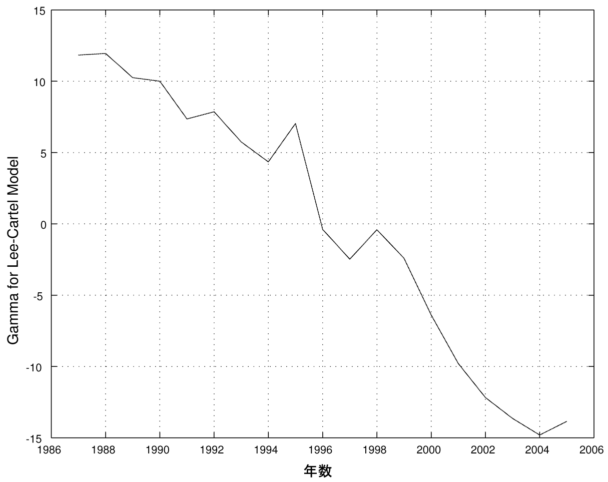


表 3.4: リー・カーター・モデルにおけるパラメータ (1)

年齢	α	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	△ 5.5101	0.0208	△ 0.0139	△ 0.0297	0.6503	△ 0.3540
10	△ 8.9957	0.0222	△ 0.0629	0.1525	△ 1.2789	0.8847
20	△ 7.2709	0.0161	0.0288	△ 0.0498	△ 0.1816	0.1737
30	△ 7.1823	0.0015	0.0167	0.0600	△ 0.1787	△ 0.1941
40	△ 6.5086	0.0028	0.0624	0.0210	△ 0.0680	△ 0.4180
50	△ 5.5243	0.0055	0.0115	0.0494	0.4628	0.0312
60	△ 4.5930	0.0101	△ 0.0123	△ 0.0567	△ 0.0895	△ 0.0532
70	△ 3.6958	0.0081	△ 0.0010	0.0183	0.3771	0.2201
80	△ 2.6523	0.0126	0.0043	△ 0.0153	△ 0.0609	0.0769
90	△ 1.6839	0.0105	0.0043	△ 0.0279	△ 0.1068	0.4246

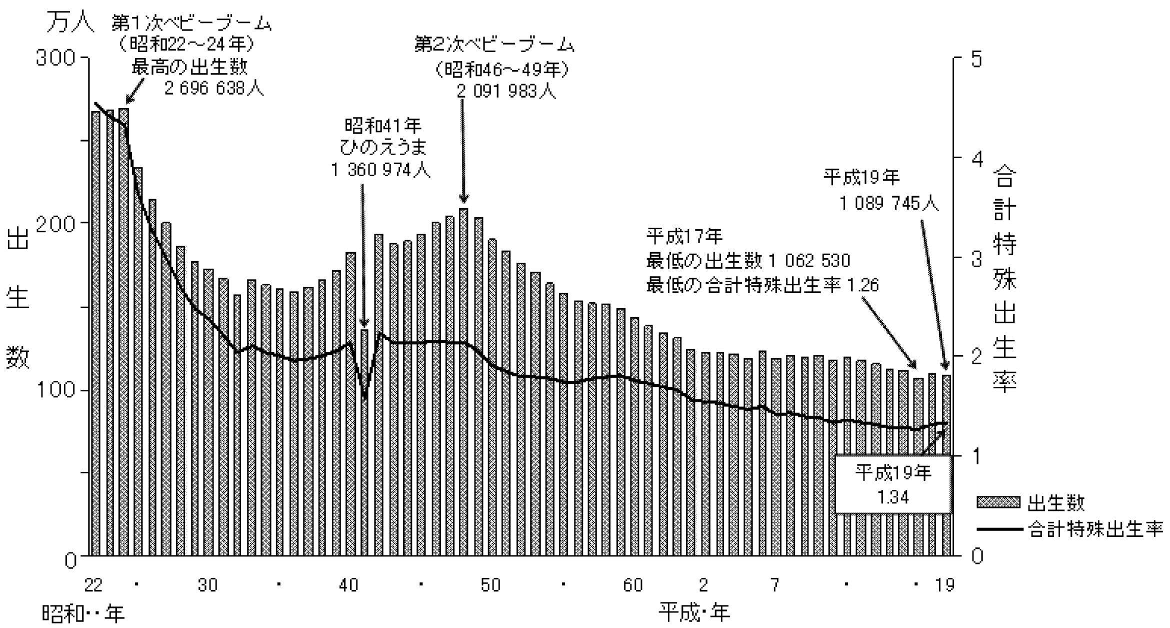
表 3.5: リー・カーター・モデルにおけるパラメータ (2)

年数	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
1987	11.8330	0.8525	0.3770	0.0130	△ 0.0656
1988	11.9430	0.8306	0.1436	△ 0.0122	0.0287
1989	10.2490	0.4699	△ 0.0873	△ 0.0251	0.0181
1990	9.9979	0.3553	△ 0.4464	0.0163	△ 0.0218
1991	7.3512	0.1510	△ 0.4831	△ 0.0141	0.0348
1992	7.8563	△ 0.2654	△ 0.3818	0.0025	0.0108
1993	5.7392	△ 0.5698	△ 0.3049	0.0008	△ 0.0037
1994	4.3411	△ 0.8570	0.0639	0.0131	△ 0.0419
1995	7.0338	△ 1.0765	0.5383	△ 0.0351	△ 0.0115
1996	△ 0.3937	△ 0.6515	△ 0.0563	0.0386	0.0108
1997	△ 2.4740	△ 0.4675	△ 0.0755	△ 0.0264	0.0522
1998	△ 0.4088	△ 0.0712	0.2701	△ 0.0094	△ 0.0198
1999	△ 2.4175	0.1454	0.7507	△ 0.0032	0.0648
2000	△ 6.3878	0.0305	0.1487	0.0268	△ 0.0207
2001	△ 9.7975	0.2998	0.0067	0.0117	0.0127
2002	△ 12.1780	0.3100	△ 0.2457	0.0002	0.0027
2003	△ 13.6380	0.5534	0.1546	0.0212	△ 0.0103
2004	△ 14.8040	0.0191	△ 0.1102	△ 0.0165	△ 0.0193
2005	△ 13.8480	△ 0.0585	△ 0.2626	△ 0.0548	△ 0.0210

同様にして, 出生率を年齢要因 (α,β), 経年要因 (γ) に分解することも可能である. 1940 年から 2005 年までの母親の年齢別出生率に対し, リー・カーター・モデルを適用した結果が図 3.7 から図 3.10 である.

母親の年齢別平均出生率は抽出期間を変更しても殆ど差異が見られない (図 3.7) が, 出生率の経年変化に対する年齢毎の感応度では, とりわけ 20 歳代に顕著な差異を確認できる (図 3.8). すなわち, 1960 年代までを対象期間に含める場合には当該値が正値となっているが, 70 年代以降の期間では負値となっているということである. 一方, 出生率の経年変化は 1980 年代以降では上昇傾向にある (図 3.9 及び図 3.10). 当該結果のみを参照するならば, 図 3.6 に観測される出生率低下は経済環境への不安等のような時間に依存した一過性のものではなく, 構造的なものであると解釈できるだろう. 国外からの流入を想定せず人口規模を維持しようとするならば, 2.0 を超える合計特殊出生率が必要となる. 然るに平成 19 年度実績値は 1.34 であり, 当該水準には達していない. 出生率を高めるためには年齢要因が負値となっている部分を正値に逆転させるという努力も必要であろうが, 正値となっている部分 (10 歳代及び 30 歳代) のフォローに注力する事が即効的な結果を得られるかもしれない.

図 3.6: 出生数及び合計特殊出生率の年次推移



(出典) 厚生労働省大臣官房統計情報部 [2008b], 「平成 19 年 人口動態統計月報年計（概数）の概況」, 2008 年 6 月 4 日. (図 1 を転載している.)

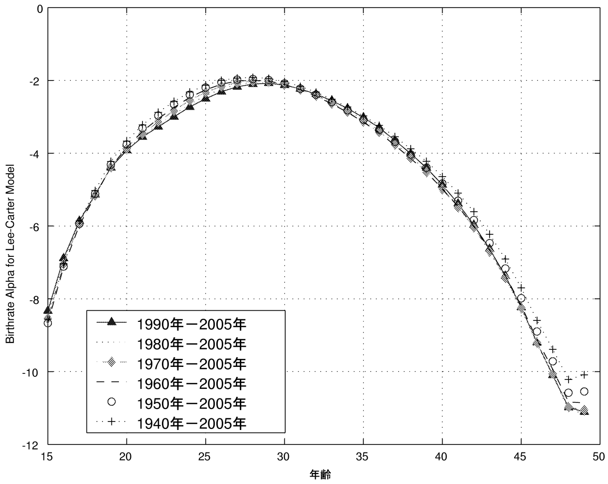


図 3.7: 出生率の α (年齢)

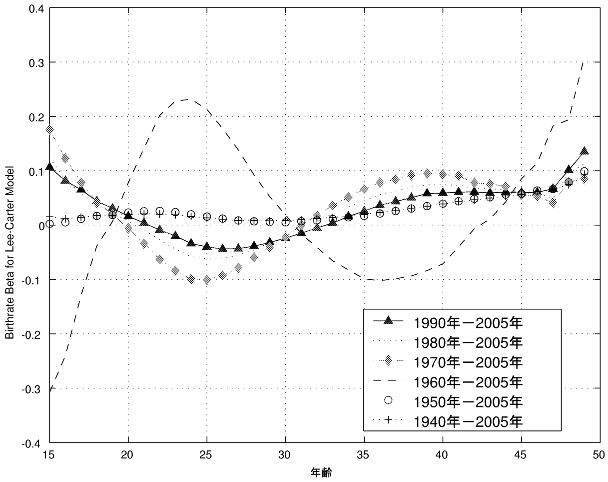


図 3.8: 出生率の β (年齢)

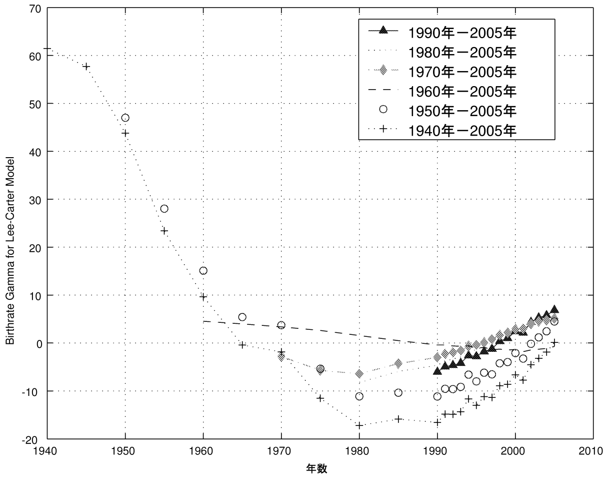


図 3.9: 出生率の γ (1940-2005)

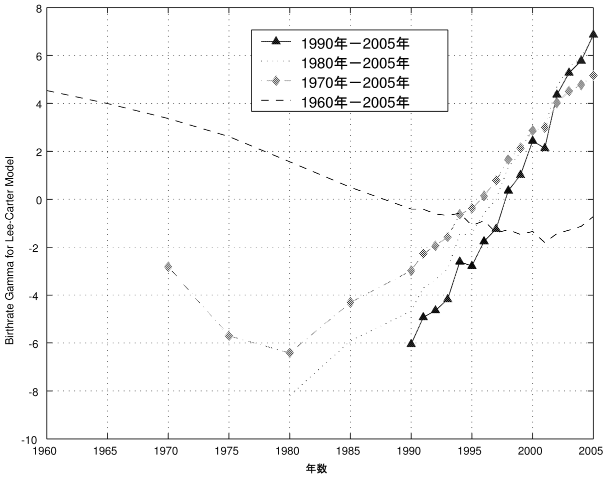


図 3.10: 出生率の γ (1960-2005)

3.3　保険契約に付随する権利価値評価

Gatzert[2007] は生命保険契約に付随する権利について, 配当金受取方法, 保険料支払方法, 契約解除, 延長定期保険, 契約者貸付等体系的な整理を行っている.

3.3.1　配当方式

事業年度決算における剰余金分配, 契約消滅時の持分清算を行う手段が配当であり, 積立配当, 現金清算, 保険料相殺, 保険金買増等が実施されている. 配当実施に際しては剰余の発生が前提となるため, 配当権価値はコール・オプションにより評価できる.

Briys and Varenne[1997] は生命保険会社における ALM 管理の失敗を出発点とし, 潜在的デリバティブが無視されていることをその要因として指摘する. 保険会社の契約者持分と株主持分をヨーロッパ型のオプションを組み合わせることで表現, 解析解を導出する. また, 保険債務についてのデュレーション分析を行い, 満期よりも短いこと, 配当の影響を受けることを示している. 更に金利変化が契約者持分と株主持分に及ぼす影響を確認する. 解約オプションは分析対象とはされていないが, 当該オプションを反映するならば負債の金利感応度がより大きくなるだろうと予想している.

Grosen and Jørgensen[2000][2001] は生命保険会社における契約者持分及び株主持分を当該保険会社の保有資産価格の上に書かれるデリバティブとして評価する. 1980 年代後半から 1990 年代にかけて日米欧で観測された生命保険会社の破綻について, 「予定利率管理の失敗」「信用リスク管理の失敗」「不適当な会計原則」の共通要因を掲げている. また, Briys and Varenne[1997] モデルの問題点, すなわち破綻認定及び利害関係者の請求権評価が満期時点のみであることを指摘し, ノックアウト・バリア・オプションによる評価を行うことで破綻認定を連続的なものとする改良を図っている.

第 t 時点の保有資産を A_t, 同責任準備金を V_t, 配当率を δ とすると, 契約者持分は $V_T^G - \max[V_T^G - A_T, 0] + \delta \max[\alpha A_T - V_T^G, 0]$, 株主持分は $\max[A_T - V_T^G, 0] - \delta \max[\alpha A_T - V_T^G, 0]$ と記述することができる. 当該手法は, 契約者が経営破綻時に債務超過分を放棄 (プット・オプション) する一方, 資産超過の場合には一定割合を配当として受け入れることができ (コール・オプション), 株主が残余財産に対する請求権を持つ (コール・オプション) ことを再現するものである. ただし, 当該手法には幾つかの欠点を指摘することができる.

第一には引受保険会社の経営形態及び投資行動により, 同一の保険契約に異なる評価結果をもたらすことである. 例えば, 相互保険会社の社員は保険契約者であると同時に所有者であるのだから, 持分は両者を合計したものとなり, 保有資産に一致する. また, 同種同保険金額の契約に対し, 保有資産の構造 (ボラティリティ等) が異なれば, 異なる評価が与えられることになる.

第二には調達金利としての予定利率を外挿し, 金利の期間構造を想定した予定利率の保証価値を評価していないことである. 当該手法は引受保険会社の信用リスクを構造的アプローチにより評価することには適しているが, 評価対象となる保険契約に固有のリスク特性を把握することは困難であり, ヘッジ戦略の構築に貢献するものではない.

3.3.2　契約の解除

解約権 (Surrender Option) は解約返戻金額を行使価格, 当該契約の経済的価値若しくは当該保険契約に対応する保有資産を原資産とするアメリカン・プット・オプションとして評価できる. 一般的に解析解を得られないアメリカ型デリバティブは, 多くの場合に数値解析に頼ることを余儀なくされる. 代表的な数値解析手法には表 3.6 に掲げるものがある.

表 3.6: 代表的な数値解析手法

名称	執筆者
有限差分法	Brennan and Schwartz[1978]
格子法	Cox and Rubinstein[1979]
ランダム・ツリー法	Broadie and Glasserman[1997a]
確率メッシュ法	Broadie and Glasserman[1997b]
最小二乗モンテカルロ法	Longstaff and Schwartz[2001]

Bacinello[2003] は, 死亡率及び利子率を決定的に扱い, 格子法で資産価格に不確実性を与え, 有配当養老保険契約を対象とした公正価値評価を行い, 「基礎的な契約部分」, 「配当オプション部分」, 「解約オプション部分」の要素別に価値を示している. 留意すべき点は, 不確実性の要素が資産価格に限定されていることである. 格子法は予め状態分割と推移確率を決定する必要があるが, これは不確実性の要素数及び状態数の増加に伴い困難となる. 例えば, 終身保障等長期契約の価値評価において, 処理速度, 必要とされるメモリ等を鑑みれば, 各年齢の死亡率に不確実性を与えることは回避する選択が現実的であろう. 多次元の不確実性を扱う場合にはモンテカルロ法の適用が実践的と考えられる.

Andreatta and Corradin[2003] は, 最小二乗モンテカルロ法及び格子法を適用することで比較分析を行なっている. 彼らは死亡率を決定的に扱うものの, 利子率と資産価格に不確実性を与え, 参照資産を株式と債券で構成されるポートフォリオとし, 解約権の価値評価を試みている.

また, 保険数理の視点に近い立場をとれば, 死亡率に準じ, 年齢・経過期間・経済的要素等に対応するハザード率の一つとして, 解約率を捉える考え方もできる. Kim[2005] は当該

アプローチにより, 韓国保険市場における解約失効率のモデル化を試み, 次掲の結果を示している. なお, 関数形は一般的に CLL(complementary log-log) link 関数, logit link 関数のあてはまりが良いとしている.

保険種類	リスク・ファクター (説明変数)
養老保険	契約年齢・金利差
学資保険	契約年齢・金利差・失業率
年金保険	契約年齢・金利差・失業率・経済成長率

3.3.3 保険料払込選択

本小節における保険料払込選択とは, 平準払保険契約における単年度あたりの保険料払込回数の選択ではない. 当該保険契約における保険料の払込を将来に向かって権利行使時点で止めてしまう払済, 払済後に将来に向かって保険料払込を再開する復活である. 払済は当該時点での責任準備金を財源として同種同期間の保険契約の一時払保険料に充当するものである. 再開は追加購入する保険金額に対し, 残存保険期間に対応する平準払保険料を設定すればよい.

Gatzert and Schmeiser[2006a][2006b] は有配当保険契約における保証 (予定利率の保証, 剰余金分配) と権利 (払済, 復活, 保険料調整, 解約, 年金保証等) を概観し, 払済及び復活オプションの価値評価を行っている. 評価対象の剰余金分配方式である保険金買増方式は, 配当実施により保険金額が増加する. このため, 彼らは第 2 章の式 (2.13) で示したファクラーの再帰式を次掲のように変形することにより, 満期時における基本契約の累積収支算に「保証」を反映し, 当該価値の上に書かれるデリバティブとして「権利」を評価している.

$$(V_{t-1}+B)\cdot[1+\max\{\, g,\alpha(\frac{S_t}{S_{t-1}}-1)\}]=p_{x+t-1}\cdot V_t+q_{x+t-1}\cdot Y \tag{3.18}$$

ただし, V_t は第 t 時点の責任準備金, B は保険料, g は予定利率, α は配当率, $\frac{S_t}{S_{t-1}}-1$ は決算における剰余, p_x は x 歳の生存率, q_x は同死亡率, Y は保険金額である.

前掲「契約の解除」は保障に付随して提供される権利の行使が保険契約を消滅させた. 然るに, 解約権行使により得られた利得を元に再度契約を締結する状況を想定するならば, 保障継続を前提とする問題設定が現実には即している. Gatzert and Schmeiser[2006a][2006b] は, 保障が継続する状況下で潜在的デリバティブの権利行使がキャッシュフローに及ぼす影響を示しており, ソルベンシー・リスク評価の視点に立てば前進をしたものと評価できる. 然るに, 予定利率は外挿としており, 金利の期間構造を想定したものとはなっていない.

3.3.4　保険金給付方式

生存保障商品では一時金給付と年金給付を受給時点で選択することが可能である．年金現価評価利率が市中金利よりも高ければ, 合理的な受給資格者は年金給付を選択するであろう．国友・室井 [2006] は, 満期時点における一時金給付の年金給付への変更権を「株式累積基金の価格相当分を受け取る」，「株式累積基金を予め定められた金利の確定年金に交換する」権利を有する商品としてモデル化, 価値評価を行い, 2000 年 12 月の英国 Equitable Life の経営破綻の要因として給付利率保証型年金商品に付与された当該選択権の存在を指摘している．

3.3.5　保険期間の調整

例えば定期保険では, 保険事故を経験することなく満期を迎えた場合には, 同条件で自動更新できる内容の契約がある．自動更新するか否かは契約者の選択権である．

3.3.6　契約者貸付

責任準備金を担保に融資を受けられる制度である．解約の場合には保障が途切れてしまうが, 当該制度の場合には保障を継続することができる．

ここで留意すべき点は貸付利率の設定である．何故ならば, 予定利率を基準とする固定金利の場合には, 貸付金利が市中金利よりも低ければ裁定機会を提供することになり, 大規模な資金流出が発生する．生命保険業界における代表例としては, 米国において 1979 年から 1981 年に観測されたディス・インターメディエーションが知られている．また, 予定利率を考慮せず市中金利のみを参照すれば, 調達金利を賄う金利収入が得られないことになる．契約者行動と保険会社の投資行動に影響を及ぼすためである．

3.3.7　延長定期保険

既契約の責任準備金を一時払保険料の財源として, 同保険金額の定期保険を購入するものである．従って, 購入可能な保険期間も不確実性を持つことになる．

3.4　保険契約のリスク分散策

保険業法第 97 条「業務の範囲等」には, 第 1 項で保険会社が保険契約の引き受けをできること, 第 2 項で保険料等の資産運用を行う場合には保険業法施行規則第 47 条「資産の運用方法の制限」によることが規定されている．政省令に委ねる表現とされていないことを鑑みれば, 資産運用業務は保険会社の本来業務として, 保障提供と同順位に位置づけられているものと解釈できる．これは保険数理及び決算の構造を振り返れば当然といえよう．

簡単な例で見てみよう．保険金額 1 を期末払する死亡保障契約に基づく $(t+1)$ 時点末責任準備金繰入額は,

$$l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}} - l_{x+t} \cdot {}_{t}V_{x:\overline{n|}} = (l_{x+t} \cdot P_{x:\overline{n|}} - d_{x+t}) + i \cdot l_{x+t} \cdot ({}_{t}V_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}}) \quad (3.19)$$

である．ただし, l_x は x 歳の生存者, d_x は同死亡者, i は予定利率, $P_{x:\overline{n|}}$ は加入時年齢 x・保険期間 n の養老保険の保険料, ${}_{t}V_{x:\overline{n|}}$ は当該契約の経過 t 時点における責任準備金額である．

右辺第 1 項及び第 2 項は保障提供の対価として収受する保険料と保険契約に基づく給付金額の収支残, 第 3 項は年度始責任準備金及び当該年度に収受される保険料に対する予定利率相当の利息である．保険業法第 116 条「責任準備金」第 1 項では, 毎決算期において保険会社の責任準備金積み立てを要求しているため, 投資行動により当該利息相当額を賄うことができなければ, 当該保険会社は決算不能に陥ることになる．

ここで定常状態を仮定すると, 収支残 $\sum_{t=0}^{\omega-1}(l_{x+t} \cdot P_{x:\overline{n|}} - d_{x+t})$ 及び想定元本 $\sum_{t=0}^{\omega-1} l_{x+t}({}_{t}V_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}})$ は確定的となる．従って, 資産超過の状態にあり, 固定金利としての予定利率が円金利資産収益率で達成可能な水準に設定されるならば, 債券に代表される円金利資産をキャッシュフローに対応させる投資行動が一つの戦略として考えられる．責任準備金評価において契約時の計算基礎率が契約期間に亘り適用され, 満期保有目的の債券に償却原価法が認められるならば, 会計上の整合性も確保できるというものである．なお, 平成 19 年度決算時における生命保険事業概況の主要資産運用状況を見ると, 国債 (36.4%), 地方債 (2.8%), 社債 (9.1%), 一般貸付金 (15.4%) と円金利資産の構成比が 6 割に達している．

債券を粛々と積み上げる当該戦略, 所謂「バイ・アンド・ホールド」戦略は動的なリバランスを前提とするものではない．静的な投資行動を前提とできる背景には, 定常状態に基づく財政収支の予見可能性がある．従って, 契約者の行動・被保険者の状態等に依存する将来キャッシュフロー及び責任準備金額の定常性が期待できるのであれば, 静的ヘッジ戦略は有効な手段となるかもしれない．

Pelsser[2003] は死亡率が決定論的であるという仮定の下で給付利率保証型年金商品の公正価値を金利の期間構造の上に書かれるデリバティブとして評価し, 想定元本と契約期間の異なる金利スワップションのポートフォリオを適用した静的な複製戦略を示している．時点 t における満期 T の信用リスクのない割引債券価格 $B(t,T)$, x 歳被保険者の死亡率 q_x, 予め

約定される利率 r_x^G に対し, 契約期間 n の固定受変動払 (固定金利 K_n) の金利スワップ S_n は

$$S_n := K_n \sum_{t=1}^{n} B(0,t) - [1 - B(0,n)] \tag{3.20}$$

と求められるため,

$$L_n = \frac{L_{n+1} + r_x^G q_x}{1 + K_n} \tag{3.21}$$

として定義される想定元本 L_n に対し, スワップションのポートフォリオ $\sum_{n=1} L_n \max(S_n, 0)$ を構築すれば, 給付利率保証型年金商品のペイオフを複製できるとしている.

然るに, 全ての商品における財政収支及び責任準備金額については, 必ずしも定常性を期待できない. 例えば, 変額保険における財政収支及び責任準備金額, 公正価値評価される保険契約価値は, 経済環境等の不確実性を反映する. 当該事例においては, 目標時点においてヘッジ対象とするデリバティブのペイオフを複製する取引可能な資産のポートフォリオを現時点で構築することは困難であろう. 要求される運用成果が状態依存することに伴い, 投資戦略も同様に状態依存させる動的な対応が必要となるものと考えられる. 松山 [2005] は変額年金保険の最低給付保証を対象とする際において, 解約率モデルの信頼性が不十分である場合には静的ヘッジ戦略は経済的ではないと指摘している.

Hardy[2003] は株価収益率モデル, パラメータの推定方法, 数理ファイナンス, リスク尺度等, 変額保険のモデリングとリスク管理に関する基礎的な知識を包括し, 解説している. 動的ヘッジ戦略について章を割き, 給付形態に対応する解説を行っている. ただし, 死亡率及び解約率については決定論的としており, 本質は完備市場を前提としたデルタ・ヘッジ戦略の提示である. 小守林 [2002] も同様に完備市場を前提としたデルタ・ヘッジ戦略を提示するが, 保険料払込方法の差異を確認し, 平準払の場合にはヘッジ精度の向上が困難であることを指摘している.

ただし, 保険・年金制度におけるヘッジ戦略の構築に際しては, 以下の要因から非完備市場における前提が必要と考える. 第一には保険事故発生率の非市場性である. 再保険を通じた流通市場は存在するものの, 流動性及びキャパシティは限定的である. Credit Suisse, JP Morgan, Deutsche Börse, Goldman Sachs 等が死亡率インデックスを公表し, 死亡率デリバティブの取引事例も存在するものの, 有価証券等と比較すれば規模は小さい.

第二には財源である. 完備市場を前提とするならば, 任意の時点及び状態における条件付請求権の価値とヘッジ費用は一致する. 然るに, 保険料として収受される金額は公正価値に対する収支相当を想定していない. 例えば, 利子率のみに不確実性を想定する時, 保険金額 1, 保険金期末払の死亡保障契約に基づく保険契約の t 時点末における経済的価値は, 時点 t で期間 $[k, k+1]$ をカバーするフォワード LIBOR レート $L_t(k, k+1)$ を導入すれば

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} + \sum_{k=t}^{n-1} B(t, k+1) \cdot \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} \cdot (\, {}_kV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}\,) \cdot [\, i - L_t(k, k+1)\,] \tag{3.22}$$

となり, 保険契約に基づく責任準備金額 (第 1 項) に, 予定利率の保証価値 (第 2 項) を計上した金額となる．当該結果の証明は付録に示す．ところが, 保険料は第 1 項部分にのみ対応するものである．計算基礎率に含まれる安全割増及び内部留保が第 2 項部分を賄うに十分な水準でなければ, 当該保険会社の経営は破綻することとなる．また, 一般的に保険料は平準的に払い込まれる．従って, 対応する負債に対して必ずしも財源は十分ではない条件も想定し, 投資行動を実践する必要があると考える．

第三には会計との差異である．現行会計制度上, 貸借対照表上に計上される金額は式 (3.22) の第 1 項 ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ である．従って, 第 2 項をヘッジするために固定受変動払の金利スワップ契約を締結すると, ヘッジ効果は認識されず当該スワップ契約の差損益のみが評価される．決算を意識するのであれば, 資産側と負債側の会計基準の差異も認識する必要がある．

更に, 退職給付会計における退職給付債務, 企業年金制度における最低積立基準額のように発生給付評価方式に基づき評価される場合には, 対象となる負債価格過程が不連続, すなわち, ジャンプを有するものとなる．

非完備市場の条件付請求権に対するヘッジ戦略の代表例としては,「平均分散ヘッジ」と「局所的リスク最小化」を指摘することができる．次小節では両戦略を概説する．詳細については, Schweizer[2001], 塚原 [2001], 田畑 [2004] 等が参考となる．

3.4.1 平均分散ヘッジ

投資資産の取引戦略過程を $\varphi = (\vartheta, \eta)$ とする．ただし, ϑ はリスク資産への投資を意味する可予測過程, η は無リスク資産の保有を意味する適合過程である．

当該戦略は追加的な財源調達を許容しない「自己資金充足的」を前提とする．従って, リスク資産の価値過程 $\mathbf{X}_t$ に対し, 保有資産の価格過程 A_t は

$$A_t = A_0 + \int_0^t \vartheta_u d\mathbf{X}_u = A_0 + G_\varphi(t) \tag{3.23}$$

となる．ただし, $G_\varphi(t) = \int_0^t \vartheta_u d\mathbf{X}_u$ は第 t 時点までの取引戦略に基づくゲイン過程である．

当該戦略はヘッジ対象となる条件付請求権 $\mathbf{H}$ に対し, 積立過不足の発生を許容し,

$$\min_\varphi E[(\mathbf{H} - A_0 - G_\varphi(T))^2] \tag{3.24}$$

とするものである．実用例としては, 山田・飯田・椿 [2006], 山田 [2008] を指摘することができる．

3.4.2　局所的リスク最小化

一方, 資金調達基準を緩和し, 追加的にヘッジ財源 C を調達できるものとすれば, 保有資産の価格過程は

$$A_t = A_0 + G_\varphi(t) + C(t) \tag{3.25}$$

となる. このとき,

$$\min E[(C(t+\Delta t) - C(t))^2 \mid \mathcal{F}_t\,] \tag{3.26}$$

とする戦略が局所的リスク最小化である. ただし, フィルトレーション $\mathcal{F}_t$ は, 時刻 0 から時刻 t までに把握される情報を意味している. 当該戦略は「平均自己資金充足的」となり, 積立過不足の発生は許容されない. Dahl and Møller[2006] は保険契約の公正価値に対する当該戦略の適用例を示している.

3.4.3　期待効用最大化

前掲二例はリスクの最小化に基づく戦略であるが, 期待効用最大化により投資戦略を定義することも可能である. すなわち, 資産額 A 及び負債額 L に対して効用関数 $u(A, L)$ を定義し

$$\max E[u(A, L) \mid \mathcal{F}_t\,] \tag{3.27}$$

を満足する戦略を導出するものである.

内山 [2005] は投資期間末時点における積立比率 (資産÷負債) に対する相対的危険回避度一定 (CRRA; Constant Relative Risk Aversion) 型効用の期待効用最大化に基づく最適投資戦略を導出している. 当該方式の特徴の一つは効用関数形の拡張により, 投資戦略の調整が可能であることを指摘できる. 例えば, 小倉・本多 [2003] では, 効用関数の定義域に下限を設定し, 資産総額にフロアを定める投資戦略を例示している.

3.5 先行研究と本研究の関係

3.5.1 測度変換

本稿では保険契約の公正価値評価手法としてファイナンス理論と整合するリスク調整の行われる測度変換法を一貫して採用し, ワン変換を適用する. 本章では非完備市場の測度変換手法としてエッシャー変換及びディストーション変換を紹介したが, 以下の理由より, 前者よりも後者が望ましいと考えられるためである.

第一には適用範囲の視点である. エッシャー変換の適用には積率母関数が必要であるため, 適用可能な分布が限定される. 例えば, 対数正規分布には積率母関数が存在しないため, エッシャー変換は適用不能である. 一方, ワン変換 (ディストーション変換) は積率母関数の存在を要求しない. 分布関数及びディストーション関数のみにより, ラドン・ニコディム微分係数を特定する. すなわち, エッシャー変換よりも適用可能範囲が拡大している.

第二にはリスク尺度としての視点である. これは保険価格決定原理において実務上適用されることの多い期待値原則を前提とすれば, 保険料及び責任準備金はリスク尺度とも考えられるためである. エッシャー変換において, 変換された確率測度下の期待値をリスク尺度として考えると,

$$
\begin{aligned}
E^Q[cX] &= E^P[cX\frac{e^{\lambda cX}}{E^P[e^{\lambda cX}]}] \\
&= cE^P[X\frac{e^{\lambda cX}}{E^P[e^{\lambda cX}]}] \neq cE^Q[X] \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

となり, 正の一次同次性 (positive homogeneity) を満足しない. すなわち, Artzner et al.[1999] の提唱する"コヒーレント・リスク尺度"とならない. Wang[2003] は相関を持つ標準正規分布 X 及び Y を適用し, エッシャー変換に基づくリスク尺度が独立なリスクに対して加法的, 正の相関を持つリスクに対して優加法的であること, エッシャー変換におけるパラメータ λ が X の規模に依存することを示しているが, 当該性質は同一のリスクに対し, 異なる保険料を賦課することを余儀なくする. 例えば, 正の一次同次性を満足しなければ, 保険金額 S の保障を n 単位購入する場合と, 保険金額 nS の保障を 1 単位購入する場合では, 総保険金額が同一であるにも関わらず保険料が異なる. また, 正の相関を持つリスクに対して保険料が優加法的であるならば, ある被保険者が締結直後の保険契約を n 倍に増額すると, 保険料は n 倍よりも大きくなる. すなわち, エッシャー変換に基づく保険価格は, 被保険者間の公平性及び衡平性を確保できない可能性がある. これはアクチュアリーの視点に立てば, 看過できない欠点である.

一方, ワン変換により変換された確率測度下の期待値はコヒーレント・リスク尺度である. より大きなリスクに対して高い保険料を賦課する単調性 (monotonicity) は当然であり,

例えば生存保障と死亡保障を同時に販売する場合のリスク分散を考慮する劣加法性 (Subadditivity) も保険会社経営において合理的である．正の一次同次性 (positive homogeneity) は, 同一のリスクに対しては同一の保険料を賦課することに他ならない．

更に, ALM における整合性, 多変量への拡張可能性を指摘できる．ワン変換におけるデュアル・ディストーション関数を確認すると,

$$\begin{aligned}\bar{g}(u) &= 1 - g(1-u) \\ &= 1 - \Phi[\Phi^{-1}(1-u) - \lambda] \\ &= \Phi[\Phi^{-1}(u) + \lambda] \end{aligned} \tag{3.29}$$

となり, リスクの市場価格 λ に係る符号の正負を逆転するだけで関数形はディストーション関数と共通のものとなっている．また, Kijima[2006] は次掲式により, 多変量ワン変換を示している．

$$F^Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Phi_n[\Phi^{-1}[F_1^P(x_1)] + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_{1j}, \cdots, \Phi^{-1}[F_n^P(x_n)] + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_{nj}] \tag{3.30}$$

ただし, Hamada and Sherris[2003] によるワン変換が平均のシフトだけであり, 変換前分布の歪度と尖度を調整しないという指摘, 正規コピュラでは $\rho \neq \pm 1$ において裾依存係数がゼロ, すなわち漸近的に独立となることには留意すべきである．漸近的な依存関係のある場合には t コピュラを適用することが望ましいと考えられるが, Wang[2002] でもパラメータの不確実性に対する調整として,

$$\begin{aligned} F^Q[X] &= \Psi_k[\Phi^{-1}(F^P(X)) - \theta] \\ &\quad \Psi_k: \text{自由度}\ k\ \text{の}\ t\ \text{分布の分布関数} \end{aligned} \tag{3.31}$$

を提唱している．

先行研究において解決されていない課題には, リスクの市場価格 λ の推定手法を指摘することができる．推定手法にはいくつかのアプローチが考えられるが, 本研究では, 保険数理との整合性を確保するように λ を定義した．第 4 章では整合性の確保を契約時に限定しているが, 第 5 章では時間依存させることにより, 全保険期間の整合性を確保している．

3.5.2 権利価値評価

保険契約に潜在するデリバティブの価値評価においては, 金利の期間構造に整合する予定利率の設定, 保障継続を前提とした評価手法の確立が貢献になるものと考えられる．また, 保険商品に限定せず, 保険制度, すなわち, 根拠法の改正が与えた影響を定量的に評価する

ことも新たな試みとなろう. そこで本研究では, 金利の期間構造に整合する予定利率を評価モデルに反映, 第 4 章では保険契約者の経済合理性及び被保険者に対する保障継続を前提として保険料及び保険金額を保険契約者が変化させる転換権の価値評価を行い, 第 5 章では保険者の経済合理性を前提に, 法律条文の変更が保険者の経営行動・意思決定に与える影響を検証した.

3.5.3 変額年金保険の投資戦略

変額年金保険を想定した投資 (ヘッジ) 戦略においては, 負債を構成する不確実性の全てが取引可能ではないことを想定した非完備性, 平準払保険料への対応, 更に積立金からの取り崩しによる保証料徴収等を統合する必要がある. とりわけ, 小守林 [2002] で指摘された平準払保険料が選択される場合のヘッジ精度向上は解決が望まれる課題である. 一方, ヘッジ対象が保険事故発生時の給付額であるのか, 決算時の責任準備金であるのかも整理すべきと考える. 第 6 章では後者を対象とし, Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] を拡張した多期間動的最適化の枠組により, 組入資産, 保障及び保証内容に対する普遍性を確保, 平準払保険料, 積立金及び保険料比例の保証料を反映し, 目的関数へ適用する関数形の自由度を高め, 任意の時点及び任意の給付形態における一般勘定と特別勘定, 保証料及び最低保証部分の価格感応度の関係を明示する自己資金充足的な投資戦略を近似的に導出すると同時に商品特性の再整理を行った.

第4章　生命保険契約における転換権のオプション価値評価

ある保険契約者による契約解除を解約として捉える場合, 保険会社の引き受ける保障は当該時点で消滅することを想定している. 然るに, 解約権行使により得た利得を新たな保険契約に充当する場合, 契約を払済とすることで保障のみを残し保険料の払込を停止する場合には, 保障は引受保険会社に残存する. 留意すべき点は, この場合に保険事故発生率の低下, 予定利率の上昇等引受保険会社の調達コストが上昇する状態が想定されることである. 従って, 法定ソルベンシーマージンを超過する状況において必要内部留保水準を評価する場合等, 解約権の反映がリスク評価を過少評価させる可能性を否定できない.

そこで本章では, 保険契約者が契約価値保全を意図し, 支払保険料を抑制するものとして, 複数回の権利行使を許容する転換権の価値評価を行なう. 本章の主たる目的は, 保障継続の条件下における保有契約の公正価値変化を評価し, 生命保険会社の引受リスク特性を把握することである.

4.1　転換制度の概要

転換制度の導入は, 昭和50年の保険審議会答申において検討を求められたことに対応したものであり, 基本要件として次掲のものが要求されている.

- 転換の前後を通じて契約者及び被保険者が同一であること.
- 有配当契約の場合, 契約者配当, 特別配当の権利を継承すること.
- 契約締結後2年以上を継続した後の転換に対しては, 元契約の保険金額を限度として告知義務違反を問わないこと.
- 責任準備金等を新たな契約の責任準備金等に継承すること

すなわち, 転換とは既契約の下取価格を評価し, 当該価格を新契約に充当するものである. なお, 当該価格は一般に転換価格と称される. 転換価格は普通保険約款上責任準備金と規定

され, これに未払いの配当金や据え置かれていた保険金等を含めて構成される. なお, 消滅時特別配当金は特別な場合を除いて転換価格には含まれない.

4.2　保険数理による転換制度の記述

4.2.1　転換許容回数を 1 回とする場合

年齢 x で加入した保険期間 n, 保険金額 1 を期末払する養老保険を第 τ 保険年度末に同種同保険金額の契約に転換するものとする. このとき, 転換財源は責任準備金額 ${}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}$ である.

$$ {}_{\tau}V_{x:\overline{n|}} = A_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} - P_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}} \tag{4.1} $$

ただし, x 歳加入, 保険期間 n の保険料 $P_{x:\overline{n|}}$ は転換前 (契約時) 保険料 P_0 である.

転換前後の計算基礎率に基づく記号を start, first の添字により区別しよう. すなわち, 転換財源は, より正確には ${}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}{}^{start}$ である. 払済保険金額 (払済 S_1) は転換財源を一時払保険料として充当することにより購入できる保険金額, 転換後平準保険金額 (平準 S_1) は当初契約保険金額 (平準 S_0) に対する当該払済保険金額の不足額であるので,

$$ \begin{aligned} \text{払済}\ S_1 &= \frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}{}^{start}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}{}^{first}} && (4.2) \\ \text{平準}\ S_1 &= \max(\text{平準}\ S_0 - \text{払済}\ S_1, 0) && (4.3) \\ \text{平準}\ S_0 &= 1 \end{aligned} $$

となる. 転換後保険料 P_1 は当該平準保険金額 (平準 S_1) に対して設定すればよい. すなわち, 契約時年齢 $x+\tau$, 保険期間 $n-\tau$, 保険金額 (平準 S_1) を期末払する養老保険の平準払保険料である. ただし, 転換により計算基礎率が変化するので"first"で区別する.

$$ \begin{aligned} P_1 &= \text{平準}\ S_1 \cdot \frac{A_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}{}^{first}}{\ddot{a}^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}} \\ &= \max(P_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}{}^{first} - \frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n|}}{}^{start}}{\ddot{a}^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau|}}}, 0) && (4.4) \end{aligned} $$

なお, 第 τ_1 保険年度末で転換した場合の第 τ_2 保険年度末 $(\tau_1 < \tau_2)$ の責任準備金額は, 払済部分と平準部分に対応し、それぞれ 払済部分 V_{τ_2}, 平準部分 V_{τ_2} として次掲のように求められる.

$$ \begin{aligned} \text{払済部分}\ V_{\tau_2} &= \text{払済}\ S_1 \cdot A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2|}}{}^{first} && (4.5) \\ \text{平準部分}\ V_{\tau_2} &= \text{平準}\ S_1 \cdot {}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1|}}{}^{first} && (4.6) \end{aligned} $$

両者を合計した金額が, 第 τ_1 保険年度末で転換した場合の第 τ_2 保険年度末 $(\tau_1 < \tau_2)$ の責任準備金額 (合計 V_{τ_2}) である.

$$
\begin{aligned}
\text{合計}\, V_{\tau_2} \;&=\; \max(1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}, 0) \cdot {}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first} \\
&\quad + \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \cdot A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{first} \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

4.2.2 転換許容回数を複数回とする場合

次に τ_1 保険年度末で転換後, τ_2 保険年度末で更に転換を行うことを考える. このとき価格設定には, 第 1 回転換後の平準部分のみを転換するのか, 同払済部分までを含めるのか, 転換対象を特定する必要がある.

式 (4.7) の第 1 回転換後 τ_2 における責任準備金合計を転換対象とすると, 第 2 回転換後の払済保険金額 (払済 S_2) 及び同平準保険金額 (平準 S_2) は

$$
\begin{aligned}
\text{払済}\, S_2 \;&=\; \max(1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}, 0) \cdot \frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}} \\
&\quad + \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \frac{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}} \qquad (4.8) \\
\text{平準}\, S_2 \;&=\; \max(1 - \text{払済}\, S_2, 0) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

となる. 一方, 式 (4.6) の第 1 回転換後 τ_2 における平準部分責任準備金のみを転換財源とすると, 第 2 回転換後の払済保険金額 (払済 S_2) 及び同平準保険金額 (平準 S_2) は

$$
\begin{aligned}
\text{払済}\, S_2 \;&=\; (1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}) \cdot \frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}} \qquad (4.10) \\
\text{平準}\, S_2 \;&=\; (1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}) \cdot \max(1 - \frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}}, 0) \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

である. 2 回目転換後の平準払保険料 P_2 は, 第 2 回転換後の平準保険金額 (平準 S_2) を契約時年齢 $x + \tau_2$ として残存期間 $n - \tau_2$ で収支相当させればよい.

$$
P_2 = \text{平準}\, S_2 \cdot P_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second} \qquad (4.12)
$$

4.3 評価モデルの概要

保険契約者が転換行動を選択する動機としては, 次掲例を指摘できる. 第一には保障内容の見直しである. 付保対象の拡大や保険金額の増額に伴い, 既契約を下取りに出すという判断は合理的であろう. 第二には保険価格の見直しである. 同種同保険金額の保険契約が現在よりも低廉な価格で購入できるのであれば, 合理的な契約者は転換権の行使により保障の対価, すなわち, 支払うべき保険料を引き下げるものと考えられる.

本研究における評価モデルは後者を再現するものである. すなわち, 予定利率及び予定死亡率の変動する経済環境を想定し, 保険契約者は転換権の行使により, 保有契約の公正価値を保全するものと仮定する. このとき, 権利価値は死亡率と利子率の上に書かれるデリバティブとして保険契約の公正価値を記述し, 変更前公正価値を行使価格, 変更後公正価値を原資産とする American Moving Strike Call Option として評価すればよい.

4.3.1 転換権の価値 (転換許容回数を 1 回とする場合)

年齢 x で加入した保険期間 n, 保険金額 1 の養老保険を第 τ 保険年度末に同種同保険金額の契約に転換するとき, 転換直後の責任準備金公正価値 ${}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}$ は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} {}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} &= \max(\frac{{}_\tau V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}, 1) \cdot A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \\ &\quad - \max(1 - \frac{{}_\tau V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}, 0) \cdot P^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \end{aligned} \tag{4.13}$$

時点 τ における転換権の行使により得られる利得 $Payoff_1(\tau)$ は

$$Payoff_1(\tau) = \max({}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} -_\tau V^{start,MV}_{x:\overline{n}|}, 0) \tag{4.14}$$

であるので, 将来 1 回の権利行使を許容する転換権の, 時点 t における価値 $ConvertibleValue_1(t)$ は

$$Convertible\,Value_1(t) = \sup_\tau E^Q[e^{-\int_t^\tau r_u du} Payoff_1(\tau) \mid \mathcal{F}_t] \tag{4.15}$$

により求められる.

4.3.2 転換権の価値 (転換許容回数を複数回とする場合)

次に 2 回の転換権行使を許容する場合を考える．この場合には 1 回目の権利行使により 2 回目の転換権を得られるものとして評価すればよい．ただし, 既に示したように, 転換対象の範囲により権利行使後の保険金額構成, 保険料が異なることに留意が必要である．

τ_1 時点で 1 回目の権利行使後, τ_2 時点で 2 回目の権利行使を行うものとすると, 払済部分を含む全ての責任準備金 (式 (4.7)) を転換財源とする場合には, 式 (4.8) 及び式 (4.9) より, 2 回目転換後の払済保険金額 (払済 S_2), 同平準保険金額 (平準 S_2) には”start, first, second”の添字が現われており, 契約締結時, 1 回目権利行使時, 2 回目権利行使時の計算基礎率に基づき決定されることが確認できる．すなわち, 2 回目転換権行使判定は契約締結時及び 1 回目権利行使時の意思決定に依存する．

一方, 転換財源を払済部分を除く保険料払込部分の責任準備金 (式 (4.6)) に限定すると, 2 回目転換権行使直後の保険料払込部分の責任準備金公正価値 ${}_0V^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}$ 及び転換後平準保険料 P_2 は

$$
\begin{aligned}
{}_0V^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} &= (1-\frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}) \\
&\quad \times[\max(\frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}},1)\cdot A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}-P_2\cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}] \quad (4.16) \\
P_2 &= \max(1-\frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}},0)\cdot P^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} \quad (4.17)
\end{aligned}
$$

となる．当該部分の 2 回目転換権行使前の責任準備金公正価値は

$$
{}_{\tau_2-\tau_1}V^{MV}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}=(1-\frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}})\cdot[A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}-P^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}\cdot\ddot{a}^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}] \quad (4.18)
$$

であるので, 時点 τ_1 における第 1 回権利行使後, 時点 τ_2 における 2 回目転換権行使により得られる利得 $Payoff_2^2(\tau_1,\tau_2)$ は

$$
\begin{aligned}
Payoff_2^2(\tau_1,\tau_2) &= (1-\frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}})\cdot f(\tau_1,\tau_2) \quad (4.19) \\
f(\tau_1,\tau_2) &= \max[\max(\frac{{}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}}{A_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}{}^{second}}-1,0)\cdot A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} \\
&\quad +(P^{first}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}-P_2)\cdot\ddot{a}^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|},0]
\end{aligned}
$$

となる．

従って, 時点 τ_1 における 2 回目転換権の価値 $Convertible\,Value_2^2(\tau_1)$ は

$$\begin{aligned} Convertible\,Value_2^2(\tau_1) &= \sup_{\tau_2} E^Q[e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} r_u du} Payoff_2^2(\tau_1,\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \\ &= (1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}^{first}}) \cdot \sup_{\tau_2} E^Q[e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} r_u du} f(\tau_1,\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \end{aligned} \tag{4.20}$$

と定義できる. 前掲式 (4.15) を用いれば,

$$Convertible\,Value_2^2(\tau_1) = (1 - \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}^{first}}) \cdot Convertible\,Value_1(\tau_1) \tag{4.21}$$

である. すなわち, 2 回目転換権行使判定は, 時点 τ_1 において年齢 $x+\tau_1$ で締結する保険期間 $n-\tau_1$, 保険金額 1 の保険契約のそれに一致し, 契約締結時の影響から開放される.

2 回目転換権は 1 回目転換権行使により得られるものであるため, 転換許容回数を増加すると, 時点 τ_1 における 1 回目転換権行使の利得 $Payoff_1^2(\tau_1)$ は, 式 (4.14) から次掲のように変化する.

$$Payoff_1^2(\tau_1) = \max\{({}_0V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}^{first,MV} + Convertible\,Value_2^2(\tau_1)) - {}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}^{start,MV}, 0\} \tag{4.22}$$

同様の処理を反復することにより, 転換許容回数を更に増やすことが可能である.

4.4 数値解析結果

本研究のモデルに適用する American Moving Strike Call Option の評価に際しては, 「(A) 行使価格及び原資産が時間及び状態により変化すること」, 「(B) 任意の時点に権利行使が可能であること」, 更に「(C) 複数回の権利行使を許容すること」を表現する必要がある. とりわけ, 要件 (C) の達成が最重要課題である. このため, 本章では格子法を適用する. なお, 処理においては, 死亡率と利子率の独立性を前提としている.

4.4.1 契約時条件

保険契約者は保険期間 10 年の養老保険を新規に購入するものとし, 被保険者に対する 医的選択は想定しない. すなわち, 保険契約者の申込みをもって, 自動的に責任開始される.

保険数理上, 契約時において適用される計算基礎率は, 予定利率を 1.5%, 予定死亡率を生保標準生命表 1996(死亡保険用) とする. なお, 当該基礎率は転換権が行使されるまで変更はされない. 転換権行使により変更適用される予定死亡率と予定利率は次項以降に示す.

4.4.2　死亡率の設定

当該モデルでは粗死亡率モデルに 3 因子のリー・カーター・モデル

$$\ln(q_{x,t}) \;=\; \alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i + \varepsilon_{x,t}$$

を採用し, 数値解析においては二項モデルを適用した. パラメータ $(\alpha_x, \beta_x, \gamma_t)$ の推定における入力値は 1987 年から 2004 年における簡易生命表の男性死亡率である. 時点 t における誤差項は年齢に依存しない正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ を適用し, σ の推定結果として 0.02359 を得た.

保険数理において適用する標準死亡率は粗死亡率に対し安全割増を計上した数値, 権利価値評価に適用する死亡率は観測される実確率 (P 測度) としての粗死亡率をリスク中立確率 (Q 測度) に測度変換した数値である. ここで, 安全割増は生保標準生命表 1996 より 2004 年簡易生命表を控除した年齢毎の率を時点に依存しないものとし, 以降の期間においてそのまま適用した.

4.4.3　測度変換の設定

ワン変換では, 死亡率 $q_{x,t}$ の分布関数 $F(\cdot)$ を次式により変換する.

$$F^Q(q_{x,t}) = \Phi[\Phi^{-1}\{F^P(q_{x,t})\} - \lambda_x] \tag{4.23}$$

従って, P 測度から Q 測度への変換係数であるラドン・ニコディム微分係数は

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\phi[\Phi^{-1}\{F(q_{x,t})\} - \lambda_x]}{\phi[\Phi^{-1}\{F(q_{x,t})\}]} \tag{4.24}$$

となる. ただし, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数, $\Phi(\cdot)$ は同分布関数である.

P 測度下において, リー・カーター・モデル (式 (3.14)) に基づく第 t 時点の粗死亡率対数値は

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i + \varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(\alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i, \sigma^2 t) \tag{4.25}$$

であるので,

$$F(q_{x,t}) \;=\; \Phi[\frac{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i)}{\sigma\sqrt{t}}] \tag{4.26}$$

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} \;=\; \exp[-\frac{1}{2}\{\lambda_x^2 - 2\lambda_x \frac{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i)}{\sigma\sqrt{t}}\}] \tag{4.27}$$

を得る. 従って, Q 測度下における第 t 時点の死亡率対数値は

$$\ln(q_{x,t}^{Q}) = \alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i + \lambda_x \sigma \sqrt{t} + \varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(\alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i + \lambda_x \sigma \sqrt{t}, \sigma^2 t) \tag{4.28}$$

となり,

$$q_{x,T}^{Q} \,|_{\mathcal{F}_t} = q_{x,t}^{Q} \exp[\{\sum_{i=1}^{3} \beta_x^i (\gamma_T^i - \gamma_t^i)\} + \sigma \lambda_x (\sqrt{T} - \sqrt{t}) + \sigma\, W_{T-t}^{Q}] \tag{4.29}$$

を得る.

死亡率対数値の分布を見ると, P 測度下の期待値 $\alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_t^i$ に対し, Q 測度下では $\lambda_x \sigma \sqrt{t}$ だけ期待値がスライドしている. これは標準生命表において計上される, 保険数理上の安全割増に対応するものと解釈できる.

そこで当該モデルでは, 契約時点において生保標準生命表 1996(死亡保険用) と整合するように, すなわち,

$$\begin{aligned} & E^{Q}[q_{x,1}^{Q} \mid \mathcal{F}_0] = q_x^{\text{標準生命表}} \\ \Rightarrow \quad \lambda_x \ & = \frac{\ln(q_x^{\text{標準生命表}}) - (\alpha_x + \sum_{i=1}^{3} \beta_x^i \gamma_1^i + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} \end{aligned} \tag{4.30}$$

として, ワン変換のパラメータ λ_x を決定した. 結果は表 4.1 のとおりである. なお, 数値解析において λ_x は時系列で変化しないものと仮定している.

4.4.4　利子率の設定

当該モデルでは利子率に 1 変量のハル・ホワイト・モデル

$$dr = [\theta(t) - \alpha r]dt + \sigma dW_t^{Q}$$

を採用し, 数値解析においては三項モデルを適用した. パラメータ推定は 2006 年 6 月 30 日の金利・債券データを適用し, 結果として α に 0.10419, σ に 0.02274 を得た.

なお, 保険数理において適用する将来の予定利率は, 各グリッド・ポイントにおける 10 年利付債券のパー・クーポンとしている. ただし, 当該決定基準に基づく予定死亡率及び予定利率は平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号「標準責任準備金の積立方式及び計算基礎率を定める件」とは異なるものである.

表 4.1: ワン変換におけるパラメータ λ_x

年齢	λ_x	変換前死亡率	変換後死亡率	参考
0	△ 42.47835	0.00277	0.00102	△ 35.28974
10	22.25076	0.00008	0.00014	11.74827
20	30.94669	0.00051	0.00107	34.01933
30	5.26605	0.00073	0.00083	6.05006
40	3.82245	0.00140	0.00153	5.74861
50	1.08932	0.00361	0.00370	1.47024
60	6.68872	0.00841	0.00984	8.88796
70	5.14948	0.02150	0.02427	11.17695
80	8.53660	0.05538	0.06773	13.49668
90	10.61690	0.15199	0.19526	12.14152

(注 1) 変換前死亡率は 2005 年の予測結果である.
(注 2) 参考は年齢別 σ に基づく λ_x である.

4.4.5 転換権の価値

権利行使回数を 1 回とする場合の利得は, 式 (4.14) に定義するとおりである. これを格子法で解くには以下のようにすればよい.

第 1 ステップ 死亡率及び金利において, 時点及び状態の異なる各グリッドポイントに対応する転換前契約の公正価値

$$ {}_{\tau}V^{start,MV}_{x:\overline{n}|} = A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} - P^{start}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \qquad (0 \leqq \tau \leqq n) $$

を設定する.

第 2 ステップ 死亡率及び金利の時点及び状態の異なる各グリッドポイントに対して, 式 (4.13) で示した時点 τ で転換権を行使した場合の公正価値

$$ \begin{aligned} {}_{0}V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} &= \max\left(\frac{{}_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}, 1\right) \cdot A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \\ &\quad - \max\left(1 - \frac{{}_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}, 0\right) \cdot P^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \qquad (0 < \tau < n) \end{aligned} $$

を設定する.

第 3 ステップ 死亡率及び金利の時点及び状態の異なる各グリッドポイントに対して, 式 (4.14) で示された時点 τ における転換権の行使により得られる利得

$$Payoff_1(\tau) = \max({}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} - {}_\tau V^{start,MV}_{x:\overline{n}|}, 0)$$

を設定する.

契約満期 (時点 n) では転換後の保険期間が存在しないため, 転換処理を実施できない. このため権利行使判定は契約満期 (時点 n) の 1 時点幅 (Δt) 前より実施する. 利子率及び死亡率の各状態におけるペイオフと転換権の継続価値を比較し, 前者が後者より大きければ権利行使を実施する. すなわち, 当該時点, 当該状態に対応する継続価値を権利行使により得られる利得に洗い替える.

第 4 ステップ 第 3 ステップの処理を, 0 時点まで後進帰納的に反復する.

一方, 権利行使複数の場合に定義される利得は式 (4.22) 及び式 (4.19) のとおりである. 時点 τ_2 における権利行使は過去の行動に, 時点 τ_1 の権利行使は将来の行動に影響を受けるという経路依存性を有している. ただし, これは格子を多重化し, 正副構造を与えてやれば経路依存性を排除できる. 何故ならば過去に遡及して権利行使はできない. 権利行使の方向が将来に限定されているためである. 当該手法の代表例は, 下方修正条項付転換社債 (Moving Strike Convertible Bond) の価値評価に見ることができる.

数値解析に際し, オプションとしての転換権価値 $V(r,q,t)$ に加え, 転換権の死亡率に対する感応度 $\frac{\partial}{\partial q}V(r,q,t)$ 及び金利に対する感応度 $\frac{\partial}{\partial r}V(r,q,t)$ を評価している. 感応度分析を実施する動機の一つは, リスク管理上の要請である.

例えば, 死亡率及び金利の上に書かれるデリバティブ $V(r,q,t)$ 及び $V_1(r,q,t)$, 金利の上に書かれるデリバティブ $V_2(r,t)$ が存在し, 且つ, 市場での売買は無制約に実施可能とする. このとき, $V(r,q,t)$ の有する不確実性を消去するためには, 1 単位の $V(r,q,t)$ に対し, $-\frac{\frac{\partial}{\partial q}V}{\frac{\partial}{\partial q}V_1}$ の $V_1(r,q,t)$, $\frac{\frac{\partial}{\partial r}V_1\cdot\frac{\partial}{\partial q}V - \frac{\partial}{\partial r}V\cdot\frac{\partial}{\partial q}V_1}{\frac{\partial}{\partial q}V_1\cdot\frac{\partial}{\partial r}V_2}$ の $V_2(r,t)$ を保有すればよい. これは, デルタ・ヘッジとして知られており, 他商品及び債券等金利派生商品の保有量を調整することによる, 任意の商品における転換権のヘッジ可能性を示すものである. これはサープラス型 ALM の基本的な発想であるが, 特にデリバティブを用いる場合には LDI(Liability Driven Investment) と呼称を変化させる例も見られる.

評価対象が死亡保障商品であるため, 死亡率の上昇は保険料の上昇を連鎖する. 将来法責任準備金額は給付現価より収入現価を控除することにより評価されるため, 保険金額が同一であれば保険料の上昇は公正価値を低下させることになる. 転換権行使は, 金利及び死亡率の状態変化に伴う当該契約の公正価値低下を保全するように行われるため, 転換権の死亡率に対する感応度は負値をとることとなる. すなわち, 死亡率が低下傾向にあれば, 転換

表 4.2: 転換権価値と利子率感応度・死亡率感応度

年齢	権利行使:1 回			権利行使:2 回		
	権利価値	感応度		権利価値	感応度	
		利子率	死亡率		利子率	死亡率
0	0.13549	16.98812	△ 0.00463	0.14867	17.21859	△ 0.00647
10	0.13525	17.02787	△ 0.00691	0.14847	17.24199	△ 0.00782
20	0.13448	16.94007	△ 0.01608	0.14740	17.17221	△ 0.02104
30	0.13465	16.95577	△ 0.01915	0.14760	17.18971	△ 0.02543
40	0.13327	16.90395	△ 0.04176	0.14587	17.14450	△ 0.05504
50	0.13003	16.78078	△ 0.10206	0.14201	16.99007	△ 0.11035
60	0.12127	16.43369	△ 0.24854	0.13245	16.50430	△ 0.25332
70	0.10539	15.72008	△ 0.54368	0.11416	15.48083	△ 0.60153
80	0.08188	14.22188	△ 1.20303	0.08766	13.77039	△ 1.36164

(注 1) 2 回目の転換対象は平準部分の契約価値に限定している.

権という潜在デリバティブの価値は上昇する. なお, 若齢部よりも高齢部において感応度の水準が大きくなることは, 前者に比較し後者のキャッシュ・バリュー (満期保険金及び責任準備金) の水準が高くなるためと解釈できる.

評価モデルにおいては予定利率が市場金利に連動するものと仮定している. 従って, 金利上昇により予定利率は上昇する. 予定利率の上昇は保険料の低下を連鎖するため公正価値を上昇させる. このため, 転換権の金利に対する感応度は正値をとる. これは金利感応度が負値をとる単純な債券保有では, 転換権の金利感応度を中和することができないことを意味している.

死亡率及び金利感応度のいずれも転換許容回数, すなわち, 権利行使可能回数の増加は当然に転換権価値の上昇を連鎖する.

4.5　本章の結論

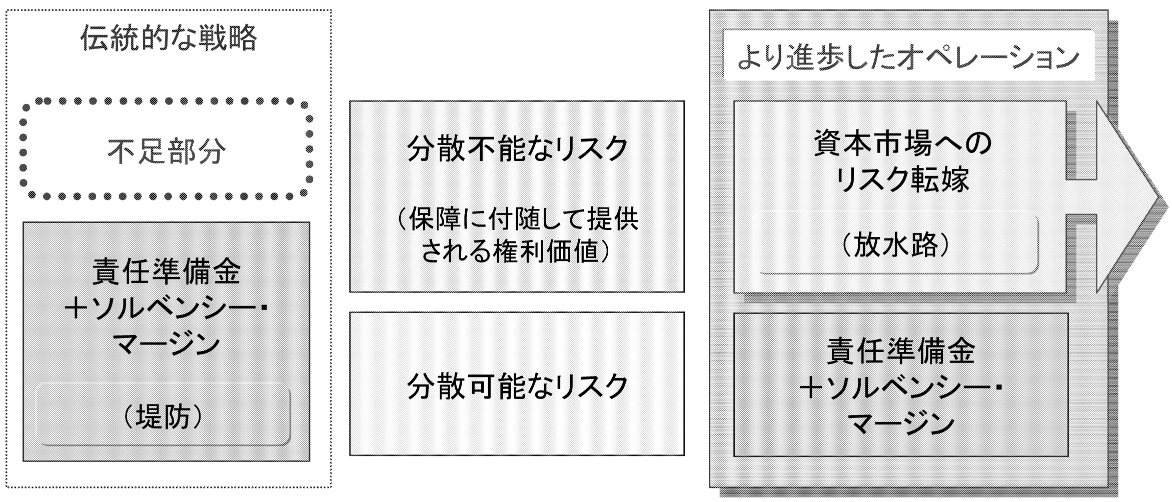
適用される計算基礎率の変化が保険料の廉価を伴う場合には, 転換権の当該基礎率に対する感応度が正値をとることが確認された. 当該結果は計算基礎率の不確実性及び契約者行動における経済合理性を想定せずに資産保有及び剰余金分配を行えば, 転換権行使により負債からの要求収益率を確保できなくなる可能性を示唆している.

当該事態の回避策としては, ストックとフローによる対応が考えられる. ストックによる対応とは, 伝統的な内部留保の蓄積である. ただし, 保険事故発生に起因する損失と保障に付随して提供される権利の行使に起因する損失は本質的に異なることに留意しなければならない. すなわち, 後者には同時発現性が想定されることである.

同時発現性を有するとき, 標本数を集めることによるリスク分散策は機能しない. むしろリスクは集積することとなる. 従って, 平均値の内部留保では損失実現に備える引当として不十分と考えられる. このためフローによる対応, すなわち, 当該権利をデリバティブとみなし, 複製戦略を併用することとなる. 本研究では複製ポートフォリオの構築法 (デルタ・ヘッジ) について示しているが, 複製可能性, 会計との整合性等に留意が必要である. 死亡率にリンクする証券, あらゆる年限に対応する金利派生商品の存在等, 解決すべき課題は少なくないが, 一方で享受できる効果も少なくない.

図 4.1 に示すように, ストックとフローによるリスク対応策を堤防の嵩上げ, 放水路の設置と治水に置換して考えれば理解しやすいであろう. 前者はリスクの全てを保険会社自らが引受けることに対し, 後者ではリスクの全て若しくは一部を市場に転嫁する. 換言すれば, 前者では自己再保険機能の財源を自らの保有するソルベンシーマージンに限定するが, 後者では連結された資本市場のリスクテイカーに拡大することが可能となる. 第二の要素は, 状態変数の変化に対する剰余の安定性である. 状態変数の感応度を調整することはサープラス型 ALM の基本的な発想であり, 経済環境及び経営環境の変化が想定される状態ではとりわけ有効な戦略となる.

図 4.1: リスク対応策の改善可能性



第5章　契約条件の変更と破綻処理の比較

平成 15 年 7 月 18 日, 第 156 回国会において保険業法の一部改正が行われ, 「契約条件の変更」が新設された. 山下 [2005] を引用すれば, これは運用利回りが予定利率を下回る当時の状況を踏まえて, 生命保険会社が完全な破綻に陥る前の段階で予定利率を引き下げ, それにより保険金額の削減等保険契約上の保険契約の権利縮減することを可能としたものである.

契約条件の変更は契約者に対して不利益な変更を許容するものであり, 保険者による権利行使は決して望ましい事態とは考えられない. 然るに, 破綻処理に限定されていた従前と比較すれば, 当該制度の設立は否定されるものではない. 例えば平成 15 年 6 月 10 日の第 156 回財務金融委員会において, 正田文男参考人は「資産評価基準」, 「契約者負担」, 「時間的制約」の観点から, 当該制度に対して肯定的な発言を行っている.

ここで「契約条件の変更」及び「破綻処理」を保険者に与えられた権利と考えると, リアル・オプションの枠組により, 保険業法の条文変更が保険者の行動及び契約者利益に如何なる影響を及ぼしたかを定量的に評価することが可能となる. これが本研究の出発点である.

加えて, 転換権評価に際して得られた幾つかの課題に対する改善動機がある. 第 4 章ではリスクの市場価格である λ_x が時間依存せず, 将来に亘り一定であるものと仮定した. 然るに, 第 3 章の図 3.4 及び図 3.5, リー・カーター・モデルの経年要因の推移に見られるとおり, 我が国における粗死亡率の低下傾向は顕著であり, λ_x を一定とすることは強い仮定である. 評価対象期間が比較的短期であれば影響を無視することもできるかもしれないが, 保険期間は超長期である. このため, 本章では, ワン変換のパラメータに時系列変化を許容し, $\lambda_{x,t}$ と拡張する.

また, 根源的な不確実性の追加, 評価対象期間の延長を鑑みれば, 数値解析における柔軟性の向上も必要となる. 「契約条件の変更」及び「破綻処理」は複数の権利行使を想定する必要がないこと, 価格評価と同時に権利行使領域の可視化を目的とすることから, 最小二乗モンテカルロ法を適用する.

5.1　制度の概要

生命保険契約では, 約款において基礎率変更権を留保しない限り, 契約締結時の計算基礎率が保険期間に亘り適用される. 経験保険事故発生率の上昇, 資産運用収益率の低下等により予定した計算基礎率との乖離が生じても, 保険契約者の不利益となるような契約内容変更は原則として行われない. 剰余金分配率の一部若しくは全てが削減されるだけである.

然るに, 計算基礎率保証に係る損失が剰余の範囲内に収束するとは限らない. 剰余を超えた損失が発生すれば自己資本により補填せざるを得ない. 更に損失が自己資本を超過すれば, 当該保険会社は経営破綻により市場からの撤退を余儀なくされることとなる. 残念ながら 1996 年の保険業法改正後, 2009 年 2 月末現在で, 既に 8 件の経営破綻を我が国の生命保険市場では経験している.

表 5.1: 生命保険会社の破綻事例

社名	破綻時期	破綻処理の形態
日産生命保険相互会社	1997 年　4 月　25 日	業務の一部停止命令
東邦生命保険相互会社	1999 年　6 月　4 日	業務の一部停止命令
第百生命保険相互会社	2000 年　6 月　1 日	業務の一部停止命令
大正生命保険株式会社	2000 年　8 月　28 日	業務の一部停止命令
千代田生命保険相互会社	2000 年　10 月　9 日	更生特例法適用申請
協栄生命保険株式会社	2000 年　10 月　20 日	更生特例法適用申請
東京生命保険相互会社	2001 年　3 月　23 日	更生特例法適用申請
大和生命保険株式会社	2008 年　10 月　10 日	更生特例法適用申請

(出典) 茶野 [2002], 武田 [2008] 等.

経営破綻時には生命保険契約者保護機構から資金援助が行われるが, これは不足額に対し満額が充当されるわけではない. 資金援助は当該破綻会社の責任準備金の 90%に対し, 不足する資産額を対象とするものである[1]. すなわち, 責任準備金の 10%削減を前提としており, 全ての保険契約者は一律に経済的負担を強制されることになる. 当然に, 一般債権者, 基金拠出者若しくは株主も経済的負担を負うことになる.

このため, 業務又は財産の状況に照らして保険業の継続が困難となる蓋然性のある場合には契約条件の変更を可能とするように, 第 156 回国会において保険業法の改正が行われた.

[1]保険業法第第 270 条の 3(保険契約の移転等における資金援助), 保険契約者等の保護のための特別の措置等に関する命令第 50 条の 5(法第 270 条の 3 第 2 項第 1 号に規定する総理府令・内閣府令・財務省令で定める率). なお, 当該内容は保険金額の 90%を保障するものではないことに留意が必要である.

成立は平成 15 年 7 月 18 日, 施行は同年 8 月 24 日である. 当該改正は破綻処理を行わず, 継続企業のまま保有契約の予定利率を引き下げることで保険契約者に課せられる負担を軽減しようとすることが目的とされている. このため, 契約条件の変更には次掲の制限が設けられている[2].

責任準備金削減の禁止 契約条件変更の日までに積み立てられた責任準備金は削減されない.

下限予定利率の確保 政令により下限予定利率が定められる[3].

すなわち, 契約条件の変更及び破綻処理は保険会社の保有する債務を将来に向かって減額することにより当該保険会社を救済する制度であるが, 前者では過去に遡及した減額を許容せず, 後者では過去に遡及した減額を 10%を限度として行うものと解釈できる.

平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号に規定する標準責任準備金の計算基礎を振り返ると, 平成 8 年 4 月 1 日以降平成 11 年 3 月 31 日までに適用される予定利率は 2.75%とされており, 前掲下限予定利率には達していない. 従って, 変更対象が平成 8 年以前における 4%から 6%台の予定利率を適用する契約であることは明らかである.

なお, 当該制度においては破綻処理と異なり, 契約者の一部のみが経済的負担を行うこととなるため[4], 将来において経営環境が改善し, 経済環境が好転した場合には, 契約条件の変更対象となった契約者に対し契約者配当, 剰余金の分配その他の金銭の支払いにより利益還元を行うことが可能とされている. ただし, この場合には, 利益還元方針内容を事前に通知し, 定款に記載又は記録することとなる[5].

最終的に内閣総理大臣により契約条件の変更の申し出が承認されれば, 保険契約に係る解約の業務停止が行われる[6]ことになる.

5.2 保険数理による記述

5.2.1 契約条件の変更

本モデルでは契約条件の変更処理を次掲のように設定する.

[2]保険業法第 240 条の 4(契約条件の変更の限度)

[3]保険業法施行令第 36 条の 3(契約条件の変更の限度) により, 年 3%とされている.

[4]権利縮減対象が契約者に限定されているが, 契約者に限定する内容では異議申立件数が保険業法第 240 条の 12 第 4 項に規定する許容数である「変更対象契約者数の 1/10」の範囲に収束するとは考えにくい. 保険業法第 240 条の 5 第 3 項では株主総会等の変更決議に際し, 変更内容に加え, 基金及び一般債権者の債務に対する取り扱い, 経営責任等等を通知することを鑑みれば, 現実的な対応として契約者以外にも損失の分担を求めることが前提とされているものと推察される.

[5]保険業法第 240 条の 5(契約条件の変更の決議)

[6]保険業法第 240 条の 3(業務の停止等)

(a) 変更対象となる計算基礎率は死亡率及び予定利率とする.
(b) 計算基礎率は契約条件変更日時点のものを適用し, 下限は設けない.
(c) 契約条件変更日時点までに積み立てられた責任準備金は削減しない.
(d) 契約条件の変更により, 保険料は増額されない.
(e) 契約条件の変更により, 保険金は減額される.

年齢 x で加入した保険期間 n, 保険金額 1 の養老保険について第 τ 保険年度末に契約条件変更が行われるものとする. このとき, 「保険会社の負う債務の過去部分」に相当する責任準備金額 ${}_{\tau}V_{x:\overline{n}|}$ は削減されないのであるから, 払済保険金額 (変更後払済 S_1) は次掲により求められる. ただし, 肩の添字"start"は条件変更前, "first"は条件変更後の計算基礎率が適用されていることを意味している.

$$変更後払済\ S_1 \quad = \quad \frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} \tag{5.1}$$

次に, 契約条件の変更前後において保険料が変化しないものとすれば, 契約条件変更後の平準保険金額 (変更後平準 S_1) として

$$変更後平準\ S_1 = \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} \tag{5.2}$$

を得る. 従って, 第 τ_1 保険年度末に契約条件変更した場合の, 第 τ_2 保険年度末 $(\tau_1 < \tau_2)$ の責任準備金額 ${}_{\tau_2}V^{first}$ は次掲により定義される.

$${}_{\tau_2}V^{first} \quad = \quad \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \cdot A^{first}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} + \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \cdot {}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first} \tag{5.3}$$

払済保険金額 (変更後払済 S_1) と契約条件変更後の平準保険金額 (変更後平準 S_1) の合計額が契約時 (平準) 保険金額を下回っていれば, すなわち,

$$\frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} + \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} < 1 \tag{5.4}$$

であれば, 保険事故発生時に当該保険会社の支払うべき保険金額は減額されることになる.

5.2.2　破綻処理

前掲のとおり, 生命保険会社の経営破綻時には, 保険契約者保護機構から責任準備金の 90%を基準とした資金援助が行われる. 従って, 本モデルでは破綻処理を次掲のように設定する. ただし, 過去の破綻処理に見られた長期に亘る解約控除の増額等は考慮しない.

(a) 変更対象となる計算基礎率は死亡率及び予定利率とする.
(b) 計算基礎率は破綻時点のものを適用し, 下限は設けない.
(c) 破綻時点までに積み立てられた責任準備金の 10%が削減される.
(d) 破綻により, 保険料は増額されない.
(e) 破綻により, 保険金は減額される.

すなわち, 破綻後払済保険金額 (破綻後払済 S_1) は

$$\text{破綻後払済}\, S_1 \quad = \quad \frac{0.9{}_{\tau}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} \tag{5.5}$$

となり, 破綻後平準保険金額 (破綻後平準 S_1) は

$$\text{破綻後平準}\, S_1 = \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} \tag{5.6}$$

となる. 従って, デフォルト・イベント発生時点における責任準備金削減の有無により, 破綻処理と契約条件変更処理を差別化することになる.

別言すれば, 破綻処理と契約条件の変更は何れも債務削減を実施するものであるが, 後者では削減対象が将来に向かってのみ行われることに対し, 前者では将来部分と同時に過去に遡及した削減も行われることになる.

5.3　評価モデルの概要

5.3.1　契約条件変更権の価値 (将来における利益還元を想定しない場合)

本モデルでは保険会社が保有契約の公正価値減価を最大化させるように契約条件の変更若しくは破綻処理を行うものと想定する. 従って, 変更前公正価値を行使価格, 変更後公正価値を原資産とする American Moving Strike Put Option として両者の権利価値を定義する.

本モデルでは契約条件変更権により保険料は増額されず, 保険金額のみが減額されることを前提としている. 従って, 第 τ 時点に契約条件変更された直後の責任準備金公正価値 ${}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}$ は次掲のように表現できる.

$${}_0V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} = \left(\frac{{}_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} + \frac{P^{start}_{x:\overline{n}|}}{P^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}\right) \cdot A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} - P^{start}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} \tag{5.7}$$

時点 τ で権利行使される契約条件変更権の利得 $Payoff^{RD}(\tau)$ は

$$
\begin{aligned}
Payoff^{RD}(\tau) &= \max({}_{\tau}V^{start,MV}_{x:\overline{n}|} -_0 V^{first,MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}, 0] \\
&= \max[(1 - \frac{{}_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} - \frac{P^{start}_{x:\overline{n}|}}{P^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}) \cdot A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}, 0]
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

により定義されるので, 時点 t における契約条件変更権の価値 $Redemption\,Value(t)$ は

$$
Redemption\,Value(t) = \sup_{\tau} E^Q[e^{-\int_t^{\tau} r_u du} Payoff^{RD}(\tau) \mid \mathcal{F}_t] \tag{5.9}
$$

として評価すればよい.

時点 t における破綻処理の利得 $Payoff^{DF}(\tau)$ は同様にして

$$
\begin{aligned}
Payoff^{DF}(\tau) &= I(\frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} + \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}{}^{first}} < 1) \\
&\qquad \times \max[(1 - \frac{0.9_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} - \frac{P^{start}_{x:\overline{n}|}}{P^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}) \cdot A^{MV}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}, 0]
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

と求められる. $I(\cdot)$ はカッコ内の事象が生起する場合に 1, 生起しない場合に 0 の値を返す指標関数である.

式 (5.4) で定義された「契約条件の変更により保険金額が削減される状態」を『経営環境の悪化した状態』とすると, 破綻処理においては過去部分に遡及した債務削減, すなわち, 責任準備金の 10%削減が認められるため, 経営環境が悪化していない状態でも権利行使により利益を享受できる可能性がある. 従って, 式 (5.10) では『経営環境の悪化した状態』に限定して破綻処理を許容させるために, 指標関数を導入した記述を行っている.

結果として, 時点 t における破綻処理の価値 $Default\,Value(t)$ は

$$
Default\,Value(t) = \sup_{\tau} E^Q[e^{-\int_t^{\tau} r_u du} Payoff^{DF}(\tau) \mid \mathcal{F}_t] \tag{5.11}
$$

となる.

5.3.2 契約条件変更権の価値 (将来における利益還元を想定する場合)

契約条件変更後において, 変更対象契約者に対して利益還元を行なう場合はコンパウンド・オプションにより問題設定することができる. すなわち, 将来における利益還元の権利を評価し, 当該価値を控除した契約条件変更権の利得を定義すればよい. 利益還元を想定しない場合に比較し, 契約条件変更権価値は減少することとなろう.

以下では 契約条件変更後のある時点において公正価値及び還元利益を財源とした転換処理を行い, 削減された保険金額の回復を図ることを考える. ただし, 契約時保険料を超過する負担は許容しない. また, 契約時保険料の負担で転換後の総保険金額が契約時保険金額まで回復可能であれば, 転換後保険料を減額させるものとする.

まず, 第 τ_1 保険年度末に契約条件変更し, 第 τ_2 保険年度末 $(\tau_1 < \tau_2)$ に利益還元給付を受けると同時に転換処理を行うことを考える. 式 (5.3) より, 第 τ_2 保険年度末 $(\tau_1 < \tau_2)$ の責任準備金額 ${}_{\tau_2}V^{first}$ は

$$ {}_{\tau_2}V^{first} \;=\; \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \cdot A^{first}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} + \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \cdot {}_{\tau_2-\tau_1}V_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first} $$

であるので, 利益還元給付を SD とすると, 第 τ_2 保険年度末の転換による払済保険金額 (転換後払済 S_2) は

$$ \text{転換後払済}\, S_2 = \frac{{}_{\tau_2}V^{first} + SD}{A^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}} \tag{5.12} $$

となる.

転換後の平準保険料 (転換後 P_2) は, 契約時保険料 $(P^{start}_{x:\overline{n}|})$ を超えない範囲で契約時保険金額 1 に不足する保険金額を購入するために充当されるので

$$ \text{転換後}\, P_2 = I(\text{転換後払済}\, S_2 < 1) \cdot \min[P^{start}_{x:\overline{n}|}, (1 - \text{転換後払済}\, S_2) \cdot P^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}] \tag{5.13} $$

である. 従って, 転換後平準保険金額 (転換後平準 S_2) は

$$ \text{転換後平準}\, S_2 = I(\text{転換後払済}\, S_2 < 1) \cdot \min[\frac{P^{start}_{x:\overline{n}|}}{P^{second}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|}}, 1 - \text{転換後払済}\, S_2] \tag{5.14} $$

となり, 転換後の総保険金額 (転換後 S_2) は

$$ \text{転換後}\, S_2 = \text{転換後払済}\, S_2 + \text{転換後平準}\, S_2 \tag{5.15} $$

となる.

転換前の総保険金額 (転換前 S_1) は式 (5.1) 及び式 (5.2) より

$$ \text{転換前}\, S_1 = \frac{{}_{\tau_1}V_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{A_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} + \frac{P_{x:\overline{n}|}{}^{start}}{P_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|}{}^{first}} \tag{5.16} $$

であり, 転換前の平準保険料 (転換前 P_1) は契約時保険料 $P^{start}_{x:\overline{n}|}$ であるので, 第 τ_1 時点の契約条件変更を所与とした転換権価値 $Convertible\,Value(\tau_1)$ は

$$Convertible\,Value(\tau_1) = \sup_{\tau_2} E^Q[e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} r_u du} \max(\text{転換後公正価値} - \text{転換前公正価値}, 0) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \tag{5.17}$$

とすればよい. ただし,

$$\text{転換後公正価値} = \text{転換後}\ S_2 \cdot A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} - \text{転換後}\ P_2 \cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_2}|} \tag{5.18}$$

$$\text{転換前公正価値} = \text{転換前}\ S_1 \cdot A^{MV}_{x+\tau_2:\overline{n-\tau_2}|} - \text{転換前}\ P_1 \cdot \ddot{a}^{MV}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_2}|} \tag{5.19}$$

である.

結果として契約条件変更権の利得は式 (5.8) から

$$\max({}_{\tau_1}V^{start,MV}_{x:\overline{n}|} -{}_0 V^{first,MV}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|} - Convertible\,Value(\tau_1), 0] \tag{5.20}$$

と変化し, 将来における利益還元を想定する場合の, 時点 t における契約条件変更権の価値 $Redemption\,Value^{CV}(t)$ は

$$Redemption\,Value^{CV}(t) = \sup_{\tau_1} E^Q[e^{-\int_t^{\tau_1} r_u du} \max({}_{\tau_1}V^{start,MV}_{x:\overline{n}|} -{}_0 V^{first,MV}_{x+\tau_1:\overline{n-\tau_1}|} - Convertible\,Value(\tau_1), 0] \mid \mathcal{F}_t] \tag{5.21}$$

により導出される.

5.4　数値解析結果

本研究のモデルでは, 権利価値を American Moving Strike Put Option として評価する. 転換権評価と同様, 当該権利価値の評価には「(A) 行使価格が時間及び状態により変化すること」,「(B) 任意の時点に権利行使が可能であること」を表現することになるが, 必ずしも複数の権利行使回数を想定する必要はない. 将来の利益還元を想定しなければ, 権利行使回数は 1 回に限定される. ここでは権利行使回数を 1 回とし, 最小二乗モンテカルロ法 (LSM) を採用する. なお, 処理においては, 死亡率と利子率の独立性を前提としている.

5.4.1 契約時条件

保険契約者は保険期間 15 年の養老保険を新規に購入するものとし, 被保険者に対する 医的選択は想定しない. すなわち, 保険契約者の申込みをもって, 自動的に責任開始される.

保険数理上, 契約時において適用される計算基礎率は, 予定利率を 1.5%, 2.0%, 2.5%, 3.0%, 予定死亡率を生保標準生命表 2007(死亡保険用) とする. なお, 当該基礎率は権利行使されるまで変更はされない. 権利行使により変更適用される予定死亡率と予定利率は次項以降に示す.

5.4.2 死亡率の設定

当該モデルでは粗死亡率モデルに 1 因子のリー・カーター・モデルを採用し, パラメータ $(\alpha_x, \beta_x, \gamma_t)$ の推定における入力値は 1987 年から 2005 年における簡易生命表の男性死亡率である. 誤差項は年齢及び時点に依存しない正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ を適用し, σ の推定結果として 0.03456 を得た.

保険数理において適用する標準死亡率は粗死亡率に対し安全割増を計上した数値, 権利価値評価に適用する死亡率は観測される実確率 (P 測度) としての粗死亡率をリスク中立確率 (Q 測度) に測度変換した数値である. ここで, 安全割増は 2005 年簡易生命表に対する生保標準生命表 2007(死亡保険用) の比が一定であるものと仮定し, 当該年齢別係数を粗死亡率に乗ずることで標準死亡率を定義している. 従って, 標準生命表における安全割増は粗死亡率の水準に比例することになり, 粗死亡率が低下すれば安全割増が圧縮されることになる. 換言すれば, 安全割増に対して期間構造を与えたということである.

5.4.3 測度変換の設定

本章では各時点における標準生命表と粗死亡率を測度変換した死亡率が整合するように, ワン変換のパラメータを決定する. 従って, 標準生命表の安全割増に期間構造を与えたことに伴い, ワン変換のパラメータ $\lambda_{x,t}$ にも期間構造が与えられる.

前章と同様にすると, P 測度下におけるリー・カーター・モデルに基づく t 時点の粗死亡率対数値は

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x\gamma_t + \varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(\alpha_x + \beta_x\gamma_t, \sigma^2 t)$$

である.

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp[-\frac{1}{2}\{\lambda_{x,t}^2 - 2\lambda_{x,t}\frac{\ln(q_{x,t}) - (\alpha_x + \beta_x\gamma_t)}{\sigma\sqrt{t}}\}] \tag{5.22}$$

であるので, Q 測度下における t 時点の死亡率対数値は

$$\ln(q^Q_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x\gamma_t + \lambda_{x,t}\sigma\sqrt{t} + \varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(\alpha_x + \beta_x\gamma_t + \lambda_{x,t}\sigma\sqrt{t}, \sigma^2 t)$$

となる. 従って,

$$q^Q_{x,T}\,|_{\mathcal{F}_t} = q^Q_{x,t}\exp[\beta_x(\gamma_T - \gamma_t) + \sigma(\lambda_{x,T}\sqrt{T} - \lambda_{x,t}\sqrt{t}) + \sigma\, W^Q_{T-t}] \tag{5.23}$$

を得る.

時点 t におけるワン変換のパラメータ $\lambda_{x,t}$ は

$$E^Q[q^Q_{x,t+1} \mid \mathcal{F}_t] = q^{\text{標準生命表}}_{x,t}$$

を満足するように決定する. 結果として,

$$\lambda_{x,t} = \frac{\sum_{k=0}^{t-1}[\ln q^{\text{標準生命表}}_{x,k} - \ln q^Q_{x,k}] - [\beta_x(\gamma_t - \gamma_0) + \frac{\sigma^2}{2}t]}{\sigma\sqrt{t}} \tag{5.24}$$

を得た. 導出過程は付録に示すとおりである.

定義式より明らかなように, $\lambda_{x,t}$ は死亡率の状態遷移について, 直近実績のみならず, 契約時以降全ての履歴を参照する. $\lambda_{x,t}$ の直感的な解釈は, 保険料及び責任準備金算定の基礎となる生命表における安全割増の代替である. このため 0 歳及び 50 – 70 歳に見られるような「負値をとる $\lambda_{x,t}$」は違和感を覚えるところであろうが, これは当該部分において契約時における粗死亡率 (平成 18 年簡易生命表の率) が標準生命表 2007(死亡保険用) の率よりも高くなっているためである. 死亡保障を対象とする場合, 標準生命表は粗死亡率に対し安全割増を計上することで決定される. 従って, 粗死亡率よりも標準生命表の率が低くなるという現象は, 一般的には生じにくいものと考えられるが, 当該結果の要因は母集団の不一致によるものと推測される. 簡易生命表の母集団は推計人口による日本人人口及び人口動態統計月報年計 (概数) であるが, 標準生命表 2007(死亡保険用) では生命保険会社 32 社の保有契約情報を生命保険協会で取りまとめ,「有診査[7] 男女別」「経過年数 30 年以下」のデータが母集団になっているためである.

なお, 第 3 章の図 3.4 に示したリー・カーター・モデルの時間要因のパラメータ γ_t からも確認できるように, 死亡率は顕著な低減傾向にある. これは同じく第 3 章の図 3.1 から確認できるように, 世界的に観測されるトレンドである. 過去に観測されるトレンドを反映することになるため, 将来における粗死亡率の水準も時間経過に伴い低下し, 連鎖して標準生命表が低下する. 各時点, 各状態における標準生命表と整合させるように測度変換を行うため, 結果として $\lambda_{x,t}$ の水準も低下する. これは表 5.2 及び図 5.1 において確認することができる.

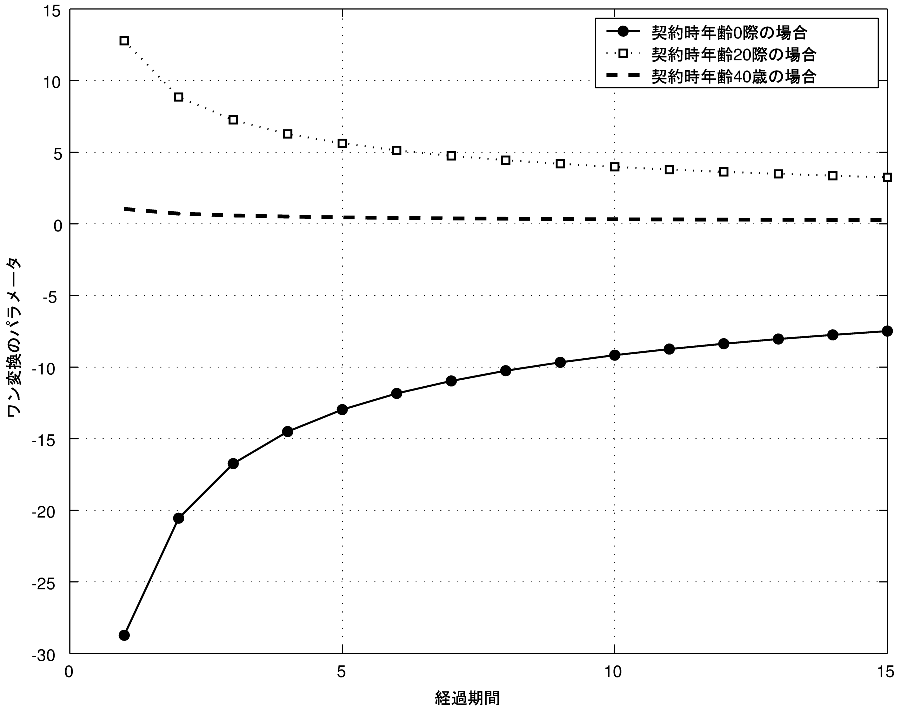
[7]健康状態の望ましくない被保険者に対する保障提供を回避するため, 面接士による面談, 医師による診察等契約時における選択が実施されている.

表 5.2: ワン変換におけるパラメータ $\lambda_{x,t}$

	被保険者の契約時年齢						
時点	0 歳	10 歳	20 歳	30 歳	40 歳	50 歳	60 歳
1	△ 28.7236	13.6703	12.7828	4.2254	1.0431	△ 0.0693	△ 1.0130
2	△ 20.5566	9.4035	8.8490	2.9707	0.7048	△ 0.1141	△ 0.8355
3	△ 16.7444	7.7207	7.2560	2.4283	0.5808	△ 0.0826	△ 0.6628
4	△ 14.5080	6.6789	6.2786	2.1025	0.5021	△ 0.0733	△ 0.5774
5	△ 12.9751	5.9751	5.6167	1.8806	0.4492	△ 0.0653	△ 0.5158
6	△ 11.8448	5.4543	5.1271	1.7168	0.4101	△ 0.0596	△ 0.4710
7	△ 10.9661	5.0497	4.7468	1.5894	0.3796	△ 0.0552	△ 0.4360
8	△ 10.2579	4.7236	4.4403	1.4868	0.3551	△ 0.0516	△ 0.4079
9	△ 9.6712	4.4534	4.1863	1.4017	0.3348	△ 0.0487	△ 0.3845
10	△ 9.1749	4.2249	3.9715	1.3298	0.3176	△ 0.0462	△ 0.3648
11	△ 8.7479	4.0283	3.7867	1.2679	0.3029	△ 0.0440	△ 0.3478
12	△ 8.3755	3.8568	3.6255	1.2139	0.2900	△ 0.0422	△ 0.3330
13	△ 8.0469	3.7055	3.4832	1.1663	0.2786	△ 0.0405	△ 0.3200
14	△ 7.7542	3.5707	3.3565	1.1239	0.2685	△ 0.0390	△ 0.3083
15	△ 7.4913	3.4496	3.2427	1.0858	0.2593	△ 0.0377	△ 0.2979

(注 1) 契約時の標準生命表は「生保標準生命表 2007(死亡保険用)」である.
(注 2) 被保険者の性別は男性である.

図 5.1: ワン変換におけるパラメータ $\lambda_{x,t}$



5.4.4　利子率の設定

スポット・レートモデルには Cox-Ingersoll-Ross Model

$$dr = \alpha[\bar{r} - r]dt + \sigma\sqrt{r}\, dW_t$$

を採用し, 2007 年 5 月 4 日の金利・債券データによりパラメータ推定を行った. 結果として α に 0.07745, $\bar{r}$ に 0.04163, σ に 0.01047 を得た.

保険数理上適用される将来の予定利率は, 当該利子率モデルに基づき, 各時点及び利子率の状態で決定される 10 年利付債券のパー・クーポンとする.

表 5.3: 予定利率の期間構造

(単位)%

時点	パーセンタイル値				
	0.5%値	25.0%値	50.0%値	75.0%値	99.5%値
1	1.2225	1.5225	1.7314	1.9837	2.9654
2	1.2126	1.5520	1.8357	2.2114	3.7630
3	1.2125	1.5936	1.9386	2.4071	4.4904
4	1.2130	1.6462	2.0402	2.5797	5.1715
5	1.2178	1.6887	2.1250	2.7533	5.7936
6	1.2250	1.7345	2.2161	2.8791	6.2216
7	1.2224	1.7647	2.2943	3.0157	6.8269
8	1.2314	1.8186	2.3559	3.1655	7.2677
9	1.2229	1.8399	2.4288	3.2734	7.7144
10	1.2328	1.8837	2.4761	3.3945	8.3138
11	1.2447	1.9074	2.5471	3.4775	8.2148
12	1.2349	1.9370	2.6078	3.5903	8.5565
13	1.2360	1.9677	2.6540	3.6483	8.7651
14	1.2337	2.0008	2.6906	3.7169	8.9950
15	1.2388	2.0026	2.7269	3.7782	9.3337

(備考) 第 0 時点の 10 年利付債券のパー・クーポンは 1.6157%である.

5.4.5 LSM における基底関数の設定

基底関数を構成する直交多項式には 10 次の Laguerre 多項式を適用した. 適用対象となる根源的な不確実性は死亡率と利子率である. 変数の区間が $[\,0\,,\,\infty\,]$ であるため, 死亡率においてはネイピア数を底とする指数関数値 $\exp(\sigma W_T^Q)$ を, 利子率においては変換を施さないサンプル・パスの値を, それぞれの状態変数とした. 数値解析は Compaq Visual Fortran で行い, 回帰分析には Longstaff and Schwartz[2001] と同様に IMSL 数値計算ライブラリの DLSBRR を適用した.

5.4.6　権利価値の評価

式 (5.8) 及び式 (5.10) からは, 各権利価値の特徴として次掲の内容を把握できる.

第一に変更前の保険料 $P^{start}_{x:\overline{n}|}$ 及び責任準備金 ${}_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}$ が小さいほど, すなわち, 予定利率が高いほど, また, 予定死亡率が低いほど契約条件変更若しくは破綻処理により保険者が得られる利得が大きくなることである. 保険者の利得を契約者の損失と読み替えれば, 当然のこととして理解できよう.

第二に各要素の利得及び権利行使時期への影響である. 変更後に保険料を払い込むことにより購入される平準保険金額 $\frac{P^{start}_{x:\overline{n}|}}{P^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}$ は τ が満期に近くなるほど分母が大きくなるために逓減する. 一方, 変更時までに積み立てられた責任準備金を財源として購入される払済保険金額 $\frac{{}_{\tau}V^{start}_{x:\overline{n}|}}{A^{first}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}$ は時間の経過とともに逓増し, 満期時には 1 に収斂する. 従って, 前者 (将来部分の変更) は権利行使を遅らせるインセンティブを与え, 後者 (過去部分の変更) は権利行使を早めるインセンティブを与えることになる. 契約条件の変更と破綻処理では, 前者は共通するものの, 後者には差異が生じており, 責任準備金削減を許容しない契約条件の変更の方が, 破綻処理よりも権利行使が早められる可能性がある. これは価値評価と同時に, 数値的に確認することができる.

図 5.2: 契約条件変更権及び破綻処理権の残存率

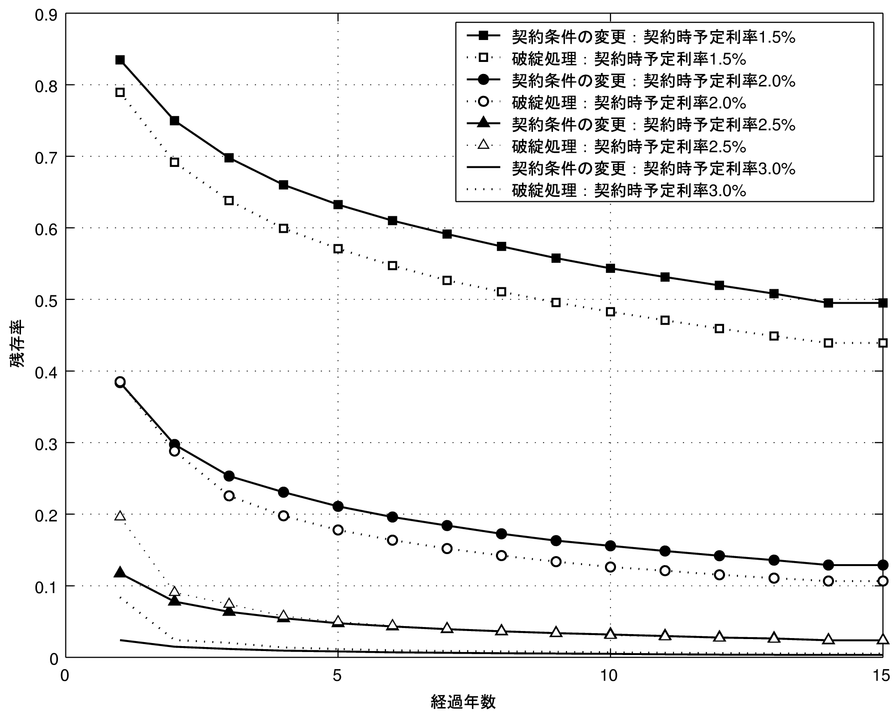


表 5.4: 将来の適用予定利率が契約時予定利率を下回る確率及び下方積率

(単位)%

時点	契約時予定利率を下回る確率				下方積率			
	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%
1	22.17	76.13	96.22	99.61	0.025	0.281	0.725	1.217
2	20.47	62.30	86.67	95.75	0.026	0.238	0.618	1.078
3	17.99	54.31	78.43	90.96	0.022	0.205	0.544	0.971
4	15.35	47.71	72.35	86.16	0.020	0.179	0.483	0.881
5	13.07	43.46	66.90	80.89	0.017	0.159	0.439	0.812
6	11.66	39.28	62.46	77.81	0.015	0.144	0.401	0.755
7	11.00	36.78	58.58	74.52	0.014	0.134	0.375	0.709
8	9.84	33.97	55.60	70.54	0.013	0.121	0.347	0.665
9	9.21	32.45	52.51	68.20	0.012	0.114	0.329	0.632
10	8.44	30.36	50.91	66.16	0.011	0.106	0.310	0.605
11	7.65	29.16	48.29	63.86	0.009	0.100	0.294	0.577
12	7.34	27.45	46.38	61.76	0.009	0.095	0.280	0.552
13	7.16	26.23	44.56	60.58	0.009	0.091	0.269	0.534
14	6.79	24.98	43.83	58.96	0.009	0.088	0.262	0.520
15	6.48	24.88	42.49	58.09	0.008	0.086	0.254	0.507

図 5.2 は横軸に時間, 縦軸に残存率をとり, 契約条件の変更及び破綻処理の権利が行使されずに残存するパスを確認したものである. 契約時点における 10 年利付債券のパー・クーポン (1.6157%) を下回っている契約時予定利率 1.5%の場合は, 破綻処理の残存率が契約条件の変更の残存率を下回っている. これは前者の権利行使が, 後者の権利行使を上回ることを意味している.

保険会社が破綻処理・契約条件の変更, 何れかの権利行使をすれば計算基礎率は洗い替えられるが, 変更前後計算基礎率が同水準であるとき, 当該時点における責任準備金を財源として購入される払済保険金額及び平準保険料により購入される平準保険金額の合計額は契約時保険金額に一致する[8]. 表 5.4 には将来の予定利率過程において契約時予定利率を下回る確率と, 当該事象の生起した場合の契約時予定利率に対する不足部分の期待値である下方積率を示している. 計算基礎率の変更を予定利率に限定して考えれば, 基礎率変更幅が微小であれば責任準備金削減の許容されない契約条件の変更では保険金額の削減も微小とな

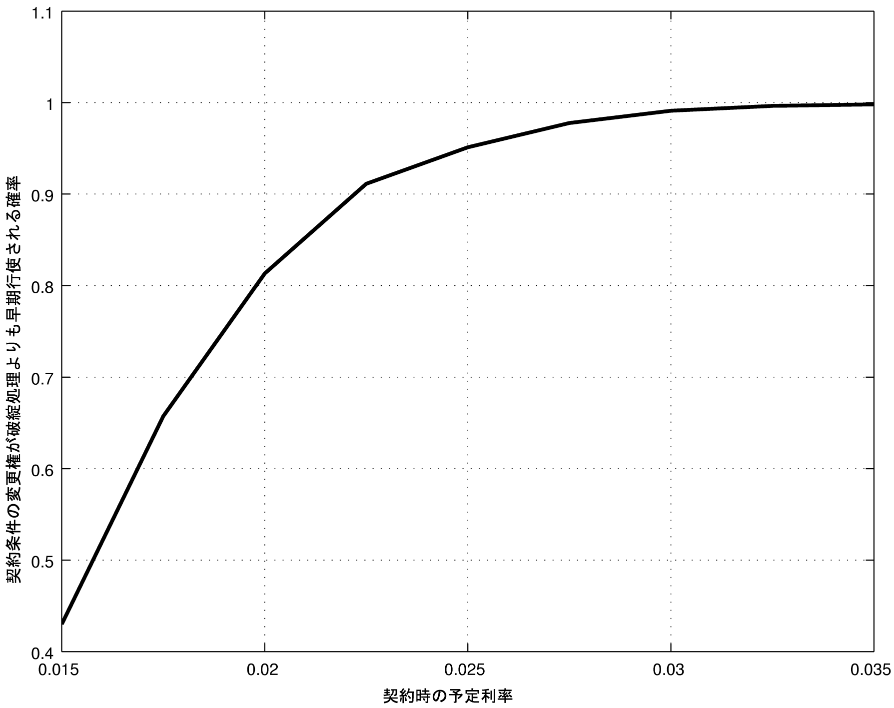
[8]証明を付録に示す.

る．当該環境下では責任準備金削減を許容される破綻処理の保険金削減割合が契約条件の変更の場合よりも大きくなるために, 契約時予定利率 1.5%の場合には破綻処理の権利行使が契約条件の変更に優先するものと解釈できる．

一方, 契約時予定利率が契約時点における 10 年利付債券のパー・クーポンを超える 2.0%, 2.5%, 3.0%の場合には, 経過 1 年目において破綻処理の残存率が契約条件の変更の残存率よりも高く, 以降の期間で逆転している．また, 破綻処理の残存率が契約条件の変更のそれよりも高水準にある期間は予定利率が高くなるに伴い長期化し, 予定利率 2.0%の組では経過 1 年目まで, 予定利率 2.5%の組では経過 4 年目まで, 予定利率 3.0%の組では経過 15 年目までとなっている．契約条件の変更よりも破綻処理の残存率が高いということは, 当該期間における前者の権利行使が後者よりも多いということである．

図 5.3 は破綻処理よりも契約条件の変更が早期に権利行使される確率を縦軸, 契約時の予定利率を横軸にプロットしている．契約時予定利率の上昇に伴い, 当該確率の増加する様子が確認できる．そこで, 次の段階では権利行使の行われる状態を確認する．

図 5.3: 契約条件変更権が破綻処理権よりも早期に権利行使される確率



《経過 1 年目における権利行使領域の比較》

図 5.4: 初期予定利率 1.5%の場合

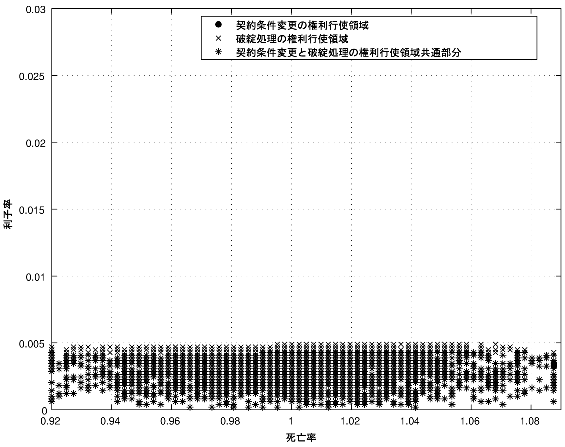


図 5.5: 初期予定利率 2.0%の場合

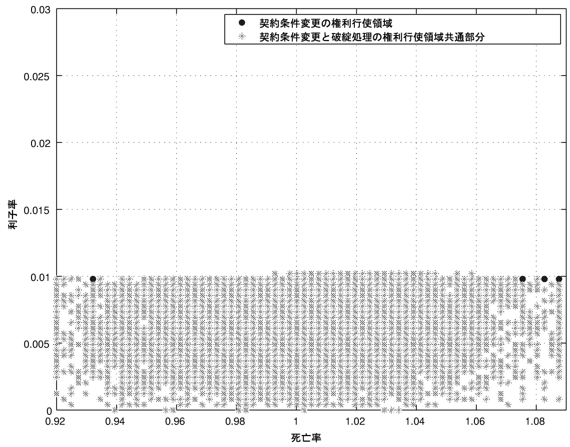


図 5.6: 初期予定利率 2.5%の場合

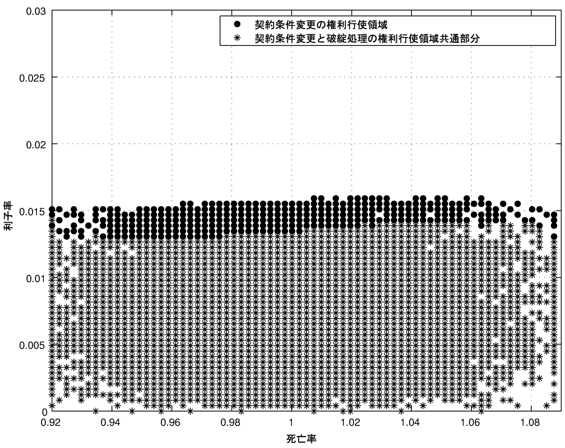
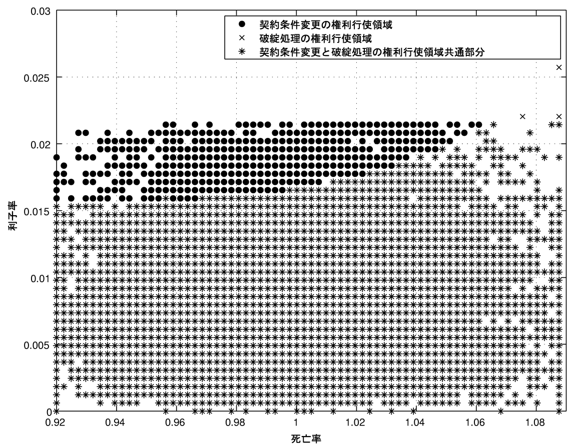


図 5.7: 初期予定利率 3.0%の場合



(注) 被保険者年齢は 30 歳である.

図 5.4 から図 5.7 では経過 1 年目における権利行使領域を示している. 図の縦軸と横軸は LSM 法の回帰対象となる状態変数であり, 各状態変数の交点がブランクの部分にある場合には, 権利行使により得られる利得が継続価値を下回るため破綻処理及び契約条件の変更は行われない. 図 5.2 にプロットされる「残存するパス」の状態である. 他方, 状態変数の交点に $*$ が打たれる場合 (グラフ下部の薄いマーカー領域) には契約条件の変更及び破綻処理の両者が, $\times$ が打たれる場合には破綻処理のみが, $\bullet$ が打たれる場合 (グラフ上部の濃いマーカー領域) には契約条件の変更のみが行われる.

権利行使領域が図の下部に位置することは, 権利行使の発生する経済要因の一つが, 市中金利の許容水準を超える低下であることを意味している. これは, いわゆる「逆ザヤ」の発

生として理解できる.

契約時に設定される予定利率の水準も権利行使領域には影響する. 適用される予定利率が当該時点の新契約に適用される率 (1.5%) である場合には, 契約条件の変更と破綻処理の間に権利行使領域の大きな差異は生じていないが (図 5.4), 適用される予定利率が高くなるほど共通の領域 ($*$) だけではなく, 契約条件の変更に係る領域 ($\bullet$) が拡大している.

図 5.6 及び図 5.7 においては, $\bullet$ が $*$ の上部に位置している. 契約条件の変更に係る権利行使領域が破綻処理に係るそれよりも大きいということは, より広い状態変数の範囲でパスが消滅するということである. また, 領域の上部に $\bullet$ が打たれるということは, 市中利子率の低下が浅い段階で契約条件の変更が破綻処理に優先して行われることを意味している. すなわち, 責任準備金削減の認否は権利行使に差異を与えているということである.

最終段階で表 5.5 を見ると, 契約条件の変更は破綻処理に比較し権利価値が低くなっている. 当該結果は, 保険契約者の経済的負担が軽減されたものと読み替えることができるだろう.

表 5.5: 契約条件の変更と破綻処理の権利価値

年齢	契約条件の変更				破綻処理			
	契約時の予定利率				契約時の予定利率			
	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%
0	0.0038	0.0209	0.0452	0.0719	0.0154	0.0305	0.0524	0.0773
10	0.0038	0.0209	0.0452	0.0719	0.0153	0.0307	0.0526	0.0774
20	0.0038	0.0208	0.0450	0.0716	0.0154	0.0306	0.0523	0.0764
30	0.0038	0.0208	0.0450	0.0715	0.0154	0.0305	0.0522	0.0767
40	0.0037	0.0205	0.0444	0.0706	0.0151	0.0303	0.0516	0.0755
50	0.0034	0.0196	0.0428	0.0683	0.0145	0.0292	0.0502	0.0731
60	0.0029	0.0177	0.0393	0.0632	0.0135	0.0276	0.0468	0.0692
70	0.0017	0.0128	0.0302	0.0500	0.0099	0.0226	0.0376	0.0560

5.5 本章の結論

当該改正は現金による公的資金投入を行わず, 契約条件の変更を認容することにより実質的に保険者の救済を行ったものである. 権利行使される事態は決して好ましいものではないが, 当該スキームが従来の破綻処理に比較して優れている点として次掲の三点を指摘できる.

第一に責任準備金の削減を許容しないことにより, 権利行使時期を早めるインセンティブを与えたこと, 結果として損害 (権利価値) を抑制し, 契約者利益の保全が図られたことである. 本章では保険者に与えられた権利を利子率及び死亡率の上に書かれるデリバティブとみなし, 権利行使領域を比較することにより, 当該内容を計量的に確認することに成功した.

第二には権利行使の意思決定を当事者に残し, 責任の所在を明確にしたことである. 愚かな経営者は, 業務停止命令を発令されるまで営業を継続するかもしれない. 然るに, 契約条件の変更を行わずに経営破綻することがあれば, 最善の経営行動を執らなかったことは明白となる. 意思決定に係る価値評価を行うことにより, 経営判断の結果として拡大した損害額も一定の条件下で評価される. 賠償請求額の算定根拠に一定水準の客観性を与えることも可能となろう.

また, 契約条件の変更には内閣総理大臣の承認後, 株主総会等の決議を必要とする[9]. すなわち, 契約条件の変更内容, 基金や保険契約者以外の一般債権者の債務の取り扱い, 将来の利益還元等による救済条件, 経営責任等について合意が成立しなければ, 変更を受け入れずに経営破綻を選択することも, 契約者は自己責任において可能である. 自らの保有する権利価値を評価することができれば, 契約者は変更内容について合理的な検討を行うことが可能となろう.

第三には権利縮減対象を限定することで当該時点における契約者間の公平性を確保する一方, 経営改善時における優先的な利益還元を権利縮減対象者に約することで将来における契約者間の公平性を確保しうることである.

なお, 契約条件の変更を債務免除と考えるならば, 貸借対照表上の責任準備金額に変動はなくとも, 式 (5.8) 及び式 (5.20) の利得は生じている. 法人税法第 22 条第 2 項を鑑みれば, 当該債務免除益には当然に課税すべきであろう. ただし, 当該利得の額は公正価値評価モデルに依存するため, 基準となる評価手法の確立が必要と考えられる.

[9]保険業法第 240 条の 5 第 1 項 (契約条件の変更の決議).

第6章　不確実性を有する負債に対応する投資戦略

2009 年 5 月現在, わが国で採用される会計基準において, 保険制度の負債として認識される金額は保険数理に基づく責任準備金額である.

既に指摘したとおり, 伝統的な保険数理ではキャッシュフローの不確実性の全てを債務評価に反映することができない. 従って, 当該保険会社における投資若しくはヘッジ戦略の構築に際しては, 保険数理に基づく責任準備金を参照するだけではなく, 保険契約の価値を保険事故発生率・利子率等計算基礎率の上に書かれるデリバティブとして評価することが望ましい. 保険契約の有する根源的な不確実性を把握し, 当該不確実性の一部又は全てを資産にも持たせることができれば, 剰余の安定性を向上させることが可能となるためである. 表 6.1 に示す International Association of Insurance Supervisors[2006] の ALM の 11 要件においても, 第 2 要件で『経済的価値に基づき, 経済的価値の変動を考慮すること』, 第 6 要件で『保険会社は新契約及び既契約に埋め込まれるオプションにより引き起こされるリスクを考慮すべきであること』『契約者間の公平性を確保するのであれば, 当該オプションの影響を緩和する手段を見つけること』が要求されている. 我が国の公的年金制度・企業年金制度では, 基本ポートフォリオの策定に際し, 当該不確実性の参照を根拠法で要求している[1]ことも, 同様の趣旨によるものと推察される.

ただし, 債務評価における計算基礎の全てが取引可能ではないこと, 平準払を前提とした保険数理に基づく価格設定によりヘッジ財源が必ずしも充分でないこと等を鑑みれば, 当該投資戦略の構築は容易なことではない. そこで本章では, Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] を負債の参照を前提としないアセット・オンリー・アプローチから負債の参照を前提とする ALM アプローチに拡張, 最低保証を付した変額年金保険を例として, 負債の根源的な不確実性の一部が市場性を有することを前提に, 任意の時点, 保険料払込方法, 組入資産, 保障及び保証内容, 目的関数に対応する一般勘定の近似的最適解を導出し, シミュレーション型動的最適化の数値解析手法を提示する.

---

[1](厚生年金・国民年金) 年金積立金管理運用独立行政法人法第 20 条第 3 項, (厚生年金基金) 厚生年金基金規則第 41 条の 6 第 1 項第 1 号, (確定給付企業年金) 確定給付企業年金法施行規則第 84 条第 1 項第 1 号等.

表 6.1: 国際保険監督機構における ALM の要件

要件 1	負債, リスク特性, 支払能力確保に適切な資産と投資行動を確実にする資産ー負債ポジションを管理・監視するための効果的な手続きを適切に有していること.
要件 2	経済的価値に基づき, 想定されるシナリオの範囲から生ずる経済的価値の変動を考慮すること.
要件 3	ALM 尺度は保険会社の本質と現状, 保険種類の特徴を適切に反映すること.
要件 4	資産と負債における全てのリスクを精査すること.
要件 5	市場リスクと信用リスクを評価するために適切なリスク尺度を適用すること. より複雑な商品と投資のポートフォリオに対し, より精巧なモデルを適用すること.
要件 6	新契約及び既契約において, 埋め込まれるオプションにより引き起こされるリスクを考慮すること. 契約者間の公平性を確保するためにデリバティブの影響を緩和する手段を確認すること. ALM では保険契約に埋め込まれるオプションが及ぼす想定可能な影響を評価すること.
要件 7	将来の給付を賄うために流動性を確保し, 分散された保有資産構造を構築すること. 予想外のキャッシュアウトに備えること.
要件 8	ALM 戦略の方針, 資産と負債の関係, 総合的なリスク許容度, 要求収益率, ソルベンシーポジション, 要求流動性を取締役会は認識すること. ALM の実行に対して経営幹部に責任を与えること.
要件 9	各保険群団・資産区分の特徴に適し, 群団・区分間の相互作用を考慮した ALM 戦略を構築すること.
要件 10	ALM に関係する部門間との緊密かつ継続的な連携を確保するように組織化すること. 保険会社の特質, 規模及び複雑さにさせて組織構造を構築し, 効果的な ALM を持続させること. 保有契約の投資, プライシング, 管理機能から ALM の監視は組織的に分離すること. ALM 組織の権限, 役割及び責任は明確且つ適切であり, 社内で正しく理解されていること. 監督機関は組織の相互関係が適切であるか否かを検査すべきであること.
要件 11	保険事業と予想されるリスクに対して適切な ALM 方針の管理手段と報告手続を開発し, 実行すること. これらを密接にモニターし, 定期的に見直すこと.

(出典)International Association of Insurance Supervisors[2006].

6.1 多期間動的最適化の基本的な考え方

多期間動的最適化の枠組による投資戦略については, Campbell and Viceira[2002] 等に詳しい. 以下では「資産」のみならず「負債」を考慮し, 二次元に拡張した場合の基本的な考え方を解説する.

今, 満期 T 時点の資産額 A_T と負債額 L_T により定義される関数 $u(A_T, L_T)$ を導入し, 第 t 時点の価値関数 $\mathcal{J}(t, A_t, L_t)$ を

$$\mathcal{J}(t, A_t, L_t) = \max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau\in[t,T]}} E[\, u(A_T, L_T) \mid \mathcal{F}_t \,] \tag{6.1}$$

と定義する. ここで最適性原理により, 次式が成立する. ただし, $s > t$ である.

$$\mathcal{J}(t, A_t, L_t) = \max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau\in[t,s]}} E[\, \mathcal{J}(s, A_s, L_s) \mid \mathcal{F}_t \,] \tag{6.2}$$

つまり, t 時点における価値関数を, 「将来の s 時点における価値関数の条件付期待値を最大化するもの」としている.

伊藤の補題により,

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(\tau, A_\tau, L_\tau) \;&=\; \frac{\partial}{\partial A_t}\mathcal{J}\cdot(dA_t) + \frac{\partial}{\partial L_t}\mathcal{J}\cdot(dL_t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}\cdot dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\,[\, \frac{\partial^2}{\partial A_t^2}\mathcal{J}\cdot(dA_t)^2 + \frac{\partial^2}{\partial L_t^2}\mathcal{J}\cdot(dL_t)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial A_t \partial L_t}\mathcal{J}\cdot(dA_t)\cdot(dL_t)\,] \end{aligned} \tag{6.3}$$

また,

$$\mathcal{J}(s, A_s, L_s) = \mathcal{J}(t, A_t, L_t) + \int_t^s d\mathcal{J}(\tau, A_\tau, L_\tau) \tag{6.4}$$

であるので, 式 (6.3) 及び式 (6.4) を式 (6.2) に適用すると

$$\max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau\in[t,s]}} E[\int_t^s d\mathcal{J}(\tau, A_\tau, L_\tau) \mid \mathcal{F}_t \,] = 0 \tag{6.5}$$

を得る. 最適投資戦略を求めるには, 資産及び負債の予算制約下において当該要件を満足するように保有資産配分比 $\mathbf{x}$ の調整を実践すればよい. これが多期間動的最適化問題の基本的な考え方である.

問題を簡単にするために, 資産及び負債の価格過程を次掲のように設定してみよう.

$$\begin{aligned} dA_t = \mu(t, A_t)\, A_t\, dt \;&+\; \sigma(t, A_t)\, A_t\, dW_t^A \\ dL_t = \mu(t, L_t)\, L_t\, dt \;&+\; \sigma(t, L_t)\, L_t\, dW_t^L \\ dW_t^A \cdot dW_t^L \;&=\; \rho\, dt \end{aligned}$$

当該条件を式 (6.3) に反映し, ブラウン運動の期待値がゼロとなることを利用して整理すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial A_t}\mathcal{J}\cdot\mu(t,A_t)\,A_t+\frac{\partial}{\partial L_t}\mathcal{J}\cdot\mu(t,L_t)\,L_t+\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A_t^2}\mathcal{J}\cdot\sigma(t,A_t)^2\,A_t^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial L_t^2}\mathcal{J}\cdot\sigma(t,L_t)^2\,L_t^2\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial^2}{\partial A_t\partial L_t}\mathcal{J}\cdot\sigma(t,A_t)\,\sigma(t,L_t)\,\rho\,A_t\,L_t=0
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

を得る.

ここで第 t 時点における資産配分比ベクトルを $\mathbf{x}$, 負債構成比ベクトルを $\mathbf{y}$, リスク性資産の収益率の期待値ベクトルを $\mathbf{M}$, 同分散共分散行列を $\mathbf{\Omega}$, 全ての要素が 1 のベクトルを $\mathbf{e}$, 無リスク利子率を r_t とする. ただし, $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{e},\mathbf{M}$ は $(n\times 1)$ ベクトル, $\mathbf{\Omega}$ は $(n\times n)$ 行列である. このとき, 資産及び負債の価格過程における係数は

$$
\begin{aligned}
\mu(t,A_t) &= r_t+(\mathbf{M}-r_t\cdot\mathbf{e})^T\cdot\mathbf{x}\\
\mu(t,L_t) &= r_t+(\mathbf{M}-r_t\cdot\mathbf{e})^T\cdot\mathbf{y}\\
\sigma(t,A_t)^2 &= \mathbf{x}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{x}\\
\sigma(t,L_t)^2 &= \mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}\\
\sigma(t,A_t)\,\sigma(t,L_t)\,\rho &= \mathbf{x}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

と書き換えることができるので, 1 階の条件から最適資産配分比 $\mathbf{x}^*$ は次掲のように求められる.

$$
\mathbf{x}^*=-\frac{\frac{\partial}{\partial A_t}\mathcal{J}\cdot\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{M}-r_t\cdot\mathbf{e})+L_t\cdot\frac{\partial^2}{\partial A_t\partial L_t}\mathcal{J}\cdot\mathbf{y}}{A_t\cdot\frac{\partial^2}{\partial A_t^2}\mathcal{J}}
\tag{6.7}
$$

式 (6.7) を式 (6.6) に代入すると, 価値関数 $\mathcal{J}$ に対する偏微分方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}\;&+\;r_t\cdot(A_t\cdot\frac{\partial}{\partial A_t}\mathcal{J}+L_t\cdot\frac{\partial}{\partial L_t}\mathcal{J})-\frac{1}{2}\frac{(\frac{\partial}{\partial A_t}\mathcal{J})^2}{\frac{\partial^2}{\partial A_t^2}\mathcal{J}}\cdot(\mathbf{M}-r_t\cdot\mathbf{e})^T\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{M}-r_t\cdot\mathbf{e})\\
&+L_t\cdot(\frac{\partial}{\partial L_t}\mathcal{J}-\frac{\frac{\partial}{\partial A_t}\mathcal{J}\cdot\frac{\partial^2}{\partial A_t\partial L_t}\mathcal{J}}{\frac{\partial^2}{\partial A_t^2}})\cdot(\mathbf{M}-r_t\cdot\mathbf{e})^T\mathbf{y}\\
&\qquad+\frac{1}{2}L_t^2\cdot[\,\frac{\partial^2}{\partial L_t^2}\mathcal{J}-\frac{(\frac{\partial^2}{\partial A_t\partial L_t}\mathcal{J})^2}{\frac{\partial^2}{\partial A_t^2}\mathcal{J}}\,]\cdot\mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}=0
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

式 (6.8) を解き, 導出された価値関数 $\mathcal{J}$ に対する偏微分係数を再び式 (6.7) に適用することにより, 最終的に最適資産配分比 $\mathbf{x}^*$ が導かれる. 解法の進展については内山 [2008] に詳

しいが, 一般的に価値関数の解析解を得ることは困難であり, 多くの場合に近似的解析解若しくは数値解に頼ることになる. 然るに, 期中におけるキャッシュフローの反映等, 資産及び負債過程が複雑となる場合, 組入資産の増加に伴い状態変数が多くなる場合等には数値解析さえも困難である. 次節で解説する Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005](以下では簡単のために BGSS 法とする) は, 価値関数を解くことなく, 直接に近似的最適資産配分比を求めることにより, 問題解決の実行性を高めるものである.

6.2 BGSS 法 [2005]

前節で解説した価値関数を解く手法と BGSS 法の相違点を確認するために, 具体的な題材として最低保証を付した変額年金保険を適用する.

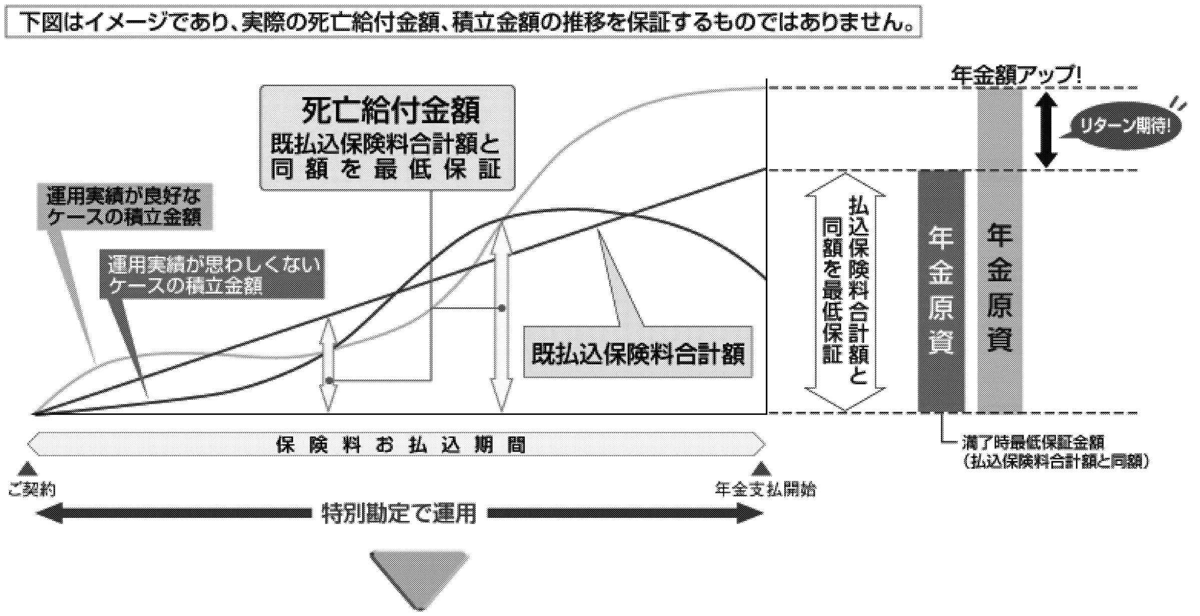
6.2.1 変額 (年金) 保険

山下 [2005] は, 変額保険 (Variable Insurance) 及び変額年金保険 (Variable Annuity) を『予定利率, 予定死亡率 (保険事故発生率), 予定事業費率等の保険料計算基礎のうち, 予定利率を保険者が保証せず, 資産運用実績に応じて保険金額, 年金額及び解約返戻金額を変動させることとした生命保険』と定義している.

「定額給付の生命保険, 実損填補の損害保険」という定義に当該保険種類は整合するのだろうかという素朴な疑問を持つが, 我が国における導入に際しては『保険金額が変動するものであっても客観的な保険金額の算出基準が契約上定められていれば生命保険契約である』と整理され, 計算基礎の全てに保険者が保証を提供することは必須の条件ではないものとされたようである. 結果として資産運用成果 (予定利率) の保証が外れたものであっても, 保険契約として認識された. すなわち, 保険事故発生率 (死亡率) について保証があることが保険の必須要件と山下 [2005] は指摘している.

資産運用リスクの担い手が保険者であるか保険契約者であるかによって, 当然に保険者の投資行動は変化する. このため, 保険者が負う場合は「一般勘定」, 保険契約者が負う場合は「特別勘定」として勘定が分離されている. 最低保証の付された変額年金保険の契約管理を振り返ると, 年金額の決定基準たる参照資産としての性格を特別勘定が持つ. 当該勘定においては資産運用成果を全て保険契約者に帰属させるのであるから, 契約者持分 (負債) は資産と同額になる. すなわち, 責任準備金は収支の残高に他ならない. 一方, 最低保証部分は資産運用リスクを保険者が負うことになり, 当該部分は一般勘定が対応する. 責任準備金額は平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号「標準責任準備金の積立方式及び計算基礎率を定める件」を受け, 保険数理に基づき評価される金額が計上されることになる. 次小節では両勘定における資産及び負債の価格過程を解説する.

図 6.1: 対象となる変額年金保険の特徴と仕組



(出典) 住友生命ホームページ, 『たのしみ VA プラス (積立プラン)』の資料より転載.

6.2.2　資産と負債の価格過程

図 6.1 に示されるような, 満期時及び死亡時に既払込保険料合計相当額を最低保証する, 平準払変額年金保険契約を考える. すなわち, 当該商品においては保証水準 (行使価格) が段階的に上昇する.

以下では保険期間を T, 予定利率を i, 平準払保険料を P, 時点 t における特別勘定資産額を S/A_t, 一般勘定資産額を G/A_t, 最低保証リスクに係る責任準備金を $L^G_{\min}(t)$, $[t-\Delta t, t]$ 期間[2]に適用される特別勘定進展率を $R_t^{S/A}$, 一般勘定進展率を $R_t^{G/A}$, 無リスク利子率を r_t, 保証料等を表 6.2 に示すとおりとする.

なお, 保証料等については年齢及び性別の設定を想定しない. 年齢別の設定を行った場合には, 契約日・契約年齢・性別に特別勘定のユニット価格を設定し, ディスクロージャー資料を作成する必要が生ずる. 年齢・性別料率の適用は事務負荷が重くなるだけではなく, 契約者の混乱を引き起こすことさえも懸念される. 共通料率であれば, 設定されるユニット価格は唯一であり, 当該問題は回避できる. 年齢及び性別に基づく差異は責任準備金にのみ反映すれば十分であろう.

[2] ここでは離散表現を前提としている. Δt は時間間隔であり, 以下における式の展開においては $\Delta t = 1$ としている.

表 6.2: 保証料・予定事業費・信託報酬

	保険料比例部分	積立金比例部分
最低保証料	ε_P^1	ε_V^1
予定事業費	ε_P^2	ε_V^2
信託報酬	-	ε_V^3
合計	$\varepsilon_P = \varepsilon_P^1 + \varepsilon_P^2$	$\varepsilon_V = \varepsilon_V^1 + \varepsilon_V^2 + \varepsilon_V^3$

(A) 保険契約者と保険会社間及び保険会社内部のキャッシュフロー

一般勘定, 特別勘定, 責任準備金の価格過程を導出する前に, 保険契約者と保険会社間, 保険会社内の一般勘定と特別勘定間の資金の流れを示す.

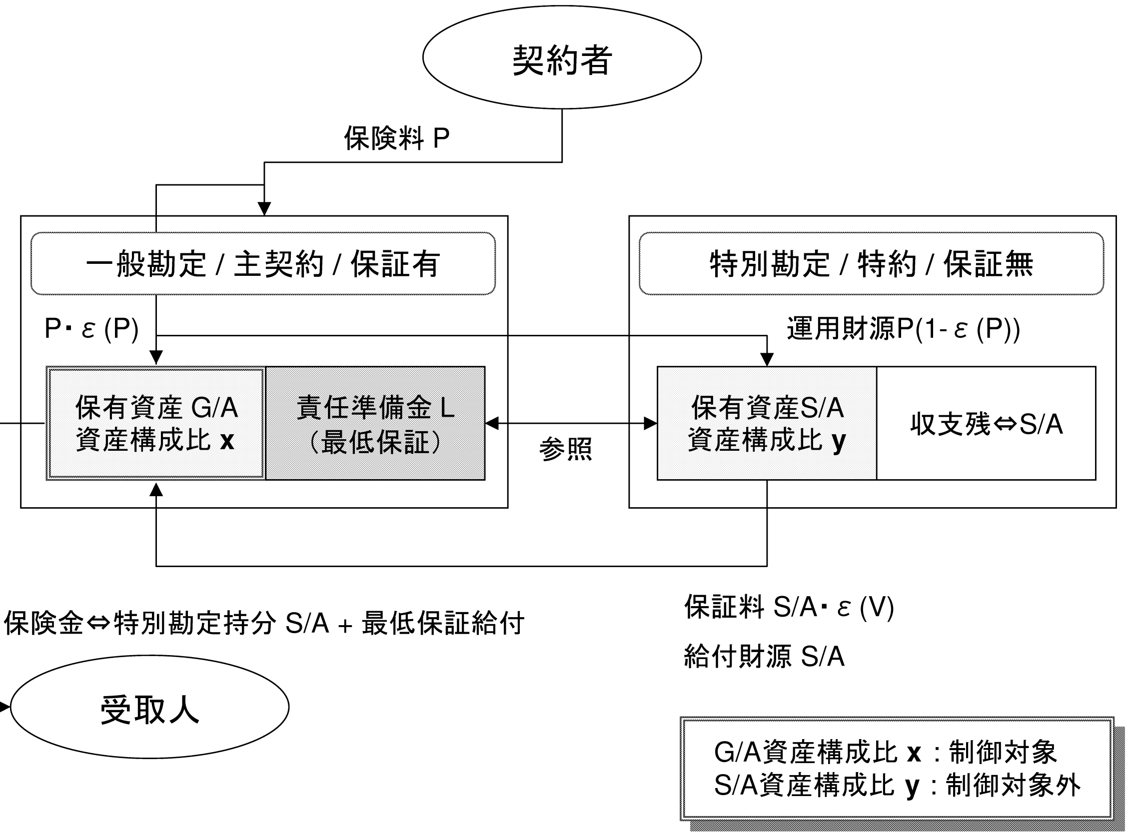
保険契約の締結に伴い, 保険契約者は平準払保険料 P を保険会社に支払う. 当該金額はまず, 全額が主契約たる一般勘定で収入される. 平準払保険料 P のうち, 保険契約の維持管理等に必要な予算が事業費として控除され, 残額が責任準備金の対応財源として一般勘定及び特別勘定で積み立てられる. このとき, 一般勘定の最低保証財源として留保される金額は $P \cdot \varepsilon_P^1$, 特約たる特別勘定に運用財源として振り替えられる金額は $P \cdot (1 - \varepsilon_P)$ である.

事業年度末 (ここでは t とする) を迎えると, 特別勘定には当該事業年度始の保有資産に前掲 $P \cdot (1 - \varepsilon_P)$ を加え, 給付金等を控除した金額の運用成果 (当該金額を便宜的に V とする) が留保されている. 決算処理として, V から積立金比例の最低保証財源 $(V \cdot \varepsilon_V^1)$, 事業費 $(V \cdot \varepsilon_V^2)$ 及び信託報酬 $(V \cdot \varepsilon_V^2)$ が取り崩され, 最低保証財源が一般勘定資産に振り替えられる. 残された S/A_t, すなわち, $V \cdot (1 - \varepsilon_V)$ が翌事業年度始の特別勘定資産残高となる.

一般勘定も同様に, 当該事業年度始の保有資産に前掲 $P \cdot \varepsilon_P^1$ を加え, 給付金等を控除した金額の運用成果及び特別勘定から振り返られた最低保証財源が年度末資産残高 G/A_t として留保されている.

最終的に被保険者に保険事故が発生せず満期を迎えた場合, 若しくは保険期間中に保険事故が発生した場合には, 最低保証金額及び特別勘定資産残高の何れか大きい金額が保険金受取人に支払われることになる. 第 τ 時点で保険事故が発生したものとすれば, 本例における最低保証金額は既払込保険料合計相当額 $\tau \cdot P$ であるので, 保険金受取人に支払われる金額は $\max(S/A_\tau,\ \tau \cdot P)$ である.

図 6.2: 当該保険契約に係るキャッシュフローの構造



(B) 特別勘定資産額 (実際の運用成果)

時点 $(t-1)$ における加入者 (生存者) 数は l_{x+t-1} であるので, 特別勘定の期始資産額は $l_{x+t-1} \cdot S/A_{t-1}$ である. 当該資産額と加入者が期始に納付した保険料 P のうち, 特別勘定に投入される $P \cdot (1-\varepsilon_P)$ を期末 (時点 t) まで運用した結果は

$$l_{x+t-1} \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1-\varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A}$$

となるが, 当該期間内における死亡者に対して給付を行うため, 給付後の残額は

$$(l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1-\varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A}$$

である. 年度末においては当該金額に対し, 最低保証料・予定事業費・信託報酬が賦課され, 取り崩されるので, 期末 (時点 t) の資産残高は

$$(l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1-\varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V)$$

となるが, 当該金額は時点 t における加入者に帰属するものであるから, $l_{x+t} \cdot S/A_t$ と表現することもできる.

従って, 第 2 章で解説したファクラーの再帰式は,

$$l_{x+t} \cdot S/A_t = (l_{x+t-1} - d_{x+t-1}) \cdot [S/A_{t-1} + P \cdot (1-\varepsilon_P)] \cdot R_t^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V) \tag{6.9}$$

となる. ただし, $S/A_0 = 0$ である. 特別勘定では給付財源が当該特別勘定残高に限定されるため, 任意の時点において $S/A_t \geqq 0$ となる. また, 満期到達後は残余財産を契約者に給付し, 当該勘定は消滅するため, 当該保険契約を引き受ける保険会社の内部留保形成に資することはない.

ここで簡単のために保険期間中における死亡及び解約が生じないものとする. このとき t 時点までの情報に基づく $(t+k)$ 時点の特別勘定資産額 $S/A_{t+k} \,|\, \mathcal{F}_t$ は次掲式により定義できる. ただし, $k > 0$ である.

$$\begin{aligned} S/A_{t+k} \,|\, \mathcal{F}_t = S/A_t \prod_{l=t+1}^{t+k} R_l^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^k \\ + \sum_{l=t+1}^{t+k} P \cdot (1-\varepsilon_P) \prod_{m=l}^{t+k} R_m^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^{(t+k)-l+1} \end{aligned} \tag{6.10}$$

(C) 特別勘定資産額 (責任準備金の参照資産)

t 時点までの情報に基づく $(t+k)$ 時点の責任準備金評価の参照資産 $S/A_{t+k}^{INDEX} \,|\, \mathcal{F}_t$ は, 次式により定義される. ただし, $k > 0$ である.

$$\begin{aligned} S/A_{t+k}^{INDEX} \,|\, \mathcal{F}_t = S/A_t \cdot \exp[\, (\mu - \varepsilon_V - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot k + \sigma\, W_k \,] \\ + P \cdot (1-\varepsilon_P) \sum_{l=t}^{t+k-1} \exp[\, (\mu - \varepsilon_V - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (t+k-l) + \sigma\, W_{t+k-l} \,] \end{aligned} \tag{6.11}$$

ここで留意すべき点は価格過程のパラメータ μ 及び σ である.

平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号では責任準備金を標準的方式により積み立てる場合のパラメータが規定されている. すなわち, 特別勘定において保有する投資資産価格のボラティリティとは必ずしも一致しない可能性がある. 然るに, 筆者は次掲の理由により, 当該トラッキング・エラーの発生には否定的である.

第一には必要内部留保水準の上昇に伴う財源の増加である．保険業法第 116 条第 1 項では保険契約に基づく将来における債務の履行に備えるために, 毎決算期における責任準備金の積立を要請している．ここで当該変額保険の引受に伴う最低保証行為において「通常の予測」とされるボラティリティは前掲告示に規定される値である．従って, 当該値と実績値の乖離は要求される内部留保水準を高めることになる．追加的に要求される内部留保蓄積の財源が剰余金に求められ, 他商品群団の剰余金分配額が削減されるような事態が生ずれば, これは公平性の阻害に他ならない．増資による対応等, 他商品群団間及び当該商品群団内の世代間における公平性を確保できないのであれば, 特別勘定の望ましい投資戦略とは考えにくい．

第二には逆選択の問題である．ボラティリティが高くなればオプション・プレミアムが高くなることは常識である．従って, 原資産たる特別勘定のボラティリティを意図的に保証料の計算基礎よりも高めるのであれば, 当該行為はミス・プライスというよりは寧ろ, 逆選択の提供に他ならない．当該状態を看過するようなことがあれば, アクチュアリーは保険業法施行規則第 211 条の 48 に規定される職責を全うしているとはいえまい．

(D) 最低保証リスクに係る責任準備金

当該科目は一般勘定における負債である．時点 k までの情報を反映した, 将来 t 時点の最低保証リスクに係る責任準備金 $L^G_{\min}(t)\,|\,\mathcal{F}_k$ は次式により定義される．ただし, $t > k$ である．

$$
\begin{aligned}
L^G_{\min}(t)\,|\,\mathcal{F}_k \;\;=\;\; & \frac{D_{x+T}}{D_{x+k}} \cdot E[\,\max(T \cdot P - S/A_n^{INDEX})\,|\,\mathcal{F}_k\,] \\
& + \sum_{t=k}^{T-1} \frac{C_{x+t}}{D_{x+k}} \cdot E[\,\max((t+1) \cdot P - S/A_{t+1}^{INDEX})\,|\,\mathcal{F}_k\,] \\
& \qquad - \sum_{t=k}^{T-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}} \cdot (\,\varepsilon_P^1 \cdot P + E[\,\bar{a}_t\,|\,\mathcal{F}_k\,]\,)
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
E[\,\bar{a}_t\,|\,\mathcal{F}_k\,] = & \frac{\varepsilon_V^1}{\mu - \varepsilon_V - r} \cdot e^{(\mu-\varepsilon_V-r)\,t} \cdot (e^{\mu-\varepsilon_V-r} - 1) \\
& \times[\,S/A_k \cdot e^{-(\mu-\varepsilon_V)\,k} + P \cdot (1-\varepsilon_P) \sum_{l=k}^{t} e^{-(\mu-\varepsilon_V)\,l}\,]
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

である．

なお, 本研究では最低保証リスクに備える危険準備金 (所謂危険準備金Ⅲ) の積み立てを考慮しないものとする．

(E) 一般勘定資産額

時点 $(t-1)$ における加入者数は l_{x+t-1} であるので, 一般勘定の期始資産額は $l_{x+t-1}\cdot G/A_{t-1}$ である. 当該資産額と加入者が期始に納付した保険料 P のうち, 一般勘定に投入される $P\cdot\varepsilon_P^1$ を期末 (時点 t) まで運用した結果は

$$l_{x+t-1}\cdot[\,P\cdot\varepsilon_P^1+G/A_{t-1}]\cdot R_t^{G/A}$$

となる. 一方, 期末においては特別勘定資産額から取り崩された最低保証料

$$(l_{x+t-1}-d_{x+t-1})\cdot[S/A_{t-1}+P\cdot(1-\varepsilon_P)]\cdot R_t^{S/A}\cdot\varepsilon_V^1=\frac{\varepsilon_V^1}{1-\varepsilon_V}\cdot l_{x+t}\cdot S/A_t$$

が, 保証財源として一般勘定に繰り入れられると同時に, 死亡給付の取り崩しも発生する. 期末に支払の生ずる 1 人あたりの死亡給付額は, 特別勘定資産額 S/A_t が既払込保険料 $t\cdot P$ に不足する金額であるので, 勘定全体では

$$d_{x+t-1}\cdot\max[\,t\cdot P-S/A_t,0\,]$$

である. 以上より, 期末における資産残高は

$$l_{x+t-1}\cdot[\,P\cdot\varepsilon_P^1+G/A_{t-1}]\cdot R_t^{G/A}+\frac{\varepsilon_V^1}{1-\varepsilon_V}\cdot l_{x+t}\cdot S/A_t-d_{x+t-1}\cdot\max[\,t\cdot P-S/A_t,0\,]$$

となる. 当該金額が $l_{x+t}\cdot G/A_t$ であるので, $t<T$ におけるファクラーの再帰式は,

$$\begin{aligned}l_{x+t}\cdot G/A_t=l_{x+t-1}\cdot[\,P\cdot\varepsilon_P^1+G/A_{t-1}]\cdot R_t^{G/A}&+\frac{\varepsilon_V^1}{1-\varepsilon_V}\cdot l_{x+t}\cdot S/A_t\\&-d_{x+t-1}\cdot\max[\,t\cdot P-S/A_t,0\,]\end{aligned}\tag{6.14}$$

となる. ただし, $G/A_0=0$ である. 満期時点においては生存者に対して死亡給付額と同額の満期保険金が発生するため, ファクラーの再帰式は,

$$\begin{aligned}l_{x+T}\cdot G/A_T=l_{x+T-1}\cdot[\,P\cdot\varepsilon_P^1+G/A_{T-1}]\cdot R_T^{G/A}&+\frac{\varepsilon_V^1}{1-\varepsilon_V}\cdot l_{x+T}\cdot S/A_T\\&-(d_{x+T-1}+l_{x+T})\cdot\max[\,T\cdot P-S/A_T,0\,]\end{aligned}\tag{6.15}$$

である.

式 (6.10) と同様に, t 時点までの情報に基づく $(t+k)$ 時点の一般勘定資産額 $G/A_{t+k}\,|\,\mathcal{F}_t$ として

$$\begin{aligned}G/A_{t+k}\,|\,\mathcal{F}_t=G/A_t\prod_{l=t+1}^{t+k}R_l^{G/A}&\\+\sum_{l=t+1}^{t+k}P\cdot\varepsilon_P^1\prod_{m=l}^{t+k}R_m^{G/A}&+\varepsilon_V^1\{\,S/A_t\cdot①+P(1-\varepsilon_P)\cdot②\,\}\end{aligned}\tag{6.16}$$

$$
\begin{aligned}
① &= \sum_{l=t+1}^{t+k} R_l^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^k + \sum_{l=t+1}^{t+k-1} \prod_{m=t+1}^{l} R_m^{S/A} \prod_{o=l+1}^{t+k} R_o^{G/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^{l-t} \\
② &= \sum_{l=t+1}^{t+k} \prod_{m=l}^{t+k} R_m^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^{(t+k)-l+1} \\
&\qquad + \sum_{l=t+1}^{t+k-1} \sum_{m=t+1}^{l} \prod_{n=m}^{l} R_n^{S/A} \prod_{o=l+1}^{t+k} R_o^{G/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^{l-m+1}
\end{aligned}
$$

を得る. ただし, $k > 0$ である.

式 (6.10) と式 (6.16) を比較すると, 特別勘定と一般勘定の本質的な構造の差異を確認できる. すなわち, 前者が当該勘定内で完結することに対し, 後者は他勘定の運用成果の影響を受けるということである.

経済環境の低迷期を想定すると, 特別勘定資産額の減価に伴い最低保証に係る責任準備金が増価する一方, 積立金比例の保証料収入が減少する. 当該構造が変額年金保険の一般勘定における投資戦略を困難なものとさせる要因であることは容易に理解できるだろう.

6.2.3　BGSS 法 [2005] の ALM への拡張

(A) 最適化問題の設定

第 t 時点の状態変数として次式により定義される積立比率 $\mathbf{FR}(\mathbf{t})$ を導入する.

$$
\mathbf{FR}(\mathbf{t}) = \frac{S/A_t + G/A_t}{S/A_t + H[S/A_t]} \tag{6.17}
$$

ただし, $t \in [0, T]$ であり, 最低保証リスクに係る責任準備金 $L_{\min}^G(t)$ を特別勘定資産額の上に書かれるデリバティブと見做し, $H[S/A_t]$ なる記法を並行して使用している.

特別勘定では給付財源が当該特別勘定残高に限定され, 収支残が負債として認識されるため資産と負債は同額となる. 従って, 積立比率の分子と分母に現れる特別勘定資産額 S/A_t は, 同一の記号ではあるものの意味が異なることに留意されたい. 分子のそれは「特別勘定に属する資産額」, 分母のそれは「特別勘定に属する負債額」を意味するものである.

すなわち, 積立比率の分子は一般勘定資産額及び特別勘定資産額の合計, 分母は特別勘定負債額及び最低保証リスクに係る責任準備金 (一般勘定負債額) の合計を意味しており, 積立比率とは当該保険契約の負債に対応する資産充足度を評価したものと解釈できる. 当該比率が常に 1.0 を超過しており, かつ, 保有資産の流動性も確保されていれば, 理想的な状態といえるだろう.

一方, 年度末決算時点で当該比率が 1.0 を下回れば, 当該契約群団は債務超過の状態である. 更に当該状態で給付が発生すれば損失が顕在化し, ソルベンシー・マージン (広義の自

己資本) が棄損されるため, 保険者が達成すべき課題の一つは積立不足の抑制若しくは回避と考えることができる.

そこで本稿では, 満期 T 時点の積立比率 $\mathbf{FR(T)}$ に対し,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{FR(T)}) &= \mathbf{FR(T)} - a \cdot \mathbf{FR(T)}^2, \\ & \qquad\qquad (\, 0 < \mathbf{FR(T)} < \frac{1}{2a},\, a > 0 \,) \end{aligned} \tag{6.18}$$

なる関数 u を導入し, 離散時間モデルにより次掲の最適化問題を考える.

$$\max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau=t}^{T-1}} E[u(\mathbf{FR(T)}) \mid \mathcal{F}_t\,] \tag{6.19}$$

ただし, 保険期間中における死亡及び解約を想定せず, 特別勘定と一般勘定の価格過程を

$$S/A_{t+1} = [\, S/A_t + P(1-\varepsilon_P)\,] \cdot R_{t+1}^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V) \tag{6.20}$$

$$G/A_{t+1} = [\, G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1\,] \cdot R_{t+1}^{G/A} + \frac{\varepsilon_V^1}{1-\varepsilon_V} \cdot S/A_{t+1} \tag{6.21}$$

とする.

(B) 資産価格過程の分解

第 t 時点の一般勘定及び特別勘定の資産構成比ベクトルを $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$, リスク性資産の収益率の期待値ベクトルを $\mathbf{M}$, 同分散共分散行列を $\mathbf{\Omega}$, 全ての要素が 1 のベクトルを $\mathbf{e}$, とする. ただし, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{M}$ は $(n \times 1)$ ベクトル, $\mathbf{\Omega}$ は $(n \times n)$ 行列である.

このとき, $[t, t+1]$ 期間に対応する特別勘定運用収益率を期待値が $r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \cdot \mathbf{y}$, 分散が $\mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}$ の正規分布に従うものとすれば, 特別勘定進展率は

$$R_{t+1}^{S/A} = \exp[\, r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T\mathbf{y} - \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}}{2} + \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}}W_{(t+1)-t}^{S/A}\,] \tag{6.22}$$

である. これをテイラー展開し, 伊藤ルールの準用により

$$R_{t+1}^{S/A} \approx 1 + r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T\mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}}W_{(t+1)-t}^{S/A} \tag{6.23}$$

と近似すると, 式 (6.20) は

$$\begin{aligned} S/A_{t+1} &= [\, S/A_t + P(1-\varepsilon_P)\,] \cdot R_{t+1}^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V) \\ &\approx [\, S/A_t + P(1-\varepsilon_P)\,] \cdot (1-\varepsilon_V) \\ & \qquad \times [\, 1 + r_{t+1} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T\mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{\Omega}\mathbf{y}}W_{(t+1)-t}^{S/A}\,] \end{aligned} \tag{6.24}$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
S/A_{t+1}^{r_{t+1}} &= [\, S/A_t + P(1-\varepsilon_P)\,] \cdot (1+r_{t+1}) \cdot (1-\varepsilon_V) &\quad (6.25)\\
S/A_{t+1}^{\mathbf{y}} &= [\, S/A_t + P(1-\varepsilon_P)\,] \cdot [(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A}\,] \cdot (1-\varepsilon_V) &\quad (6.26)
\end{aligned}
$$

とし, 式 (6.20) を

$$
S/A_{t+1} \approx S/A_{t+1}^{r_{t+1}} + S/A_{t+1}^{\mathbf{y}} \quad (6.27)
$$

と表現する．

同様にして, 式 (6.21) を

$$
G/A_{t+1} \approx G/A_{t+1}^{r_{t+1}} + G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}} \quad (6.28)
$$

とする．ただし,

$$
\begin{aligned}
G/A_{t+1}^{r_{t+1}} &= [(G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) + \varepsilon_V^1 \cdot \{S/A_t + P(1-\varepsilon_P)\}] \cdot (1+r_{t+1}) &\quad (6.29)\\
G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}} &= (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot [(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{x} + \sqrt{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}} W_{(t+1)-t}^{G/A}\,] \\
&\quad + \varepsilon_V^1 \cdot [S/A_t + P(1-\varepsilon_P)] \cdot [(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}} W_{(t+1)-t}^{S/A}\,] &\quad (6.30)
\end{aligned}
$$

である．なお, 我々が制御対象とするものは一般勘定ポートフォリオ $\mathbf{x}$ のみである．特別勘定ポートフォリオ $\mathbf{y}$ は制御対象とはならない．

(C) BGSS 法による ALM アプローチ

式 (6.19) に基づき, 第 t 時点における価値関数 $\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t)$ を

$$
\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t) = \max_{\{\mathbf{x}_\tau\}_{\tau=t}^{T-1}} E[\, u(\mathbf{FR}(\mathbf{T})) \mid \mathcal{F}_t\,] \quad (6.31)
$$

と定義し, 更に

$$
\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t) := f[\, G/A_t^{r_t} + G/A_t^{\mathbf{x},\mathbf{y}}, S/A_t^{r_t} + S/A_t^{\mathbf{y}}\,] \quad (6.32)
$$

なる関数 f を導入する．

次に

$$
\mathcal{J}(t+1, G/A_{t+1}, S/A_{t+1}) = f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}} + G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}}, S/A_{t+1}^{r_t} + S/A_{t+1}^{\mathbf{y}}\,]
$$

を式 (6.25) 及び式 (6.29) で定義した $G/A_{t+1}^{r_{t+1}}$ 及び $S/A_{t+1}^{r_{t+1}}$ の周りでテイラー展開し,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(t+1, G/A_{t+1}, S/A_{t+1}) \\
&\quad \approx f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,] \\
&\qquad + G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,] \\
&\qquad + S/A_{t+1}^{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial S/A_{t+1}} f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,] \\
&\qquad + \frac{1}{2}(G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}})^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,] \\
&\qquad + \frac{1}{2}(S/A_{t+1}^{\mathbf{y}})^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial S/A_{t+1}^2} f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,] \\
&\qquad + G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cdot S/A_{t+1}^{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,]
\end{aligned} \tag{6.33}$$

と近似する. 以下では簡単のために $f[\, G/A_{t+1}^{r_{t+1}}, S/A_{t+1}^{r_{t+1}} \,]$ を f とのみ記述する.

最適性原理により

$$\mathcal{J}(t, G/A_t, S/A_t) = \max_{\mathbf{x_t}} E[\mathcal{J}(t+1, G/A_{t+1}, S/A_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t] \tag{6.34}$$

が成立するので, 式 (6.34) の右辺に式 (6.33) を適用すれば, 1 階の条件から近似的な最適解 $\mathbf{x}^*$ を求めることができる.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^* \;=\; & -\frac{1}{G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1} \cdot \frac{E[\, \frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f \mid \mathcal{F}_t \,]}{E[\, \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f \mid \mathcal{F}_t \,]} \cdot \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e}) \\
& -\frac{S/A_t + P \cdot (1-\varepsilon_P)}{G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1} \cdot \{\, \varepsilon_V^1 + (1-\varepsilon_V) \cdot \frac{E[\, \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f \mid \mathcal{F}_t \,]}{E[\, \frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f \mid \mathcal{F}_t \,]} \,\} \cdot \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

ただし,

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Omega} + (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \tag{6.36}$$

である. 式 (6.33) における $G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ 及び $S/A_{t+1}^{\mathbf{y}}$ に関する積率評価は付録に示す.

最適解 $\mathbf{x}^*$ は Merton[1971] 等により示されるとおり, $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{M} - r_t\mathbf{e})$ に対応する近視眼的成分と, $\mathbf{y}$ に対応する異時点間のヘッジ成分 (負債構造) により構成される. また, 式 (6.7) では価値関数の偏微分として与えられた係数が, 式 (6.35) では条件付期待値に代替され, 近視眼的成分の要素が $\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{M} - r_t\mathbf{e})$ から $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})$ に変化している.

偏微分方程式を解き価値関数の解析解を導出することとは異なり, 三種類の条件付期待値 $E[\,\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f \mid \mathcal{F}_t\,]$, $E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f \mid \mathcal{F}_t\,]$, $E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f \mid \mathcal{F}_t\,]$ を評価することは Longstaff and Schwartz[2001] の最小二乗モンテカルロ (LSM; Least Square Monte-Carlo) 法のアイデアを利用すれば, 比較的容易に行える. すなわち, $\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}} f$, $\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2} f$, $\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1} S/A_{t+1}} f$ を目的変数, 時点 t までの情報に基づく状態変数の直交基底を説明変数として回帰するのである. 条件付期待値の評価については, 枇々木 [2007] に倣い, シミュレーション・パスの各点から格子を張ることによる対応も考えられる. ただし, 平準払保険料を前提とすると, 資産価格過程の格子が再結合しないために計算負荷が高まることに留意が必要である. BGSS 法はシミュレーションを土台にすることで, 4 階微分可能であることを前提とした式 (6.18) への任意の関数形の適用及び組入対象資産の任意の収益率分布への対応, 潜在的な経路依存性の反映等を可能としている.

ただし, 近似的手法であるために, 誤差に留意する必要もある. Binsbergen and Brandt[2006] は価値関数を直接に解かず, 期待効用を最大化する最適資産配分比の近似解を求める BGSS 法は, 状態変数の多項式近似により効用関数が正確に記述できない場合には, 価値関数を近似する等の他手法と比較して誤差の伝搬に差異が生ずる可能性を指摘している. また, 梅内 [2008] は BGSS 法の近似誤差が価値関数のテイラー展開に起因するものと指摘し, 当該誤差の抑制策として離散間隔の短縮, テイラー展開の高次化, 無リスク資産収益率に代替する近視眼的ポートフォリオ収益率周りでの展開等を提案している.

なお, 式 (6.35) から明らかなように, 負債価値が経済環境において何ら不確実性を参照せず, 資産価値とは独立であるならば $\mathbf{y}$ に対応するヘッジ成分は存在しえない. 別の表現をするならば, 近視眼的成分, すなわち, 分散ポートフォリオは何らヘッジ機能を有さないということである.

6.2.4 最適資産構成比

前掲処理を満期時点から第 0 時点まで後進帰納的に反復することで, 保険期間に亘る最適投資戦略が導出される. 式 (6.35) により求められる最適資産構成比 $\mathbf{x}^*$ を確認する.

(A) (T-1) 時点

式 (6.18) を微分すれば, 式 (6.35) における条件付期待値を次掲のように特定することができる.

$$E[\, \frac{\partial}{\partial G/A_T} f \mid \mathcal{F}_{T-1}\,] = E[\, 2a \cdot \{\, \frac{1}{2a} - \mathbf{FR}(\mathbf{T})\,\} \frac{1}{S/A_T + H[S/A_T]} \mid \mathcal{F}_{T-1}\,] \tag{6.37}$$

$$E[\, \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2} f \mid \mathcal{F}_{T-1}\,] = E[\, -\frac{2a}{\{\, S/A_T + H[S/A_T]\,\}^2} \mid \mathcal{F}_{T-1}\,] \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} &E[\, \frac{\partial^2}{\partial G/A_T S/A_T} f \mid \mathcal{F}_{T-1}\,] \\ &\quad = E[\, 2a \cdot \frac{2\{\, \mathbf{FR}(\mathbf{T}) - \frac{1}{4a}\,\} \cdot (1 + \frac{\partial}{\partial S/A_T} H[S/A_T]) - (1 + \varepsilon_V^1)}{\{\, S/A_T + H[S/A_T]\,\}^2} \mid \mathcal{F}_{T-1}\,] \end{aligned} \tag{6.39}$$

本稿では第 t 時点における条件付期待値の回帰における状態変数として積立比率 $\mathbf{FR}(\mathbf{t} - \mathbf{\Delta t})$ を選択した. これは任意の時点における一般勘定資産額, 特別勘定資産額及び責任準備金額が契約時点から当該時点までの不確実性と情報を蓄積した結果と解釈したことによる.

ここで一つの疑問が生ずるだろう. 最適投資戦略は満期時点から後進帰納的に導出されるにもかかわらず, 当該時点における資産価値が入力情報として必要となっている. 当該時点における資産価値は, 契約時点から当該時点までの最適投資行動に基づき決定されるのであるから, 後進帰納的にポートフォリオを決定する限り, 当該時点より過去における最適投資戦略は決定できないことになる. Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud[2005] では当該問題を解消し, 任意の目的関数を対応可能とするために, 資産価値の上下限で最適資産構成比を求めればよいとしている.

資産価値の上下限設定には幾つかの手法が考えられるが, 一般勘定が特別勘定資産価値に対するプット・オプションの役割を要求されることから, 本稿では契約時以降, 特別勘定資産収益率が反映された一般勘定 $G/A_t^{S/A}$, 同無リスク利子率が反映された一般勘定 $G/A_t^{r_f}$, 当該時点における最低保証水準 $t \cdot P$ に対し, 上限 $G/A_t^{\max}$ 及び下限 $G/A_t^{\min}$ を次掲のように設定した.

$$G/A_t^{\max} \;=\; \max[\, t \cdot P\,,\, G/A_t^{S/A}\,,\, G/A_t^{r_r f}\,] \cdot (1 + k) \tag{6.40}$$

$$G/A_t^{\min} \;=\; \min[\, G/A_t^{S/A}\,,\, G/A_t^{r_r f}\,] \div (1 + k) \tag{6.41}$$

ここで k は範囲を保守的に設定するためのマージンで 10% としている．

当該 $G/A_t^{\max}$ 及び $G/A_t^{\min}$ に対する仮の最適資産構成比を後進帰納的に求めておき, 0 時点から前進的に投資戦略を実行することにより事後的に判明する G/A_t に対して補間処理を施し, 最終的な最適資産構成比 $\mathbf{x}^*$ を決定している[3].

(B) (T-2) 時点

同様にして,

$$E[\,\frac{\partial}{\partial G/A_{T-1}}f \mid \mathcal{F}_{T-2}\,] = E[\,\frac{\partial}{\partial G/A_T}f \cdot R_T^{G/A} \mid \mathcal{F}_{T-2}\,] \tag{6.42}$$

$$E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_{T-1}^2}f \mid \mathcal{F}_{T-2}\,] = E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot (R_T^{G/A})^2 \mid \mathcal{F}_{T-2}\,] \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned} E[\,&\frac{\partial^2}{\partial G/A_T S/A_T}f \mid \mathcal{F}_{T-2}\,] \\ &= E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot R_T^{G/A} \cdot R_T^{S/A} \cdot \varepsilon_V^1 \cdot (1-\varepsilon_V) \\ &\qquad + \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T}f \cdot R_T^{G/A} \cdot R_T^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V) \mid \mathcal{F}_{T-2}\,] \end{aligned} \tag{6.44}$$

を得る． 各微分係数の展開は付録に示す． 右辺に現れる微分係数 $\frac{\partial}{\partial G/A_T}f$, $\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f$ 及び $\frac{\partial^2}{\partial G/A_T S/A_T}f$ は, 式 (6.37), 式 (6.38) 及び式 (6.39) を参照されたい． なお, 上掲式における $R_T^{G/A}$ は $(T-1)$ 時点の処理で得られた最適資産構成比 $\mathbf{x}^*_{\mathbf{T-1}}$ に基づく一般勘定進展率である．最適資産構成比を後進帰納的に解いていくため, $(T-2)$ 時点では既知となる．換言すれば, 将来において最適投資行動をとることを前提として, 当該時点の最適投資戦略を決定しているのである．

(C) t 時点 ($t \in [\,0,\, T-3\,]$)

条件付期待値は

$$E[\,\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}}f \mid \mathcal{F}_t\,] = E[\,\frac{\partial}{\partial G/A_T}f \cdot (\prod_{l=t+2}^{T} R_l^{G/A}) \mid \mathcal{F}_t\,] \tag{6.45}$$

$$E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2}f \mid \mathcal{F}_t\,] = E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f \cdot (\prod_{l=t+2}^{T} R_l^{G/A})^2 \mid \mathcal{F}_t\,] \tag{6.46}$$

[3] 二点の最適化ポートフォリオ $\mathbf{x}^{\min}$ 及び $\mathbf{x}^{\max}$ に挟まれる「真の」最適化ポートフォリオ $\mathbf{x}^*$ を, $\mathbf{x}^{\min}$ 及び $\mathbf{x}^{\max}$ の補間処理で表現できるとすることは強い仮定であり, とりわけ時間間隔が大きな場合には誤差の累積する可能性がある．

$$
\begin{aligned}
&E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}S/A_{t+1}} f \mid \mathcal{F}_t\,] \\
&= E[\,\frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2} f \cdot (\prod_{l=t+2}^{T} R_l^{G/A}) \cdot \varepsilon_V^1 \\
&\quad \times [\prod_{l=t+2}^{T} R_l^{S/A} \cdot (1-\varepsilon_V)^{T-(t+1)} + \sum_{l=t+2}^{T-1} \prod_{m=t+2}^{l} R_m^{S/A} \prod_{o=l+1}^{T} R_o^{G/A} (1-\varepsilon_V)^{l-(t+1)}] \\
&\qquad + \frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f \cdot (\prod_{l=t+2}^{T} R_l^{G/A}) \cdot (\prod_{l=t+2}^{T} R_l^{S/A}) \cdot (1-\varepsilon_V)^{T-(t+1)} \mid \mathcal{F}_t\,] \qquad (6.47)
\end{aligned}
$$

である．なお, 0 時点では状態変数について判明している情報が存在しない．従って期待値は唯一となり, 最適資産構成比 $\mathbf{x_0^*}$ も唯一に特定される．これに対し, t 時点 ($t \in [\Delta t,\, T-\Delta t]$) における最適資産構成比は各状態に対応して設定される．

式 (6.39), 式 (6.44) 及び式 (6.47) の構成要素である $\frac{\partial^2}{\partial G/A_T \partial S/A_T} f$ の分子にある $\frac{\partial}{\partial S/A_T} H[S/A_T]$ は, 最低保証リスクに係る責任準備金の特別勘定資産価格に対する感応度, 所謂デルタである．以上より一般勘定の最適投資戦略 ($\mathbf{x}^*$) と特別勘定投資戦略 ($\mathbf{y}$), 保証料 (ε_P 及び ε_V), 責任準備金のデルタ ($\frac{\partial}{\partial S/A_T} H[S/A_T]$) の関係を一意に特定できた．

6.3　数値解析結果

6.3.1　前提条件

(A) 経済前提

投資対象資産の価格過程には対数正規過程, すなわち, 収益率分布に正規分布を仮定し, パラメータは表 6.3 に示すとおりとした．

また, 将来の予定利率過程を記述するために必要となる利子率モデルには 1 変量の Vasicek Model

$$
dr = \alpha\,[\bar{r} - r]\,dt + \sigma\,dW_t
$$

を適用し, 2008 年 8 月 1 日の金利・債券データによりパラメータ推定を行った．結果として, α に 0.08210, $\bar{r}$ に 0.03844, σ に 0.00585 を得た．なお, 表 6.3 における債券価格は当該利子率モデルにより記述されるものではないが, 拡散項を構成するブラウン運動を共有させることにより, 利子率と債券価格の関係を整合させている．

表 6.3: 期待収益率, 標準偏差及び相関係数

資産クラス	期待収益率	標準偏差
短期資産	0.57%	0.70%
国内債券	2.47%	3.34%
国内株式	4.42%	19.25%
外国債券	4.28%	10.20%
外国株式	4.88%	16.65%

相関係数				
短期資産	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
1.000	0.143	△0.063	△0.009	△0.009
0.143	1.000	△0.053	0.086	0.017
△0.063	△0.053	1.000	△0.029	0.365
△0.009	0.086	△0.029	1.000	0.540
△0.009	0.017	0.365	0.540	1.000

(出典) 石井・大塚 [2008].

(B) 特別勘定資産構成比

架空の生命保険会社における特別勘定資産構成比として, 年金積立金管理運用独立行政法人の 2009 年 6 月現在における基本ポートフォリオを適用した.

表 6.4: 特別勘定の資産構成比

短期資産	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
5%	67%	11%	8%	9%

(C) 責任準備金評価の計算基礎

契約開始時点の予定利率は 1.5%, 将来における予定利率は前述のとおり, 当該時点における 10 年利付債券のパー・クーポンを適用した. 最低保証に係る責任準備金評価に際し適用される資産価格のボラティリティは表 6.5 のとおりとし, 各資産収益率は独立とした. 当

表 6.5: 資産価格の予想変動率

国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
3.5%	18.4%	12.1%	18.1%

該内容は社団法人日本アクチュアリー会 [2003], 平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号に準拠している.

粗死亡率は 1 因子のリー・カーター・モデル

$$\ln(\, q_{x,t}\,) = \alpha_x + \beta_x \gamma_t + \varepsilon_{x,t} \tag{6.48}$$

により記述, 責任準備金評価に適用する標準死亡率は当該粗死亡率に対し安全割増を計上するものとして設定した. 粗死亡率については簡易生命表を入力情報, 1987 年から 2005 年を観測期間としたパラメータ推定を特異値分解により行った. 誤差項は年齢及び時点に依存しない正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ を適用し, σ の推定結果として 0.03456 を得た.

なお, 安全割増は 2005 年簡易生命表に対する生保標準生命表 2007(死亡保険用) の比が一定であるものと仮定し, 当該年齢別係数を粗死亡率に乗ずることで標準死亡率を定義した. 従って, 標準生命表における安全割増は粗死亡率の水準に比例することになり, 粗死亡率が低下すれば安全割増が圧縮されることになる.

また, 処理においては, 死亡率と利子率及び投資資産収益率の独立性を前提としている.

(D) 契約内容

モデルにおける保険契約の内容は次掲のとおりとした.

表 6.6: 評価対象の契約内容

被保険者年齢	30 歳
性別	男性
保険期間	10 年間
保険料	10,000 円 (年払)
最低保証内容	被保険者の死亡時若しくは満期到達時に既払込保険料相当額を保証.
保証料, 予定事業費及び信託報酬	$\varepsilon_P^1 + \varepsilon_P^2 = 5\%$ $\varepsilon_V^1 + \varepsilon_V^2 = 2\%$, $\varepsilon_V^3 = 0.2\%$

(E) その他の注記事項

関数 u のパラメータ $u(\mathbf{FR}(\mathbf{T})) = \mathbf{FR}(\mathbf{T}) - a \cdot \mathbf{FR}(\mathbf{T})^2$ において, a は 0.5 とした.

キャッシュフローのタイミング 単位時間を n 分割する場合, 保険料の払込は期始, 積立金からの保証料取崩は期末で発生するものとした.

基底関数 条件付期待値評価を回帰により行う場合の説明変数となる基底関数を構成する直交多項式には, 5 次の Laguerre 多項式を適用した.

単位時間あたりの試行回数 保険期間全体では「(保険期間) × (分割数) × (状態数)」のグリッドを持つことになる. 本稿では単位時間あたりの状態数, すなわち, 試行回数を 1,000 回とした.

ソフトウェア 数値解析は Compaq Visual Fortran で行い, 回帰分析には IMSL 数値計算ライブラリの DLSBRR を適用した.

ハードウェア プロセッサは Intel Pentium4 CPU 3.40GHz, メモリは 4.0GB, OS は Windows VISTA である.

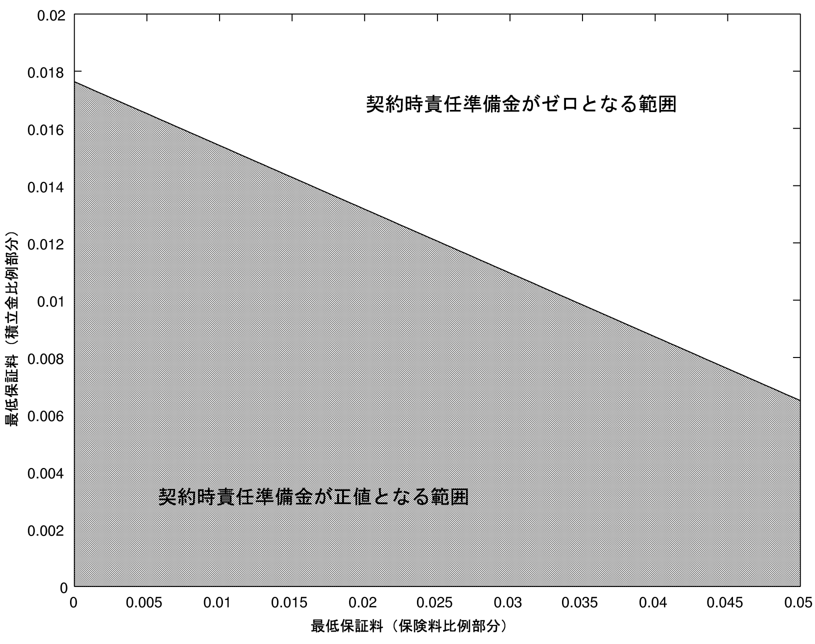
6.3.2 数値解析結果

(A) 保証料水準の十分性

保証料に複数の決定基準を与える場合, 各基準に対応する保証料を一意に特定することは困難であろう. 実践的な対応の一つとしては, 予め定められる予算制約の範囲内で各基準に対応する保証料を与え, 契約時点の最低保証リスクに係る責任準備金額を確認することが考えられる. 当該金額が正値をとるならば, それは給付現価が保険料収入現価を上回っているということであり, 保証料は十分ではないと考えられるためである. 図 6.3 は横軸に保険料比例の保証料, 縦軸に積立金比例の保証料をとり, 契約時責任準備金額が正値となる範囲を網かけしたものである.

ただし, 契約時点における責任準備金評価においては, 参照資産となる特別勘定 S/A_t^{INDEX} を構成する要素は平成 8 年 2 月 29 日大蔵省告示第 48 号に規定される資産価格のボラティリティ及び期待収益率のみであり, 眼前及び将来の経済環境を想定したものではないことに留意が必要である. 設定された保証料が図 6.3 の白い領域に位置づけられるものであったとしても, 投資資産の現実の収益率及びボラティリティが責任準備金の計算基礎より乖離する場合, また, 適切な投資戦略が執行されない場合等には, 当該保険契約の財政状況は望ましくない状態に陥る可能性を否定できないということである.

図 6.3: 契約時責任準備金と保証料水準



(B) 最適投資戦略の結果

積立金比例部分及び保険料比例部分の保証料をそれぞれ 1%とし, 一般勘定を多期間動的最適化戦略に基づき運用するものとする. 当該保証料の組み合わせは, 図 6.3 の網かけ部分に位置するものであり, 契約時責任準備金をゼロとできる水準ではない. このとき, 満期時点における積立比率が各状態に対応しどのように分布するかを可視化したものが図 6.4 から図 6.9 である.

各図は「特別勘定資産構成比に基づき運用した一般勘定資産額と特別勘定資産額の合計額を既払込保険料で基準化した値」を横軸にとり, 縦軸に「多期間動的最適化戦略に基づき運用した一般勘定資産額と特別勘定資産額の合計額を既払込保険料で基準化した値」を $(*)$, 「特別勘定資産構成比に基づき運用した一般勘定資産額と特別勘定資産額の合計額を既払込保険料で基準化した値」及び「最低保証水準」を $(\cdot)$ でプロットしている. 各図の差異は単位時間あたりの分割数である. すなわち, 1 年間におけるリバランス回数の差異が投資効果に及ぼす影響を確認することができる. 高々年 2 回程度のリバランス (図 6.4 及び図 6.5) では, 最低保証水準を運用成果で確保できそうにはないが, 年 4 回のリバランス (図 6.6) 以降では徐々に最低保証水準に追随し, 日次基準 (図 6.9) では意図するペイオフを概ね再現できている.

表 6.7 は満期時点における積立比率, 標準偏差, 下方積率を「一般勘定を多期間動的最適化戦略に基づき運用した場合」を左側, 「一般勘定を特別勘定基本ポートフォリオに基づき運用した場合[4]」を右側に示したものである. 一般勘定における最低保証は, 特別勘定資産が払込保険料額を下回る場合にのみ行われるのであるから, 投資戦略の効果は下方積率により評価することができるだろう. 何らヘッジ戦略を採らない場合に比較して, 近似的ながらも一般勘定で最適化戦略を採った結果は下方積率, すなわち, 積立不足が発生した場合の期待損失額は圧縮されている. また, リバランスを月次基準で行う場合には, ヘッジ戦略を採らない場合の 4 割程度, 週次基準で行う場合には同 2 割程度, 日次基準で行う場合には同 1 割程度まで下方積率は圧縮されており, リバランス回数の増加が望ましい結果となっている. ただし, 当該結果においては取引コストを考慮していない. 取引コストを考慮すると, コストが目的関数の改善度を上回る範囲ではリバランスが禁止されるため, 回数の増加が必ずしも比例して下方積率の圧縮をもたらさない場合もあることに留意が必要である.

取引コストは保有資産の規模等の影響を受けるものと想定されるが, この他にヘッジ効果を低下させる要因としては, 投資資産の保有制約, 引受保険会社の格付低下, 想定を超える契約者行動等が考えられる.

[4] 当該投資行動は払込保険料を全て特別勘定で運用し, 何らヘッジ戦略を取らない場合に相当する.

図 6.4: 単位時間の分割数=1

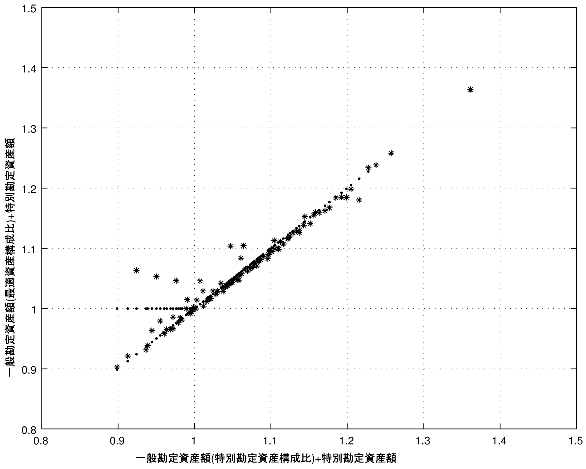


図 6.5: 単位時間の分割数=2

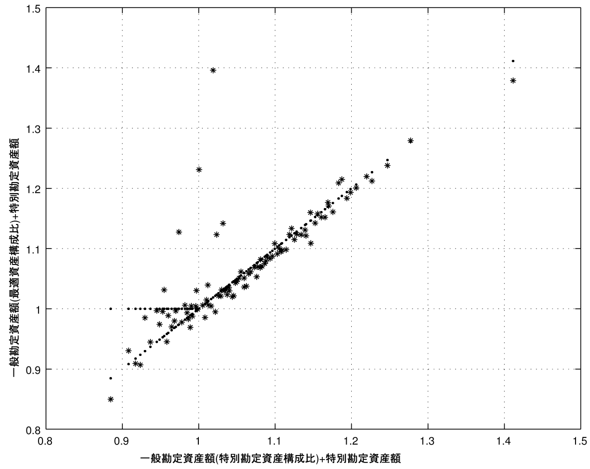


図 6.6: 単位時間の分割数= 4

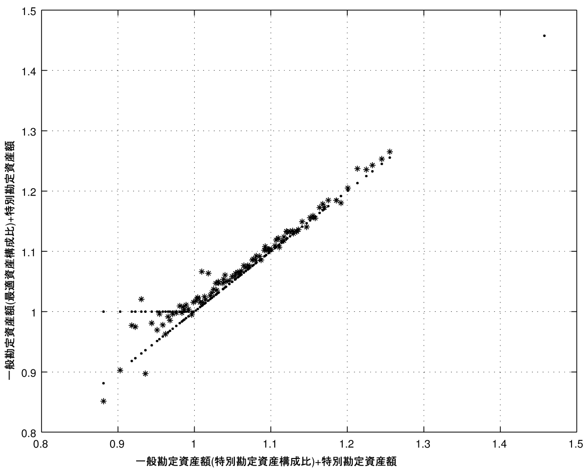


図 6.7: 単位時間の分割数= 12

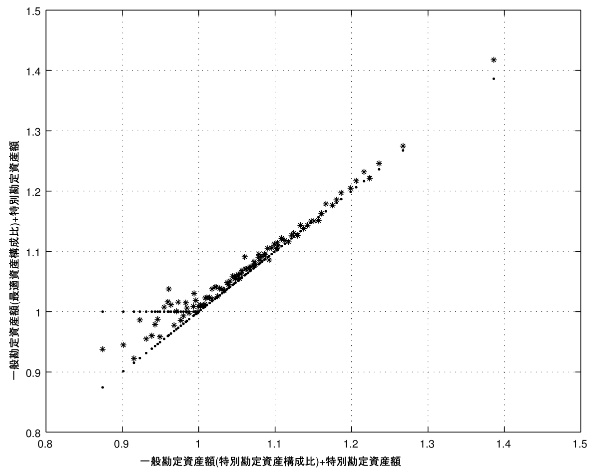


図 6.8: 単位時間の分割数= 50

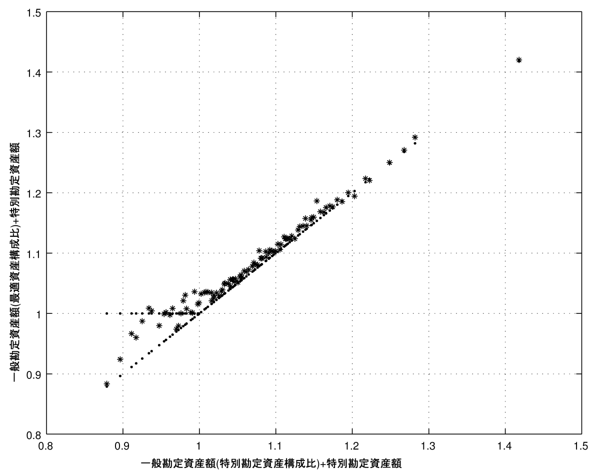


図 6.9: 単位時間の分割数= 250

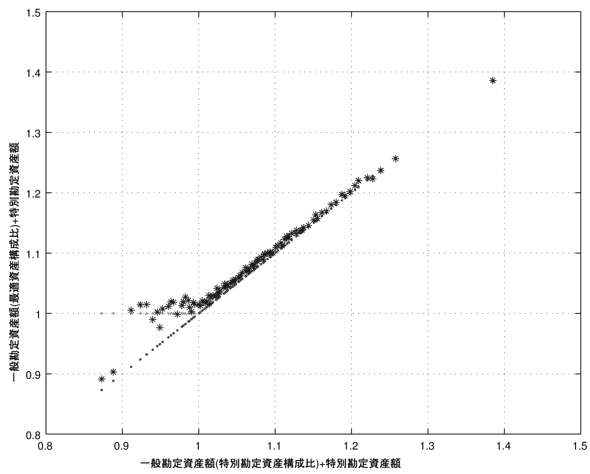


表 6.7: 投資戦略及び時間分割数の比較

分割数	多期間動的最適化戦略の場合			特別勘定投資戦略を準用の場合			処理時間 (秒)
	期待値	標準偏差	下方積率	期待値	標準偏差	下方積率	
1	1.0377	0.0416	0.0065	1.0375	0.0451	0.0078	37.471
2	1.0337	0.0498	0.0085	1.0320	0.0482	0.0099	41.091
4	1.0469	0.0435	0.0052	1.0355	0.0473	0.0089	40.529
12	1.0456	0.0397	0.0040	1.0324	0.0481	0.0098	68.828
50	1.0515	0.0361	0.0022	1.0361	0.0483	0.0093	1189.601
100	1.0541	0.0340	0.0014	1.0390	0.0452	0.0075	8519.963
250	1.0520	0.0314	0.0008	1.0356	0.0471	0.0087	99274.403

(注 1) 保証料は $\varepsilon_P^1 = \varepsilon_V^1 = 1\%$ としている.

表 6.8 は, 保証料水準が契約時責任準備金をゼロとする場合と, 当該水準に満たない場合を比較したものである. 保証料の保険料比例部分 (ε_P^1) と積立金比例 (ε_V^1) の位置は図 6.10 で確認することができる.

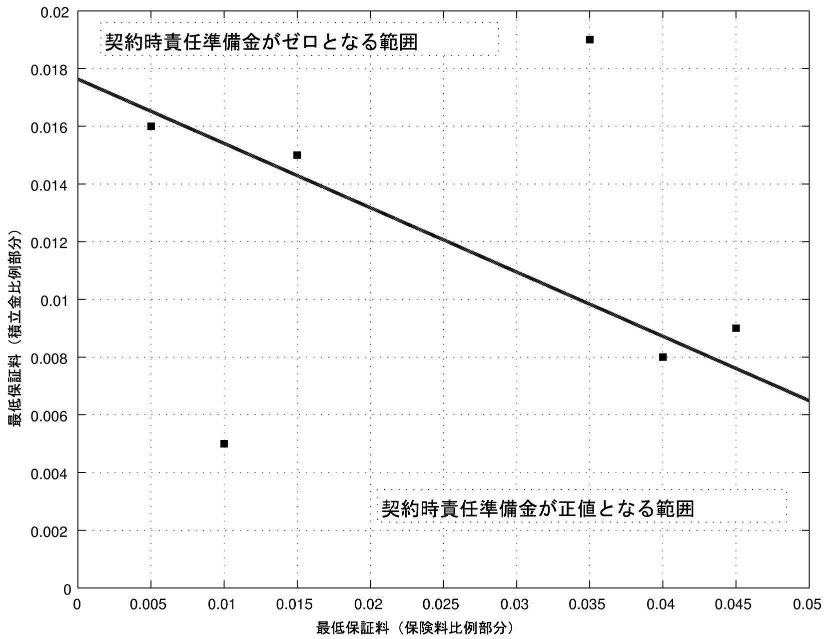
図 6.10 の右下がりの直線より下の部分は図 6.3 の網かけ部分であり, 直線からの乖離は保証料収入の減少を意味する. $(\varepsilon_P^1, \varepsilon_V^1) = (1\%, 0.5\%)$ 程度に乖離すると, 下方積率の圧縮はヘッジ戦略を採らない場合の 85%程度である. 直線近傍に位置する $(\varepsilon_P^1, \varepsilon_V^1) = (0.5\%, 1.6\%)$ 及び $(4\%, 0.8\%)$ ではヘッジ戦略を採らない場合に比較して下方積率を 2 割強に, 直線の上に位置する $(\varepsilon_P^1, \varepsilon_V^1) = (3.5\%, 1.9\%)$ では下方積率を 1 割未満に圧縮できており, 保証料の水準も投資戦略の前に検討されるべきということが再確認できる.

表 6.8: 保証料水準の比較

保証料		多期間動的最適化戦略の場合			特別勘定投資戦略を準用の場合		
保険料比例	積立金比例	期待値	標準偏差	下方積率	期待値	標準偏差	下方積率
0.005	0.016	1.0767	0.0398	0.0011	1.0663	0.0500	0.0046
0.01	0.005	1.0023	0.0389	0.0144	1.0059	0.0462	0.0169
0.04	0.008	1.0676	0.0384	0.0012	1.0588	0.0493	0.0055
0.015	0.015	1.0784	0.0401	0.0007	1.070	0.0497	0.0036
0.035	0.019	1.1125	0.0403	0.0000	1.1193	0.0496	0.0004
0.045	0.009	1.0776	0.0385	0.0005	1.0729	0.0486	0.0035

(注) 単位時間の分割数は 50 回としている.

図 6.10: 保証料水準の比較



6.4　本章の結論

本章では多期間動的最適化の枠組みにより, 最低保証を付した変額年金保険の投資戦略構築手法を提示した. 任意の時点, 4 階微分可能であることを前提とした目的関数への任意の関数形の適用及び任意の給付形態における一般勘定と特別勘定, 保証料及び最低保証部分の価格感応度 (所謂デルタ), 保険料払込方法, 投資資産収益率の期待収益率・標準偏差・相関係数を通じた経済環境の関係を式 (6.35) に明示できたことが主たる成果である.

当該投資戦略は完備市場を想定するデルタ・ヘッジとは異なり, 保険事故発生時における利得の複製を意図するものではない. 決算処理に重点を置き, 責任準備金額の確保を意図したものである. 本稿では期中の保険事故発生を想定せず, 目的関数も満期時点の積立比率に対してのみ定義しているが, 自然な拡張として複数の保険年度末決算時における積立比率に対する目的関数を再定義すること, 期中のキャッシュフローに不確実性を与え, 解約・転換等契約者行動に状態依存を想定すること等が検討できよう. ただし, 当該拡張に際しては計算負荷の増加が当然に予想される. 実務への適用に際しては, 実行可能性に留意する必要があろう.

また, 「真」の最適化ポートフォリオを資産価格の上下限に対応するポートフォリオで補間する手法にも改善が望まれる.

価格設定の誤り, 投資戦略の失敗そして想定を超える経済環境の変化等により, 一般勘定において財源不足が懸念される場合には, 責任準備金の追加積立, 自己資本 (ソルベンシー・マージン) の充当等により対応することとなる. シミュレーションをベースとする BGSS 法の長所の一つは, 一般勘定における最適投資戦略を求めると同時に, ①デフォルト状態の発生率評価による保証料水準の適正性を確認し, ②予想不足財源額の評価による必要内部留保水準の把握を可能とすることである. 従って, 当該モデルの確保は保険会社における商品設計及び投資戦略の意思決定のみならず, 監督官庁における商品概要及び内部留保水準のチェック, 格付機関及び販売を代理する金融機関における当該商品のデューデリジェンスにも有効なものとなろう.

また, 本章では対象を変額年金に限定しているが, 企業年金制度・公的年金制度に適用することも当然に考えられる. 例えば確定給付企業年金制度では, 確定給付企業年金法第 61 条, 同第 62 条及び同第 63 条で財政検証制度が規定され, 責任準備金及び最低積立基準額に対する保有資産の下限水準が明示されている. 確定給付企業年金法施行規則第 84 条において「長期にわたり維持すべき資産の構成割合を適切な方法により定めること」が要求されているため, 基本ポートフォリオそのものを動的に管理することは望ましいことではなく, そもそもとして実践的でないが, 基本ポートフォリオ ($\mathbf{y}$) を所与として, ヘッジ戦略の実践 ($\mathbf{x}$) を運用機関に委託する等の対応ができるだろう. 本章で示したモデルを適用すれば, 投資戦略に加え, どの程度の資金配賦が必要となるかも (ε_P) を通じて把握することが可能である.

第7章　結論

最後に本研究の総括を行い, 今後の展望を述べる.

ワン変換におけるリスクの市場価格 λ が保険料及び責任準備金算定の基礎となる生命表における安全割増の代替であることは森平 [2004] 等にも指摘されているが, 本研究でも標準生命表と整合するように λ を定義することにより, 保険数理と数理ファイナンスを明示的に連結させている. また, λ に期間構造を与えることにより, 全保険期間の整合性を確保, 目的としている両者の融合について第一歩を踏みだすことができたものと考える. 測度変換における今後の拡張としては, Wang[2002] の提案する 2 変量タイプによる適合度の改善, 連生保険を意識した Kijima[2006] 等による多変量への適用が考えられる.

本研究では死亡率過程を対数正規過程で記述した. 当該モデルは非負制約を満足しており, 実装が容易であるという長所の一方, 1 を超える死亡率の存在を許容するという短所も有している. より精緻な記述を行うためには, 年齢 x における死亡率 q_x について, $q_x \in [0, 1]$ を保証するモデルへの改善が望まれる. 当該課題への対応として日本保険年金リスク学会第 4 回研究発表大会 (2006 年 10 月 14 日) で森平爽一郎教授 (早稲田大学) よりベータ分布適用の可能性を指摘された. また, 乳幼児死亡率低下への取り組み, 加齢に伴う残存者の減少等を鑑みれば, 全年齢に同一のボラティリティσ を当てはまるのではなく, 群団別・年齢別に設定することも考えられる. とりわけ, 公的年金制度に代表される終身年金給付において, 高齢層死亡率のボラティリティを若齢層のそれよりも高く設定し価値評価を行うことは, 必要内部留保水準の把握等における重要な拡張となる可能性がある.

更に団体保険制度, 医療保険制度を想定すると, 被保険者間・年齢間に相関構造を与えることも考えられる. 重症度が高い感染症のパンデミック又はエピデミックを鑑みれば, 被保険者間の保険事故発生率を独立と見做すことは保険給付に係る損失の過小評価が懸念されるためである.

転換権の価値評価において, 金利の期間構造と整合する予定利率の設定, 保障継続を前提とした成果を提示できた. 利子率及び死亡率に対し, 適用される計算基礎率の変化が保険料の廉価を伴う場合には, 転換権の当該基礎率に対する感応度が正値をとることを「契約者

行動における経済合理性を想定した投資行動が採られなければ負債からの要求収益率を確保できなくなる可能性がある」と解釈した．また, 保険事故発生に起因する損失と保障に付随して提供される権利の行使に起因する損失は同時発現性の有無により本質的に異なること, 同時発現性を有する後者については内部留保の蓄積のみならず, 資本市場への転嫁が必要となることを指摘, 完備市場を前提としたデルタ・ヘッジ戦略としてリスク処理の具体例を提示した．これらは生命保険経営への重要な示唆を与えられたものと考える．

価値評価における今後の拡張は, 権利行使回数を増加し, 最終的に転換権の上限値を求めることが考えられる．更に契約者の持つ転換権と保険者の持つ契約条件の変更権が対立する存在であることを考えれば, Kifer[2000] に提唱したゲーム・オプション (イスラエル・オプション) の枠組で評価することも興味深い挑戦となろう．

保険事業の継続が困難となった場合における, 保険契約の条件変更若しくは事業継続の放棄たる破綻処理を保険者に与えられた権利とみなし, 規制内容の変更が保険者の行動及び契約者利益に与えた影響を定量的に確認, 前者が次掲の点で後者に優れていると指摘した．すなわち, 「責任準備金の削減を許容しないことにより, 権利行使時期を早めるインセンティブを与えたこと」, 「結果として損害を抑制し, 契約者利益の保全が図られたこと」, 「権利行使の意思決定を当事者に残し, 責任の所在を明確にしたこと」, そして「権利縮減対象を限定することで当該時点における契約者間の公平性を確保する一方, 経営改善時における優先的な利益還元を権利縮減対象者に約することで将来における契約者間の公平性を確保しうること」である．

不確実性を有する負債に対応する投資戦略では, 最低保証を付した変額年金保険を対象として, 組入資産, 保障及び保証内容に対する普遍性を確保, 平準払保険料, 積立金及び保険料比例の保証料を反映し, 目的関数へ適用する関数形の自由度を高め, 任意の時点, 目的関数及び給付形態における一般勘定と特別勘定, 保証料及び最低保証部分の価格感応度の関係を明示する自己資金充足的な投資戦略を提示できた．

今後の拡張として, 複数の保険年度末決算時における積立比率に対する目的関数の再定義, 状態依存する契約者行動の反映, 最適化ポートフォリオの近似精度及び処理速度の向上等が考えられる．

この他, 当該技術及び知識の適用により, 保険分野外における新たな投資商品, サービスの価格評価, リスク管理向上の可能性も想定できる．例えば, リバースモーゲージ, 住居における終身賃貸権等への適用である．

付録A　第3章の付録

A.1　確率過程

A.1.1　基礎概念

生命保険契約を死亡率, 利子率, 資産価格等の上に書かれるデリバティブとして評価するためには, 当該原資産における状態の時系列変化を表現する必要がある．この際に適用する, 確率変数を値にとり時間 $t \in [\,0, \infty)$ の関数となる数学的モデルが確率過程である.

確率過程を記述する上で必要となる確率空間の概念は以下に示すとおりである．第一に, 標本空間 Ω を用意する．これは確率現象の全ての可能な結果からなる, 空でない集合であり, 標本空間の元を標本という．第二に, Ω 上の可算加法族 (σ-加法族) $\mathcal{F}$ を考える．これは, 次掲条件を満足する Ω の部分集合の族である.

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i$

すなわち, $\mathcal{F}$ は可算和と補演算について閉じた集合族である．事象群は当該条件を満足すればよいので, その存在は唯一のものではない．このとき, $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間と呼ぶ.

また, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上で次掲条件を満たす集合関数を確率測度と呼ぶ.

- $0 \leqq P(A) \leqq 1 \quad (^\forall A \in \mathcal{F})$
- $P(\Omega) = 1$
- 互いに素で可算個な事象 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対して,
  $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

すなわち, 確率測度 P とは Ω の部分集合から, 区間 $[0, 1]$ の実数への写像となる．確率測度もまた, 当該条件を満足すればよいので, その存在は唯一のものではない．以上の $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間と呼び, 生起しうる全ての可能性を標本点あるいは根源事象という.

一般に写像 $Y:\Omega\to\mathbf{R}$ が

$$Y^{-1}(U)\equiv\{\omega\in\Omega|Y(\omega)\in U\}\in\mathcal{F},\quad {}^{\forall}U\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$$

であるとき, $\mathcal{F}-$ 可測という. ただし, 集合 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ は実数 $\mathbf{R}$ の区間上から生成される可算加法族である. なお, 確率変数とは, $\mathcal{F}-$ 可測である関数を指している.

A.1.2　フィルトレーション

死亡率, 利子率, 資産価格等が確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の確率過程として定義されるものとする. このとき, 情報変動はフィルトレーション $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ で記述される. これは $\mathcal{F}$ の部分集合である可算加法族であり, 時間経過とともに増大する. すなわち,

$$\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_T=\mathcal{F},\quad {}^{\forall}s\leqq t\in[0,T]$$

を満足する. $\mathcal{F}_t$ は時刻 0 から時刻 t までに把握される情報が既知とされ, 時刻 t 以降の未来については未知とされることを意味している.

確率過程が全ての $t\in[0,T]$ に対して $\mathcal{F}_t-$ 可測であるとき, 当該確率過程はフィルトレーション $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ に適合しているといい, 適合過程と呼ばれる.

A.2　確率測度変換

A.2.1　ラドン・ニコディム微分係数

可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上に二つの確率測度 P 及び Q を考える.

$$A\in\mathcal{F}\text{ に対し,}\quad P(A)=0\Rightarrow Q(A)=0$$

であるとき, Q は P に関して絶対連続であるといい, $Q\ll P$ と記述する.

特に $Q\ll P$ 且つ $P\ll Q$, すなわち,

$$A\in\mathcal{F}\text{ に対し,}\quad P(A)=0\Leftrightarrow Q(A)=0$$

であるとき. P 及び Q は $(\Omega,\mathcal{F})$ 上で同値な確率測度という. ラドン・ニコディム微分係数は一方の確率測度から他方への変換係数であり, $\frac{dQ}{dP}$ と記述される.

従って, 可積分であれば, ラドン・ニコディム微分係数を適用することにより, 可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上に P と同値な確率測度 Q を次掲のように定義できる.

$$A\in\mathcal{F}\text{ に対し,}\quad Q(A)=\int_A\frac{dQ}{dP}dP \tag{A.1}$$

すなわち,

$$E^Q[X] = E^P[\frac{dQ}{dP}X]$$

となる. すなわち, 確率測度変換はラドン・ニコディム微分係数の特定と換言することもできる.

A.2.2　ギルザノフの定理

確率過程 $\gamma_t(t \in [0,T])$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathcal{F}_t-$ 可測な過程とする. ただし, $t \in [0,T]$ に対して $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s^P, 0 \leqq s \leqq t) \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, また, $\int_0^T \gamma_s^2 ds < +\infty$ とし, W_t^P は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動とする.

ここで, γ_t がノビコフの条件

$$E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_s^2 ds)] < +\infty$$

を満足するとき, 指数マルチンゲール

$$\exp(-\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds) \tag{A.2}$$

は, 確率測度 P の下でマルチンゲールとなる.

式 (A.2) を $\frac{dQ}{dP}$ とすると P と同値な確率測度 Q を定義できる. このとき,

$$W_t^Q = W_t^P + \int_0^t \gamma_s d_s \tag{A.3}$$

が, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上の標準ブラウン運動となるという主張がギルサノフの定理である.

A.2.3　完備市場における測度変換

原資産 S_t と信用リスクのないバンク・アカウント B_t の価格過程を次のように定義する.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t^P \tag{A.4}$$

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt \tag{A.5}$$

ただし, W_t^P は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動である.

ここで, B_t を基準財とする $S_t^* =: \frac{S_t}{B_t}$ の価格過程を考える. 伊藤の補題を適用すれば,

$$\begin{aligned} d(\frac{S_t}{B_t}) &= \frac{\partial}{\partial S_t}(\frac{S_t}{B_t})dS_t + \frac{\partial}{\partial B_t}(\frac{S_t}{B_t})dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 S_t}(\frac{S_t}{B_t})(dS_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 B_t}(\frac{S_t}{B_t})(dB_t)^2 + \frac{\partial^2}{\partial S_t \partial B_t}(\frac{S_t}{B_t})(dS_t)(dB_t) \quad \text{(A.6)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d(\frac{S_t}{B_t})}{(\frac{S_t}{B_t})} &= (\mu - r)dt + \sigma dW_t^P = \sigma(dW_t^P + \frac{\mu - r}{\sigma}dt) \\ dW_t^Q &= dW_t^P + \frac{\mu - r}{\sigma}dt \quad \text{(A.7)} \\ \Rightarrow \frac{dQ}{dP} &= \exp\{-\int_0^t (\frac{\mu - r}{\sigma})dW_s^P - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{\mu - r}{\sigma})^2 ds\} \quad \text{(A.8)} \\ dW_t^P &= dW_t^Q - \frac{\mu - r}{\sigma}dt \quad \text{(A.9)} \\ \Rightarrow \frac{dP}{dQ} &= \exp\{\int_0^t (\frac{\mu - r}{\sigma})dW_s^Q - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{\mu - r}{\sigma})^2 ds\} \quad \text{(A.10)} \end{aligned}$$

A.2.4 非完備市場における測度変換

ジャンプ拡散過程をはじめとして非完備となる価格過程は数多く存在するが, 中村 [2002] は次掲例を示している.

原資産 S_t と信用リスクのないバンク・アカウント B_t の価格過程を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma_1 dW_1^P(t) + \sigma_2 dW_2^P(t) \quad \text{(A.11)} \\ \frac{dB_t}{B_t} &= r dt \quad \text{(A.12)} \end{aligned}$$

ただし, $W_1^P(t)$ 及び $W_2^P(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動である.

前項と同様に,

$$\begin{aligned} dW_1^Q(t) &= dW_1^P(t) + \psi_1(t)dt \quad \text{(A.13)} \\ dW_2^Q(t) &= dW_2^P(t) + \psi_2(t)dt \quad \text{(A.14)} \end{aligned}$$

が存在するものと仮定し, B_t を基準財とする $S_t^* =: \frac{S_t}{B_t}$ の価格過程を考える. ただし, $\psi_1(t)$ 及び $\psi_2(t)$ はリスクの市場価格である.

式 (A.13) 及び (A.14) を式 (A.11) に代入すれば,

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma_1\{dW_1^Q(t) - \psi_1(t)dt\} + \sigma_2\{dW_2^Q(t) - \psi_2(t)dt\} \\ &= \{\mu - \sigma_1\psi_1(t) - \sigma_2\psi_2(t)\}dt + \sigma_1 dW_1^Q(t) + \sigma_2 dW_2^Q(t) \quad \text{(A.15)} \end{aligned}$$

S_t^* がマルチンゲールとなるためには.

$$\mu - \sigma_1\psi_1(t) - \sigma_2\psi_2(t) = r \tag{A.16}$$

を満足するリスクの市場価格を決定すればよい. 然るに, 2 種類の変数に対し, 方程式は唯一であるため, $\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ の組み合わせは一意に定まらない. すなわち, P に対し同値な確率測度 Q は無数に存在する.

A.3　リスク尺度

A.3.1　コヒーレント・リスク尺度

Artzner et al.[1999] は, 市場参加者, トレーダー, 保険会社が「想定した損失を緩和するために追加的に必要とする資本量」としてリスク尺度を位置づけた. そして, 次掲要件を満足するものをコヒーレント・リスク尺度 (首尾一貫したリスク尺度) と名付けた.

(a) 単調性 (monotonicity)

$X \leqq Y$ であれば $\mathcal{H}(X) \leqq \mathcal{H}(Y)$

(b) 正の一次同次性 (positive homogeneity)

定数 $c \geqq 0$ に対して $\mathcal{H}(cX) = c\mathcal{H}(X)$

(c) 並進不変性 (Translation invariant)

定数 c に対して $\mathcal{H}(X + c) = \mathcal{H}(X) + c$

(d) 劣加法性 (Sub-additivity)

$\mathcal{H}(X + Y) \leqq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$

ここで X 及び Y は確率変数であり, 根源的なリスクを意味する. 各要件の内容は次掲のように解釈できる.

まず, 「単調性」はごく当然の要件であろう. 根源的なリスクが大きければ, リスク尺度は当然に大きくなる必要がある. 続く「正の一次同次性」は根源的なリスクに対し, リスク尺度が斉次性を持つことを要求している. そして「並進不変性」は, 発生することが確実な損失に対しては, 当該損失額の確保を要求するものであり, 「劣加法性」は分散投資効果を求めるものである.

ところで,「劣加法性」より任意の $\alpha \in [0,\,1]$ に対して,

$$\mathcal{H}[\alpha\,X+(1-\alpha)Y] \leqq \mathcal{H}[\alpha\,X]+\mathcal{H}[(1-\alpha)\,Y] \tag{A.17}$$

が成立する. 更に「正の一次同次性」を適用すれば,

$$\mathcal{H}[\alpha\,X+(1-\alpha)Y] \leqq \alpha\,\mathcal{H}[X]+(1-\alpha)\,\mathcal{H}[Y] \tag{A.18}$$

が成立する. すなわち, コヒーレント・リスク尺度は凸性を満たしている. 従って, 当該尺度を目的関数とし, 実数の閉区間に代表される凸集合を制約条件とする最適化問題においては, 局所的最適解が大局的最適解となる. 加えて, 塚原 [2007] が指摘するように「並進不変性」により, 評価対象と同一の貨幣単位で表示されることになる.

なお, Jarrow[2002] は並進不変性を

(c') 並進単調性 (translation monotonicity)

定数 c に対して $\mathcal{H}_g(X+c) < \mathcal{H}_g(X) < \mathcal{H}_g(X-c)$

と緩和した"保険リスク尺度"を提案している.

A.3.2　ディストーション・リスク尺度

コヒーレント・リスク尺度が望ましい性質を有することは理解できた. ただし, 適用に際しては『どのようなリスク尺度がコヒーレントであるのか』,『コヒーレント・リスク尺度をどのようにして計算すればよいのか』という実践面からの課題を解決しなければならない.

最も単純な方法はリスク尺度を予め定義し, それが前掲四要件を満足するか否かを確認することであろう. 然るに, それでは少々非効率である. そこでディストーション・リスク尺度を導入する.

ディストーション変換された確率測度下の期待値, 若しくはショケ積分により定義されるリスク尺度 $\mathcal{H}_g(X)$ がディストーション・リスク尺度である.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_g(X) &= E^P[\,\frac{dQ}{dP}X\,] &\text{(A.19)}\\ &= \int_0^\infty g[S(x)]\,dx+\int_{-\infty}^0[\,g[S(x)]-1\,]\,dx &\text{(A.20)}\\ &= \int_0^\infty [1-\bar{g}[F(x)]]\,dx+\int_{-\infty}^0 \bar{g}[F(x)]\,dx &\text{(A.21)}\end{aligned}$$

この $\mathcal{H}_g(X)$ は次掲の特徴を有することが知られている.

(a) 単調性 (monotonicity)

$X \leqq Y$ であれば $\mathcal{H}_g(X) \leqq \mathcal{H}_g(Y)$

(b) 正の一次同次性 (positive homogeneity)

$c \geqq 0$ に対して $\mathcal{H}_g(cX) = c\mathcal{H}_g(X)$

(c) 並進不変性 (Translation invariant)

定数 c に対して $\mathcal{H}_g(X+c) = \mathcal{H}_g(X) + c$

(d) 等加法性 (Comonotonic additivity)

X 及び Y が共単調であれば $\mathcal{H}_g(X+Y) = \mathcal{H}_g(X) + \mathcal{H}_g(Y)$

(e) 凹関数 g に対する劣加法性 (Sub-additivity for concave g)

ディストーション関数 g が凹関数であれば

$\mathcal{H}_g(X+Y) \leqq \mathcal{H}_g(X) + \mathcal{H}_g(Y)$

(f) 凸関数 g に対する優加法性 (Super-additivity for convex g)

ディストーション関数 g が凸関数であれば

$\mathcal{H}_g(X+Y) \geqq \mathcal{H}_g(X) + \mathcal{H}_g(Y)$

(g) 非対称性 (Asymmetry)

$\mathcal{H}_g(X) = -\mathcal{H}_{\bar{g}}(X)$

すなわち, ディストーション関数 g が凹関数であれば, $\mathcal{H}_g(X)$ はコヒーレント・リスク尺度となる. 第 3 章の表 3.1 に掲げた代表的なディストーション関数について次頁に再渇し, 図 A.1 から図 A.6 に形状を示した.

図 A.1 を確認すると, ディストーション関数は凹関数ではない. 従って, Value at Risk はコヒーレント・リスク尺度とはならない. また, ディストーション関数の形状より, 当該尺度の欠点を伺うことができる. 一つは $F(x) > \alpha$ における情報を捨てていること, もう一つは $F(x) \leqq \alpha$ における情報の序列を無視していることである. 結果として, α パーセンタイル値に満たない部分での損失を緩和する動機付けは行われない. また, α パーセンタイル値を超える部分ではリスクが過小評価されることになる.

一方, 図 A.2 ではディストーション関数が連続且つ凹関数である. 従って, Conditional-VaR はコヒーレント・リスク尺度である. ディストーション関数の形状より, Conditional-VaR は $F(x) > \alpha$ における情報を評価に反映しているものの, $F(x) \leqq \alpha$ における情報の序列を無視していることを把握できる.

当該二例では情報の一部を評価していないが, リスク尺度に全ての情報を反映することは可能である. 連続且つ一対一に対応するディストーション関数を適用すればよい. 一部の例は, 図 A.3 から図 A.6 に示すとおりである.

表 A.1: 代表的なディストーション関数 (表 3.1 の再掲)

ディストーション名称	ディストーション関数 $g(u)$	関数 g が凹となる条件
ベータ	$\int_0^u \frac{1}{\beta(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$	$a < 1,\ b > 1$
比例ハザード	u^a	$0 < a < 1$
ガンマ	$\int_0^u Kt^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$	$0 < a < 1,\ c > 0$
指数	$\frac{1-exp(-\frac{u}{c})}{1-exp(-\frac{1}{c})}$	$c > 0$
正規	$\Phi[\Phi^{-1}(u) - \lambda]$	$\lambda < 0$
区分線形 (C-VaR)	$1\ (1-\alpha \leqq u \leqq 1);\ \frac{u}{1-\alpha}\ (0 \leqq u \leqq 1-\alpha)$	$0 < a < 1$
区分線形 (VaR)	$1\ (1-\alpha \leqq u \leqq 1);\ 0\ (0 \leqq u \leqq 1-\alpha)$	$-$

(出典)McLeish and Ressor[2003]

図 A.1: 区分線形ディストーション (1)
(for Value at Risk)

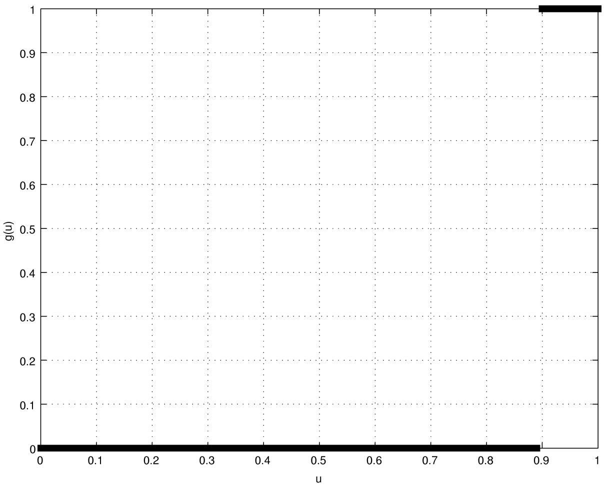


図 A.2: 区分線形ディストーション (2)
(for Conditional-VaR)

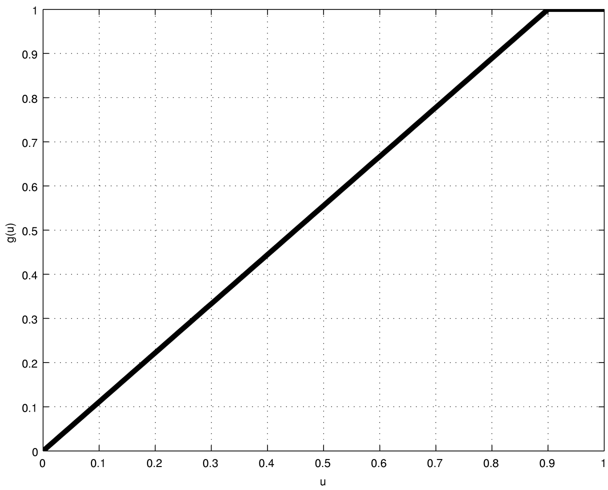


図 A.3: 正規ディストーション

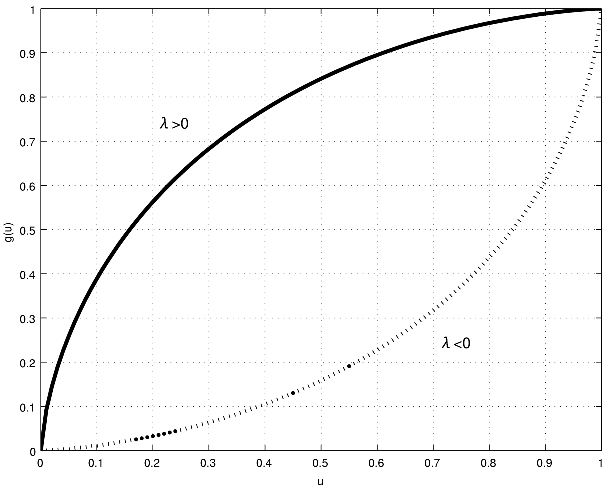


図 A.4: 比例ハザード・ディストーション

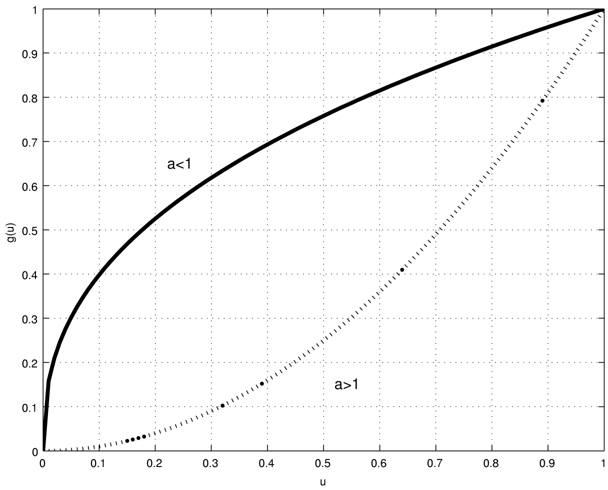


図 A.5: 指数ディストーション

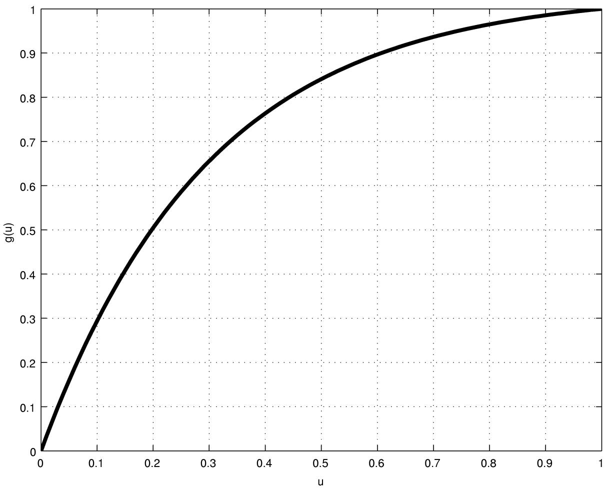
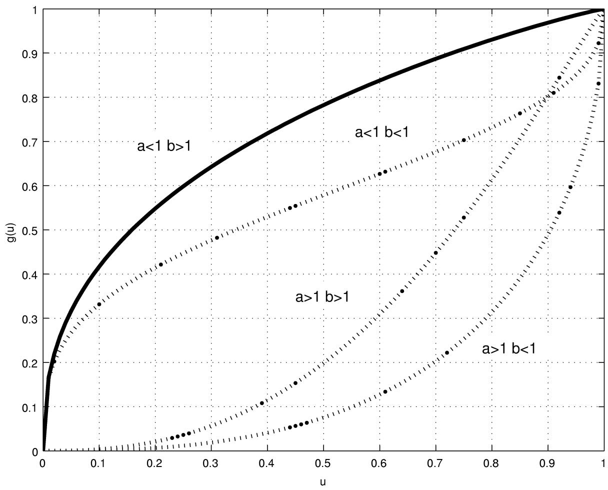


図 A.6: ベータ・ディストーション



(出典) 門田 [2008b].

A.4 異なる計算基礎率の下における契約価値の差異・式 (3.22) の証明

適用される計算基礎率が異なる場合の責任準備金の差異は, 式 (2.13) に示したファクラーの再帰式の適用により評価することができる. 死亡率及び予定利率に差異を与えるものとし, 生存者数 l_x, 死亡者数 d_x 及び責任準備金額 V_t ではプライムの有無により計算基礎率の差異を表現する. 一方, 保険料 P は適用される計算基礎率に依存せず同一であるものとし, 予定利率を i, 時点 t で期間 $[s, s+1]$ をカバーするフォワード LIBOR レートを $L_t(s, s+1)$ とする. ただし, 信用リスクの無い満期 T 年の割引債の時点 t における価格 $B(t, T)$ に対し, フォワード LIBOR レートは次式により定義される.

$$L_t(s, s+1) = \frac{B(t, s) - B(t, s+1)}{B(t, s+1)} \tag{A.22}$$

今, 異なる計算基礎率下において, 次掲式が成立している.

$$\begin{aligned} l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot (1+i) - d_{x+t} &= l_{x+t+1} \cdot V_{t+1} & \text{(A.23)} \\ l_{x+t'} \cdot (V_{t'} + P) \cdot [1 + L_t(t, t+1)] - d_{x+t'} &= l_{x+t+1'} \cdot V_{t+1'} & \text{(A.24)} \end{aligned}$$

ここで, $l_{x'} = l_x + \Delta l_x$, $V_{t'} = V_t + \Delta V_t$ として, 式 (A.24) より式 (A.23) を控除すると,

$$\begin{aligned} & l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot [L_t(t, t+1) - i] + l_{x+t'} \cdot \Delta V_t \cdot [1 + L_t(t, t+1)] - \Delta d_{x+t} \\ & \quad + \Delta l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot [1 + L_t(t, t+1)] = l_{x+t+1'} \cdot \Delta V_{t+1} + \Delta l_{x+t+1} \cdot V_{t+1} \end{aligned} \tag{A.25}$$

両辺に $B(t, t+1)$ を乗じ整理すると

$$\begin{aligned} (\Delta V_t \cdot l_{x+t'} &+ \Delta l_{x+t} \cdot V_t) - (\Delta V_{t+1} \cdot l_{x+t+1'} + \Delta l_{x+t+1} \cdot V_{t+1}) \cdot B(t, t+1) \\ &= [l_{x+t} \cdot (V_t + P) \cdot [i - L_t(t, t+1)] + \Delta d_{x+t}] \cdot B(t, t+1) - \Delta l_{x+t} \cdot P \end{aligned} \tag{A.26}$$

となる. 同様の処理を (n-1) 時点まで反復し, 辺々を加算すれば

$$\begin{aligned} (\Delta V_t \cdot l_{x+t'} &+ \Delta l_{x+t} \cdot V_t) - (\Delta V_n \cdot l_{x+n'} + \Delta l_{x+n} \cdot V_n) \cdot B(t, n) \\ &= \sum_{k=t}^{n-1} B(t, k+1) \cdot [l_{x+k} \cdot (V_k + P) \cdot [i - L_t(k, k+1)] + \Delta d_{x+k}] \\ &\quad - \sum_{k=t}^{n-1} \Delta l_{x+k} \cdot P \cdot B(t, k) \end{aligned} \tag{A.27}$$

を得る.

　不確実性を利子率にのみ想定するのであれば, Δd_x 及び Δl_x はゼロとなるので,

$$\Delta V_t \cdot l_{x+t} - \Delta V_n \cdot l_{x+n} \cdot B(t,n) = \sum_{k=t}^{n-1} B(t,k+1) \cdot l_{x+t+k} \cdot (V_k + P) \cdot [i - L_t(k,k+1)] \quad (A.28)$$

保険金額及び保険種類が同一であれば, 満期時点の責任準備金額は同一, すなわち, $\Delta V_n = 0$ であるので,

$$\begin{aligned} \Delta V_t &= \sum_{k=t}^{n-1} B(t,k+1) \cdot \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} \cdot (V_k + P) \cdot [i - L_t(k,k+1)] \\ &\equiv V_t\prime - V_t \end{aligned}$$

以上より, 式 (3.22) が証明された.

付録B　第5章の付録

B.1　ワン変換におけるパラメータ $\lambda_{x,t}$・式 (5.24) の導出

$$q_{x,t}^{標準生命表} = E^Q[q_{x,t+1}^Q \mid \mathcal{F}_t]$$

において, $t=0$ とすると

$$\begin{aligned} q_{x,0}^{標準生命表} &= E^Q[q_{x,1}^Q \mid \mathcal{F}_0] \\ &= q_{x,0}^Q \exp[\,\beta_x(\gamma_1-\gamma_0)+\lambda_{x,1}\,\sigma+\frac{\sigma^2}{2}] \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_{x,1} = \frac{\ln q_{x,0}^{標準生命表} - \ln q_{x,0}^Q - [\,\beta_x(\gamma_1-\gamma_0)+\frac{\sigma^2}{2}]}{\sigma} \tag{B.1}$$

ここで

$$q_{x,0}^Q = \exp[\alpha_x+\beta_x\gamma_0]$$

であるので, 式 (B.1) は

$$\lambda_{x,1} = \frac{\ln q_{x,0}^{標準生命表} - (\alpha_x+\beta_x\gamma_1+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} \tag{B.2}$$

となり, 式 (4.30) で因子数を 1 とする場合に一致している.

同様にして, $t=1$ とすると

$$\begin{aligned} q_{x,1}^{標準生命表} &= E^Q[q_{x,2}^Q \mid \mathcal{F}_1] \\ &= q_{x,1}^Q \exp[\beta_x(\gamma_2-\gamma_1)+\sigma(\lambda_{x,2}\sqrt{2}-\lambda_{x,1})+\frac{\sigma^2}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\lambda_{x,2} &= \frac{\ln q_{x,1}^{\text{標準生命表}} - \ln q_{x,1}^{Q} - [\,\beta_x(\gamma_2-\gamma_1)+\frac{\sigma^2}{2}] + \lambda_{x,1}\sigma}{\sigma\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{1}[\ln q_{x,k}^{\text{標準生命表}} - \ln q_{x,k}^{Q} - \beta_x(\gamma_k-\gamma_{k-1}) - \frac{\sigma^2}{2}]}{\sigma\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{1}[\ln q_{x,k}^{\text{標準生命表}} - \ln q_{x,k}^{Q}] - \beta_x(\gamma_2-\gamma_0) - \sigma^2}{\sigma\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

以下同様にして, 式 (5.24) を得る.

更に任意の $t-1$ 時点で式 (5.24) が成立するものとする.

$$\therefore\lambda_{x,t-1} = \frac{\sum_{k=0}^{t-2}[\ln q_{x,k}^{\text{標準生命表}} - \ln q_{x,k}^{Q}] - \beta_x(\gamma_{t-1}-\gamma_0) - \frac{\sigma^2}{2}(t-1)}{\sigma\sqrt{t-1}}$$

$$\begin{aligned}
q_{x,t-1}^{\text{標準生命表}} &= E^Q[q_{x,t}^{Q} \mid \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= q_{x,t-1}^{Q}\exp[\beta_x(\gamma_t-\gamma_{t-1}) + \sigma(\lambda_{x,t}\sqrt{t} - \lambda_{x,t-1}\sqrt{t-1}) + \frac{\sigma^2}{2}]
\end{aligned}$$

両辺の自然対数をとれば

$$\ln q_{x,t-1}^{\text{標準生命表}} = \ln q_{x,t-1}^{Q} + \beta_x(\gamma_t-\gamma_{t-1}) + \sigma(\lambda_{x,t}\sqrt{t} - \lambda_{x,t-1}\sqrt{t-1}) + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\therefore\lambda_{x,t} = \frac{\sum_{k=0}^{t-1}[\ln q_{x,k}^{\text{標準生命表}} - \ln q_{x,k}^{Q}] - [\beta_x(\gamma_t-\gamma_0) + \frac{\sigma^2}{2}t]}{\sigma\sqrt{t}}$$

である. 従って, 数学的帰納法により式 (5.24) が証明できた.

B.2 計算基礎率の変更を伴わない『契約条件の変更』において保険金額が減額されないことの証明

年齢 x で加入した保険期間 n, 保険金額 1 の養老保険について第 τ 保険年度末に契約条件変更が行われるものとする. このとき, 払済保険金額 (変更後払済 S_1) は

$$\text{変更後払済}\ S_1 = \frac{{}_{\tau}V_{x:\overline{n}|}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} \tag{B.3}$$

である. 次に, 契約条件の変更前後において保険料が変化しないものとすれば, 契約条件変更後の平準保険金額 (変更後平準 S_1) として

$$\text{変更後平準}\, S_1 = \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} \tag{B.4}$$

を得る. 変更前後の計算基礎率は同一であるから, 式 (B.3) 及び式 (B.4) においては添字による区別を行わない.

契約条件変更後の総保険金額は払済保険金額 (変更後払済 S_1) と平準保険金額 (変更後平準 S_1) の合計額であるので

$$\begin{aligned}\frac{{}_\tau V_{x:\overline{n}|}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} &= \frac{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} + P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} \\ &= \frac{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}}{A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}} \to 1\end{aligned}$$

以上より, 計算基礎率の変更を伴わない『契約条件の変更』においては, 保険金額が変化しないことが証明された.

付録C　第6章の付録

C.1　算式展開に関する補足

C.1.1　式 (6.33) の $G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ 及び $S/A_{t+1}^{\mathbf{y}}$ に関する積率評価

$$
\begin{aligned}
&E[\, G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mid \mathcal{F}_t \,] \\
&\quad = (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{x} \\
&\qquad\quad + [\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,] \cdot \varepsilon_V^1 \cdot (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{C.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&E[\, (G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}})^2 \mid \mathcal{F}_t \,] \\
&\quad = (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1)^2 \cdot \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{x} + \{\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,\}^2 \cdot (\varepsilon_V^1)^2 \cdot \mathbf{y}^T \Gamma \mathbf{y} \\
&\qquad\quad + 2\varepsilon_V^1 \cdot (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot [\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,] \cdot \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{C.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&E[\, S/A_{t+1}^{\mathbf{y}} \mid \mathcal{F}_t \,] \\
&\quad = [\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,] \cdot (1 - \varepsilon_V) \cdot (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{C.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&E[\, (S/A_{t+1}^{\mathbf{y}})^2 \mid \mathcal{F}_t \,] \\
&\quad = (1 - \varepsilon_V)^2 \cdot [\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,]^2 \cdot \mathbf{y}^T \Gamma \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{C.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&E[\, G/A_{t+1}^{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cdot S/A_{t+1}^{\mathbf{y}} \mid \mathcal{F}_t \,] \\
&\quad = (1 - \varepsilon_V) \cdot [\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,] \cdot (G/A_t + P \cdot \varepsilon_P^1) \cdot \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{y} \\
&\qquad\quad + \varepsilon_V^1 \cdot (1 - \varepsilon_V) \cdot [\, S/A_t + P \cdot (1 - \varepsilon_P) \,]^2 \cdot \mathbf{y}^T \Gamma \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{C.5}
$$

ただし, $\Gamma = (\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})(\mathbf{M} - r_{t+1}\mathbf{e})^T + \Omega$ である.

C.1.2　t 時点の目的関数を構成する微分係数

式 (6.42) から式 (6.47) の微分係数の展開は次掲のとおりである．

$$\frac{\partial}{\partial G/A_{t+1}}f = \frac{\partial}{\partial G/A_T}f\cdot\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}} + \frac{\partial}{\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial G/A_{t+1}^2}f\\ &\quad= \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f\cdot(\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}})^2 + 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial G/A_T\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\\ &\qquad+\frac{\partial^2}{\partial S/A_T^2}f\cdot(\frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}})^2 + \frac{\partial}{\partial G/A_T}f\cdot\frac{\partial^2 G/A_T}{\partial G/A_{t+1}^2} + \frac{\partial}{\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial^2 S/A_T}{\partial G/A_{t+1}^2}\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial S/A_{t+1}}f = \frac{\partial}{\partial G/A_T}f\cdot\frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial}{\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial S/A_{t+1}^2}f\\ &\quad= \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f\cdot(\frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}})^2 + 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial G/A_T\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}}\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}}\\ &\qquad+\frac{\partial^2}{\partial S/A_T^2}f\cdot(\frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}})^2 + \frac{\partial}{\partial G/A_T}f\cdot\frac{\partial^2 G/A_T}{\partial S/A_{t+1}^2} + \frac{\partial}{\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial^2 S/A_T}{\partial S/A_{t+1}^2}\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial G/A_T\partial S/A_T}f\\ &\quad= \frac{\partial^2}{\partial G/A_T^2}f\cdot\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\cdot\frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial^2}{\partial S/A_T^2}f\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}}\\ &\qquad+\frac{\partial^2}{\partial G/A_T\partial S/A_T}f\cdot(\frac{\partial G/A_T}{\partial G/A_{t+1}}\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial G/A_T}{\partial S/A_{t+1}}\cdot\frac{\partial S/A_T}{\partial G/A_{t+1}})\\ &\qquad\quad+\frac{\partial}{\partial G/A_T}f\cdot\frac{\partial^2 G/A_T}{\partial G/A_{t+1}\partial S/A_{t+1}} + \frac{\partial}{\partial S/A_T}f\cdot\frac{\partial^2 S/A_T}{\partial G/A_{t+1}\partial S/A_{t+1}}\end{aligned} \tag{C.10}$$

謝辞

本論文の執筆に際し, 山田雄二准教授, 牧本直樹教授, 椿広計教授, 匿名の二名の査読者から多くの助言や貴重な指摘を頂いた. また, 山田ゼミの中岡英隆教授 (首都大学東京), 小林秀治氏 (不動産金融工学研究所 CEO), 大本隆氏 (野村證券), 内山朋規氏 (野村證券), JARIP ジャーナルの匿名の査読者からも多くの貴重なコメントやアドバイスを頂いた. 記して謝意を表したい.

本研究は京都大学における公的年金調査プロジェクトへの参加もきっかけの一つであった. 刈屋武昭教授 (明治大学), 森平爽一郎教授 (早稲田大学), 佐伯親良教授 (九州大学), 加藤康之氏 (野村證券 SEO), 春日俊介氏 (野村證券), 島田照之氏 (野村證券) をはじめとする関係者に敬意を表するとともに, 参加の機会を得られたことを感謝したい.

参考文献

[1] 秋山豪太・国友直人 [2006], 「変額年金保険の統計的リスク管理法：局面転換モデルの利用」, 『リスクと保険』, Volume 2, 2006 年 3 月, 21-40 頁.

[2] 荒井昭 [2001], 「生命表に関する一考察-生命関数の数式近似-」, 『社団法人日本アクチュアリー会会報』, 第 54 号, 第 2 分冊, 2002 年 3 月 12 日, 85-122 頁.

[3] 安藤洋美 [2007], 『確率論の黎明』, 現代数学社, 2007 年 3 月 9 日.

[4] 石井太 [2008], 「近年のわが国の死亡動向に適合した将来生命表推計モデルの研究－年齢シフトモデルの開発－」, 『人口問題研究』, 第 64 巻第 3 号, 2008 年 9 月, 28-44 頁.

[5] 石井文彦・大塚一嘉 [2008], 「マーケット・ビジョン (2008 年 6 月)」, 野村證券, 2008 年 7 月 25 日.

[6] 池田昌幸 [2000], 『オプション評価と企業金融の理論』, 東京大学出版会, 2000 年 2 月 22 日.

[7] 岩城秀樹 [2000], 「ファイナンスと保険」, 『アクチュアリージャーナル』, 第 40 号, 2000 年 12 月, 4-23 頁.

[8] 乾孝治・室町幸雄 [2000], 『金融モデルにおける推定と最適化』, 朝倉書店, 2000 年 11 月 10 日

[9] 内山朋規 [2005], 「負債を完全にヘッジできない場合の確定給付年金の動的最適ポートフォリオ」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.1, No.1, 2005 年 9 月, 23-43 頁.

[10] 内山朋規 [2008], 「長期投資のアセットアロケーション」, 『最新金融工学に学ぶ資産運用戦略』, 東洋経済新報社, 2008 年 1 月 31 日, 221-251 頁.

[11] 梅内俊樹 [2008], 「多期間最適ポートフォリオ問題－ LSM 法を利用した近似的解法の近似精度－」, 『非市場資産の価格付けとリアルオプション ジャフィー・ジャーナル－金融工学と市場計量分析－』, 朝倉書店, 2008 年 3 月 15 日, 184-212 頁.

[12] 浦谷規 [2005],『無裁定理論とマルチンゲール』, 朝倉書店, 2005 年 10 月 30 日.

[13] 小田信之 [2001],『金融デリバティブズ』, 朝倉書店, 2001 年 3 月 20 日.

[14] 岡田太 [2002], 「保険リスクの証券化に関する一考察」,『保険学雑誌』, 第 5781 号, 2002 年 9 月, 149-176 頁.

[15] 小川重義 [2005],『確率解析と伊藤過程』, 朝倉書店, 2005 年 9 月 30 日.

[16] 小川浩昭 [2002], 「保険代替現象について」,『保険学雑誌』, 第 5781 号, 2002 年 9 月, 123-148 頁.

[17] 荻原邦男 [2008], 「保険負債評価と生命保険リスク」,『欧州の先進的な保険リスク管理システムに関する研究会報告書』, 60-72 頁, 金融庁金融研究研修センター, 2008 年 9 月.

[18] 小倉誠・本多俊毅 [2003], 「確率的な金利変動と最適アセットアロケーション」,『現代ファイナンス』, No.14, 2003 年 9 月, 3-22 頁.

[19] 勝野健太郎 [2000], 「責任準備金の時価評価」,『社団法人日本アクチュアリー会会報』, 第 53 号, 第 2 分冊, 2001 年 3 月 15 日, 55-117 頁.

[20] 刈屋武昭 [1999],『信用リスク分析の基礎』, 東洋経済新報社, 1999 年 12 月 16 日.

[21] 河野年洋 [2005], 「ソルベンシー規制の国際的動向と EU ソルベンシーⅡ」,『リスクと保険』, Volume 1, 2005 年 3 月, 53-70 頁.

[22] 木島正明・長山いづみ・近江義行 [1996],『ファイナンス工学入門　第Ⅲ部　数値計算法』, 日科技連, 1996 年 2 月 23 日.

[23] 木島正明 [1999],『期間構造モデルと金利デリバティブ』, 朝倉書店, 1999 年 10 月 10 日.

[24] 木島正明・田中敬一 [2007],『資産の価格付けと測度変換』, 朝倉書店, 2007 年 6 月 20 日.

[25] 国友直人・室井芳史 [2006], 「保証付き年金オプションの評価法について」,『日本保険・年金リスク学会 第 4 回 研究発表大会 予稿集』, 2006 年 10 月 14 日, 15-23 頁.

[26] 熊迫勝久・田村貢一 [2006], 「米国における生保関連証券化の現状」,『生命保険経営』, 第 74 巻, 第 1 号, 2006 年 1 月 1 日, 41-68 頁.

[27] (編) 黒田耕嗣・(著) 塩谷實・小野正明・斧田浩二 [2003],『生保年金数理 II』, 培風館, 2003 年 7 月 15 日.

[28] 小暮厚之・長谷川知弘 [2005],「将来生命表の統計モデリング:Lee-Carter 法とその拡張 -ヒューマン・セキュリティへの基盤研究-」,『総合政策学ワーキングペーパーシリーズ №.71』, 2005 年 4 月.

[29] 小暮厚之 [2005],「死亡率のモデリングと予測」,『統計』, 第 56 巻, 第 4 号, 2005 年 4 月 1 日, 19-24 頁.

[30] 小島茂 [2005],「生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け」,『リスクと保険』, Volume 1, 2005 年 3 月, 41-52 頁.

[31] 小島茂 [2006],「生命保険会社における死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデル」,『日本保険・年金リスク学会 第 4 回 研究発表大会 予稿集』, 2006 年 10 月 14 日, 31-47 頁.

[32] 国立社会保障・人口問題研究所 [2002],『日本の将来推計人口 (平成 14 年 1 月推計)』, 2002 年 1 月.

[33] 小守林克哉 [2002],「株価連動型保険の商品設計と運用戦略」,『資産運用の最先端理論』, 第 8 章, 2002 年 3 月 18 日, 201-227 頁.

[34] 坂本純一 [2007],「長寿化と企業年金」,『野村年金コンサルティング』, Vol.209, 2007 年 1 月, 1-3 頁.

[35] 渋谷政昭・華山宣胤 [2004],「年齢時代区分データによる超高齢者寿命分布の推測」,『統計数理』, 第 52 巻第 1 号, 117-134 頁.

[36] (編) 財団法人生命保険文化研究所 [1990],『生命保険新実務講座第 1 巻「総説』, 有斐閣, 1990 年 4 月 30 日.

[37] 関根順 [2007],『数理ファイナンス』, 培風館, 2007 年 7 月 18 日.

[38] 武田久義 [2008],『生命保険会社の経営破綻』, 成文堂, 2008 年 1 月 10 日.

[39] 田中周二 [2005],「アクチュアリーと統計学ー課題と挑戦ー」,『統計』, 第 56 巻, 第 4 号, 2005 年 4 月 1 日, 2-7 頁.

[40] 谷口学史 [2003],「生命保険における金利と解約率の相関関係における一考察」,『日本アクチュアリー会会報』, 第 56 号, 第 1 分冊, 2003 年 8 月 26 日, 233-251 頁.

[41] 谷口正信 [2005], 『数理統計・時系列・金融工学』, 朝倉書店, 2005 年 3 月 10 日.

[42] 田畑吉雄 [2004], 『リスク測度とポートフォリオ管理』, 朝倉書店, 2004 年 8 月 31 日

[43] 茶野努 [2002], 『予定利率引下げ問題と生保業の将来』, 東洋経済新報社, 2002 年 3 月 1 日.

[44] 辻村典之 [2000], 「保険負債の測定に関する一考察」, 『社団法人日本アクチュアリー会会報』, 第 53 号, 第 2 分冊, 2001 年 3 月 15 日, 33-53 頁.

[45] 塚原英敦 [2001], 「証券市場の完備性と不完備性」, 『金融工学の新展開 ジャフィー・ジャーナル 2001』, 東洋経済新報社, 2001 年 7 月 3 日, 121-158 頁.

[46] 塚原英敦 [2007], 「リスク尺度ー理論と統計手法」, 『リスクと保険』, Volume 3, 2007 年 3 月, 3-19 頁.

[47] 中村信弘 [2002], 『派生証券理論 3 クラスノート』, 一橋大学大学院国際企業戦略研究科, 2002 年.

[48] 中村信弘 [2003], 『債券価格理論 クラスノート』, 一橋大学大学院国際企業戦略研究科, 2003 年.

[49] 野村證券金融研究所投資技術研究部 [2001], 『金融工学辞典』, 東洋経済新報社, 2001 年 10 月 4 日.

[50] 社団法人日本アクチュアリー会 [2003], 「変額年金保険等の最低保証リスクに係る責任準備金の積立等について」, 平成 15 年 12 月 17 日.

[51] 社団法人日本アクチュアリー会 [2005], 「エクイタブル生命に関する調査報告書」, 会報別冊第 223 号, 平成 17 年 9 月 1 日.

[52] 枇々木規雄 [2007], 「多期間最適化資産配分モデル」, 『リスクと科学ー金融と保険のモデル分析ー』, 朝倉書店, 2007 年 11 月 15 日, 1-31 頁.

[53] 伏見正則 [2004], 『確率と確率過程』, 朝倉書店, 2004 年 9 月 30 日.

[54] 藤田岳彦 [2002], 『ファイナンスの確率解析入門』, 講談社サイエンティフィク, 2002 年 10 月 21 日.

[55] 二見隆 [1988], 『生命保険数学』, 財団法人生命保険文化研究所, 昭和 63 年 1 月 24 日.

[56] 本多俊毅 [1999], 「投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて」, 『現代ファイナンス』, No.6, 1999 年 9 月, 19-45 頁.

[57] 牧本直樹 [2006], 『応用確率論 クラスノート』, 筑波大学大学院ビジネス科学研究科, 2006 年.

[58] 松山直樹 [2005], 「変額年金保険のリスク管理」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.1, No.1, 2005 年 9 月, 69-82 頁.

[59] 宮原孝夫 [2003], 『株価モデルとレヴィ過程』, 朝倉書店, 2003 年 6 月 25 日.

[60] 室町幸雄 [2005], 「デフォルト相関を考慮したポートフォリオの信用リスク計測モデル 」, 『京都大学大学院経済学研究科博士課程 博士学位申請論文』, 2005 年 1 月.

[61] 森平爽一郎 [2003],「イベントリスクに対するデリバティブズ契約」,『総合政策学ワーキングペーパーシリーズ №.4』, 2003 年 11 月.

[62] 森平爽一郎 [2004],「保険価格決定理論 保険数理とファイナンス理論の融合」, 『アクチュアリージャーナル』, 第 54 号, 2004 年 10 月, 5-66 頁.

[63] 森平爽一郎 [2006], 「寿命リスクとその証券化:モデリングの展望」, 『日本保険・年金リスク学会 第 4 回 研究発表大会 予稿集』, 2006 年 10 月 14 日, 103-122 頁.

[64] 森平爽一郎 [2008], 「保険負債の評価」, 『欧州の先進的な保険リスク管理システムに関する研究会報告書』, 52-59 頁, 金融庁金融研究研修センター, 2008 年 9 月.

[65] 門田伸一 [2006], 「生命保険契約における転換権のオプション価値評価」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.2, No.1, 2006 年 10 月, 51-74 頁.

[66] 門田伸一 [2008a], 「保険数理・年金数理－最も古い金融工学－」, 『最新金融工学に学ぶ資産運用戦略』, 東洋経済新報社, 2008 年 1 月 31 日, 279-314 頁.

[67] 門田伸一 [2008b], 「リスク尺度の理論－ VaR を超えて－」, 『最新金融工学に学ぶ資産運用戦略』, 東洋経済新報社, 2008 年 1 月 31 日, 315-335 頁.

[68] 門田伸一 [2008c], 「契約条件の変更と破綻処理の比較」, 『日本保険・年金リスク学会誌』, Vol.3, No.1, 2008 年 6 月, 1-22 頁.

[69] 門田伸一 [2009], 「経済環境の不確実性を有する負債に対応する多期間動的最適化」, 『日本保険・年金リスク学会誌』(投稿中).

[70] 山田雄二 [2005], 『金融工学総論 クラスノート』, 筑波大学大学院ビジネス科学研究科, 2005 年.

[71] 山田雄二・飯田愛美・椿広計 [2006], 「トレンド予測に基づく天候デリバティブの価格付けと事業リスクヘッジ」, 『統計数理』, 第 54 巻第 1 号, 2006 年, 57-78 頁.

[72] 山田雄二 [2008],「風速予測誤差に基づく風力デリバティブの最適化設計」, 『非流動性資産の価格付けとリアルオプション ジャフィー・ジャーナル—金融工学と市場計量分析』, 朝倉書店, 2008 年 3 月 15 日, 153-181 頁.

[73] 山下友信 [2005], 『保険法』, 有斐閣, 2005 年 3 月 10 日.

[74] 山本信一・上田泰三 [2003], 「数理ファイナンスを応用した更新型定期保険の価格設定 (米国のデータに基づいた考察)」, 『社団法人日本アクチュアリー会会報』, 第 56 号, 第 2 分冊, 2003 年 10 月 31 日, 109-126 頁.

[75] 湯前祥ニ・鈴木輝好 [2000], 『モンテカルロ法の金融工学への応用』, 朝倉書店, 2000 年 6 月 10 日.

[76] American Academy of Actuaries[2002], *"Fair Valuation of Insurance Liabilities: Principles and Methods", Public Policy Monograph,* September 2002.

[77] Giulua Andreatta and Stefano Corradin[2003], *"Valuing the Surrender Options Embedded in a Portfolio of Italian Life Guaranteed Participating Policies: a Least Squares Monte Carlo Approach", Working Paper,* 15th October 2003.

[78] Philippe Artzner and Freddy Delbaen and Jean Marc Eber and David Heath[1999], *"Coherent Measures of Risk", Mathematical Finance,* 9(3), 203-228.

[79] David F. Babbel and Craig Merrill[1998], *"Economic Valuation Models for Insurers", North Actuarial American Journal,* Vol.2 No.3, July 1998, P1-17.

[80] Anna Rita Bacinello[2003], *"Pricing Guaranteed Life Insurance Participating Policies with Annual Premiums and Surrender Option", North Actuarial American Journal,* Vol.7 No.3, July 2003, P1-17.

[81] Anna Rita Bacinello[2004], *"Modelling the Surrender Conditions in Equity-Linked Life Insurance", University of Trieste Working Paper,* 5th June 2004.

[82] Laura Ballotta and Steven Haberman[2002], *"Guaranteed annuity conversion options and their valuation", Cass Business School, City University London Working Paper,* 2002.

[83] Vinzenz Benedikt[2006], *"Secutitization of Non-Life Insurance Liabilities", University of St.Gallen,* 7th January 2006.

[84] Enrico Biffis[2005], *"Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations", Insurance: Mathematics and Economics,* Vol.37, 2005, P443-468.

[85] Jules H. van Binsbergen and Michael W. Brandt[2006], *"Solving dynamic portfolio choice problems by recursing on optimized portfolio weights or on the value function?", Computational Economics,* Volume 29, Issue 3-4, 355-367.

[86] Mark Broadie and Paul Glasserman[1997a], *"Pricing American-Style Securities Using Simulation", Journal of Economic Dynamics and Control,* Vo.21, No.8-9, 1323-1352.

[87] Mark Broadie and Paul Glasserman[1997b], *"A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options", Working Paper, Columbia University.*

[88] David Blake and William Burrows[2001], *"Survivor Bonds: Helping to hedge mortality risk", Journal of Risk and Insurance,* Vol.68, No.2, 2001, P339-348.

[89] David Blake, Andrew J.G. Cairns and Kevin Dowd[2006], *"Living with Mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities", Working Paper,* 16th January 2006.

[90] David Blake, Andrew J.G. Cairns and Kevin Dowd[2008], *"Modelling and Management of Mortality Risk: A Review", Working Paper,* 28th January 2008.

[91] David Blake, Andrew J.G. Cairns, Kevin Dowd and Richard MacMinn[2006], *"Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation and Hedging", Pension Institute Discussion Paper PI-0617,* 16th January 2006.

[92] Michael W. Brandt, Amit Goyal, Pedro Santa-Clara and Jonathan R. Stroud[2005], *"A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning About Return Predictability", Review of Financial Studies,* 18, 831-873.

[93] Michael W. Brandt and Pedro Santa-Clara, *"Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space", The Journal of Finance,* Vol. LXI, No.5, October 2006.

[94] Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz[1978], *"Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis ", The Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 13, No. 3 (Sep., 1978), pp. 461-474.

[95] Eric Briys and François de Varenne[1997], *"On the Risk of Life Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls", Journal of Risk and Insurance,* December 1997.

[96] Eric Briys and François de Varenne[2001], *"Insurance from underwritting to derivatives", John Wiley and Sons, LTD.,* April 2001.

[97] Dorje C. Brody[2000], 『現代ファイナンス数理』, 日本評論社, 2000 年 4 月 30 日.

[98] Natacha Brouhns, Michel Denuit and Jeroen K. Vermunt[2002], *"A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables", Insurance: Mathematics and Economics,* Vol.31, 2002, P373-393.

[99] Andrew J.G. Cairns, David Blake, Paul Dawson and Kevin Dowd[2005], *"Pricing the Risk on Longevity Bonds", Working Paper,* 22th February 2005.

[100] Andrew J.G. Cairns, David Blake and Kevin Dowd[2006], *"Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk", Astin Bulletin,* Vol.36, No.1, 2002, P79-120.

[101] John Y. Campbell and Luis M. Viceira[2002], *"Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors",* [訳] 野村證券金融経済研究所, [監訳] 木島正明,『戦略的アセットアロケーション: 長期投資のための資産配分の考え方』, 東洋経済新報社, 2005 年 2 月 10 日.

[102] Casualty Actuarial Task Force on Fair Value Liabilities[2000], *"White Paper on Fair Valuing Property/ Casualty Insurance Liabilities",* August 2000.

[103] Les Clewlow and Chris Strickland[1998], *"Implementing DerivativesModels",* [訳] あさひ銀行金融基礎研究所, [監訳] 葛山康典, 『金融工学プログラミング』, エコノミスト社, 2002 年 4 月 10 日.

[104] Alex Cowley and J. David Cummins[2005], *"Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities", Working Paper,* 31th January 2005.

[105] John C. Cox, Stephen A. Ross and Mark Rubinstein[1979], *"Option Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics,* 7, 229-263.

[106] Mikkel Dahl[2004], *"Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts", Insurance: Mathematics and Economics,* 35, 2004, P113-136.

[107] Mikkel Dahl and Thomas Møller[2006], *"Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk", Insurance: Mathematics and Economics,* 39, 2006, P193-217.

[108] Darrell Duffie[1996], *"Dynamic Asset Pricing Theory",* [訳] 大橋和彦・桑名陽一・本多俊毅・山崎昭, 『資産価格の理論』, 創文社, 1998 年 8 月 25 日.

[109] Martin Eling, Hato Schmeiser and Joan T. Schmit[2006], *"The Solvency* II *Process: Overview and Critical Analysis",* University of St. Gallen Working Papers on Risk Management and Insurance, No.20, May 2006.

Esscher, F.[1932], *"On the probability function in the collective theory of risk",* Skandinavisk Aktuarietidskrift 15, 175-195.

[110] Nadine Gatzert and Alexander Kling[2005], *"Analysis of Participating Life Insurance Contracts: A Unification Approach",* University of St. Gallen Working Papers on Risk Management and Insurance, No.18, November 2005.

[111] Nadine Gatzert and Hato Schmeiser[2006a], *"Assessing the Risk Potential of Premium Payment Options in Participating Life Insurance Contracts",* University of St. Gallen Working Papers on Risk Management and Insurance, No.22, April 2006.

[112] Nadine Gatzert and Hato Schmeiser[2006b], *"Implicit Options in Life Insurance: Valuation and Risk Management",* University of St. Gallen Working Papers on Risk Management and Insurance, No.26, August 2006.

[113] Nadine Gatzert[2007], *"The Impact of Implicit Options in Life Insurance Contracts: Systematization and Overview",* University of St. Gallen Working Papers on Risk Management and Insurance, No.33, January 2007.

[114] Hans U. Gerber and Elias S.W. Shiu[1994], *"Option Pricing by Esscher Transform", Transactions of Society of Actuaries,* Vol.46, 1994, P99-191.

[115] Hans U. Gerber[1997] *"Life Insurance Mathematics",* [訳] 山岸義和「生命保険数学」, シュプリンガー・ジャパン株式会社, 2007 年 6 月 28 日.

[116] Luke N. Girard[2000], *"Market Value of Insurance Liabilities: Reconciling the Actuarial Appraisal and Option Pricing Methods", North American Actuarial Journal,* Vol.4 No.1, January 2000, P31-62.

[117] Anders Grosen and Peter Løchte Jørgensen[2000], *"Fair Valueation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surreder Options, and Bonus Policies", Insurance: Mathematics and Economics,* 26, 2000, P37-57.

[118] Anders Grosen and Peter Løchte Jørgensen[2001], *"Life Insurance Liabilities at Market Value: An Analysis of Insolvency Risk, Bonus Policy, and Regulatory Intervention Rules in a Barrier Option Framework",* University of Aarhus, Aarhus School of Business, CAF's working paper No.95, June 1st 2001.

[119] Edmond Halley[1693], *"An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives", Philosophical Transactions of the Royal Society of London,*17 (1693), p596-p610 and p654-p656.

[120] Mahmoud Hamada and Michael Sherris[2003], *"Contingent Claim Pricing using Probability Distortion Operators: Methods from Insurance Risk Pricing and their Relationship to Financial Theory", Applied Mathematical Finance,* 2003, Vol.10, issue1, P19-47.

[121] Mary Hardy[2003], *"Investment Guarantees: Modeling and Risk Management foe Equity-Linked Life Insurance",* John Wiley and Sons Inc, 14th February 2003.

[122] Scott E. Harrington and Gregory R. Niehaus[2004], *"Risk Management and Insurance",* [監訳] 米山高生・箸方幹逸, [訳] 岡田太・柳瀬典由・石坂元一・諏訪吉彦・曽耀鋒「保険とリスクマネジメント」, 東洋経済新報社, 2005 年 4 月 12 日.

[123] International Association of Insurance Supervisors[2006], *"Standard on Asset-Liability Management",* Standard No.13, October 2006.

[124] Robert Jarrow[2002], *"Put Option premiums and Coherent Risk Measures", Mathematical Finance,* Vol.12, No.2, April 2002, P135-142.

[125] Masaaki Kijima[2006], *"A Multivariate Extension of Equilibrium Pricing Transforms: The Multivariate Esscher and Wang Transforms for Pricing Financial and Insurance Risks", Astin Bulletin,* Vol.36, No.1, May 2006, P269-283.

[126] Yuri Kifer[2000], *"Game options", Finance and Stochastics* , 4, 2000, P443-463.

[127] Changki Kim[2005], *"Modeling Surrender and Lapse Rates with Economic Variables", North American Actuarial Journal,* Vol.9 No.4, April 2005, P56-70.

[128] Ronald D. Lee and Lawrence R. Carter[1992], *"Modeling and Forecasting U.S. Mortality", Journal of the American Statistical Association,* Vol87, No.419, P659-671.

[129] Yijia Lin and Samuel H. Cox[2004a], *"Securitization of Mortality Risks in Life Annuities",* Georgia state University Working Paper, No.03-3, 6th April 2004.

[130] Yijia Lin and Samuel H. Cox[2004b], *"Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks",* Georgia state University Working Paper, No.04-8, 24th August 2004.

[131] Yijia Lin and Samuel H. Cox[2006], *"Securitization of Catastrophe Mortality Risk",* Working Paper, 24th July 2006.

[132] Francis A. Longstaff and Eduardo Schwartz[2001], *"Valuing American Option by Simulation: A Simple Least-Squares Approach", The Review of Financial Studies,* Vol.14 No.1, 2001.

[133] Donald L. McLeish and R. Mark Ressor[2003], *"Risk, Entropy, and the Transformation of Distributions", North American Actuarial Journal,* Vol.7 No.2, April 2003, P128-144.

[134] Robert Cox Merton[1971], *"Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model", Journal of Economic Theory,* 3, 373-413.

[135] Moshe A. Milvesky and S. David Promislow[2001], *"Mortality derivatives and the option to annuitise", Insurance: Mathematics and Economics,* 29, 2001, P299-318.

[136] Shinichi Monden[2006], *"Evaluation of Embedded Derivatives in Life Insurance", 2006 Daiwa Lecture Series and International Workshopon Financial Engineering, International Workshop,* 16th September 2006.

[137] Salih N. Neftci, *"An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives",* [訳] 投資工学研究会「ファイナンスへの数学【第二版】, 朝倉書店, 2002 年 8 月 20 日.

[138] Antoon Pelsser[2003], *"Pricing and Hedging Annuity Options via Static Option Replication", Insurance: Mathematics and Economics,* 33, 2003, P283-296.

[139] William H. Press and Saul A. Teukolsky and William T. Vetterling and Brian P. Flannery[1996], *"Numerical Recipes in Fortran 90",* Cambridge University Press.

[140] Arthur Renshaw and Steven Haberman[2003], "Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement", Insurance: Mathematics and Economics, 33: 255-272.

[141] Arthur Renshaw and Steven Haberman[2006], "A cohort-based extension to the Lee-Carter Model for mortality reduction factors", Insurance: Mathematics and Economics, 38: 556-570.

[142] David F. Schrager[2006], *"Affine Stochastic Mortality", Insurance: Mathematics and Economics,* 38, 2006, P81-97.

[143] Martin Schweizer[2001], *"A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches", Option Pricing, Interest Rates and Risk Management,* Cambridge University Press, 2001.

[144] Tak Kuen Siu[2005], *"Fair valuation of participating policies with surrender options and regime switching", Insurance: Mathematics and Economics,* 37, 2005, P533-552.

[145] Joseph Stampfli and Victor Goodman, *"The Mathematics of Finance, Modeling and Hedging",* [訳] 半村浩・神山直樹・桑原善太「ファイナンス数学入門 モデリングとヘッジング」, 朝倉書店, 2003 年 1 月 25 日.

[146] Stephen J. Strommen[2001], *"Beyond the Bullet GIC", Risk Rewards,* No.36, February 2001, P1-10.

[147] Shripad Tuljapurkar, Nan Li and Carl Boe[2000], *"A universal pattern of mortality decline in the G7 countries", Nature,* 405, 15th June 2000, P789-792.

[148] Shaun S. Wang[1996], *"Premium calculation by trasforming the layer premium", Astin Bulletin,* Vol.26, No.1, 1996, P71-92.

[149] Shaun S. Wang[2002], *"A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks", Astin Bulletin,* Vol.32, No.2, 2002, P213-234.

[150] Shaun S. Wang[2003], *"Equilibrium Pricing Transforms: New Results using Bühlmann's 1980 Economic Model", Astin Bulletin,* Vol.33, No.1, 2002, P57-73.

[151] Shaun S. Wang[2004], *"Cat bond pricing using probability transforms", Insurance and the State of the Art in Cat Bond Pricing,* , No.278, January 2003, P19-29.

[152] A. D. Wilkie, H. R. Waters and S. Yang[2003], *"Reserving, Pricing and Hedging for Policy with Guaranteed Annuity Options", British Actuarial Journal,* , No.4, January 2004, P263-425.

[153] Paul Wilmott and Sam Howison and Jeff Dewynne, *"The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction", Cambridge University Press,* [訳] 伊藤幹夫・戸瀬信之,「デリバティブの数学入門」, 共立出版, 2002 年 7 月 25 日.