量子ハミルトニアンのスペクトルに対する確率論的
および統計学的アプローチ

（課題番号 09640241 ）

平成 9 年度ー平成 10 年度科学研究費補助金（基盤研究 (C)(2)）

研究成果報告書

平成１１年３月

研究代表者　　　南 就将
（筑波大学数学系助教授）

はしがき

本研究では、量子ハミルトニアンンのスペクトル、いいかえると量子系のエネルギー準位に対する確率論的研究を行なった。この報告書には主に代表者（南）が行なった研究の成果で、論文として未出版のものを収める。全体は二部から成り、それぞれの内容は下記の通りである。なお各分担者の研究成果は既に他の媒体に発表済み、あるいは発表予定である。

第一部： Wigner 半円則の Brown 運動を用いた導出について. 各成分が、独立かつ同一の正規分布に従う確率変数からなる n 次の実対称行列を考える。行列 $X^{(n)}$ の固有値の数直線上での配列から得られる経験分布は、適当なスケーリングの下で $n \to \infty$ とするとき Wigner の半円則に収束することがよく知られている。近年になって T.Chan, L.Rogers, Z.Shi, Y.Takahashi は、F. Dyson (1962) のアイディアに基づいて $X^{(n)}$ の仮想的な時間発展を考えることにより、このことに別証明を与えた。彼らは $X^{(n)}(t)$ の固有値たちから成る n 次元の拡散過程が満たす確率微分方程式を研究し、それを通じて固有値の経験分布のなす確率過程の $n \to \infty$ における極限を調べている。しかしながらその確率微分方程式の係数に特異性があることから、彼らは解の存在を確かめるために必要以上に難しい解析を行なっているように思われる。これに対し我々は、半円則の導出に話を絞る限り、固有値そのものの満たす上記確率微分方程式ではなく、固有値の経験分布の Stieltjes 変換が満たす、より易しい方程式を調べるだけで十分であることに注目し、従来の議論を簡単な見とおしのよいものにした。さらにその方程式は、行列 $X^{(n)}(t)$ のレゾルベントを考えることによりたやすく導かれることを示した。なお、この成果は大学院生の平塚 剛氏との共同研究によるものである。

第二部： 点過程論によるエネルギー準位統計の数学的基礎付け. 物性理論、特に不規則系、ランダム行列、および量子カオスの理論に共通して現れる、「準位統計」の現象論的な側面を数学的に基礎づけた。これは、スペクトルまたはその一部を定常な点過程のサンプルと見なすことによってのみ可能であるが、物理学者による従来の研究ではそのことが十分明確に意識されていたとはいいがたい。そこで本研究では、定常点過程の一般論の立場から「準位統計とは何か」ということを考察し、次のようなことを明らかにした。

1) 準位統計に現れる様々な平均量の間に成り立つ関係式の多くは、点過程論でよく知られた Palm-Khinchin の等式から導かれる。

2) 定常点過程が定義された確率空間の上には、Palm 測度と呼ばれるものが自然に構成されるが、準位の間隔分布などを観測することは実は、ハミルトニアンのスペクトルを点過程と見なしたときの、その Palm 測度を観測することに相当する。

3) 可積分なハミルトン力学系を量子化して得られるスペクトルは regular spectrum と呼ばれている。regular spectrum に対しては準位集積が見られるということを、1977 年に

Berry と Tabor が論じ、その後 Sinai がその理論を、より数学的に定式化した。しかし Sinai の議論は Berry-Tabor のアイディアとは微妙に異なっている。実は Berry-Tabor の考えを忠実に整理し直すことで、数学的にはもっとすっきりした問題が立てられる。

研究組織

研究代表者：南 就将（筑波大学数学系助教授）
研究分担者：神田 護（筑波大学数学系教授）
研究分担者：赤平 昌文（筑波大学数学系教授）
研究分担者：梶谷 邦彦（筑波大学数学系教授）
研究分担者：若林 誠一郎（筑波大学数学系教授）
研究分担者：平良 和昭（筑波大学数学系教授）
研究分担者：筧 知之（筑波大学数学系助教授）
研究分担者：渡辺 公夫（筑波大学数学系助教授）
研究分担者：石川 保志（筑波大学数学系助手）
研究分担者：木下 保（筑波大学数学系助手）
研究分担者：壇 和日子（筑波大学数学系助手）
研究分担者：小林 孝行（九州工業大学数理情報基礎講座講師）

研究経費

平成 ９ 年度：	2,100 千円
平成１０年度：	1,000 千円
計：	3,100 千円

研究発表

(1) 学会誌等

神田 護 : ランダム集合の基礎をめぐって. 日本ファジイ学会誌 Vol. 10, No. 6, 1020–1024 (1998)

Akahira, M.: An information inequality bound for the asymptotic variance of sequential estimation procedures of a linearly combined parameter and its attainment. Sequential Analysis, Vol.16, No.1, 47–63 (1997)

Akahira, M., Torigoe, N.: A new higher order approximation to a percentage point of the distribution of the sample correlation coefficient. J. Japan Statist. Soc., Vol. 28, No. 1, 45–57 (1998)

Akahira, M.: The concept of normalized deficiency and its applications. Statistics & Decision (掲載予定)

Akahira, M., Takahashi, K., and Takeuchi, K.: The higher order large-deviation approximation for the distribution of the sum of independent discrete random variables. Commun. Statist.–Thory and Methods Vol.28, Issue 3&4 (1999) (印刷中)

Akahira, M., Koike, K.: On the properties of statistical sequential decision procedures. Sugaku Expositions, Vol.11, No.2, 197–213 (1998)

Kajitani, K., Mikami, M.: The Cauchy problem for degenerate parabolic equations in Gevrey classes. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, (1998)

Kajitani, K.: The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients. J. Math. Soc. Japan, Vol.50, No.1, 179–202 (1998)

Kajitani, K., Yagdjian, K.: Quasilinear hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity. Tsukuba J. Math., Vol.22, No.1, 49–85 (1998)

Taira, K.: Existence and uniqueness theorems for semilinear elliptic boundary value problems. Advances in Diff. Eq., Vol.2, No.4, 509–534 (1997)

Taira, K.: Feller semigroups and Markov processes. Computational and Applied Mathematics, Vol.16, No.1, 53–96 (1997)

Taira, K.: Feller semigroups with boundary conditions. Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol.52, 157–173 (1998)

Taira, K., Umezu, K.: Semilinear elliptic boundary value problems in chemical reactor theory. J. Diff. Eq. Vol.142, No.2, 434–454 (1998)

Taira, K.: Introduction to semilinear elliptic boundary value problems. Taiwanese J. Math. Vol.2, No.2, 127–172 (1998)

Taira, K.: Feller semigroups and degenerate elliptic operators I. Conferenze del Seminario di Matematica dell'Universita di Bari, No.274 (1999)

Taira, K.: Feller semigroups and degenerate elliptic operators II. Conferenze del Seminario di Matematica dell'Universita di Bari, No.275 (1999)

Kakehi, T.: Range theorems and inversion formulas for Radon transforms on Grassman manifolds. Proc. Japan Acad., Ser. A, Vol.73, 89–92 (1997)

Ishikawa, Y.: Large deviation estimate of transition densities for jump processes. Annales de l'Institut H. Poincaré–Probabilité et Statistique, Vol.33, No.2, 179–222 (1997)

Ishikawa, Y., Léandre: Diagonal estimate of transition densities for jump processes in small time. in Stochastic Analysis and Related Topics VI, 251–273. Birkhäuser (1998)

Kinoshita, T.: On the wellposedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic systems with Hölder continuous coefficients in time. Osaka J. Math., Vol.35, 3–18 (1998)

Kinoshita, T.: On the wellposedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations whose coefficients are Hölder continuous in t and degenerate in $t = T$. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova（掲載予定）

Kinoshita, T.: On the wellposedness in the ultradifferentiable classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equation of second order. Tsukuba J. Math., Vol.22, No.1, 241–271 (1998)

Kinoshita, T.: Gevrey wellposedness of the Cauchy problem for the hyperbolic equations of third order with coefficients depending only on time. Publ. RIMS Kyoto University Vol.34, 249–270 (1998)

Dan, W., Shibata, Y.: On the $L_q - L_r$ estimate of the Stokes semigroup in a two dimensional exterior domain. J. Math. Soc. Japan, Vol.51, No.1, 181–207 (1999)

Dan, W., Shibata, Y.: Remarks on the $L_q - L_\infty$ estimate of the Stokes semigroup in a 2-dimensional exterior domain. Pacific J. Math. （掲載予定）

Kobayashi, T.: On a local energy decay of solutions for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive gases in an exterior domain in $\mathbf{R}^3$. Tsukuba J. Math., Vol.21, No.3, 629–670 (1997)

(2) 口頭発表

南 就将： 量子カオスにおける準位統計の数学的定式化について. 科学研究費による研究集会「ランダム系とスーパー解析」、1998 年 3 月 24 日

赤平 昌文: A construction of confidence intervals for the Behrens–Fisher type problem. 日本数学会秋季総合分科会、大阪大学、1998 年 10 月 3 日

梶谷 邦彦： Degeneracies, nonlocal terms and global solvability. Workshop on Qualitative Properties for Nonlinear Hyperbolic operators. ドイツ、セイファン、1998 年 3 月 30 日

若林 誠一郎： Classical microlocal analysis in the space of hyperfunctions. 冬季特別偏微分方程式論札幌シンポジウム、1999 年 2 月 16 日

平良 和昭、梅津健一郎： Positive solutions of semilinear elliptic boundary value problems. 日本数学会秋季総合分科会、1998 年 10 月 2 日

石川 保志： ジャンプ過程と境界問題. 科学研究費による研究集会「確率論における諸問題」、1999 年 1 月 22 日

木下 保: On the Gevrey wellposedness of the Cauchy problem for some non- Kowalewskian equations. 日本数学会年会、1999 年 3 月 25 日

(3) 出版物

Taira, K.: Brownian motion and index formula for the de Rham complex. (Mathematical Research, No.106), WILEY-VCH, (1998)

第一部

Wigner 半円則の Brown 運動を用いた導出について

Wigner 半円則の Brown 運動を用いた導出について

$X_{ij}^{(n)}$ $(1 \le i \le j \le n)$ は平均 0 、分散 $(1+\delta_{ij})/2n$ の正規分布に従い、互いに独立な確率変数とする。これらを用いて n 次のランダムな実対称行列 $X^{(n)} = (X_{ij}^{(n)})$ を作る。$\lambda_1^{(n)} \le \cdots \le \lambda_n^{(n)}$ をその固有値、

$$\mu^{(n)}(dx) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j^{(n)}}(dx)$$

を固有値の経験分布測度とする。$\mu^{(n)}$ は $\mathbf{R}$ 上の確率測度の空間 $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ に値を取る確率変数となる。($\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ における距離 $\rho(\cdot,\cdot)$ は確率測度の弱収束を生成するものとする。)

さて、 $n \to \infty$ とするとき、$\mu^{(n)}$ は $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ において Wigner の半円則 μ_W と呼ばれるものに確率収束することは 1960 年代から既に知られていた。即ち次が成り立つ：$\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(\rho(\mu^{(n)}, \mu_W) > \epsilon) = 0 \ ,$$

但し

$$\mu_W(dx) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2-x^2}\ 1_{\{|x|\le 2\}}(x)dx \ .$$

この事実に対する証明は何通りも知られているが、最近になって T. Chan [Ch], L. Rogers, Z. Shi [RS], 高橋 [T] 等が、ランダム行列の仮想的な時間発展を考えることにより、さらに新しい証明を考案した。そのアイディアの原形は Dyson [D] にさかのぼるものだが、彼らは確率微分方程式を用いてそのアイディアが厳密に実行できることを示したのである。我々の研究は [Ch], [RS], [T] による証明をさらに簡略化することを目的とした。それを説明する前にまず、Brown 運動を用いて問題の定式化を行う。

$\{B_{ij}(t)\ ;\ 0 \le t < \infty\}$ $(i,j = 1,2,\ldots)$ は互いに独立で、$X^{(n)}$ とも独立な標準 Brown 運動とし、行列値 Brown 運動

$$\{B^{(n)}(t)\ ;\ 0 \le t < \infty\}\ ,\ B^{(n)}(t) = (B_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$$

を考える。行列値確率過程 $X^{(n)}(t)$ を次の確率微分方程式の解として定義する：

$$dX^{(n)}(t) = -\frac{1}{2}X^{(n)}(t)dt + \frac{1}{2\sqrt{n}}\{dB^{(n)}(t) + d\ {}^{T}B^{(n)}(t)\}\ ;$$

$$X^{(n)}(0) = X^{(n)} \ .$$

$X^{(n)}(0)$ が対称行列ならばすべての $t \ge 0$ に対して $X^{(n)}(t)$ は実対称行列となる。また $\{X_{ij}^{(n)}(t)\}_t$ $(i \le j)$ は互いに独立な Ornstein-Uhlenbeck 過程で、$X_{ij}^{(n)}(0)$ の分布である $N(0,(1+\delta_{ij})/2n)$ を不変分布としている。従って $\{X^{(n)}(t)\ ;\ 0 \le t < \infty\}$ は定常過程になっている。

さて各 $t \geq 0$ に対して、$X^{(n)}(t)$ の固有値を

$$\lambda_1^{(n)}(t) \leq \cdots \leq \lambda_n^{(n)}(t)$$

とし、その経験分布測度

$$\mu^{(n)}(t)(dx) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j^{(n)}(t)}(dx)$$

を考えよう。$\{X^{(n)}(t)\ ;\ 0 \leq t < \infty\}$ が定常過程であるから、$\{\mu^{(n)}(t)\ ;\ 0 \leq t < \infty\}$ もまた $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ に値を取る定常過程である。$n \to \infty$ の極限について次が成立する。

定理 ([Ch], [RS], [T]) $\{\mu^{(n)}(t)\ ;\ 0 \leq t < \infty\}$ は連続な軌道を持ち、さらに軌道の空間

$$\mathcal{C}([0,\infty)) = \{\nu(\cdot) \mid \nu : [0,\infty) \mapsto \mathcal{M}_1(\mathbf{R}) \text{ は連続関数 }\}$$

におけるその確率分布は $n \to \infty$ において

$$\mu(t) \equiv \mu_W\ ,\ 0 \leq t < \infty$$

なる自明な確率過程の分布に収束する。但し $\mathcal{C}([0,\infty))$ の位相は $[0,\infty)$ 上での広義一様収束に対応する位相とする。

極限過程が上記のように non-random なとき、そこへの法則収束は$\mathcal{C}([0,\infty))$ の距離の意味での確率収束と同等になる。そのことからさらに、各 $t \geq 0$ に対する $\mu^{(n)}(t)$ の分布が $n \to \infty$ とするとき $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ において μ_W に確率収束することがわかる。定常性により $\mu^{(n)}(t)$ と $\mu^{(n)}(0)$ は同法則だから、冒頭に述べた Wigner 半円則への $\mu^{(n)}$ の収束が示されたことになるのである。

さて [Ch], [RS] においては、この定理を次のような方針で証明している。まず形式的に $X^{(n)}(t)$ を対角化することにより $X^{(n)}(t)$ の固有値 $\lambda_j^{(n)}(t)$, $j = 1, \ldots, n$ が満たすべき確率微分方程式を導く。その係数は $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ において特異性を持っている。Chan, Rogers, Shi はこの確率微分方程式を注意深く解析することによって, $t = 0$ において、$\lambda_1^{(n)}(0) < \cdots < \lambda_n^{(n)}(0)$ であれば、すべての時刻において確率微分方程式の解 $\lambda_j^{(n)}(t)$ について $\lambda_1^{(n)}(t) < \cdots < \lambda_n^{(n)}(t)$ および $|\lambda_j^{(n)}(t)| < \infty$ がなりたつこと、いいかえると $\lambda_j^{(n)}(t)$ たちは有限時間では衝突も爆発もしないことを示した。(このことを確かめておかないと $\{\lambda_j^{(n)}(t)\}_t$ を $X^{(n)}(t)$ の j 番目の「固有値過程」と定義すること自体が困難になる。) 次に彼らは $\{\lambda_j^{(n)}(t)\}_t$ たちが満たす確率微分方程式を用いて $\{\mu^{(n)}(t)\}$ に対する確率微分方程式を求める。それに基づいて $\{\mu^{(n)}(t)\}$ の分布の$\mathcal{C}([0,\infty))$ における tightness および部分列に沿って $n \to \infty$ としたときの極限分布の同定をそれぞれ行って定理の証明を終える。

これに対し、我々は次のように考えた。$X^{(n)}(t)$ の固有値の非衝突（非縮退）ということは、ランダム行列における準位反撥と深く関わっており、それ自体重要な問題ではあるのだが、Wigner の半円則の導出のためには考慮する必要のないことである。何となれば、固有値の非縮退は、$X^{(n)}(t)$ の固有値の番号付けをすべての $t \geq 0$ に渡って適切に行うためには必要であるが、我々が直接問題にするのは固有値全体の配列、あるいは経験分布 $\mu^{(n)}(t)$ であって、$\mu^{(n)}(t)$ そのものは固有値の縮退が生じても明確な意味を持っているからである。Chan や Rogers-Shi たちは一つ一つの固有値 $\lambda_j^{(n)}(t)$ の動きを追うことにより $\mu^{(n)}(t)$ に対する方程式を得たのだが、もしも $X^{(n)}(t)$ に対する方程式から直接 $\mu^{(n)}(t)$ に対する方程式が得られるならば、我々は固有値の非縮退という問題を回避することができるはずである。

さて $\{\mu^{(n)}(t)\}$ は確率測度の空間 $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ に値を取るから、それに対する方程式は通常 test functions を通じて記述される。即ち、適当な関数族 $\mathcal{A}$ に属する任意の f に対する

$$\langle \mu^{(n)}(t), f \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}} f(x)\mu^{(n)}(t)(dx)$$

が満たす方程式をまず求める。関数族 $\mathcal{A}$ が $\mathbf{R}$ 上の確率測度を一意に決める程度に十分豊富であれば、これらの方程式が全体として $\mu^{(n)}(t)$ の運動を記述するのである。さて、ここで $\mathcal{A}$ として

$$f(x) = \frac{1}{(x-z)}\ ,\ \Im z > 0$$

という形の複素関数の全体を考える。$\mathcal{A}$ が $\mathbf{R}$ 上の有限測度を一意に定めることはよく知られている。一方

$$\langle \mu^{(n)}(t), f \rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^{(n)}(t) - z} = \frac{1}{n} Tr(X^{(n)}(t) - z)^{-1}$$

という関係が成立するから、$Tr(X^{(n)}(t) - z)^{-1}$ に対する方程式を求めればよいことになる。

一般に $X = (X_{ij})$ を n 次の実行列、$z \in \mathbf{C}$ として、$R = (X - z)^{-1}$ とおく。関係式

$$(X - z)R = I$$

の両辺を X_{ij} で微分して

$$E_{ij}R + (X - z)\frac{\partial R}{\partial X_{ij}} = 0$$

を得る。但し E_{ij} は (i, j) 成分のみ 1 で、他は 0 という行列単位。この式をさらに X_{pq} で微分して

$$E_{ij}\frac{\partial R}{\partial X_{pq}} + E_{pq}\frac{\partial R}{\partial X_{ij}} + (X - z)\frac{\partial^2 R}{\partial X_{pq}\partial X_{ij}} = 0$$

従って

$$\frac{\partial R}{\partial X_{ij}} = -RE_{ij}R \ .$$

　また

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X_{pq}\partial X_{ij}} = -R(E_{ij}\frac{\partial R}{\partial X_{pq}} + E_{pq}\frac{\partial R}{\partial X_{ij}}) = R(E_{ij}RE_{pq}R + E_{pq}RE_{ij}R) \ .$$

特に

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X_{ij}^2} = 2RE_{ij}RE_{ij}R \ .$$

またこれらの関係式より

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} TrR = -Tr(RE_{ij}R) = -(R^2)_{ij} \ ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X_{pq}\partial X_{ij}} TrR = R_{jp}(R^2)_{qi} + R_{qi}(R^2)_{jp}$$

が得られる。

　さて $R(t) = (X^{(n)}(t) - z)^{-1}$ とおくと、以上の考察と伊藤の公式より

$$dTrR(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial TrR(t)}{\partial X_{ij}} dX_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 TrR}{\partial X_{pq}\partial X_{ij}} dX_{ij}^{(n)} dX_{pq}^{(n)} \ .$$

一方

$$dX_{ij}^{(n)} = dX_{ji}^{(n)}(t) = -\frac{1}{2}X_{ij}^{(n)}(t)dt + \frac{1}{2\sqrt{n}}(dB_{ij}(t) + dB_{ji}(t))$$

より

$$dX_{ij}^{(n)}(t)dX_{pq}^{(n)}(t) = \begin{cases} (1/n)dt \ , & i = j = p = q \\ (1/2n)dt \ , & i \neq j \ , \ \{i,j\} = \{p,q\} \\ 0 \ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

　これより

$$\begin{aligned} dTrR(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial TrR(t)}{\partial X_{ij}} dX_{ij}^{(n)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{\partial^2 TrR(t)}{\partial X_{ij}^2} + \frac{\partial^2 TrR(t)}{\partial X_{ij}\partial X_{ji}}\right)(dX_{ij}^{(n)}(t))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j}\frac{\partial^2 TrR(t)}{\partial X_{jj}^2}(dX_{jj}(t))^2 \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}(R(t)^2)_{ij}\left\{-\frac{1}{2}X_{ij}^{(n)}(t)dt + \frac{1}{2\sqrt{n}}(dB_{ij}(t) + dB_{ji}(t))\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{4n}\sum_{i\neq j}\{2R_{ji}(t)(R(t)^2)_{ji}+R_{jj}(t)(R(t)^2)_{ii}+R_{ii}(t)(R(t)^2)_{jj}\}dt \\
& +\frac{1}{2}\sum_{j}2R_{jj}(t)(R(t)^2)_{jj}dt \\
= \; & \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(R(t)^2)_{ij}X_{ji}^{(n)}(t)dt-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i,j=1}^{n}(R(t)^2)_{ij}dB_{ji}(t) \\
& +\frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}\{R_{ji}(t)(R(t)^2)_{ji}+R_{jj}(t)(R(t)^2)_{ii}\}dt \\
= \; & \frac{1}{2}Tr(R(t)^2X^{(n)}(t))dt-\frac{1}{\sqrt{n}}Tr(R(t)^2dB(t)) \\
& +\frac{1}{2n}Tr(R(t)^3)dt+\frac{1}{2n}(TrR(t))Tr(R(t)^2)dt\ .
\end{aligned}
$$

$Tr(R^2X)=TrR+zTr(R^2)$ に注意して以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
d\langle\mu^{(n)}(t),f\rangle \; = \; & \frac{1}{n}d(TrR(t)) \\
= \; & \{\frac{1}{2n}TrR(t)+\frac{1}{2n}zTr(R(t)^2)+\frac{1}{2n^2}Tr(R(t)^3)+\frac{1}{2n^2}(TrR(t))Tr(R(t)^2)\}dt \\
& -\frac{1}{n\sqrt{n}}Tr(R(t)^2dB(t)) \\
\equiv \; & A_n(t)dt+dM_n(t)\ .
\end{aligned}
$$

但し $M_n(t)=\int_0^t Tr(R(t)^2dB(t))$ はマルチンゲール。

容易にわかるように、$\forall T>0$ と $\forall\epsilon>0$ に対して、$n\to\infty$ とすると

$$
\sup_{0\le t\le T}|M_n(t)|\longrightarrow 0\ ,(\text{in probability})\ .
$$

一方

$$
TrR(t)^k=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\lambda_j^{(n)}-z)^k}
$$

より

$$
|TrR(t)^k|\le\frac{n}{|\Im z|^k}\ .
$$

これより $\{A_n(t)\}$ は $n\ge1$, $t\ge0$ について一様有界である。このことから $\forall z$, $\Im z>0$ に対して、確率過程の列 $\{\langle\mu^{(n)}(t),f\rangle\ ;\ t\ge0\}$, $n\ge1$ は tight であることがわかる。$\{\mu^{(n)}(t)\}$, $n\ge1$ そのものの tightness の証明を完結させるために、$f_0(x)=x^2$ とおいて $\{\langle\mu^{(n)}(t),f_0\rangle\}$ たちの tightness を調べよう。

$$
\langle\mu^{(n)}(t),f_0\rangle=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(n)}(t)^2=\frac{1}{n}TrX^{(n)}(t)^2
$$

に注意すると、容易に

$$d\langle\mu^{(n)}(t), f_0\rangle = \{-\langle\mu^{(n)}(t), f_0\rangle + \frac{n+1}{2n}\}dt + \frac{2}{n\sqrt{n}}\sum_{i.j=1}^{n} X_{ij}^{(n)}(t)dB_{ji}(t)$$

が得られる。従って、簡単のために

$$Z_n(t) = \langle\mu^{(n)}(t), f_0\rangle \geq 0\ ,\ \tilde{M}_n(t) = \int_0^t \frac{2}{n\sqrt{n}}\sum_{i.j=1}^{n} X_{ij}^{(n)}(t)dB_{ji}(s)$$

とおくと

$$Z_n(t) = Z_n(0) - \int_0^t Z_n(s)ds + \frac{n+1}{2n}t + \tilde{M}_n(t)$$

となる。従って $\forall T > 0$ に対して

$$Z_n(t) \leq Z_n(0) + T + \sup_{0\leq t\leq T}|\tilde{M}_n(t)|\ .$$

これをもとの方程式に持ち込むと、$0 \leq t \leq u \leq T$ に対して

$$|Z_n(u) - Z_n(t)| \leq (Z_n(0) + T + 1 + \sup_{0\leq t\leq T}|\tilde{M}_n(t)|)(u-t) + |\tilde{M}_n(u) - \tilde{M}_n(t)|\ .$$

さて

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\tilde{M}_n(t)| \longrightarrow 0\ \text{(in probability)}$$

は容易にわかり、従って $\{\tilde{M}_n(t)\}$ たちは tight. このことと上の不等式、および Ascoli-Arzela の定理により $\{Z_n(t)\}$ たちの tightness もわかる。

以上の考察と次の一般的な補題から $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ 値確率過程の列 $\{\mu^{(n)}(t)\}$, $n \geq 1$ が tight であることが示される。その補題を述べるために、次の性質を持つ $\mathbf{R}$ 上の連続関数の列 $\{g_j\}_{j\geq 0}$ を用意する。

1. $g_0(x) \geq 0$ かつ $\forall r > 0$ に対して $\{g_0 \leq r\}$ は compact.
2. $g_j(x)$ $(j \geq 1)$ は C^∞ かつ有界で、$\{g_j\}_{j\geq 1}$ は $\mathbf{R}$ 上の確率測度を一意に定める。

補題. 各 $j \geq 0$ に対して、複素数値連続確率過程の列 $\{\langle\mu^{(n)}(t), g_j\rangle\ ;\ t \geq 0\}$, $n \geq 1$ が tight ならば、$\mathcal{M}_1(\mathbf{R})-$ 値連続確率過程の列 $\{\mu^{(n)}(t)\ ;\ t \geq 0\}$, $n \geq 1$ も tight である。

この補題を我々の問題に適用するには $\{z_j\}_{j\geq 1}$ を上半平面 $\{\Im z > 0\}$ において稠密な列として、

$$g_0(x) = f_0(x) = x^2\ ;\ g_j(x) = f_{z_j}(x) = \frac{1}{x - z_j}$$

とすればよい。

$\{\mu^{(n)}(t)\ ;\ t\geq 0\}$, $n\geq 1$ の tightness がわかったから、部分列に沿って $n\to\infty$ としたときの $\{\mu^{(n)}(t)\ ;\ t\geq 0\}$ の法則収束極限を $\{\mu(t)\}$ とする。

$$\langle \mu^{(n)}(t), f_z\rangle\ ;\ f_z(x)=\frac{1}{x-z}$$

に対する方程式において $n\to\infty$ とすると

$$M_z(t)\equiv\langle\mu(t), f_z\rangle$$

は次の方程式を満たすことがわかる：

$$\frac{\partial}{\partial t}M_z(t)=\frac{1}{2}\{M_z(t)+z\}\frac{\partial}{\partial t}M_z(t)+\frac{1}{2}M_z(t)\ .$$

$\{\mu^{(n)}(t)\}$ は定常過程だから、その極限 $\{\mu(t)\}$ も定常過程。従って $M_z(t)$ は上の方程式の定常解でなければならない。ところが [RS] によれば、この方程式の定常解は唯一つで、それは

$$M_z^W(t)\equiv\int\frac{1}{x-z}\mu_W(dx)$$

である。従って実は部分列を取るまでもなく

$$\langle\mu^{(n)}(t), f_z\rangle\longrightarrow\langle\mu_W, f_z\rangle$$

となっている。f_z たちが確率測度を一意に定めることから $\forall t\geq 0$ に対して

$$\mu^{(n)}(t)\longrightarrow\mu_W$$

特に

$$\mu^{(n)}(0)\longrightarrow\mu_W$$

となるのである。

参考文献

[Ch] T. Chan: The Wigner semi-circle law and eigenvalues of matrix-valued diffusions. Prob. Th. Rel. Fields, Vol.93, 249–272 (1992)

[D] F. J. Dyson: A Brownian motion model for the eigenvalues of a raandom matrix. J. Math. Phys. Vol.3, 1191–1198 (1962)

[RS] L.C.G. Rogers, Z. Shi: Interacting Brownian particles and the Wigner semi-circle law. Prob. Th. Rel. Fields, Vol.95, 555–570 (1993)

[T] 高橋陽一郎： Wigner の半円則と Hilbert 変換, 統数研共同研究リポート 48、確率モデルと非線型可積分系、42–44 (1993 年 10 月)

第二部

点過程論によるエネルギー準位統計の数学的基礎付け

点過程論によるエネルギー準位統計の数学的基礎付け

直線あるいは一般の空間上のランダムな点配置のことを確率論では点過程 (point process) と称し、詳しく研究されている。ランダム行列や Anderson モデルのように、統計性を含む量子ハミルトニアンのスペクトルは現象論的には点過程と見ることができる。また量子カオスの研究におけるように、本来統計性をもたないハミルトニアンのスペクトルを、あたかも点過程の典型的な実現であるかのようにみなしてその揺らぎを議論することがある。点過程の理論は準位統計の専門家にはこれまであまり知られていなかったようであるが、点過程というものの数学的な取り扱いには意外にデリケートな部分もあるのである。特に点と点の間隔分布については直観に反するような事実がいくつかある。本稿の目的は点過程論の概略を解説しつつ、その準位統計の現象論との対応を考えることである。準位統計の背後にある Anderson 転移や量子カオスの本質に迫るには至ってないが、量子準位というものを統計的に見ることの意味合いを確率論の立場から考えてみたかったのである。物理学者からの自由な批判を期待する。特に第 8 節についてそう思う。

なお本稿は 1998 年 6 月に日本大学理工学部物理学教室で行なった筆者の講義に基づいている。このような機会を与えて下さった糸井千岳氏に深く感謝する。また筆者の拙い講義に耳を傾けて下さった出席者の方々にも心より感謝したいと思う。

1　公理的確率論の概要

この節では基本的な用語の準備も兼ねて、確率論の基礎概念および後で用いる定理をいくつか紹介する。

1.1　確率空間 (probability space)

現代の確率論は抽象的な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ というものを理論の足場にする。ここで Ω は空でない任意の集合、$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合の族で、次の意味で $\sigma-$ 代数の構造をもつものである:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$. ただし $A^c = \Omega \setminus A$ は A の補集合.

(iii) $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ ならば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \ \in \mathcal{F} \ .$$

$\mathcal{F}$ に属する集合は “事象 ” と呼ばれる。さらに P は各々の $A \in \mathcal{F}$ に実数 $P(A)$ を対応させる集合関数で次の条件を満たすもの：

(iv) $P(A) \geq 0$;

(v) $P(\Omega) = 1$;

(vi) $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ であり、かつ $n \neq m$ に対して $A_n \cap A_m = \emptyset$ となるならば

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \ .$$

$P(A)$ は事象 A の確率と呼ばれる。

集合 Ω は統計学においては標本空間と呼ばれ、試行の結果として論理的あるいは現実的に可能なデータの集まりという意味を持つ。一方確率論を統計力学に応用する場合には Ω は与えられた物理系が取り得る状態の全体（アンサンブル）を表すとも考えられる。このように Ω はかなり抽象的な性格をもつもので、問題に応じて様々な意味付けがなされる。また確率の計算を進める過程で空間 Ω は必要に応じて拡張されたり、逆に制限されたり、さらには全く異なる空間と取り換えられることもある。

条件 (i)–(vi) に述べてなくとも、それらから自動的に従うことがらがいくつかあることに注意しておく。例えば (i), (ii) より $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$. また (iii), (ii) および de Morgan の法則：

$$(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \quad ; \quad (\bigcap_n A_n)^c = \bigcup_n A_n^c$$

より、(iii) において $\bigcup$ を $\bigcap$ でおきかえた命題も成り立つ。また (iv) において $A_n = \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$ とすれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, かつ A_n たちは互いに排反。従って

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots \ .$$

これと (iv) より $P(\emptyset) = 0$ となる... 等.

1.2 確率変数 (random variable)

確率変数とは試行の結果により値の決まる量、即ち Ω 上の関数 $X(\omega)$ のことである。ただし最低限の要請として、任意の実数 x に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

となること、いいかえると関数 $X(\omega)$ が $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}$ について可測であることを仮定する。この仮定により x の関数

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

を考えることができる。$F_X(x)$ を確率変数 $X(\omega)$ の分布関数という。確率論においては ω の関数としての確率変数 $X(\omega)$ そのものよりも、その分布関数 $F_X(x)$ の方が重要な意味をもつことがしばしばある。

$$p(x) \geq 0 \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

を満たす関数 $p(x)$ が存在して

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy \quad , \ x \in \mathbf{R}$$

が成り立つとき確率変数 X は絶対連続分布を持つといい、$p(x)$ をその分布密度関数という。特に

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2] \quad (\sigma > 0 \ , \ m \in \mathbf{R})$$

のとき X は平均 m 、分散 σ^2 の正規分布（ Gauss 分布）に従うといい、

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

のとき X はパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従うという。

一方実数の列 $\{\alpha_n\}_n$ および $\{p_n\}_n$ が存在して（ただし $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n = 1$ ）

$$F_X(x) = \sum_{\alpha_n \leq x} p_n = \int_{-\infty}^{x} \sum_n p_n \delta(y - \alpha_n)dy$$

となるとき X は離散分布を持つという。特に

$$\alpha_n = n \ ; \ p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

のとき X はパラメータ $\lambda > 0$ の Poisson 分布に従うという。

確率変数 X が絶対連続な分布を持つときは

$$E[X] = \int xp(x) \ dx \quad ; \quad V[X] = \int (x - E[X])^2 \ dx$$

により、また離散分布を持つときは

$$E[X] = \sum_n \alpha_n p_n \quad ; \quad V[X] = \sum_n (\alpha_n - E[X])^2 p_n$$

によって X の期待値および分散が定義される。ただし積分あるいは級数の絶対収束を仮定する。X が一般の分布関数 $F(x)$ を持つとき、X の期待値と分散は Stieltjes 積分により定義される：

$$E[X] = \int x \ dF(x) \quad ; \quad V[X] = \int (x - E[X])^2 \ dF(x).$$

上記の２式はこの一般的な定義の特別な場合である。容易にわかるように

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

が成り立つ。

正の確率を持つ事象 $B \in \mathcal{F}$ が与えられたとき

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$

によって $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の新しい確率測度 $P(\cdot|B)$ が定義される。 $P(A|B)$ を事象 B に関する事象 A の条件付き確率と呼ぶ。また X が確率変数のとき

$$F_X(x|B) = P(X \le x|B)$$

を事象 B に関する X の条件付き分布関数、

$$E[X|B] = \int xdF_X(x|B)$$

を事象 B に関する X の条件付き期待値という。

以上の定義において $P(B) > 0$ という条件を仮定したが、この条件を満たさなくとも直観的には条件つき確率としての意味を持つべきものがある。たとえば X , Y が確率変数のとき

$$E[X|Y = y]$$

は Y が絶対連続分布をもつならば上に述べたようには定義できないが（ $P(Y = y) = 0$ であるから）、だからといって全く考えずにすますわけにはいかないであろう。また準位統計においては、特定のエネルギー値に準位があるという条件のもとに様々な事象の確率を考えるがこれについても同様の問題がある。これらの “条件つき確率” については別に考察しなければならない。（確率 0 の事象に関する条件つき確率にまつわる諸問題については例えば Rao の解説記事 [18] を参照されたい。）

$X_1, \ldots, X_n$ が確率変数のとき $\mathbf{R}^n$ 上の関数

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n)$$

をそれらの結合分布関数という。これに対し各々の X_j の分布関数を周辺分布関数ということがある。

任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

となるとき確率変数は互いに独立であるという。このとき積分が絶対収束するという条件の下に

$$E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n] \ ,$$

が成り立つ。あるいはより一般に可測関数 $f_1,\ldots,f_n$ に対して

$$E[f_1(X_1)\cdots f_n(X_n)] = E[f_1(X_1)]\cdots E[f_n(X_n)]$$

となる。さて

$$C(X_i,X_j) \equiv E\left[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\right]$$

をの共分散という。今述べたことから $X_1,\ldots,X_n$ が独立ならば $i\neq j$ に対して $C(X_i,X_j)=0$ となる。これより容易に

$$V[\sum_{j=1}^{n} X_j] = \sum_{j=1}^{n} V[X_j]$$

を示すことができる。（ただし、この関係式が成り立つからといって $X_1,\ldots,X_n$ が独立とは限らない。）

$X_1,\ldots,X_n$ がそれぞれ離散的な分布を持つとき、それらの独立性は

$$P(X_1=\alpha_1,\ldots,X_n=\alpha_n) = P(X_1=\alpha_1)\cdots P(X_n=\alpha_n)$$

と表現される。ただし $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ はそれぞれ $X_1,\ldots,X_n$ が取り得る任意の値とする。

$\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $p(x_1,\ldots,x_n)$ で

$$p(x_1,\ldots,x_n)\geq 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1,\ldots,x_n)\ dx_1\cdots dx_n = 1$$

を満たすものがあって

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dy_n\ p(y_1,\ldots,y_n)$$

となるとき、$X_1,\ldots,X_n$ は絶対連続な結合分布関数を持つという。このとき各 X_j の周辺分布関数も絶対連続となり、その密度関数を $p_j(x_j)$ とすると $X_1,\ldots,X_n$ の独立性は

$$p(x_1,\ldots,x_n) = p_1(x_1)\cdots p_n(x_n)$$

と同等である。

最後に $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ が確率変数の無限列のとき、その独立性は各々の $n\geq 1$ に対して $X_1,\ldots,X_n$ が上記の意味で独立になることを意味する。

1.3 独立同分布確率変数列に対する極限定理

確率変数列　$X_1,\ldots,X_n,\ldots$ は 1.2 の意味で独立であり、それぞれは共通の分布関数を持つとする。このとき $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ は i.i.d. (independent and identically distributed) であるという。ここでは初等確率論における代表的な極限定理を３つ挙げておく。

1. 大数の強法則。確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は i.i.d. で、$E[|X_n|] < \infty$ とする。このとき $E[X_n] = m$ として
$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = m\right) = 1 \ .$$
これより、次の大数の弱法則が自動的に出る：任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - m| > \epsilon\right) = 0 \ .$$

2. 中心極限定理。$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ はやはり i.i.d. かつ $E[X_n^2] < \infty$ とする。（大数の法則のときよりも強い条件である。）さらに $E[X_n] = m$, $V[X_n] = \sigma^2 > 0$ とすると任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{j=1}^{n} (X_j - m) \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \ .$$

3. Poisson の小数の法則。$n = 1, 2, \ldots$ に対して n 個の確率変数 $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ は独立で、0 か 1 の値のみをとるものとする。さらに定数 $\lambda > 0$ が存在して $P(X_j^{(n)} = 1) = \lambda/n$ となるならば
$$\lim_{n\to\infty} P(\sum_{j=1}^{n} X_j^{(n)} = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots .$$

事象の確率は、試行を多数回繰り返したときにその事象が観測される頻度によって推定（あるいは測定）されるが、大数の法則はその根拠を与えている。次項で述べるエルゴード定理も同様の意味を持っている。また確率論の応用において正規分布と Poisson 分布が重要になるのはそれぞれ中心極限定理と Poisson の小数の法則があるからだと言ってよい。

1.4 エルゴード定理

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間、T は時間パラメータの集合で、以下 $T = \mathbf{R}$（連続時間）または $T = \mathbf{Z}$（離散時間）の場合を考える。各々の $t \in T$ に対して Ω から Ω への写像 θ_t が与えられていて次の条件を満たすとしよう：

(i) θ_t は全単射、いいかえると θ_t は逆写像 θ_t^{-1} を持つ；

(ii) θ_t は可測、即ち $A \in \mathcal{F}$ ならば $\theta_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となる（ただし連続時間の場合は (t, ω) 2 変数に関して同時に可測になることを仮定する）；

(iii) θ_t は P を保存する、即ち $A \in \mathcal{F}$ ならば $P(\theta_t(A)) = P(A)$；

(iv) $\{\theta_t; t \in T\}$ は変換群をなす、即ち $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s\ \forall t, s, \in T$, $\theta_0 = I =$ 恒等写像 . 特に $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$.

$T = \mathbf{R}$ のとき、この変換群 $\{\theta_t; t \in T\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における flow と呼ぶ。$T = \mathbf{Z}$ のときは変換群 $\{\theta_t; t \in T\}$ はただ一つの変換 $\theta = \theta_1$ により生成される: $\theta_t = \theta^t$. この θ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における automorphism という。

任意の $t \in T$ に対して $\theta_t(A) = A$ となるような $A \subset \Omega$ をこの変換群の不変集合という。離散時間の場合この条件は $\theta(A) = A$ と同じことである。$A \in \mathcal{F}$ なる不変集合が $P(A) = 1$ または $P(A) = 0$ となるものに限られるとき flow あるいは automorphism はエルゴード的であるという。

flow または automorphism は連続時間または離散時間の力学系の概念を抽象化したものである。したがって確率空間は力学系の相空間という意味も持っている。flow(automorphism) がエルゴード的でないとき、$0 < P(A) < 1$ なる不変集合 A が存在する。すると θ_t を A および A^c に制限することにより我々の力学系は相互作用のない 2 つの部分に分解されることになる。エルゴード性とはこのような分解が不可能であることを意味している。ただし点過程論では $\{\theta_t : t \in T\}$ は空間的な平行移動を表しており、力学系とのアナロジーはそれ程密接ではない。

後で用いるために Birkhoff の個別エルゴード定理と von Neumann の平均エルゴード定理を紹介する。詳しくは例えば十時 [22] または Reed, Simon [19] を参照されたい。

個別エルゴード定理 f は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可測関数（確率変数）で $E[|f|] < \infty$ なるものとする。このとき可測関数 $\bar{f}$ で次のようなものが存在する：

(a) $E[|\bar{f}|] < \infty$;

(b) $\bar{f}$ は不変関数、即ち $\bar{f}(\theta_t \omega) = \bar{f}(\omega)$;

(c) A が可測な不変集合ならば

$$\int_A \bar{f}\ P(d\omega) = \int_A f\ P(d\omega)$$

特に $A = \Omega$ として $E[\bar{f}] = E[f]$;

(d) 確率 1 で

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(\theta_t \omega) dt = \bar{f}(\omega) .$$

平均エルゴード定理 f は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可測関数（確率変数）で $E[|f|^2] < \infty$ なるものとする。このとき個別エルゴード定理に現れる可測関数 $\bar{f}$ は上記に加えて次を満たす：

(e) $E[|\bar{f}|^2] < \infty$;

(f) 二乗平均収束の意味で

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(\theta_t \omega) dt = \bar{f}(\omega) \ .$$

flow のかわりに automorphism θ が与えられたときも同様の主張が

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\theta^j \omega) = \bar{f}(\omega)$$

について成立する。

2 直線上の点過程の一般論

確率論において点過程は通常 “ランダムな非負整数値ラドン測度 ” と定義される。こうすることにより直線上のみならず一般の局所コンパクト位相空間上の点過程を定義することができるのだが、その理論は抽象数学に傾き過ぎると思われるので、ここではより直接的な定式化を行う。

つぎのようなものを考える：

1. 直線 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ の有限または可算無限部分集合 ξ で任意の有限区間 I に対して $\xi \cap I$ が有限集合となるもの。(つまり ξ は有限な集積点を持たず、真に離散的である。)
2. ξ を定義域とする自然数値関数 $m_\xi(x)$ $(x \in \xi)$.

上の 2 条件を満たす ξ , m_ξ の組を一般に N で表して “点配置 (configuration) ” と呼ぶことにしよう。$m_\xi(x)$ は ξ の点 x の重複度を表す。点配置 N の全体を Q とする。また $\mathbf{R}$ の有限部分集合 A に対して

$$N(A) = \sum_{x\in\xi\cap A} m_\xi(x) \ ,$$

$\mathbf{R}$ 上の関数に対して

$$N(f) = \sum_{x\in\xi} m_\xi(x) f(x)$$

と書く。$f = 1_A$ (A の定義関数) のとき $N(1_A) = N(A)$ である。$m_\xi(x) \equiv 1$ であるような点配置は単純 (simple) であるといわれる。単純な点配置の全体を Q_1 で表す。$N = (\xi, m_\xi)$ が単純なときは

$$N(A) = \sharp(A \cap \xi) \quad ; \quad N(f) = \sum_{x\in\xi} f(x) \ .$$

となる。

点配置を表すのに、より直観に訴える

$$N = \sum_{x \in \xi} m_\xi(x)\delta(x - \cdot)$$

という書き方も用いる。$\delta(x-\cdot)$ を点 x に集中した δ 関数と見るか、δ 測度と見るかによって

$$N(f) = \int f(y)N(y)dy \quad \text{または} \quad \int f(y)N(dy)$$

となるが、本稿では後者の書き方を好んで用いる。

さてランダムな点配置としての点過程を次のように定義する。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から配置の空間 Q への写像

$$\Omega \ni \longmapsto N_\omega \in Q$$

は、任意の有限区間 $I \subset \mathbf{R}$ に対して $N_\omega(I)$ が非負整数値確率変数になるとき、即ち $k = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid N_\omega(I) = k\} \ \in \ \mathcal{F}$$

となるとき、点過程であるといわれる。すべての $\omega \in \Omega$ に対して $N_\omega \in Q_1$ となっているとき点過程 N_ω は単純であるという。

確率論においては通例であるが、ω の関数としての点過程 N_ω そのものよりも、その確率分布の方が重要性を持つことがよくある。ここで点過程 N_ω の確率分布とは、互いに排反な有限区間の任意の列 $I_1, \ldots, I_n$ および任意の非負整数 $k_1, \ldots, k_n$ に対する次の確率の値の全体である：

$$P(N_\omega(I_1) = k_1, \ldots, N_\omega(I_n) = k_n) \equiv p(I_1, \ldots, I_n; k_1, \ldots, k_n) \ .$$

これらの確率の値がすべて定まれば、実際上は点過程 N_ω に関するあらゆる事象の確率が定まるといってよい。また２つの点過程（その定義域たる確率空間は異なっていてもよい）に対するこれらの確率 $p(I_1, \ldots, I_n; k_1, \ldots, k_n)$ の値がすべて一致するとき、２つの点過程は同じ確率分布に従うという。

N_ω が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の点過程で、$f(x) \geq 0$ が Borel 可測関数ならば $\exp(-N_\omega(f))$ は有界な確率変数である。その期待値

$$\psi_N(f) \equiv E[\exp(-N_\omega(f))]$$

を点過程 N_ω に対する Laplace 汎関数という。Laplace 汎関数 $\psi_N(\cdot)$ は点過程 N_ω の確率分布を一意に決めることが知られている。

次に点過程の列 $\{N_\omega^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ の点過程 N_ω への収束を考える。そのためにはまず点配置の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ が別の点配置 N に収束するということを定義しなければならない。こ

れは点配置 $N^{(k)}$ を構成する点が全体として N を構成する点に近づくことであるが、正確には次のように述べられる：

点配置の列 $\{N^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が点配置 N に収束するとは、$f(x) \geq 0$ なる連続関数で、ある有限区間（ f ごとに異なっていてよい）の外では恒等的に 0 となるようなもの（今後は compact support を持つ連続関数ということにする）に対して

$$N^{(k)}(f) \longrightarrow N(f)$$

となることである。このとき単に $N^{(k)} \to N$ と書くことにする。

この定義によって点配置の空間 Q に収束概念、あるいは位相が導入される。そして点過程の列 $\{N_\omega^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が点過程 N_ω に弱収束するということは、Q 上の任意の有界連続汎関数 $F(N)$ に対して

$$E[F(N_\omega^{(k)})] \longrightarrow E[F(N_\omega)] \quad (k \to \infty)$$

となることと定義される。ただし Q 上の（実数値）汎関数 F が連続とは

$$N^{(k)} \longrightarrow N \implies F(N^{(k)}) \longrightarrow F(N)$$

となることである。また F が連続汎関数で、N_ω が点過程ならば $F(N_\omega)$ は確率変数となることに注意する。さらに、点過程の弱収束とは実は点過程の確率分布の収束のことであり、ω の関数の列としての $\{N_\omega^{(k)}\}$ の N_ω への収束を意味するのではないことにも注意しておく。従って $N_\omega^{(k)}$, N_ω の定義域たる確率空間が k ごとにすべて異なっていても上記の定義は意味を持つ。

点過程の列 $\{N_\omega^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が N_ω に弱収束するためには実は $f(x) \geq 0$ なる連続関数で、compact support を持つすべてのものに対して

$$\psi_{N_\omega^{(k)}}(f) \longrightarrow \psi_{N_\omega}(f)$$

となることが必要十分であることが知られている。

以上の内容も含めて、点過程の一般論の本格的な説明については例えば Neveu の講義録 [16] または Daley, Vere-Jones の書 [6] を参照されたい。

3　定常な Poisson 点過程

3.1　定義と基本的な性質

点過程 N_ω は、次の２条件を満たすとき平均 $\lambda > 0$ の定常な Poisson 点過程と呼ばれる：

1. $A \cap B = \emptyset$ ならば $N_\omega(A)$ と $N_\omega(B)$ は互いに独立な確率変数。
2. $A \subset \mathbf{R}$ が有界な Borel 集合、$|A|$ がその Lesbesgue 測度（集合の体積）ならば $N_\omega(A)$ は平均 $\lambda|A|$ の Poisson 分布に従う。即ち

$$P(N_\omega(A) = k) = e^{-\lambda|A|}\frac{(\lambda|A|)^k}{k!} \quad , \ k = 0, 1, \ldots \ .$$

この定義から次のことがわかる。

[1] N_ω の Laplace 汎関数は

$$\psi(f) = \exp[-\lambda \int_\infty^\infty (1 - e^{-f(x)})dx]$$

となる。ただし $f(x) \geq 0$ は Borel 可測関数。

略証。簡単のため $f(x)$ は連続で、有限区間 $I = [a, b]$ の外では恒等的に 0 とする。I を十分細かな区間 I_j に分割し、$c_j = f(x_j)$, $x_j \in I$ とすると $f(x)$ は階段関数

$$g(x) = \sum_{j=1}^n c_j 1_{I_j}(x)$$

で近似される。このような階段関数に対して上の公式を証明するのは直接計算により可能である。あとは極限移行によって一般の f の場合も示される。

[2] $h \downarrow 0$ とするとき、

$$P(N_\omega(t, t+h] \geq 2) = \mathcal{O}(h^2) \ .$$

５節に述べるようにこのことから Posson 点過程 N_ω は単純であることがわかる。

[3] 今述べたように N_ω は単純であるから、N_ω を構成する点を一列に並べることができる。その際、原点の右にあって原点に最も近い点を x_1 と名づける。そうすると他の点の名も自動的に決まって

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \leq 0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

となる。このとき確率変数列

$$\ldots, (x_{-2} - x_{-3}) \ , \ (x_{-1} - x_{-2}) \ , \ (x_0 - x_{-1}) \ ; \ -x_0 \ ; \ x_1 \ , \ (x_2 - x_1) \ , \ldots$$

は独立でいずれも指数分布 $\lambda e^{-\lambda t}dt$ に従う。

この定理にすっきりした証明を与えるのは意外に難しい。(詳しくは例えば Kingman [10] を参照。) ここでは x_1 と $x_2 - x_1$ が独立で、ともに指数分布に従うことをやや不完全な議論で示すにとどめる。

$t_1, t_2 > 0$ とし、t_1 , t_2 の周囲の、長さ dt_1 , dt_2 の微小区間を考える。すると x_1 , x_2 の定義より。

$$
\begin{aligned}
& P(x_1 \in dt_1\ ,\ x_2 \in dt_2) \\
= \quad & P(N_\omega(0,t_1] = 0, N_\omega(t_1, t_1 + dt_1] = 1, N_\omega(t_1 + dt_1, t_1 + t_2] = 0, N_\omega(t_2, t_2 + dt_2] \geq 1) \\
= \quad & P(N_\omega(0,t_1] = 0) P(N_\omega(t_1, t_1 + dt_1] = 1) P(N_\omega(t_1 + dt_1, t_1 + t_2] = 0) \\
& \times P(N_\omega(t_1 + t_2, t_1 + t_2 + dt_2] \geq 1) \\
= \quad & (e^{-\lambda t_1} \lambda dt_1)(e^{-\lambda t_2} \lambda dt_2)
\end{aligned}
$$

隣り合う点の間隔を $\tau_n = x_n - x_{n-1}$ とおくと、今示したことから $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は独立な確率変数列となる。$n \neq 1$ ならば τ_n は指数分布 $\lambda e^{-\lambda t} dt$ に従うが、$\tau_1 = x_1 - x_0$ 即ち原点をはさむ２点 x_0 , x_1 の間隔だけは違う分布に従う。実際 $-x_0$, x_1 が独立でそれぞれ指数分布に従うことから

$$
\begin{aligned}
P(\tau_1 \leq t) \quad &= \quad P((-x_0) + x_1 \leq t) = \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{(0,t]}(s+u) \lambda e^{-\lambda s} \lambda e^{-\lambda u} ds du \\
&= \quad 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

これを微分して

$$P(\tau_1 \in dt) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt\ .$$

τ_1 の分布密度関数 $\lambda^2 t e^{-\lambda t}$ は $t = 1/\lambda$ にピークを持っているが、τ_n , $n \neq 1$ に対する密度関数 $\lambda e^{-\lambda t}$ は $t = 0$ にピークを持っている。即ち原点をはさむ２点 x_0 , x_1 の間にのみ反撥が見られるのである。この一見奇妙な現象は定常な点過程一般に共通することである。(７節参照。)

3.2 complete randomness

Poisson 点過程の条件 1. はしばしば complete randomness と呼ばれる。実はこの条件は N_ω の分布の Poisson 性を実質的に決めてしまうことが知られている。即ち次の定理が成り立つ：

点過程 N_ω は次の条件を満たすとする：

(a) 空でない任意の区間 I に対して

$$P(N_\omega(I) > 0) > 0\ .$$

(b) 区間 I , J が重なり合わないならば確率変数 $N_\omega(I)$ と $N_\omega(J)$ は互いに独立。

(c) 確率変数 $N_\omega(a+t, b+t]$ の分布は t に依らない。

このとき N_ω は次の形のものに限る：

$$N_\omega(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n \delta(x_n - \cdot) \ .$$

但し $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は Poisson 点過程を成し、$\{m_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と独立で互いの間でも独立同分布な自然数値確率変数列である。即ち N_ω は Poisson 点過程に従って配置された点の各々にランダムな重複度を与えたものになっている。このような点過程を複合 Poisson 点過程という。特に上の条件 (a), (b), (c) を満たす単純な点過程は Poisson 点過程に限られる。

3.3 Poisson 点過程への弱収束

Poisson 点過程はしばしば互いに独立で、それぞれは小さな密度を持つ点過程を数多く重ねあわせた極限として得られる。このことを数学的に定式化すると次のようになる：$L = 1, 2, \ldots$ に対して点過程の列

$$N_{\omega,L}^1 \ , \ldots , N_{\omega,L}^{k_L}$$

が次の条件を満たすように与えられているとする：

(0) $L \to \infty$ とするとき $k_L \to \infty$;

(i) $N_{\omega,L}^1, \ldots, N_{\omega,L}^{k_L}$ は互いに独立 ;

(ii) $\lim_{L\to\infty} \max_{1\le j\le k_L} \ P(N_{\omega,L}^j(A) \ge 1) = 0$;

(iii) $\lim_{L\to\infty} \sum_{j=1}^{k_L} P(N_{\omega,L}^j(A) \ge 2) = 0$;

(iv) $\lim_{L\to\infty} \sum_{j=1}^{k_L} P(N_{\omega,L}^j(A) \ge 1) = \lambda |A|$.

但し λ は定数。また (ii), (iii), (iv) において A は任意の有限区間を表すものとする。

定理. 上記の条件の下に $N_{\omega,L} = \sum_{j=1}^{k_L} N_{\omega,L}^j$ は $L \to \infty$ とするとき $\lambda \ge 0$ の定常 Poisson 点過程に弱収束する。

この定理の証明は Daley と Vere-Jones の書 [6] にあるが、ここでその概略を述べておく。示すべきことは、点過程 $N_{\omega,L}$ の Laplace 汎関数が Poisson 点過程のそれに収束す

ることである。即ち $f(x) \geq 0$ はある有界区間 A の外側で恒等的に 0 となる連続関数として、

$$\psi_L(f) \equiv E[\exp(-N_{\omega,L}(f))] \longrightarrow \exp\{-\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{-f(x)})dx\}$$

が成り立つこと、いいかえると

$$\lim_{L\to\infty} \log \psi_L(f) = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{-f(x)})dx$$

が成り立つことを示せばよい。さらにそのためには A を小区間 $A_1, \ldots, A_M$, $A_k = [x_{k-1}, x_k]$ に分割した上で関数 $f(x)$ を階段関数

$$g(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k 1_{A_k}(x) \qquad \text{ただし} \ \ c_k = f(x_k)$$

でおきかえてよい。分割を細かくすれば $g(x)$ は $f(x)$ を任意の精度で一様近似するから、証明すべき式において f を g でおきかえることによる誤差は任意に小さくできる。

さて条件 (i) により

$$\begin{aligned}
\log \psi_L(g) &= \log E[\exp(-\sum_{j=1}^{k_L} N^j_{\omega,L}(g))] \\
&= \log \prod_{j=1}^{k_L} E[\exp(-N^j_{\omega,L}(g))] \\
&= \sum_{j=1}^{k_L} \log E[\exp(-N^j_{\omega,L}(g))]
\end{aligned}$$

ここで log の中にある期待値は

$$\begin{aligned}
E[\exp(-N^j_{\omega,L}(g))] &= P(N^j_{\omega,L}(A) = 0) \\
&\quad + E[N^j_{\omega,L}(A) = 1 \ ; \ \exp(-N^j_{\omega,L}(g))] \\
&\quad + E[N^j_{\omega,L}(A) \geq 2 \ ; \ \exp(-N^j_{\omega,L}(g))]
\end{aligned}$$

と３つに分けられるが、[1]このうち右辺の第１項、第３項については

$$P(N^j_{\omega,L}(A) = 0) = 1 - P(N^j_{\omega,L}(A) \geq 1) \ ;$$

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{j=1}^{k_L} P(N^j_{\omega,L}(A) \geq 1) = \lambda |A| \ .$$

[1]一般に確率変数 X および事象 A に対して $E[A; X] = E[1_A X]$ とする。

および

$$E[N^j_{\omega,L}(A)\geq 2\ ;\ \exp(-N^j_{\omega,L}(g))]\ \leq\ P(N^j_{\omega,L}(A)\geq 2)\ ;$$

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{j=1}^{k_L}P(N^j_{\omega,L}(A)\geq 2)=0$$

なる評価が成り立つ。また第２項は

$$\begin{aligned} & E[N^j_{\omega,L}(A)=1\ ;\ \exp(-N^j_{\omega,L}(g))] \\ = & \sum_{k=1}^{M}P(N^j_{\omega,L}(A_k)=1\ ,\ N^j_{\omega,L}(A_\ell)=0\ ,\ \text{for}\ \ell\neq k)\exp(-c_k) \end{aligned}$$

と書き換えられるが、これについては

$$\begin{aligned} & P(N^j_{\omega,L}(A_k)\geq 1)-P(N^j_{\omega,L}(A_k)=1\ ,\ N^j_{\omega,L}(A_\ell)=0\ ,\ \text{for}\ \ell\neq k) \\ \leq\ & P(N^j_{\omega,L}(A)\geq 2) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上をまとめて

$$\begin{aligned} \log\psi_L(g) &= \sum_{j=1}^{k_L}\log\Big\{1-P(N^j_{\omega,L}(A)\geq 1) \\ &\quad +\sum_{k=1}^{M}P(N^j_{\omega,L}(A_k)\geq 1)e^{-c_k}+\mathcal{O}(P(N^j_{\omega,L}(A)\geq 2))\Big\} \\ &= -\sum_{j=1}^{k_L}P(N^j_{\omega,L}(A)\geq 1)+\sum_{k=1}^{M}e^{-c_k}\sum_{j=1}^{k_L}P(N^j_{\omega,L}(A_k)\geq 1) \\ &\quad +\mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{k_L}P(N^j_{\omega,L}(A_k)\geq 2)\right) \\ &\longrightarrow -\lambda|A|+\sum_{k=1}^{M}e^{-c_k}\lambda|A|=-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-g(x)})dx \end{aligned}$$

を得る。（証明終わり。）

特に $N^j_{\omega,L}$, $j=1,\ldots,k_L$ がそれぞれ単純で同じ分布に従うとき、条件 (iii), (iv) が成り立つためには次の (v), (vi) が十分である：

任意の有界区間 A に対して、

(v)

$$\lim_{L\to\infty}E[N^j_{\omega,L}(A)]=\lambda|A|\ ;$$

(vi)

$$\lim_{L\to\infty}k_LE[N^j_{\omega,L}(A)(N_{\omega,L}(A)-1)]=0\ .$$

4 Anderson 局在とスペクトルの Poisson 性

前節に述べたことの応用として Anderson 局在を起こすランダム系のスペクトルは Poisson 点過程で近似されることが示される。詳細は [13] および [15] にゆずってここでは直感的なアイディアのみを述べる。

Anderson の tight binding model は d 次元格子 $\mathbf{Z}^d$ 上の関数 $u(x)$ に次のように作用するランダムな Hamiltonian である：

$$(Hu)(x) = -(\Delta u)(x) + V_\omega(x)u(x) \quad , \ x \in \mathbf{Z}^d \ .$$

但し

$$(\Delta u)(x) = \sum_{|y-x|=1} (u(y) - u(x))$$

は Laplacian の差分化、また $\{V_\omega(x) : x \in \mathbf{Z}^d\}$ は独立同分布な確率変数族である。V はランダム・ポテンシャルを表している。以下各々の $V_\omega(x)$ は有界な確率分布密度を持つとする。即ち

$$P(V(x) \le t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(s)ds \quad , \ 0 \le \rho(s) \le C = \text{ 定数 } \ .$$

さて、ここでは大きな有界領域 $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ に H を制限したもの

$$H_\Lambda = \chi_\Lambda H \chi_\Lambda$$

を考え、そのスペクトルの点過程としての極限的性質を問題にする。そこで H_Λ の固有値を

$$E_1(\Lambda) < E_2(\Lambda) < \cdots < E_L(\Lambda) \quad , \ L = |\Lambda|$$

とする。H_Λ の固有値は $V(x)$ に対する上記の仮定の下に確率 1 で非縮退であることが知られている。([11] 参照。)

さらに Λ を hypercube とすると、ランダムでない関数 $n(E)$ が存在して確率 1 で

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sharp\{j \mid E_j(\Lambda) \le E\} = \int_{-\infty}^{E} n(E')dE'$$

となることが知られている。(例えば [5] を見よ。) この $n(E)$ を状態密度関数 (density of states) という。$n(E)$ が有界（実は $n(E) \le \sup_t \rho(t)$ ）であることは容易に示すことができる。（ただし $n(E)$ の連続性、微分可能性，解析性などを証明するのは難しい問題である。）したがって Lesbesgue 積分論で知られているように $N(E)$ は殆どすべての E に対して微分可能で、$N'(E) = n(E)$ となる。今そのような E の値を一つ固定すると、

上の式より E の近傍で準位 $\{E_j(\Lambda)\}_j$ の間隔は $(n(E)|\Lambda|)^{-1}$ のオーダーであると考えられる。そこで E を中心として、

$$e_j(\Lambda) \equiv |\Lambda|(E_j(\Lambda) - E)$$

のようにスケール（あるいは unfold ）した準位 $\{e_j(\Lambda)\}_j$ を考える。さらに

$$N_\omega^{\Lambda,E}(\cdot) = \sum_j \delta(e_j(\Lambda) - \cdot)$$

なる点過程を考えるとき、$\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$ におけるその極限挙動を問題にするのは自然なことであろう。E の近傍において Anderson 局在が起きるかどうかによってこの極限挙動が異なることが数値実験などによって明らかにされているが、数学的に厳密な理論はまだできあがっていない。ここでは Anderson 局在を保証するような次の条件 (c.f. [1], [7]) の下で $N_\omega^{\Lambda,E}$ の極限が平均 $n(E)$ の Poisson 点過程になることを示す。

条件 (L)：$\Im\zeta \neq 0$ なる複素数 $\zeta \in \mathbf{C}$ に対して、$G_\Lambda(\zeta; x, y)$ を H_Λ の Green 関数、即ち $(H_\Lambda - \zeta)^{-1}$ の核とする。このとき定数 $0 < s_0 < 1$, $C > 0$, $m > 0$ および $r > 0$ があって任意の hypercube Λ に対して

$$E[|G_\Lambda(\zeta; x, y)|^{s_0}] \leq Ce^{-m|x-y|} \ .$$

但し $\Im\zeta > 0$ かつ $|\zeta - E| < r$. また $x, y \in \Lambda$ のうち一方は Λ の境界上にあるものとする。

この条件は disorder が大きい（いいかえると $\sup_t \rho(t)$ が小さい）かまたは E がスペクトルの端部に近いとき成り立つことがわかっている。（このこと、および条件 (L) が Anderson 局在の十分条件であることの証明については [1] , [7] を参照されたい。）

以上の仮定の下に

定理. $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$ とするとき点過程 $N_\omega^{\Lambda,E}$ は平均 $n(E)$ の Poisson 点過程に弱収束する。

この定理は次のようにして証明される。まず Λ は辺の長さ L の hypercube 、また $K_L = L^\alpha$ $0 < \alpha < 1$ として Λ を K_L^α 個の cells $\{C_p\}_p$ に分割する。H_{C_p} の固有値を $\{E_j(C_p)\}_j$ とし、$\{|\Lambda|(E_j(C_p) - E)\}_j$ の作る点過程を $N_\omega^{\Lambda,E,p}$ とすると、次が成り立つ：

1. 条件 (L) より、異なる cells の間には殆ど相互作用がないことが言える。従って $N_\omega^{\Lambda,E}$ は $\sum_p N_\omega^{\Lambda,E,p}$ で近似される。
2. ランダム・ポテンシャルに対する仮定から $\{N_\omega^{\Lambda,E,p}\}_p$ は互いに独立で、かつほぼ同分布である。
3. 先に注意したように各 $N_\omega^{\Lambda,E,p}$ は単純な点過程である。

4. 任意の有界区間 A に対して

$$E[N_\omega^{\Lambda,E,p}(A)] \sim K_L^{-d}|A|n(E)$$

5. 同じく任意の有界区間 A に対して

$$E[N_\omega^{\Lambda,E,p}(A)\{N_\omega^{\Lambda,E,p}(A)-1\}] = \mathcal{O}(K_L^{-2d}) \ .$$

こうして前節の最後に述べた状況が実現し、定理の主張が得られるのである。

5 定常な点過程。その準位統計への応用。

点過程 N_ω が定常とは、次に述べるように N_ω を任意に平行移動したもの $N_\omega(\cdot+t)$ の確率分布が N_ω のそれと変わらないことである。３節で扱った Poisson 点過程はその例になっている。

準位統計においてはハミルトニアンのスペクトルの "揺らぎ " が研究されるが、それが問題として成立するためにはまずハミルトニアンのスペクトルが局所的には定常な点過程と見なされるというフィクションが成立しなければならない。実際、準位に対する "統計操作 " はランダム・ハミルトニアンのアンサンブル上で行われるよりも、スペクトルの個々の実現についてエネルギー軸上で行われることが多いが、このことは定常な点過程の持つエルゴード性（６、７節参照）を前提にしているというべきであろう。また準位統計の際に行われるいわゆる "unfolding " とはスペクトルを定常点過程に見えるようにするための準備に他ならない。

本節では定常な点過程の基本性質をエルゴード定理を用いない範囲で述べ、準位統計の基礎概念との関連を考察する。特に長谷川洋氏の著書 [24] に解説してある $E(k,S)$, $F(k,S)$ 等の間の関係式が概ね Palm-Khinchin の等式と呼ばれるものから得られることを示す。本節の前半は Daley, Vere-Jones の書 [6] に沿っている。

定義. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された点過程 N_ω が定常 (stationary) とは、 任意の自然数 r 、任意の有限区間 $I_1,\dots,I_r$ および任意の非負整数 $k_1,\dots,k_r$ に対して確率の値

$$P(N_\omega(t+I_j)=k_j \ , \ j=1,\dots,r)$$

が t に依存しないことである。但し $t+I_j$ は区間 I_j を t だけずらしたもの。

３節に述べたように点過程 N_ω の確率分布は

$$P(N_\omega(I_j)=k_j \ , \ j=1,\dots,r)$$

の形の確率の値の全体のことである。従って今述べた N_ω の定常性の定義は N_ω の確率分布が平行移動の下で不変であること、と要約される。

この定義から直接導かれる性質をいくつか挙げる。以下

$$m \equiv E[N_\omega(0,1]] < \infty$$

を仮定する。

[1] 任意の実数 t および $x \geq 0$ に対して

$$E[N_\omega(t,t+x]] = mx \ .$$

この意味で m は点過程 N_ω の平均密度 (mean density) と呼ばれる。

実際 N_ω の定常性から $E[N_\omega(t,t+x]] = E[N_\omega(0,x]]$. そこで $M(x) = E[N_\omega(0,x]]$ とおくと任意の $x, y \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} M(x+y) &= E[N_\omega(0,x+y]] = E[N_\omega(0,x]] + E[N_\omega(x,x+y]] \\ &= M(x) + M(y) \end{aligned}$$

ところが関数方程式 $M(x+y) = M(x) + M(y)$ を満たして、$M(x) \geq 0$, $M(1) = m$ となる関数は $M(x) = mx$ に限られることが知られている。(証明は例えば Kestelman [9] をみられたい。)

[2] 極限値

$$\lambda = \lim_{h \to 0} P(N_\omega(0,h] > 0)/h$$

が存在して $\lambda \leq m$. この λ を N_ω の intensity と呼ぶ。

この種の極限定理の証明には次の一般的な補題がくりかえし用いられる：

補題. $g(x)$ が $x \geq 0$ に対して定義された関数で、2つの条件

1. $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$;
2. $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \quad (x, y > 0)$.

を満たすならば、極限

$$\alpha = \lim_{x \to 0} g(x)/x \ \leq \infty$$

が存在して

$$\alpha = \sup_{x > 0} \ g(x)/x$$

となる。

例えば [2] を証明するために関数 $\phi(x) = P(N_\omega(0,x] > 0)$ を導入すると、これは補題の条件を満たし、さらに

$$\phi(x) \leq mx$$

となる。これにより極限値 λ は存在して $\lambda \le m$ となる。

[3] 点過程 N_ω が単純ならば $\lambda = m$.

証明は省略する。

一般の定常な点過程 N_ω が与えられたとき、その点の重複度を 1 とおくことにより新しく単純点過程 N_ω^* が得られる。明らかに N_ω^* は N_ω と同じ intensity λ を持つが、[3] によりそれは N_ω^* の mean density に等しい。

[4] N_ω が単純であるための必要十分条件は

$$P(N_\omega(0,h] \ge 2) = o(h) \quad , \ h \downarrow 0 \ .$$

3.1 節で予告したようにこの判定条件により定常な Poisson 点過程（その平均を λ とする）が単純であることがわかる。実際 N_ω が Poisson ならば $h \downarrow 0$ とするとき

$$P(N_\omega(0,h] \ge 2) = e^{-\lambda h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}(\lambda h) = o(h^2)$$

である。

[5] $k = 1, 2, \ldots$ に対して極限値

$$\pi_k \equiv \lim_{h \downarrow 0} P(N_\omega(0,h] = k \mid N_\omega(0,h] > 0)$$

が存在して $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = 1$.

π_k の直感的な意味は "原点に N_ω の点があるときその重複度が k である確率 " と考えられる。

[6] $x > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して、極限値

$$Q_k(x) = \lim_{h \downarrow 0} P(N_\omega(0,x] \le k \mid N_\omega(-h,0] > 0)$$

が存在し、x の関数として右連続かつ非増加。

[7]（ Palm-Khinchin の等式）

定常な点過程 N_ω が単純（従って $\lambda = m$ ）かつ確率 1 で条件

$$N_\omega(-\infty, 0] = N_\omega(0, \infty) = \infty$$

を満たすとする。また $k=0,1,2,\ldots$ に対して

$$q_k(x) = Q_k(x) - Q_{k-1}(x) = \lim_{h\downarrow 0} P(N_\omega(0,x] = k \mid N_\omega(-h,0] > 0)$$

（但し $Q_{-1}(x) \equiv 0$ ）とおく。このとき

$$P(N_\omega(0,x] \le k) = \lambda \int_x^\infty q_k(u)du \quad , \ k = 0,1,\ldots$$

が成立する。さらに

$$R_k(x) \equiv 1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j(x)$$

は $(0,\infty)$ 上の確率分布関数となり、$k=1,2,\ldots$ に対して

$$\int_0^\infty \ x dR_k(x) = \frac{k}{\lambda}$$

[3]–[6] と同様この定理の証明も Daley–Vere-Jones [6] にゆずるが、$R_k(x)$ が確率分布関数になること、即ち

$$\lim_{x\to\infty} R_k(x) = 1$$

となることが初めの条件の帰結であることに注意しておく。実際、直感的には

$$R_k(x) = 1 - P(N_\omega(0,x] \le k-1 \mid N_\omega(\{0\}) > 0) = P(N_\omega(0,x] \ge k \mid N_\omega(\{0\}) > 0)$$

と考えられるが、ここで $x \to \infty$ とすれば

$$R_k(\infty) = P(N_\omega(0,\infty) \ge k \mid N_\omega(\{0\}) > 0)\ .$$

ところが条件によればこの確率は任意の $k=1,2,\ldots$ に対して 1 となるはずである。

準位統計への応用

準位統計においては次のような “確率 ” が問題になる（[24]）。但し考察の対象となるハミルトニアンのスペクトルは単純な定常点過程 N_ω により表されているとする。

- $E(k,S) \equiv P(N_\omega(0,S] = k)$;
- $F(k,S) \equiv P(N_\omega(0,S] = k \mid N_\omega(\{0\}) = 1)$;
- $P(k,S) \equiv P(N_\omega(0,S) = k \mid N_\omega(\{0\}) = N_\omega(\{S\}) = 1)$.

このうち $E(k,S)$ の定義には何ら問題点はないが、その次の２つの条件付確率には少し注意を要する。一般に単純かつ定常な点過程 N_ω に対しては [1] で述べたように

$$P(N_\omega(\{0\}) = 1) = E[N_\omega(\{0\})] = m \cdot 0 = 0\ ,$$

特に

$$P(N_\omega(\{0\}) = N_\omega(\{S\}) = 1) \leq P(N_\omega(\{0\}) = 1) = 0$$

となるから (1-2) 節で注意したように条件付確率を確率の値の比で定義することはできない。そこで $F(k,S)$ の定義式は、$h > 0$ ならば $P(N_\omega(-h,0] > 0) > 0$ となることに注意して

$$F(k,S) = \lim_{h\downarrow 0} P(N_\omega(0,S] = k \mid N_\omega(-h,0] > 0) = q_k(S)$$

を意味するものと理解する。このように考えても $P(k,S)$ の定義にはなお問題が残る。例えば N_ω が等間隔に並んだ点のみから成り立っている場合を考えてみる。点の間隔を簡単のため 1 とすると、S が整数でないときは十分小さなすべての $h > 0$ に対して

$$P(N_\omega(-h,0] > 0\ ,\ N_\omega[S,S+h] > 0) = 0$$

であるから

$$P(h,S) = \lim_{h\downarrow 0} P(N_\omega(0,S) = k \mid N_\omega(-h,0] > 0\ ,\ N_\omega[S,S+h] > 0)$$

のように定義することとさえ不可能になってしまう。ここでは $P(k,S)$ を条件付確率として定義することはしないで、$P(k,S)$ が満たすとされる関係式

$$P(k,S) = -\frac{d}{dS}\sum_{j=0}^{k} F(j,S) = -\frac{d}{dS}Q_k(S)$$

により $P(k,S)$ を定義する。ただしこの場合も $Q_k(S)$ が微分可能とは限らないので、測度あるいは超関数の意味で

$$P(k,S)dS = -dQ_k(S)$$

と考える。

まず Palm-Khinchin の等式により $k \geq 1$ に対しては

$$\begin{aligned} E(k,S) &= P(N_\omega(0,S] \leq k) - P(N_\omega(0,S] \leq k-1) \\ &= \lambda \int_S^\infty \{q_k(x) - q_{k-1}(x)\} dx \\ &= \lambda \int_S^\infty \{F(k,x) - F(k-1,x)\} dx\ , \end{aligned}$$

また

$$E(0,S) = \lambda \int_S^\infty F(0,x)dx$$

も成り立つ。ただし準位統計においては $\lambda = m = 1$ と規格化されていることに注意する。$F(k,x)$ がさらに x の連続関数だとすると、上の式から

$$\frac{d}{dS}E(k;S) = \begin{cases} \lambda\{F(k-1,S) - F(k,S)\ , & k \geq 1 \\ -\lambda F(0,S)\ , & k = 0 \end{cases}$$

を得る。

さらに次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(n,S) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_\omega(0,S] = n) = 1 \ ;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n,S) = 1 \ ;$$

$$\int_0^\infty P(k,S)dS = -\int_0^\infty dQ_k(S) = Q_k(0) = 1 \ ;$$

$$\int_0^\infty F(k,S)ds = \int_0^\infty q_k(S)dS = \frac{1}{\lambda}P(N_\omega(0,0] \le 0) = \frac{1}{\lambda} \ .$$

第４の式の最後の等号は、区間 $[0,0)$ が空であることから常に $N_\omega(0,0]=0$ となることによる。第２の等式の証明は次の通りである：$F(n,S)=q_n(S)=Q_n(S)-Q_{n-1}(S)$ により

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n,S) = \sup_n Q_n(S)$$

一方 $Q_n(S)$ の定義 ([6]) と $P(N_\omega(-h,0]>0) \sim \lambda h$ および補題より

$$Q_n(S) = \sup_{h>0} P(N_\omega(0,x] \le n \ , \ N_\omega(-h,0]>0)/\lambda h$$

$\sup_n$ と $\sup_{h>0}$ を交換して [2] に注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F(n;S) &= \sup_h P(N_\omega(0,x] < \infty \ , \ N_\omega(-h,0]>0)/\lambda h \\ &= \sup_h P(N_\omega(-h,0]>0)/\lambda h \\ &= 1\end{aligned}$$

を得る。

最後に [7] の最後の部分から

$$\int_0^\infty SP(k,S)dS = \int_0^\infty S(-dQ_k(S)) = \int_0^\infty SdR_{k+1}(S) = \frac{k+1}{\lambda} \ .$$

簡単な具体例を２つ考察する。

(a) 平均 λ の定常 Poisson 点過程 N_ω .

これについては $N_\omega(0,x]$ と $N_\omega(-h,0]$ の独立性から

$$Q_k(x) = \lim_{h\downarrow 0} P(N_\omega(0,x] \le k \mid N_\omega(-h,0]>0) = P(N_\omega(0,x] \le k) \ ;$$

$$q_k(x) = Q_k(x) - Q_{k-1}(x) = P(N_\omega(0,x] = k) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!} \ .$$

これにより Palm-Khinchin の等式は直接計算により確かめられる。またこの場合

$$E(k,S) = e^{-\lambda S}\frac{(\lambda S)^k}{k!} = F(k,S) \ ;$$

$$P(k;S) = -\frac{d}{dS}Q_k(S) = \lambda e^{-\lambda S}\frac{(\lambda S)^k}{k!} \ .$$

である。

(b) 確率空間、確率測度として $\Omega = [0,1)$, $P(d\omega) = d\omega$ （Lesbesgue 測度）をとり、

$$N_\omega(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n-\omega}(\cdot)$$

なる点過程を考えると、N_ω は定常であって N_ω の各点はすべて等間隔 (=1) に並んでいる。

さて $0 \leq x < j+1$ かつ $h > 0$ が十分小ならば、$N_\omega(-h,0] > 0$ なる限り常に $N_\omega(0,x] \leq j$ である。また $x \geq j+1$ ならば $N_\omega(-h,0] > 0$ なる限り常に $N_\omega(0,x] > j$ となる。一方 $P(N_\omega(-h,x] > 0) = h$, $(h<1)$ （特に $\lambda = 1$ ）だから

$$Q_j(x) = \begin{cases} 1, & x < j+1 \\ 0, & x \geq j+1 \end{cases}$$

従って $q_j(x) = 1_{[j,j+1)}(x)$ となる。また

$$P(k,S) = -\frac{d}{dS}Q_k(S) = \delta(k+1-\cdot)$$

である。

6 エルゴード的な点過程

$\mathbf{R}$ の点 x を左に t だけずらす変換を τ_t とする。即ち $\tau_t x = x - t$. また $\mathbf{R}$ 上の点配置 $N = (\xi, m_\xi) \in Q$ に対して、点配置 $\tau_t N \in Q$ を

$$(\tau_t N)(f) = N(f \circ \tau_t) = \sum_{x\in\xi} m_\xi(x) f(x-t) = \sum_{y\in\xi-t} m_{\xi-t}(y) f(y)$$

により定義する。τ_t により点配置 N は全体として左に t だけずれることになる。

さて点過程 N_ω が定義されている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に flow $\{\theta_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ が備わっているとする。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$N_{\theta_t \omega} = \tau_t N_\omega$$

が成り立つとき点過程は $\{\theta_t\}-$ 定常であるということにする。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の変換 θ_t が確率測度 P を保存することから $\{\theta_t\}-$ 定常な点過程 N_ω は前節の意味で定常であることがわかる。逆に点過程 N_ω が前節の意味で定常とすると flow $\{\theta'_t\}$ を備えた確率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ およびその上で定義された $\{\theta'_t\}-$ 定常な点過程 $N'_{\omega'}$ が存在して N_ω と $N'_{\omega'}$ は同じ確率分布に従う。$(\omega' \in \Omega'.)$ 以後エルゴード定理を有効に用いたり Palm 測度に関する諸定理を明解にするため $\{\theta_t\}-$ 定常な点過程に考察を限るが、今述べたことから、そのようにしても一般性が失われるわけではない。

今後 flow $\{\theta_t\}$ はエルゴード的であると仮定する。また前節同様

$$m = E[N_\omega(0,1]] < \infty$$

も仮定する。

定常な Poisson 点過程を（必要ならば確率空間を取り換えることにより）$\{\theta_t\}-$ 定常な点過程とみなすことができるが、さらに $\{\theta_t\}$ がエルゴード的であるようにもできる。また前節の最後の例 (b) において $\Omega = [0,1)$ の変換 θ_t を

$$\theta_t \omega = \{\omega + t\} \quad , \ \omega \in [0,1)$$

により定義する（ただし $\{a\}$ は a の小数部分）と、$\{\theta_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ はエルゴード的な flow になることはよく知られている。そして N_ω は $\{\theta_t\}-$ 定常である。

本節の残りでエルゴード的な点過程の簡単な性質をいくつか挙げる。Palm 測度の詳しい説明は次節に行う。

[1] 確率１で

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} N_\omega(0,1] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} N_\omega(x,0] = m \ .$$

従って $m > 0$ ならば確率１で

$$N_\omega(-\infty, 0] = N_\omega(0, \infty) = \infty$$

となり、Palm-khinchin の等式の成立条件が満たされる。

証明。$x = n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$N_\omega(0,x] = \sum_{j=0}^{n-1} N_\omega(j, j+1] = \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_j N_\omega)(0,1] = \sum_{j=0}^{n-1} N_{\theta_j \omega}(0,1] \ .$$

従って確率変数 $f(\omega) = N_\omega(0,1]$ と automorphism θ_1 に対してエルゴード定理を適用すると、確率１で極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} N_\omega(0,1] = M(\omega)$$

が存在して $E[M(\omega)]=E[N_\omega(0,1]]=m$ となる。

つぎに任意の $x>0$ に対して、自然数 n を $n\le x\le n+1$ のようにとると、

$$\frac{n}{x}\frac{N_\omega(0,n]}{n}\le\frac{N_\omega(0,x]}{x}\le\frac{n+1}{x}\frac{N_\omega(0,n+1]}{n+1}$$

$x\to\infty$ とすると $n\to\infty$ かつ $n/x\to 1$ となるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_\omega(0,x]}{x}=M(\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_\omega(0,n]}{n}$$

となる。一方任意の $t\in\mathbf{R}$ に対し、

$$M(\theta_t\omega)=\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\theta_t\omega}(0,x]}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{N_\omega(t,t+x]}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{N_\omega(0,x]}{x}=M(\omega)\ .$$

従って $M(\omega)$ は flow $\{\theta_t\}$ に関する不変関数となり、$\{\theta_t\}$ のエルゴード性から $M(\omega)=M=$ 定数 である。ところが $E[M(\omega)]=m$ より実は $M=m$.（証明終わり。）

[2] $I_1,\ldots,I_n\in\mathbf{R}$ は互いに素な有界区間、$k_1,\ldots,k_n\in$ は非負整数とし、実数の集合

$$F_T^\omega=\{t\in(0,T]\mid N_\omega(t+I_j)=k_j\ ,\ j=1,\ldots,n\}$$

を考える。このとき確率１で

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|F_T^\omega|=P(N_\omega(I_j)=k_j\ ,\ j=1,\ldots,n)\ .$$

証明。 事象

$$A=\{\omega\in\Omega\mid N_\omega(I_j)=k_j\ ,\ j=1,\ldots,n\}$$

を考えると $0\le t\le T$ に対して

$$t\in F_T^\omega\ \Leftrightarrow\ \theta_t\omega\in A$$

従って

$$|F_T^\omega|=\int_0^T 1_{F_T^\omega}(t)dt=\int_0^T 1_A(\theta_t\omega)dt$$

となるからエルゴード定理により確率１で

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|F_T^\omega|=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T 1_A(\theta_t\omega)dt=E[1_A]=P(A)\ .$$

（証明終わり。）

この定理により、エルゴード的な点過程の典型的な実現 が一つ与えられると、もとの点過程の確率分布が復元されることがわかる。

[3] $E[\{N_\omega(0,1]\}^2] < \infty$ ならば $V(N_\omega(0,x])$ は任意の $x > 0$ に対して定義できるが、さらに

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} V(N_\omega(0,x]) = 0 \ .$$

となる。

証明。$x = n = 1, 2, \ldots$ の場合を考えると、平均エルゴード定理によって $x = n \to \infty$ とするとき

$$\frac{1}{n^2} V(N_\omega(0,n]) = E[\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} N_{\theta_j\omega}(0,1] - m\}^2] \longrightarrow 0 \ .$$

この主張が一般の $x \to \infty$ に対しても成り立つことは [1] と同様の議論により示すことができる。

$V(N_\omega(0,x])$ は準位統計では $\Sigma^2(x)$ と書かれ、number variance と呼ばれている。この定理によると例えば $\Sigma^2(x) = x^2$ となるようなエルゴード的点過程は存在しないことがわかる。

平均 λ の定常 Poisson 点過程の場合は

$$V(N_\omega(0,x]) = \Sigma^2(x) = \lambda x \ .$$

また等間隔な点配置から成る点過程については

$$\Sigma^2(x) = \{x\}(1 - \{x\})$$

となる。（$\{x\}$ は x の小数部分。$\{x\} = x - [x]$）

N_ω が単純のとき $V(N_\omega(0,x])$ と, Palm-Khinchin の等式に現れる $q_k(x)$ との間には次の関係が成り立つ（証明は Daley–Vere-Jones [6] にある）:

$$V(N_\omega(0,x]) = mx - (mx)^2 + 2m\int_0^x (\sum_{k=1}^{\infty} kq_k(u))du \ ,$$

いいかえると

$$\Sigma^2(x) = mx - (mx)^2 + 2m\int_0^x (\sum_{k=1}^{\infty} kF(k;u))du \ .$$

さてこの第 2 の式をさらに書き換えてみよう。

$$P(k;x)dx = -\sum_{j=0}^{k} dF(j;x)$$

より

$$\int_0^r P(k;x)dx = -\sum_{j=0}^{k} F(j;r) + 1$$

従って $k \geq 1$ に対して

$$F(k;r) = -\int_0^r \{P(k;x) - P(k-1;x)\}dx$$

故に

$$\sum_{k=1}^{\infty} kF(k;r) = -\int_0^r \sum_{k=1}^{\infty} k\{P(k;x) - P(k-1;x)\}dx = \int_0^r \sum_{k=0}^{\infty} P(k;x)dx$$

これを上の式に代入すれば

$$\Sigma^2(x) = mx - (mx)^2 + 2m\int_0^x (x-r)\sum_{k=0}^{\infty} P(k;r)dr$$

を得る。この式は $m = 1$ のとき [24] の (4.5) 式と同じになる。

7　Palm 測度、定常点過程の構造、間隔分布

前節同様、点過程 N_ω が定義されている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に flow $\{\theta_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ が与えられていて、N_ω は $\{\theta_t\}-$ 定常であるとする。このとき $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に Palm 測度と呼ばれる測度 $\hat{P}(d\omega)$ が存在する。$\hat{P}$ は一般に確率測度にはならないが、点過程 N_ω が単純で、平均密度 $m = E[N_\omega(0,1]] = 1$ のときには $N_\omega(\{0\}) = 1$ という条件の下での N_ω の確率法則を与える。また Palm 測度を用いることにより定常な点過程の構造が明らかになり、"間隔分布 " の意味もはっきりする。尚、本節の記述は主に J. Neveu の講義録 [16] によった。

まず Palm 測度の定義と存在を同時に示す基本定理を述べる。（これは多次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ 上の定常な点過程についても成立するものである。）

[1] N_ω が $\{\theta_t\}-$ 定常な $\mathbf{R}$ 上の点過程ならば $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 $\hat{P}(d\omega)$ で次の条件を満たすものが存在する。この $\hat{P}$ を点過程 N_ω に対する Palm 測度と呼ぶ：

$\Omega \times \mathbf{R}$ 上の任意の可測関数 $f(\omega, s) \geq 0$ に対して

$$\int_\Omega P(d\omega)\int_{\mathbf{R}} N(\omega, ds)f(\theta_s\omega, s) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega)\int_{\mathbf{R}} dsf(\omega, s)\ .$$

$f(\omega, s) = g(\theta_{-s}\omega, s)$ と置き換えれば、この条件は次と同値である：$\Omega \times \mathbf{R}$ 上の任意の可測関数 $g(\omega, s) \geq 0$ に対して

$$\int_\Omega P(d\omega)\int_{\mathbf{R}} N(\omega, ds)g(\omega, s) = \int_\Omega \hat{P}(d\omega)\int_{\mathbf{R}} dsg(\theta_{-s}\omega, s)\ .$$

（$N_\omega(ds) = N(\omega, ds)$ と書いた。また $\int N(\omega, ds)F(s) = N_\omega(F)$ である。）以下この定

理を認めて話を進める。

[2] [1] において $g(\omega,s)=1_A(s)$, $A\subset \mathbf{R}$ ととると

$$\int_\Omega P(d\omega)\int_{\mathbf{R}} N(\omega,ds)1_A(s)=\int_\Omega P(d\omega)N_\omega(A)=E[N_\omega(A)]\ ;$$

$$\int_\Omega \hat{P}(d\omega)\int_{\mathbf{R}} ds1_A(s)=|A|\hat{P}(\Omega)\ .$$

従って、特に $A=(0,1]$ として

$$m=E[N_\omega(0,1]]=\hat{P}(\Omega)\ .$$

従って $m=1$ の場合を除けば $\hat{P}$ は確率測度ではない。以下今までと同様 $m<\infty$ を仮定すると $\hat{P}$ は有限な測度になる。

[3] $\hat{P}$ は Ω の部分集合

$$\hat{\Omega}\equiv\{\omega\in\omega \mid N_\omega(\{0\})>0\}$$

の上に集中している。

これを示すために $\mathbf{R}$ 上の関数 $u(s)$ で、$u(s)>0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty}u(s)ds=1$ となるものを一つとる。すると $k=0,1,\dots$ に対して

$$\begin{aligned}
\hat{P}(N_\omega(\{0\})=k) &= \int_\Omega \hat{P}(d\omega)\int_{\mathbf{R}} ds1_{\{N_\omega(\omega,\{0\})=k\}}u(s)\\
&= \int_\Omega P(d\omega)\int_{\mathbf{R}} N(\omega,ds)1_{\{N(\theta_s\omega,\{0\})=k\}}u(s)\\
&= \int_\Omega P(d\omega)\int_{\mathbf{R}} N(\omega,ds)1_{\{N(\omega,\{s\})=k\}}u(s)\ .
\end{aligned}$$

ここで $k=0$ ととると $N(\omega,\{s\})>0$ となる点 s において $1_{\{N(\omega,\{s\})=0\}}=0$ となるから上式の右辺 $=0$ となる。従って $\hat{P}(N_\omega(\{0\})=0)=0$, 即ち $\hat{P}(\hat{\Omega}^c)=0$. さらに点過程 N_ω が単純ならば同様の議論により

$$\hat{P}(N_\omega(\{0\})\ge 2)=\int_\Omega P(d\omega)\int_{\mathbf{R}} N_\omega(ds)1_{\{N_\omega(\{s\})\ge 2\}}u(s)=0$$

となり $\hat{P}$ は $\hat{\Omega}$ の部分集合

$$\hat{\Omega}_1=\{\omega\in\Omega \mid N_\omega(\{0\})=1\}$$

の上に集中していることがわかる。一方、定常な点過程に対しては一般に

$$P(N_\omega(\{x\})>0)=0\ ,\quad x\in\mathbf{R}$$

となるから $P(\hat{\Omega}) = 0$ である。即ち Ω 上の2つの測度 P と $\hat{P}$ は互いに特異である。

[4] N_ω は単純で $m = \hat{P}(\Omega) < \infty$ とする。このとき $\varphi \geq 0$ なる連続関数で有界区間の外では恒等的に 0 となる任意のものに対して

$$\frac{1}{\hat{P}(\Omega)} \int_\Omega \exp(-N_\omega(\varphi)) \hat{P}(d\omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\Omega \exp(-N_\omega(\varphi)) P(d\omega | N_\omega(-\epsilon, \epsilon) > 0)$$

となる。

$m = \hat{P}(\Omega) = 1$ のときこの等式の左辺は確率法則 $\hat{P}$ に従う点過程の Laplace 汎関数を表している。一方、右辺は条件付き確率法則 $P(\cdot | N_\omega(-\epsilon, \epsilon) > 0)$ の下での Laplace 汎関数の極限を表している。Laplace 汎関数は点過程の確率分布を一意に決めるから直感的には

$$\hat{P}(\cdot) = P(\cdot | N_\omega(\{0\}) > 0)$$

と考えてよい。

等式 [4] の証明の概略： $h(\omega) \equiv \exp(-N_\omega(\varphi))$ とおくと $h(\theta_t \omega) = \exp(-N_\omega(\varphi \circ \tau_t))$ は t について連続になる。従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega P(d\omega) h(\omega) N_\omega(-\epsilon, \epsilon) &= \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega \hat{P}(d\omega) \int_{\mathbf{R}} ds 1_{(-\epsilon,\epsilon)}(s) h(\theta_{-s}\omega) \\ &\longrightarrow \int_\Omega \hat{P}(d\omega) h(\omega) , \quad (\epsilon \downarrow 0) \end{aligned}$$

となる。ここで初めの等号は [1] において $g(\omega, s) = h(\omega) 1_{(-\epsilon,\epsilon)}(s)$ ととることにより得られる。一方 N_ω が単純ならば、左辺の $N_\omega(-\epsilon, \epsilon)$ を $1_{\{N_\omega(-\epsilon,\epsilon)>0\}}$ で置き換えることによる誤差は $\epsilon \downarrow 0$ の極限では無視できるから

$$\int_\Omega \hat{P}(d\omega) h(\omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega P(d\omega) h(\omega) 1_{\{N_\omega(-\epsilon,\epsilon)>0\}} \ .$$

特に $\varphi \equiv 0$ ととると $h(\omega) = 1$ となり

$$\hat{P}(\Omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} P(N_\omega(-\epsilon, \epsilon) > 0)$$

を得る。これを再び上式に持ち込むと

$$\frac{1}{\hat{P}(\Omega)} \int_\Omega \hat{P}(d\omega) h(\omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\Omega h(\omega) P(d\omega | N_\omega(-\epsilon, \epsilon) > 0)$$

が得られる。

[5] 改めて点過程 N_ω は単純かつ $\{\theta_t\}$− 定常で、flow $\{\theta_t\}$ はエルゴード的とする。このとき 6 節 [1] によって、$m > 0$ なる限り確率 1 で

$$N_\omega(-\infty, 0] = N_\omega(0, \infty) = \infty$$

となる。従って点過程 N_ω は

$$\cdots < T_{-2}(\omega) < T_{-1}(\omega) < T_0(\omega) \le 0 < T_1(\omega) < T_2(\omega) < \cdots$$

を満たす点列 $\{T_n(\omega)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ によって

$$N_\omega(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{T_n(\omega)}(\cdot)$$

と表現される。

$$\hat{\Omega} = \{\omega \mid N_\omega(\{0\}) > 0\} = \{\omega\ ;\ T_0(\omega) = 0\}$$

とすると [3] により N_ω の Palm 測度 $\hat{P}$ は $\hat{\Omega}$ の上に集中している。$T_0(\omega)$ を用いると Palm 測度の基本定理 ([1]) は次のようにも述べられる：$\Omega \times [0, \infty)$ 上の任意の可測関数 $g(\omega, s) \ge 0$ に対して

(i)

$$\int_\Omega P(d\omega) g(\theta_{T_0(\omega)}\omega, -T_0(\omega)) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} ds g(\omega, s)\ .$$

特に $g(\omega, s) = f(\omega)$ とすると

(ii)

$$\int_\Omega P(d\omega) f(\theta_{T_0(\omega)}\omega) = \int_{\hat{\Omega}} T_1(\omega) f(\omega)\ .$$

また $g(\omega, s) = f(\theta_s \omega)$ とすると $g(\theta_{T_0(\omega)}\omega, -T_0(\omega)) = f(\omega)$ に注意して

(iii)

$$\int_\Omega P(d\omega) f(\omega) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} ds f(\theta_s \omega)\ .$$

(i) の証明：$a_0(\omega, s) = 1_{\{T_0(\omega) \le s < T_1(\omega)\}}$ なる関数を考えると、$a_0(\theta_s\omega, -s) = a_0(\omega, s)$ が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} a_0(\theta_s\omega, -s) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad T_0(\theta_s\omega) \le -s < T_1(\theta_s\omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad T_0(\theta_s\omega) + s \le 0 < T_1(\theta_s\omega) + s \\ &\Longleftrightarrow \quad T_0(\omega) \le s < T_1(\omega) \\ &\Longleftrightarrow \quad a_0(\omega, s) = 1 \end{aligned}$$

そこで基本定理 [1] において

$$f(\omega, s) = a_0(\omega, -s) g(\omega, -s)$$

ととると

$$\int_{\Omega} P(d\omega) \int_{\mathbf{R}} N_{\omega}(ds) a_0(\theta_s\omega, -s) g(\theta_s\omega, -s) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) \int_{\mathbf{R}} ds a_0(\omega, -s) g(\omega, -s)$$

ところが $\omega \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} N_{\omega}(ds) a_0(\theta_s\omega, -s) g(\theta_s\omega, -s) &= \int_{\mathbf{R}} N_{\omega}(ds) a_0(\omega, s) g(\theta_s\omega, -s) \\ &= g(\theta_{T_0(\omega)}\omega, -T_0(\omega)) \end{aligned}$$

また $\omega \in \hat{\Omega}$ に対しては $T_0(\omega) = 0$ だから

$$\int_{\mathbf{R}} ds a_0(\omega, -s) g(\omega, -s) = \int_0^{T_0(\omega)} ds g(\omega, s)$$

となり、従って (i) が成り立つ。

$T_1 - T_0$, T_0 の確率分布については次の公式がなりたつ：

[6] 半直線 $(0, \infty)$ 上の測度 $\hat{F}(dv)$ を

$$\hat{F}(A) = \hat{P}(T_1(\omega) \in A) \ , \quad A \subset (0, \infty)$$

により定義すると

(0)

$$\int_0^{\infty} v\hat{F}(dv) = 1 \ ;$$

(i)

$$P(T_1 - T_0 \in dv \ , \ -T_0 \in ds) = \hat{F}(dv) 1_{[0,v)}(s) ds \ ;$$

(ii)

$$P(T_1 - T_0 \in dv) = v\hat{F}(dv) \ ;$$

(iii)

$$P(-T_0 \in ds) = P(T_1 \in ds) = p(s)ds \ , \ \text{但し} \ p(s) = \hat{F}((s, \infty)) \ .$$

証明： まず (i) を証明する。$h(v, s) \geq 0$ を $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上の任意の可測関数とする。$g(\omega, s) = h(T_1(\omega), s)$ として [5]-(i) を適用すると $T_1(\theta_{T_0(\omega)}\omega) = T_1(\omega) - T_0(\omega)$ だから

$$\int_{\Omega} P(d\omega) h(T_1(\omega) - T_0(\omega), -T_0(\omega)) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega) \int_0^{T_1(\omega)} ds h(T_1(\omega), s) \ .$$

いいかえると

$$\int\int h(v,s)P(T_1-T_0\in dv, -T_0\in ds)=\int\int h(v,s)\hat{F}(dv)1_{[0,v)}(s)ds\ .$$

関数 $h(v,s)$ は任意だからこの等式は (i) を示している。また $h\equiv 1$ ととると、(0) がわかる。

(i) において $h(v,s)=g(v)$ とすると（$g\geq 0$ は $[0,\infty)$ 上の任意の可測関数）

$$\int g(v)P(T_1-T_0\in dv)=\int g(v)v\hat{F}(dv)\ .$$

(ii) はこれより得られる。また $h(v,s)=g(s)$ とすると $1_{[0,v)}(s)=1_{(s,\infty)}(v)$ に注意して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)P(-T_0\in ds) &= \int\int g(s)1_{(s,\infty)}(v)\hat{F}(dv)ds\\ &= \int_0^\infty g(s)\hat{F}(s,\infty)ds\ .\end{aligned}$$

さらに $h(v,s)=g(v-s)1_{[0,v)}(s)$ ととると、

$$\int_0^\infty g(u)P(T_1\in du)=\int_0^\infty ds\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)1_{(s,\infty)}(T_1(\omega))g(T_1(\omega)-s)$$

が得られるが、特に $g(u)=1_{(x,\infty)}(u)$ とすると、

$$\begin{aligned}P(T_1>x) &= \int_0^\infty ds\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)1_{(s+x,\infty)}(T_1(\omega))\\ &= \int_0^\infty \hat{P}(T_1>s+x)ds\\ &= \int_x^\infty \hat{P}(T_1>s)ds\ .\end{aligned}$$

(iii) はこれらの等式から得られる。特に T_1 および $-T_0$ の分布は常に密度関数を持っている。

[7]（エルゴード的点過程の構造）点過程 $N_\omega=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{T_n(\omega)}$ は単純かつ $\{\theta_t\}-$ 定常、flow $\{\theta_t\}$ はエルゴード的とする。

$$\hat{\Omega}=\{\omega\in\Omega\mid N_\omega(\{0\})>0\}=\{\omega\in\Omega\mid T_0(\omega)=0\}$$

とすると、写像 $\theta_{T_n(\omega)}(\omega)$ は Ω を $\hat{\Omega}$ の上に写す。θ_{T_n} の $\hat{\Omega}$ への制限を $\hat{\theta}_n$ とすると $\{\hat{\theta}_n|n\in\mathbf{Z}\}$ は $(\hat{\Omega},\hat{P})$ 上の保測変換群をなし、automorphism $\hat{\theta}_0$ はエルゴード的である。逆に $\hat{P}$ が $\hat{\Omega}$ 上の測度で

$$\int_{\hat{\Omega}}T_1(\omega)\hat{P}(d\omega)=1$$

を満たし、さらに θ_{T_1} が $\hat{P}$ を保存するならば

$$\int_\Omega P(d\omega)f(\omega) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}(d\omega)\int_0^{T_1(\omega)} ds f(\theta_s\omega)$$

により定義される Ω 上の確率測度 P の下で点過程 N_ω は $\{\theta_t\}-$ 定常となる。

証明はやや高度なので [16] あるいは [8] にゆずる。

この定理を用いると、与えられた間隔分布を持つ点過程をどのように構成すればよいかがわかる。$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$ は確率空間とし、その上に定常な確率変数列 $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が与えられているとする。但し $\tau_n(\hat{\omega}) > 0$ であり、また τ_n $(n \in \mathbf{Z})$ は与えられた（共通の）確率分布に従い、$E[\tau_n] = 1$ とする。$T_n(\hat{\omega})$, $n \in \mathbf{Z}$ を

$$T_n(\hat{\omega}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \tau_j(\hat{\omega}), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\sum_{j=0}^{n+1} \tau_j(\omega), & n < 0 \end{cases}$$

により定義する。最後に区間 $[0, T_1(\hat{\omega})) = [0, \tau_1(\hat{\omega})$ から一様分布に従ってパラメータ s をランダムに選び、

$$N_{(\hat{\omega},s)}(\cdot) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T_n(\hat{\omega}) - s - \cdot)$$

とすると $N_{(\hat{\omega},s)}$ は定常な点過程になる。このとき対応する確率空間は

$$\Omega \equiv \{\omega = (\hat{\omega}, s) \mid \hat{\omega} \in \hat{\Omega}\ ,\ s \in [0, \tau_1(\hat{\omega}))\}$$

である。さて確率変数 τ_n は与えられた確率分布に従うとしたが、異なる n に対する τ_n たちの間の相関のしかたは様々である。従って間隔分布を与えただけで点過程が一意に決まるわけではない。

$\{\tau_n\}$ が特に独立同分布のとき、上記のようにして得られる点過程を再生過程 (renewal process) という。Poisson 過程、等間隔の点配置からなる点過程はいずれも再生過程である。

[8] 3 節で注意したように、点過程 N_ω が定常であっても、点の間隔の列 $\{\tau_n = T_n - T_{n-1}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は定常な確率変数列とは限らない。Poisson 点過程の場合 τ_1 の分布は τ_n $(n \neq 1)$ の分布と異なるし、また τ_n $(n \neq 1)$ の分布と T_1 の分布も一般に異なる。上記の再生過程に話を限ると、

(a) τ_1 と τ_n $(n \neq 1)$ が同分布になるのは等間隔過程に限るし、

(b) τ_n $(n \neq 1)$ と T_1 が同分布になるのは Poisson 点過程に限る。

実際 [6]-(ii) より τ_1 と τ_n $(n \neq 1)$ が同分布ならば

$$\hat{F}(dv) = v\hat{F}(dv)$$

となるがこの等式を満たす $\hat{F}$ は点 1 に集中した $\delta-$ 分布に限られる。即ち $\tau_n = 1$ $(\forall n \neq 1)$ である。また T_1 と τ_n $(n \neq 1)$ が同分布ならば [6]-(iii) より

$$\hat{F}(dv) = \hat{F}(v, \infty)dv \ .$$

これより $\hat{F}(dv)$ は密度 $p(v)$ を持つが、これについて

$$p(v) = \int_v^\infty p(s)ds \ , \quad p'(v) = -p(v)$$

が成り立つ。即ち $p(v) = e^{-v}$ である。τ_n $(n \neq 1)$ が指数分布に従う再生過程は即ち Poisson 点過程である。

[9] 再生過程の場合、間隔の列 $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^\infty$ の定常性の破れは τ_n $(n \neq 1)$ と τ_1 との分布の違いとして現れるのみだが、一般の定常点過程の場合は τ_n $(n \neq 1)$ がすべて異なる分布を持つこともあり得る。実際、$\tau_n(\omega) = \tau_n(\theta_{T_0}\omega)$ が成り立つから [5]-(ii) より $c \geq 0$ に対して

$$P(\tau_n(\omega) > c) = P(\tau_n(\theta_{T_0}\omega) > c) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{P}T_1(\omega)1_{\{\tau_n(\omega)>c\}} \ .$$

となる。N_ω が再生過程でなければ T_1 と τ_n $(n \neq 1)$ の間には一般に $\hat{P}$ の下で相関があるから、上式右辺の値は n が異なれば異なるであろう。

[10] 上に述べたことから次の問題が生じる：エルゴード的な点過程の実現

$$\cdots < T_{-1}(\omega) < T_0(\omega) \leq 0 < T_1(\omega) < T_2(\omega) < \cdots$$

が一つ観測されたとして、このデータから間隔分布を推定（あるいは測定）するにはどうすればよいだろうか。自然に思いつき、また準位統計において実行されてもいることは、$T_j(\omega) - T_{j-1}(\omega)$, $j = 1, \ldots, n$ たちの測定値から一つのヒストグラムを描くことである。n を大きくしてゆくときそのヒストグラムがある曲線に近づくならば、それが間隔分布を表すと考えられそうである。数学的にいうと、任意の $c > 0$ に対して極限値

$$G(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)\leq c\}}$$

が存在するならば、この $G(c)$ が間隔分布の分布関数を与えると考えるわけである。ところが [9] で注意したように $T_j - T_{j-1}$ の分布が j に依存するならばこの極限値はいかにして存在するのか。少なくとも大数の法則はそのままは適用されないだろうし、そもそも

統計法則の異なるデータ $\{T_j - T_{j-1}\}$ をこのような形で混ぜ合わせること自体に意味があるのかどうかさえ疑問に思われる。にもかかわらず実は確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\{T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)\le c\}} = \frac{1}{\hat{P}(\Omega)}\hat{P}(T_1\le c)$$

となるのである。これを示すためにまず $\omega\in\hat{\Omega}$ に対して

$$T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)=T_1(\hat{\theta}_{j-1}\omega)\ ,\ j=1,2,\ldots$$

となることに注意する。[7] で述べたように、$\hat{\Omega}$ 上の確率 $\hat{P}(\cdot)/\hat{P}(\Omega)$ の下で変換群 $\{\hat{\theta}_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ はエルゴード的となるから、

$$A=\left\{\omega\in\Omega|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1_{\{T_j(\omega)-T_{j-1}(\omega)\le c\}}=\hat{P}(T_1\le 1)/\hat{P}(\Omega)\right\}\ ,\ \hat{A}=A\cap\Omega$$

とするときエルゴード定理により

$$\hat{P}(\hat{A})/\hat{P}(\Omega)=1$$

となる。あとは $P(A)=1$ を示せばよい。ところが

$$\omega\in A\Longleftrightarrow\theta_{T_0}\omega\in\hat{A}$$

だから、[5]-(ii) および [6]-(0) により

$$\begin{aligned}P(A) &= \int_{\Omega}P(d\omega)1_A(\omega)=\int_{\Omega}P(d\omega)1_A(\theta_{T_0}\omega)\\ &= \int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)T_1(\omega)1_{\hat{A}}(\omega)=\int_{\hat{\Omega}}\hat{P}(d\omega)T_1(\omega)=1\end{aligned}$$

今までの議論により、定常な点過程において間隔分布は Palm 測度を用いて定義されるべきものであることがわかった。これは準位統計において間隔分布が "エネルギー値 E に準位があるとしたときに次の準位が $E+S$ の近傍にある確率" として定義されていることを正当化している。

8 量子カオスにおける準位統計の数学的定式化について

本節では量子カオスにおける準位統計の定式化について初等的な考察を行う。特に regular spectrum に対する準位統計の問題と Sinai の格子点問題との関連について議論する。なお一次元系に対する準位統計の厳密な実行例については [14] を参照されたい。

8.1 話の起こり

束縛系 (bound system) を記述する量子ハミルトニアンのスペクトル（それは離散的になる）を、その系を古典的に記述する力学系が完全可積分であるかカオス的であるかに応じて regular spectrum と irregular spectrum とに分類することを提案したのは I.C. Percival である ([17])。Percival は 2 種のスペクトルの違いを, 主に系に摂動を加えた際の反応の違いと見ていたようである。これに対し、M.V. Berry と M. Tabor ([3]) は系のエネルギー準位間の統計的な相関を見ることで 2 種のスペクトルは区別されると考えた。彼らは次のように予想した。

1. regular spectrum においては準位の間には統計的な相関が見られない。典型的にはスペクトルは Poisson 過程のように見え、隣接する準位の間隔分布は $\lambda e^{-\lambda x}$ を密度とする指数分布に近い (準位集積 -level clustering)
2. irregular spectrum においては準位の間に強い相関がみられる。典型的にはスペクトルはランダム行列のスペクトルのように見え、隣接する準位の間隔分布は $\frac{\pi}{2}xe^{-(\pi/4)x^2}$ を密度とするいわゆる Wigner 分布に近い (準位反撥 -level repulsion)

Berry と Tabor が irregular spectrum とランダム行列のスペクトルとの間に類似性を予想した背景には、カオス的力学系がランダム性を自動生成すると考えられること、およびランダム行列が、複雑な内部構造を持つ原子核のスペクトルを統計的に記述するモデルとして成功を収めていたことがあると思われる。古典的にカオス的な系のエネルギー準位の間に反撥が見られることはその後の数値計算で確かめられているが（例えば [4]）、ランダム行列との類似は完全なものではなく、問題は複雑である。また regular spectrum は上述の [3] において理論的、数値的に調べられているが、最も典型的な可積分系である調和振動子に対しては準位集積が見られない。従って Berry-Tabor の予想は文字どおりに受け入れられるものではなく、何らかの意味で generic な系に対してのみ成立するものと考えられるべきであろう。

8.2 準位統計の定式化の試み

Sinai ([20]) は Berry-Tabor の理論に示唆されて量子ハミルトニアンの準位統計に数学的定式化を与え、同時に regular spectrum における準位集積の裏付けとなるべき確率論の一定理を述べた。しかし Sinai の定式化は Berry-Tabor のアイディアをそのままなぞったものではない。ここでは Sinai の意味とと Berry-Tabor の意味での準位統計についてそれぞれ掘り下げて考えてみたい。両者は本質的には同じものなのかもしれないし、また特別な場合には実際に一致してしまうが、今は一応区別して併記しておく。

8.2.1 Sinai の意味の準位統計

自由度 d の束縛系を考え、そのハミルトニアンを $H(\hbar)$ 、エネルギー準位を $\{E_n(\hbar)\}_{n\geq 0}$ とする。($\hbar$ は Planck 定数。) また $E_n(\hbar)$ はすべて縮退しないものとする。次のことを仮定しておく。(この仮定が満たされない場合の考察は将来の課題とする。)

仮定 1. ある $\gamma > 0$ が存在して

$$N_\hbar(E) \equiv \sharp\{n \mid E_n(\hbar) \leq E\} \sim \gamma\hbar^{-d}E^{d/2} \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty)\ .$$

例(ビリヤード) 有界領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^d$ における Dirichlet Laplacian を Δ とし、$H(\hbar) = -\hbar^2\Delta$ とする。また $H(1)$ の固有値を $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ とすれば、$E_n(\hbar) = \hbar^2\lambda_n$ となる。従って

$$N_\hbar(E) = \sharp\{n \mid \lambda_n \leq E/\hbar^2\ \} = N_1(E/\hbar^2)\ .$$

一方よく知られたようにある定数 c_d があって

$$N_1(\lambda) \sim c_d|\Omega|\lambda^{d/2} \quad (\lambda \to \infty)$$

であるから (Weyl の漸近公式)

$$N_\hbar(E) \sim c_d|\Omega|\hbar^{-d}E^{d/2} \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty)$$

となって仮定はみたされる。

上の仮定の下に "unfolded levels "$\lambda_n(\hbar) \equiv \gamma E_n(\hbar)^{d/2}$ を考えると

$$\begin{aligned}\tilde{N}_\hbar(\lambda) &\equiv \sharp\{n \mid \lambda_n(\hbar) \leq \lambda\ \} = \sharp\{\ n \mid E_n(\hbar) \leq (\lambda/\gamma)^{2/d}\ \} \\ &\sim \gamma\frac{1}{\hbar^d}(\lambda/\gamma) \ = \ \hbar^{-d}\lambda \quad (\lambda^{1/d}/\hbar \to \infty)\ .\end{aligned}$$

従って $\hbar > 0$ を固定し、$\lambda \to \infty$ とした極限を考えると $\{\lambda_n(\hbar)\}_{n=1}^\infty$ は "密度 "$\hbar^{-d}$ で漸近的に一様分布していることがわかる。そこで区間 $I = (b_1, b_2) \subset (0, \infty)$, $c > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\mathcal{A}_k^I(\hbar; c) \equiv \{t \in I \mid (t, t + c\hbar^d] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } \lambda_n(\hbar) \text{ を含む } \}$$

なる集合を考える。

定義 1. 任意の $c > 0$, 任意の $k = 0, 1, \ldots$ に対して極限

$$\lim_{\hbar\downarrow 0}|\mathcal{A}_k^I(\hbar; c)| \equiv |I|\pi_k^I(c)$$

が存在するとき、“Sinai の意味の準位統計が可能 ” ということにする。

さらに $c \geq 0$ に対して

$$n_\hbar^I(c) \equiv \sharp\{n \mid \lambda_n(\hbar) \in I \ , \ \lambda_{n+1}(\hbar) - \lambda_n(\hbar) > c\hbar^d \ \}$$

とおく。準位の縮退はないと仮定しているから $n_\hbar^I(0)$ は I に含まれる $\lambda_n(\hbar)$ たちの総数を表す。

命題 1. Sinai の意味の準位統計が可能で、さらに $\pi_0^I(c)$ が $c > 0$ について微分可能ならば、極限

$$\rho(c) = \rho^I(c) \equiv \lim_{\hbar \downarrow 0} \frac{n_\hbar^I(c)}{n_\hbar^I(0)}$$

が存在して $-(d/dc)\pi_0^I(c)$ に等しい。

証明. まず $n_\hbar^I(0) \sim |I|/\hbar^d$ に注意する。Δ は区間として、$\xi_\hbar(\Delta) = \sharp\{n| \ \lambda_n(\hbar) \in \Delta\}$ という記号を導入すると。

$$\begin{aligned}
& |\{t \in I| \ \xi_\hbar(t + \delta\hbar^d, t + c\hbar^d] = 0\}| \ - \ |\{t \in I| \ \xi_\hbar(t, t + c\hbar^d] = 0\}| \\
= \ & |\{t \in I| \ \xi_\hbar(t, t + \delta\hbar^d] > 0 \ , \ \xi_\hbar(t + \delta\hbar^d, t + c\hbar^d] = 0\}| \\
\geq \ & \delta\hbar^d n_\hbar^I(c)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
& |\{t \in I| \ \xi_\hbar(t + \delta\hbar^d, t + (\delta + c)\hbar^d] = 0\}| \ - \ |\{t \in I| \ \xi_\hbar(t, t + (\delta + c)\hbar^d] = 0\}| \\
= \ & |\{t \in I| \ \xi_\hbar(t, t + \delta\hbar^d] > 0 \ , \ \xi_\hbar(t + \delta\hbar^d, t + (\delta + c)\hbar^d] = 0\}| \\
\leq \ & \delta\hbar^d n_\hbar^I(c)
\end{aligned}$$

$\hbar \downarrow 0$ として

$$\frac{\pi_0(c) - \pi_0(c + \delta)}{\delta} \leq \liminf_{\hbar \downarrow 0} \frac{n_\hbar^I(c)}{|I|/\hbar^d} \leq \limsup_{\hbar \downarrow 0} \frac{n_\hbar^I(c)}{|I|/\hbar^d} \leq \frac{\pi_0(c - \delta) - \pi_0(c)}{\delta} \ ,$$

次に $\delta \downarrow 0$ として

$$\lim_{\hbar \downarrow 0} \frac{n_\hbar^I(c)}{|I|/\hbar^d} = -\frac{d}{dc}\pi_0(c) \equiv \rho(c)$$

を得る。

定義 2. $\rho(c)$ がさらに連続的微分可能で

$$\liminf_{c \downarrow 0}(-\rho'(c)) > 0$$

が成り立つとき“準位集積が起こる”ということにする。一方

$$\limsup_{c\downarrow 0}(-\rho'(c)) = 0$$

が成り立つとき“準位反撥”が起こるということにする。

注. 上記の **定義** 1. はハミルトニアンのスペクトルがあるスケールの範囲でエルゴード的点過程のサンプルに見えるという想定に基づいている。そこで、点過程論との対応を見るために、$N_\omega = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(x_0 \le 0 < x_1)$ を平均密度 $m=1$ のエルゴード的点過程とし、我々の unfolded levels が $\lambda_n(\hbar) = \hbar^d x_n$ で与えられているとする。点過程 N_ω が定義された確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 、N_ω の Palm 測度を $\hat{P}$ とする。$m=1$ より $\hat{P}(\Omega) = 1$ となる。さて $I=[a,b]$, $c>0$, $k=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\mathcal{A}_k^I(\hbar; c) = \{t \in I |\ (t, t+c\hbar^d] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } \lambda_n(\hbar) \text{ を含む }\}$$

また $L>0$ として

$$\mathcal{F} = \{s \in [aL, bL] \mid (s, s+c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } x_n \text{ を含む }\}$$

とおくと、

$$|\mathcal{A}_k^I(\hbar; c)| = \hbar^d |\mathcal{F}_k^I(\hbar^{-d}; c)| \ .$$

従って $L = \hbar^{-d}$ とおきかえると６節の [2] より確率１で

$$\lim_{\hbar\downarrow 0} \frac{1}{|I|} |\mathcal{A}_k^I(\hbar; c)| = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|I|L} |\mathcal{F}_k^I(L; c)| = P(N_\omega(0, c] = k) \ .$$

従ってこの場合 $\pi_k^I(c)$ は実際に“長さ c の区間が k 個の準位を含む確率”を表している。

次に

$$\begin{aligned} n_k^I(c) &= \sharp\{n \mid \lambda_n(\hbar) \in I\ ,\ \lambda_{n+1}(\hbar) - \lambda_n(\hbar) > c\hbar^d\ \} \\ &= \sharp\{n \mid x_n \in [\hbar^{-d}a, \hbar^{-d}b]\ ,\ x_{n+1} - x_n > c\ \} \end{aligned}$$

を考えると、７節の [10] と同様にして、確率１で

$$\lim_{\hbar\downarrow 0} \frac{n_\hbar^I(c)}{n_\hbar^I(0)} = \frac{1}{\hat{P}(\Omega)} \hat{P}(x_1 > c) = \hat{P}(x_1 > c) \ .$$

従って $\rho(c)$ は Palm 測度の下での“間隔分布”を表している。一方 7 節 [6](iii) により

$$\pi_0^I(c) = P(N_\omega(0, c] = 0) = P(x_1 > c) = \int_c^\infty \hat{P}(x_1 > s) ds \ .$$

右辺はさらに $\int_c^\infty \hat{P}(N_\omega(0, s] = 0) ds$ となる。これは Palm-Khinchin の等式（５節）で $k=0$ としたものに相当する。$\pi_0^I(c)$ が c について微分可能ということは $\hat{P}(x_1 > s)$ が s について連続ということと同値である。 $\hat{P}(x_1 > s)$ の不連続点は高々可算個だから、命題１の条件は“ハミルトニアンのスペクトル＝定常点過程のサンプル”というフィクションが成り立つ限りは、可算個の $c>0$ を除いて成り立っていると期待される。

8.2.2 unfolding に関する考察

有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ における billiard の場合は仮定 1 の下の例に示したように、準古典極限 $\hbar \downarrow 0$ を考えることと、$\hbar = 1$ として高エネルギー極限 $E \to \infty$ を考えることとは同等である。さて、そこに現れる $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ は準位統計では通常、固有値分布の平均部分 (average) と考えられ、$N_{av}(\lambda)$ のように記される。一方で、これと $N_1(\lambda)$ との差は $N_{fl}(\lambda)$ と記され、準位分布の揺らぎ (fluctuation) の部分と考えられている ([4])。 こうして固有値分布関数を平均と揺らぎの部分に分離したとするのであるが、筆者はこの考え方に少し疑問を持っている。

まず第一に $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ はあくまでも固有値分布の漸近形を与えているのであって、それを平均と呼ぶのは概念の意図的な混同である。そもそも任意に与えられた数列 $x_1 < x_2 < \cdots$ を平均と揺らぎとに分離するというのは、アプリオリには不可能なのではあるまいか。もちろん、実験物理においてはグラフ上にプロットされたデータに最小二乗法を適用して、滑らかな曲線を取り出すことが日常的に行われている。最小二乗法によれば、その曲線は確かに平均という意味を持つのだが、このようなデータ処理が可能であるためには、揺らぎ＝実験誤差 の統計的性格に対する何らかの仮定が必要であろう。ところが、準位統計においては通常のデータ解析とは逆に、観察したいのは揺らぎの方であって、平均の部分にはむしろ興味が持たれないのである。従ってその揺らぎの性質に初めから何かを仮定するのは本末転倒している。こう考えると、いわゆる unfolding に用いられる $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ は固有値分布関数の平均というよりはむしろ、すべてのビリヤードが、その古典力学系としての性質に関わらず共通に持つ歪みと見なされるべきではないだろうか。つまり unfolding を行うとは、ビリヤードの観察を行うときに共通してデータに含まれるいわば系統誤差を補正するという意味を持つものと考えられるのである。その意味では、Bohigas-Giannoni ([4], p.12) のように、数学的に精密な結果があるからといって、高次の項まで含んだ固有値分布の漸近公式を用いて unfolding を行うのは正しくないと思う。なぜなら、固有値分布の漸近公式において、領域の体積のみに依存する第一項 $c_d|\Omega|\lambda^{d/2}$ より高次の項は領域 Ω の境界の形状に依存し、従ってビリヤードの力学的性質を多少なりとも反映しているはずなのであって、それを用いて unfolding することは、本来観察すべきものの一部を系統誤差としてあらかじめ取り除いてしまうことになるからである。

もっとも Bohigas-Giannoni が議論している 2 次元の場合では、

$$N_{av}(\lambda) = \frac{\sigma}{4\pi}E - \frac{\gamma}{4\pi}\sqrt{E} + K + \mathcal{O}(E^{-\eta/2}\log E) \quad (0 < \eta \leq 1)$$

となっており、これを用いて真の準位 $\{E_n\}$ の unfolding

$$\lambda_n = N_{av}(E_n)$$

を行ったとしても例えば間隔分布の測定には何ら影響を与えない。実際

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \quad = \quad \frac{\sigma}{4\pi}(E_{n+1} - E_n) - \frac{\gamma}{4\pi}(\sqrt{E_{n+1}} - \sqrt{E_n}) \;+\; o(1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad (E_{n+1} - E_n)\left(\frac{\sigma}{4\pi} - \frac{\gamma}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{E_{n+1}} + \sqrt{E_n}}\right) + o(1) \\
&\sim \quad \frac{\sigma}{4\pi}(E_{n+1} - E_n)
\end{aligned}
$$

であり、$N_{av}(E) = \frac{\sigma}{4\pi}E$ として unfolding したのと結果は変わらない。それならばなおさら、初めから $N_{av}(E) = \frac{\sigma}{4\pi}E$ を用いればよいのではなかろうか。

8.2.3 Berry-Tabor の意味の準位統計

やはり自由度 d の束縛系を考え、 $H(p,q)$ をその古典ハミルトニアン、$H(\hbar)$ をその量子化、$\{E_n(\hbar)\}_{n\geq 0}$ をエネルギー準位とする。前節とは別に次の仮定をする。

仮定 2. 任意の $E > 0$ に対して定数 $\nu(E) > 0$ が存在して

$$
N_\hbar(E) = \sharp\{n \mid E_n(\hbar) \leq E\} \sim \nu(E)\hbar^{-d} \quad (\hbar \downarrow 0) .
$$

さらに $\hbar$ について単調に

$$
E_n(\hbar) \downarrow 0 \quad (\hbar \downarrow 0)\ n = 1, 2, \ldots .
$$

Berry と Tabor は "regular spectrum と irregular spectrum を区別するにはエネルギー準位の間隔分布を見ればよい" と提案する一方で次のように一見矛盾することも述べている。([3] p.377)

> エネルギー E は準位を記述するパラメータとしては次の 2 つの理由により不適当である：
>
> (1) mean level density は E に依存する。
>
> (2) 準位の間隔分布等、準位の統計的な性質自体が考えているエネルギー領域に依存する可能性がある。

この問題に対する解決として Berry と Tabor は以下に述べる意味で "Planck 定数を量子化する" ことを提案している。

まず仮定 2. により $E_n(\hbar)$ の軌跡が図のようになっていることに注意する。

$E > 0$ の値を一つ固定し、各 $n \geq 1$ に対し $\hbar = \hbar(n)$ を

$$
E_n(\hbar) = E
$$

の解として定める。さらに

$$
U_n = \nu(E)\hbar(n)^{-d}
$$

図 1: $E_n(\hbar)$ の軌跡

と定義すると、仮定 2、および図により

$$\begin{aligned}
\sharp\{n|U_n \leq U\} &= \sharp\{n|\hbar(n) \geq (\nu(E)U^{-1})^{1/d}\} \\
&= \sharp\{n|E_n((\frac{\nu(E)}{U})^{1/d}) \leq E\} \\
&\sim \nu(E)\{(\nu(E)/U)^{1/d}\}^{-d} = U \quad (U \to \infty)\ .
\end{aligned}$$

即ち $\{U_n\}_n$ は漸近的に密度 1 で 一様分布している。

定義 2. 任意の $k = 0, 1, \ldots$ と任意の $c > 0$ に対して極限

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} |\{t \leq U \mid (t, t+c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } U_n \text{ を含む }\}| \equiv p_k^E(c)$$

が存在するとき（エネルギー E において）"Berry-Tabor の意味の準位統計が可能 " ということにする。但し $|A|$ は集合 A のルベーグ測度（あるいは長さ）。

前節と同様に次の命題が成り立つ。

命題 2. Berry-Tabor の意味の準位統計が可能で、 $p_0^E(c)$ が $c > 0$ について微分可能ならば、極限

$$\rho^E(c) \equiv \lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \sharp\{n|U_n \leq U \text{ かつ } U_{n+1} - U_n > c\}$$

が存在して $-\frac{d}{dc}\, p_0^E(c)$ に等しい。

$\rho^E(c)$ がさらに連続的微分可能で

$$\liminf_{c\downarrow 0} \left(-\frac{d}{dc}\rho^E(c)\right) > 0$$

となるとき準位集積がおこり 、

$$\limsup_{c\downarrow 0} \left(-\frac{d}{dc}\rho^E(c)\right) = 0$$

のとき準位反撥がおこるということにする。

Sinai の意味の準位統計と Berry-Tabor の意味の準位統計の関係がどうなっているか筆者にはまだよくわからないが、有界領域における Dirichlet Laplacian 等のように

$$E_n(\hbar) = \hbar^2 E_n(1) \quad ; \quad N_1(E) = \sharp\{n | E_n(1) \leq E\} \sim \gamma E^{d/2}$$

となっている場合には両者は一致する。

実際このとき

$$N_\hbar(E) = N_1(E/\hbar^2) \ \sim \ \gamma \hbar^{-d} E^{d/2} \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty)$$

となり、仮定１は成立する。また

$$\lambda_n(\hbar) = \gamma E_n(\hbar)^{d/2} = \gamma \hbar^d E_n(1)^{d/2} = \hbar^d \lambda_n(1)$$

である。$L = \hbar^{-d}$ とおいて

$$\mathcal{B}_k^I(L;c) \equiv \{t \in (b_1 L, b_2 L) \mid (t, t+c] \text{ はちょうど } k \text{ 個の } \lambda_n(1) \text{ を含む }\}$$

を考えると

$$\lim_{\hbar \downarrow 0} \frac{|\mathcal{A}_k^I(\hbar;c)|}{|I|} = \lim_{L \to \infty} \frac{|\mathcal{B}_k^I(L;c)|}{|I| L} = \pi_k^I(c)$$

即ち Sinai の意味の準位統計はこの場合 $\hbar = 1$ として高エネルギー極限を考えることに相当する。

一方 $E > 0$ を固定すると当然

$$N_\hbar(E) = N_1(E/\hbar^2) \ \sim \ \hbar^{-d}(\gamma E^{d/2}) \quad (\hbar \downarrow 0)$$

となるから $\nu(E) = \gamma E^{d/2}$ として仮定２の前半が成り立っている。また $E_n(\hbar) = \hbar^2 E_n(1) = E$ であるから、明らかに $\hbar \downarrow 0$ とするとき単調に $E_n(\hbar) \to 0$ となる。

$$E_n(\hbar) = \hbar^2 E_n(1) = E$$

を $\hbar$ について解いて

$$\hbar(n) = \sqrt{\frac{E}{E_n(1)}}$$

を得るが、これより

$$U_n = \nu(E) \hbar(n)^{-d} = \gamma E_n(1)^{d/2} = \lambda_n(1) \ .$$

よって $\{U_n\}$ に対する統計（Berry-Tabor の意味の準位統計）は Sinai の意味の準位統計と一致する。

8.3 弱い意味での準位統計

前節および前々節では、 $\rho'(c) = (d^2/dc^2)\pi_0(c)$ の $c \downarrow 0$ での挙動によって準位集積 / 準位反撥という区別をした。 このように $\rho(c)$ を求めるには $\pi_0(c)$ がわかればよいのだが、実際には以下に定義するような、区間 I に対する準位数

$$\mathcal{N}(I) \equiv \sharp\{\ n \mid U_n \in I\ \}$$

の階乗モーメント (factorial moments) $\mu_k(c)$ の方が計算しやすいこともあるであろう。そこで、階乗モーメントから準位集積 / 準位反撥の判定を行うことを考えてみよう。

$c > 0$, $k = 0, 1, \ldots, K$ に対して

$$\begin{aligned} \mu_k(c) &\equiv \lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \int_0^U \frac{1}{k!} \mathcal{N}(t, t+c]\{\mathcal{N}(t, t+c] - 1\} \cdots \mathcal{N}(t, t+c] - (k-1)\} dt \\ &= \lim_{U\to\infty} \frac{1}{U} \int_0^U \begin{pmatrix} \mathcal{N}(t, t+c] \\ k \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

が求まったとする。このとき

$$\pi_0(c) = 1 - \mu_1(c) + \cdots + (-1)^k \mu_k(c) + (-1)^{k+1} \sum_{j \geq k+1} \begin{pmatrix} j-1 \\ k \end{pmatrix} \pi_j(c) \ ;$$

$$\sum_{j \geq k+1} \begin{pmatrix} j-1 \\ k \end{pmatrix} \pi_j(c) \ \leq \ \sum_{j \geq k+1} \begin{pmatrix} j \\ k+1 \end{pmatrix} \pi_j(c) = \mu_{k+1}(c)$$

という関係が成り立つから、

$$1 - \mu_1(c) \leq \pi_0(c) \leq 1 - \mu_1(c) + \mu_2(c) \ ;$$

$$\pi_0(c) \geq 1 - \mu_1(c) + \mu_2(c) - \mu_3(c)$$

がわかる。

典型的には $\mu_1(c) = c$ だから

(i) もしも $\mu_2(c) = o(c^2)$, $(c \downarrow 0)$ ならば

$$-\rho'(0+) = \frac{d^2}{dc^2}\pi_0(0+) = 2 \lim_{c\downarrow 0} \frac{\pi_0(c) - 1 + c}{c^2} = 0$$

となり、準位は反撥すると考えてよいだろう。また、

(ii) $\mu_2(c) = \frac{1}{2}c^2$, $\mu_3(c) = o(c^2)$, $(c \downarrow 0)$ ならば

$$-\rho'(0+) = 2 \lim_{c\downarrow 0} \frac{\pi_0(c) - 1 + c}{c^2} \geq 1$$

となり、準位は集積すると考えてよいだろう。

即ち、3次までの階乗モーメントを見れば 準位集積 / 準位反撥 の判定ができると考えられるのである。

一般に十分小さな絶対値を持つ z に対して

$$\sum_{k\geq 0}\mu_k(c)z^k = \sum_{n\geq 0}\pi_n(c)(1+z)^n$$

となることに注意しておく。もしも左辺のベキ級数の収束半径が ≥ 1 で、さらに級数 $\sum_{k\geq 0}\mu_k(c)(-1)^k$ が収束するならば、Abel の定理によりそれは $\pi_0(c)$ に等しい。

最後に $\{U_n\}$ の2次の相関関数 $S(\ell)$ を

$$R(\ell;\delta) \equiv \lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U \mathcal{N}(t,t+\delta]\mathcal{N}(t+\ell,t+\ell+\delta]\ dt\ ;$$

$$S(\ell) = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta^2}R(\ell;\delta)$$

により定義してみる。このとき、 $S(0+)>0$ ならば準位集積、$S(0+)=0$ ならば準位反撥、と考えてよいだろうか。

8.4 regular spectrum に対する準位統計と格子点問題

自由度 d の束縛系が完全可積分のとき、いわゆる作用 - 角変数に変換することで系の古典ハミルトニアン $H(p,q)$ は作用変数 $I=(I_1,\ldots,I_d)$ のみの関数 $H=H(I)$ となり、もとの力学系は torus 上の一様運動に移る。(詳しくは Arnold [2] を参照のこと。)

仮定 3. 系のエネルギー準位は EBK-quantization (あるいは torus quantizaton) により

$$E_{\vec{n}}(\hbar) = H\left(\hbar(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha})\right) \quad (\vec{n}=(n_1,\ldots,n_d)\in \boldsymbol{Z}_+^d)$$

のように与えられる。ただし $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\boldsymbol{Z}_+^d$ は Maslov index と呼ばれるもので、系を記述する古典力学から決まる。(EBK とは Einstein, Brillouin, Keller の頭文字である。)

$\{E_{\vec{n}}(\hbar)\}_{\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d}$ を Percival, Berry-Tabor に従って regular spectrum と呼ぶ。これが真のエネルギー準位をどの程度近似しているかは今は問わないことにするが、調和振動子や直方体の中の billiard については torus quantization により得られるスペクトルはすべての準位を正確に与えている:実際、作用変数 I を $2\pi I_j=\oint p_j dq_j$ により導入すると、系のハミルトニアン、エネルギー準位は次のようになる。

調和振動子 $H(I)=\sum_{j=1}^{d}\omega_j I_j$; $\alpha=(2,2,\ldots,2)$;

$$E_{\vec{n}}(\hbar)=H(\hbar(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha}))=\hbar\sum_{j=1}^{d}\omega_j(n_j+\frac{1}{2})\ .$$

直方体ビリヤード a_j , $j=1,\ldots,d$ m $H(I)=\frac{\pi^2}{2m}\sum_{j=1}^{d}(I_j/a_j)^2$; $\alpha=(0,\ldots,0)$;

$$E_{\vec{n}}(\hbar)=\frac{\pi^2}{2m}\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{n_j}{a_j}\right)^2\ .$$

8.4.1 regular spectrum に対する Berry-Tabor の意味での準位統計

$\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d\setminus\{\vec{0}\}$ に対して $\hbar(\vec{x})>0$ を

$$H(\hbar(\vec{x})\vec{x})=E$$

により定める。これは各 $E>0$ に対して $\{\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d|\ H(\vec{x})=E\}$ が有界かつ star shaped ならば可能である。

$E>0$ を固定して $\hbar\downarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned}
N(\hbar;E) &= \sharp\{\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d\ |\ E_{\vec{n}}(\hbar)\le E\} \\
&= \sharp\{\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d\ |\ H(\hbar(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha}))\le E\} \\
&\sim \hbar^{-d}\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}_+^d}1_{\{H(I)\le E\}}dI_1\cdots dI_d\ \equiv\ \nu(E)\hbar^{-d}\ .
\end{aligned}$$

さて

$$U(\vec{x})=\nu(E)\hbar(\vec{x})^{-d}\quad,\quad \vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d$$

として $\{U(\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{\alpha})|\vec{n}\in\boldsymbol{Z}_+^d\}$ に対する統計を考える。

$\beta>0$ 、 $\vec{x}\in\boldsymbol{R}_+^d$ ならば

$$E=H(\hbar(\beta\vec{x})\beta\vec{x})=H(\hbar(\vec{x})\vec{x})$$

だから

$$\beta\hbar(\beta\vec{x})=\hbar(\vec{x})\ ,$$

従って

$$U(\beta\vec{x})=\beta^d U(\vec{x})$$

となることに注意。また $\vec{x} \in \boldsymbol{R}_+^d \setminus \{\vec{0}\}$ に対し、$\varphi = \varphi(\vec{x}) = \vec{x}/|\vec{x}|$ とおく。すると $\vec{n'} = \vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ と書くことにして

$$
\begin{aligned}
& t < U(\vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha}) < t + c \\
\Leftrightarrow \quad & t < |\vec{n'}|^d U(\varphi(\vec{n'})) < t + c \\
\Leftrightarrow \quad & U(\varphi(\vec{n'})^{-1/d} t^{1/d} < |\vec{n'}| < U(\varphi(\vec{n'}))^{-1/d} (t + c)^{1/d} \\
\Leftrightarrow \quad & \nu(E)^{-1/d}\ \hbar(\varphi(\vec{n'}))\ t^{1/d} < |\vec{n'}| < \nu(E)^{-1/d}\ \hbar(\varphi(\vec{n'}))\ (t + c)^{1/d}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。また $\{\vec{x}|\ |\vec{x}| = \hbar(\varphi(\vec{x}))\}$ が I 空間における等エネルギー面を表すことに注意すると

$$
\Pi_c(t) \equiv \{\vec{x} \in \boldsymbol{R}_+^d | U(\varphi(\vec{x}))^{-1/d}\ t^{1/d} < |\vec{x}| < U(\varphi(\vec{x}))^{-1/d}\ (t + c)^{1/d}\}
$$

により定義される領域の体積は

$$
|\Pi_c(t)| = c
$$

であることがわかる。

$$
t < U(\vec{n'}) < t + c \ \Leftrightarrow \ \vec{n'} \in \Pi_c(t)
$$

であるから

$$
\xi(t) \equiv \sharp\{\Pi_c(t) \cap (\boldsymbol{Z}_+^d + \frac{1}{4}\vec{\alpha})\}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_k^L(c) \quad & \equiv \quad \{t \le L|\ (t, t + c]\ \text{はちょうど}\ k\ \text{個の}\ U(\vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha})\ \text{を含む}\ \} \\
& = \quad \{t \le L|\ \xi(t) = k\}\ .
\end{aligned}
$$

となる。

こうして我々は次の問題に導かれる。

問題 何らかの意味で generic なハミルトニアンから作られる $\Pi_c(t)$ に対して、極限

$$
\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} |\mathcal{A}_k^L(c)| = \pi_k(c)
$$

が存在するか？またそれは Poisson 分布 $\pi_k(c) = e^{-c} c^k / k!$ となるか？

$d = 2$ であり、かつ $\Pi_c(t)$ の境界をなす曲線がランダムである場合、そのランダム曲線の殆どすべての実現に対して上のことが成立することが示されている。([12] を見よ。また [21] も参照されたい。) しかしそのランダムネスに対する条件は非常に強く、通常のハミルトニアンから得られるような自然な具体例は殆どそれをみたさない。実際その条件の下で、$\Pi_c(t)$ の境界は C^2 曲線ではありえない ([12]) 。

8.4.2 regular spectrum に対する Sinai の意味の準位統計

Sinai の意味の準位統計を考えるときは

$$N_\hbar(E) = \sharp\{\vec{n} \in \boldsymbol{Z}_+^d | H(\hbar(\vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha})) \leq E\} \sim \gamma \frac{E^{d/2}}{\hbar^d} \ (\sqrt{E}/\hbar \to \infty)$$

を仮定するのであった。そのためハミルトニアン H が

$$H(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 F(\varphi(\vec{x})) \quad (F > 0)$$

という形であることを仮定する。

$$G(\varphi(\vec{x})) = F(\varphi(\vec{x}))^{-1/2} \ ; \ \gamma = |\{\vec{x} \in \boldsymbol{R}_+^d | \ |\vec{x}| \leq G(\varphi(\vec{x}))\}$$

とすると

$$N_\hbar(E) \sim \gamma(\sqrt{E}/\hbar)^d \quad (\sqrt{E}/\hbar \to \infty)$$

となることは容易にわかる。$\vec{n'} = \vec{n} + \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ として unfolded levels

$$\lambda_{\vec{n'}}(\hbar) = \gamma E_{\vec{n'}}(\hbar)^{d/2} = \gamma H(\hbar\vec{n'})$$

を考えると $t \in (b_1, b_2) = I$ に対して

$$\begin{aligned} & t < \lambda_{\vec{n'}}(\hbar) < t + c\hbar^d \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{t}{\gamma\hbar^d}\right)^{1/d} G(\varphi(\vec{n'})) < |\vec{n'}| < \left(\frac{t + c\hbar^d}{\gamma\hbar^d}\right)^{1/d} G(\varphi(\vec{n'})) \end{aligned}$$

となって先と同様の格子点問題に導かれる。

参考文献

[1] M. Aizenman, S.A. Molchanov: Localization at a large disorder and at extreme energies. Comm. Math. Phys. vol. 157, 245–278 (1993)

[2] V. I. Arnold: Mathematical methods of classical mechanics. Springer (1978)

[3] M. V. Berry, M. Tabor: Level clustering in the regular spectrum. Proc. R. Soc. Lond. A. vol.356, 375-394 (1977)

[4] O. Bohigas, M. J. Giannoni: Chaotic motion and random matrix theories. in: J. S. Dehesa et al. (eds.) Mathematical and computational methods in nuclear physics. Lect. Notes in Phys. vol.209, 1–99 (1984)

[5] R. Carmona, J. Lacroix: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Birkhäuser, Boston, 1990

[6] D.J. Daley, D. Vere-Jones: An Introduction to the Theory of Point processes. Springer Verlag, New-York, 1988

[7] G.M. Graf: Anderson Localization and the space-time characteristic of continuum states. J. Stat. Phys. vol.75, 337–346 (1994)

[8] A. Hanen: Processus Ponctuels Stationaires et Flots Speciaux. Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistique, Vol. VII, no.1, 23–30 (1971)

[9] H. Kestelman: On the Functional Equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Fundamenta Mathematicae, vol.34, 144–147 (1947)

[10] J.F.C. Kingman: Poisson Processes. Oxford, Clarendon Press, 1993

[11] H. Kunz, B. Souillard: Sur le spectre des opérateurs aux différence finies aléatoires. Comm. math. Phys. 78, 201–246 (1980)

[12] P. Major: Poisson law for the number of lattice points in a random strip with finite area. Prob. Th. Rel. Fields vol.92, 423–464 (1992)

[13] N. Minami: Local Fluctuation of the Spectrum of a Multidimensional Anderson Tight Binding Model. Comm. Mth. Phys. 177, 709–725 (1996)

[14] N. Minami: Level Clustering in a Finite System. Progr. Theor. Phys. Supplement No. 116 (1994)

[15] S.A. Molchanov: The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator. Comm. Math. Phys. vol.78, 429–446 (1981)

[16] J. Neveu: Processus Ponctuels. Lect. Notes in Math. 598, 249–445, 1976

[17] I. C. Percival: Regular and irregular spectra. J. Phys. B. Vol.6, L229-L232 (1973)

[18] M.M. Rao: Paradoxes in conditional probability. J. Multivariate Analysis vol.27, 434–446 (1988)

[19] M. Reed and B. Simon: Method of modern mathematical physics. vol.I, Functional analysis. Academic Press

[20] Ya. G. Sinai: Mathematical problems in the theory of quantum chaos. in: J. Lindenstrauss, V. D. Milman (eds.) Geometric aspects of functional analysis, Lect. Notes in Math. vol.1469, 41–59 (1991) and in: D. K. Campbell (ed.) Chaos, American Inst. Phys. (1990)

[21] Ya. G. Sinai: Poisson distribution in a geometric problem. Adv. Sov. Math. (A.M.S.) vol.3, 199–214 (1991)

[22] 十時東生: エルゴード理論入門. 共立出版, 1971

[23] 西尾真喜子: 確率論. 実教出版, 1978

[24] 長谷川洋: 量子系の準位統計–量子カオス序論. 共立出版, 物理学最前線 28, 1991

[25] 南就将: 準位集積はなぜ起こるか？ 数理科学 1994 年 10 月号