

令和 5 年 5 月 2 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05157

研究課題名（和文）バー構成による混合モチーフの研究

研究課題名（英文）Study of mixed motives by the bar construction

研究代表者

木村 健一郎（Kimura, Kenichiro）

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：50292496

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：混合モチーフの圏のホッジ実現関手を理解する事を目標とした。複素代数多様体に、われわれがadmissible chainとよぶ位相的チェインの複体を構成した。それにより混合テイトモチーフの圏の具体的なホッジ実現関手を構成した。また、複素代数多様体の相対コホモロジーのadmissible chainによる記述と、高次Chow群のアーベル-ヤコビ写像の具体的な記述を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで構成されたモチーフの圏の実現関手は、ある意味で明快だが高度に抽象的であった。具体的な構成を与えたことで、より周期積分との関係が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：The motivation of this research was to understand the Hodge realization of mixed Tate motives. We constructed certain complex of topological chains which we call admissible chains. Via this complex we constructed a Hodge realization functor of mixed Tate motives, and a description of the Abel-Jacobi map of higher Chow cycles.

研究分野：代数幾何学

キーワード：周期積分

1. 研究開始当初の背景

混合モチーフの圏は、「普遍的なコホモロジーのなす圏」と呼ぶべき圏で、Grothendieck により存在が予想された。基礎体 k を止めると、 k 上の代数多様体の圏から k 上の混合モチーフの圏へ反変関手があり、あらゆるコホモロジー理論はこの関手を経由するべきである。混合モチーフの圏からコホモロジー理論への関手を実現化関手という。Grothendieck は更に、混合モチーフの圏は淡中圏、つまりある代数群の表現の圏であると予想した。混合モチーフの圏の構成は重要な問題であるがなかなか難しく、現在までに決定版と言えるものはまだ定義されていない。花村、Levine, Voevodsky は混合モチーフの導来圏にあたるものを独立に構成した。彼らの圏は皆同値であることがわかっている。特に Voevodsky は彼の圏を使って Bloch-Kato 予想というガロア・コホモロジーについての予想の特別な場合を証明した。花村は、代数多様体に関する標準予想と、代数的 K 理論についての Beilinson-Soule 予想が正しければ彼の定義した圏に t -構造が入り、混合モチーフの圏がその核として取り出せることを示した。

一方、より直接に混合モチーフの圏を構成する試みもある。Bloch と Kriz は混合 Tate モチーフという混合モチーフの部分圏に対応する代数群を構成した(参考文献(1))。その基本的なアイデアは次のようなものである。モチーフの圏では、既約な対象の間の拡大の群は代数的 K 群で記述される。モチーフの圏が代数群の表現の圏だとすると、既約な表現の間の拡大は Lie 環のコホモロジーとして記述される。よって Lie 環のコホモロジーとして代数的 K 群が現れるような代数群を構成したい。Bloch は代数多様体の高次 Chow 群というものを定義した。これは代数的サイクルから定義されるある複体のコホモロジー群で、有理数係数では代数的 K 群に一致する。Bloch と Kriz はこの代数的サイクルの複体から次数付き微分代数(differential graded algebra, DGA)を構成し、それから $\bar{}$ 構成によりある可換な Hopf 代数を定義した。この Hopf 代数を関数環とする代数群の Lie 環は、元になる DGA が $\mathcal{K}(\mathbb{Z}\pi, 1)$ という条件を満たし、かつ代数的 K 理論における Beilinson-Soule 予想が成り立つ時、元の DGA と同じコホモロジー群を持つ。混合 Tate モチーフの圏は、この代数群の表現の圏、言い換えればこの Hopf 代数上の余加群の圏と定義される。彼らの定義した圏は混合 Tate モチーフの有力な候補である。彼らは更にこの圏から Hodge 構造の圏と l -進ガロア表現の圏へのエタール実現化関手も定義した。また、混合 Tate モチーフの重要な例である、多重 Log 関数に対応する余加群を代数的サイクルを使って定義し、その Hodge 実現を計算した。そして実際に多重 Log 関数が Hodge 実現の周期として現れることを示した。

2. 研究の目的

混合モチーフの圏の Hodge 実現関手を、周期積分を使って具体的に構成する事。Bloch-Kriz は、彼らの構成した混合 Tate モチーフの圏の Hodge 実現を定義した。元々の定義は抽象的で、具体的な計算には不向きである。具体的な物も構成したと主張しているが、不明確な部分が多く、ある種の位相的チェインの存在を仮定したもので、条件付きであった。より明確な Hodge 実現関手を定義し、更に混合モチーフの圏全体からの Hodge 実現を、周期積分を使って具体的に構成する事を目指す。多重楕円ポリログの Hodge 実現を具体的に計算する。

3. 研究の方法

Hodge 実現関手の構成には、複素代数多様体上にある条件をみだす位相的チェインの複体を構成する必要がある。具体的には、非特異な部分代数多様体への制限写像が定義でき、さらに正規交差因子にログ特異点を持つ微分形式の積分について、Cauchy-Stokes の等式が成り立つようなものを構成する必要がある。そのために、半代数的部分集合による単体分割を考え、その細分による極限をとる手法を用いた。

4 . 研究成果

上記の方法により、admissible chain と我々が呼ぶ、望む性質を持つ位相的チェインの複体を構成できた。これにより、Bloch-Kriz の混合モチーフの圏の Hodge 実現関手を明確な分かりやすい形で構成した。

さらに、一般の非特異な複素代数多様体に対し、その正規交差因子に関する相対コホモロジー群を、admissible chain の複体を使って記述できる事を示した。また、高次 Chow サイクルのアーベル-ヤコビ写像が、admissible chain 上の周期積分として記述できる事を示した。応用として、Bloch-Kriz の構成したポリログの Hodge 実現が、アーベル-ヤコビ写像により記述できる事を示した。この成果はアメリカ数学会の雑誌 (Transactions of the American Mathematical Society) に掲載された。

今後の展望としては、admissible chain の関手性を証明して、混合モチーフの圏全体の Hodge 実現関手を周期積分を使って定義する可能性を模索している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kenichiro Kimura	4. 巻 374
2. 論文標題 SEMI-ALGEBRAIC CHAINS ON PROJECTIVE VARIETIES AND THE ABEL-JACOBI MAP FOR HIGHER CHOW CYCLES	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American mathematical society	6. 最初と最後の頁 7589--7619
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8422	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Kenichiro Kimura
2. 発表標題 The Abel-Jacobi map for higher Chow cycles (in progress)
3. 学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichiro Kimura
2. 発表標題 The Abel-Jacobi map for higher Chow cycles
3. 学会等名 Working Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenichiro Kimura
2. 発表標題 The Abel-Jacobi map for higher Chow cycles (in progress)
3. 学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichiro Kimura
2. 発表標題 Hodge realization of Bloch-Kriz mixed Tate motives via integral of logarithmic forms
3. 学会等名 Regulators in Niseko 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------