様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １２ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2022
課題番号：１７Ｋ０５１５８

研究課題名（和文）無限次元代数群とリー代数の研究、および準周期・非周期構造への応用

研究課題名（英文）Study on infinite dimensional algebraic groups and Lie algebras, and application to quasi-periodic and aperiodic structures

研究代表者
森田　純（Morita, Jun）

筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授

研究者番号：２０１６６４１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：整数環の分母に幾つかの素数を添加したものを R とおくとき、K_2SL_2(R)の構造を決定する判定条件を導き、多くの新たな構造定理を証明した。岩手大学の吉井洋二氏との共同研究により、極小な局所アフィン・リー代数を分類した。アルバータ大学の A. Pianzola 氏と岡山理科大学の柴田大樹氏との共同研究により、アフィン型カッツ・ムーディ群をスキーム論の立場で、その構造を解明することに成功した。四元数体の内部に H4 型のコクセター群を用いて得られる無限ルート系が構成されるが、R. Moody 氏との共同研究により、その代数的な構造を解明して、量子ビットへの重要な応用を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
何れも有限次元および無限次元の代数群とリー代数に関わる基本的な研究成果である。新たな知見も多く含み、数学的な価値は高く、意義深いと認められる。

研究成果の概要（英文）：(1)The structure of K_2SL_2(R) was determined for several prime numbers p_1,...,p_n, where R = [1/p_1,...,1/p_n]. (2) We classified minimal locally affine Lie algebras. This is a joint work with Yoji Yoshii. (3) We characterized affine Kac-Moody groups using schemes and Galois descert. This is a joint work with A. Pianzola and T. Shibata. (4) We discussed some infinite root system obtained from H4 root systems in quaternion division ring, and obtained a new application to quantum bits. This is a joint work with Robert Moody.

研究分野：代数学

キーワード：代数群　リー代数　代数的K理論　局所アフィン・リー代数　カッツ・ムーディ群　スキーム　四元数体　量子ビット

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

**１．研究開始当初の背景**

**有限次元代数群の研究において、岩堀・松本理論は新たなティッツ系の発見という意味に限ったとしても、無限次元への橋渡しという非常に大きな歴史的役割を果たしている。実際、思想的には無限次元代数群であるカッツ・ムーディ群の研究へと連綿と繋がってきている。そういう意味でも、有限次元および無限次元代数群の構造の研究を、非周期構造や量子ビットへの応用も含めて、引き続き発展させていく必要がある。**

**２．研究の目的**

[1] **代数的 K 理論、数論、代数群を組み合わせた研究が途上であるので、理論を一層発展させることが目的である。**

[2] 極小な局所アフィン･リー代数の分類理論を完成させることが目的である。

[3] アフィン型カッツ･ムーディ群をスキームとして捉えることが目的である。

[4] **非結晶型の鏡映群を用いて非周期型無限ルート系を構成し、その融合積構造を解明し、さらに量子ビットの変換群への応用を調べることが目的である。**

**３．研究の方法**

**[1]　特殊線型群と Steinberg 群を用いて K_2 群を定め、そこで生じる松本関係式を詳しく調べて、素数の性質が如何に個性豊かであるかに着目しながら、構造を決定する。**

**[2]　コアの外側にある 1 次元導分を決定し、それらが同型問題に寄与する原理を解明し、その意味で分類を完成させる。**

**[3]**　アフィン型カッツ･ムーディ群をスキームとして捉えるために、シュヴァレー群の立場からのアプローチを行い、特に捩れ型の場合には Galois Descent の視点で新しい解釈を与える。

[4] 四元数体の中で H4 型の非結晶型ルート系を 2 つ選び、それらが生成する無限ルート系を構成し、その融合積分解を与える。これを用いて量子ビットとその変換群を近似する。

**４．研究成果**

[1] 素数 p_1,…,p_n に対して環 R = Z[1/p_1,…,1/p_n] を考える。そのとき、階数が 1 の K_2 群である K_2(2,R) は次で定義される。

K_2(2,R) = Ker [St(2,R) → SL(2,R)]

ここに St(2,R) は生成元と基本関係で与えられる Steinberg 群である。このとき、K_2(2,R) を決定することが、基本的な問題として残されているが、今回の研究では今まで知られていた結果を大幅に改善させて

K_2(2,R) = Z ¥oplus (Z/p_1Z)^¥times ¥oplus ¥cdots ¥oplus (Z/p_nZ)^¥times

となる判定条件を一般の形で与えた。その上で、さらに多くの具体例で結果が成立していることを示した。特筆すべき背景としては、アフィン･ワイル群に付随するティッツ系と深く関係していることと、それにより岩堀･松本分解が SL(2,R) の中に得られていることが挙げられる。

参考文献：Jun Morita

Chevalley groups over Dedekind domains and some problems for K_2(2,Z_S),

Toyama Math. J. Vol. 41(2020), 83-122.

[2] 岩手大学の吉井洋二氏との共同研究で、極小な局所アフィン･リー代数の分類を完成させた。ここでいう分類とは同型類を決定するという強い意味である。局所アフィン･リー代数とは、アフィン･リー代数の一般化であり、三つ組み (L,H,B) の形で与えられる。ここに L はリー代数、H は L の部分リー代数、そして B は双一次形式である。極小な局所アフィン･リー代数は 1 次元導分 p でパラメトライズされ、(L(p),H(p),B(p)) として記述される。このとき先ず大きな分類として

$$A_I^{(1)}, B_I^{(1)}, C_I^{(1)}, D_I^{(1)}, B_I^{(2)}, C_I^{(2)}, BC_I^{(2)}$$

が或る種の無限ルート系の分類に沿ってなされる。さらに (L(p),H(p),B(p)) と (L(q),H(q),B(q)) が同型になるための必要十分条件を与え、極小な局所アフィン・リー代数に対する分類問題に完全に決着をつけた。

参考文献： Jun Morita, Yoji Yoshii
Classification of minimal locally affine Lie algebras,
J. Algebra Vol. 616(2023), 97-154.

[3] アルバータ大学の A. Pianzola 氏と岡山理科大学の柴田大樹氏との共同研究により、アフィン型カッツ・ムーディ群をスキームとして捉える研究を行い、特に捩れ型の場合には Galois Descent の立場での解釈も与えた。そもそも半単純代数群は Chevalley と Demazure により群スキームとして見なすことが可能となり、理論の大きな進展が得られた。この様な歴史的にも非常に重要な経緯の中で、無限次元でも類似のアプローチが望まれていた。本研究では、アフィン型カッツ・ムーディ群の場合に具体的にスキームを構成し、新たな解釈を与えることに成功した。

参考文献： Jun Morita, Arturo Pianzola, Taiki Shibata
Affine Kac-Moody groups and Lie algebras in the language of SGA3,
J. Pure Applied Algebra Vol. 227, 2023, 107331

[4] アルバータ大学名誉教授 Robert Moody 氏との共同研究により、四元数体における双子 H4 型ルート系を用いて、或る非結晶的な無限ルート系と無限鏡映群を構成した。さらに、それらの融合積構造を解明することにより、稠密性を応用して量子ビットの変換群として扱うことに成功した。特に、本研究を通じて、現代数学において重要かつ基本的である

四元数、ユニタリ群、回転群、正二十面体、黄金比、非周期的、対称性

などの概念が用いられている。

参考文献： Robert Moody, Jun Morita
Discretization of SU(2) and the orthogonal group using icosahedral symmetries and the golden numbers,
Comm. Algebra Vol. 46, 2018, 2510 - 2533

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Jun Morita | ４．巻<br>41 |
| ２．論文標題<br>Chevalley groups over Dedekind domains and some problems for K_2(2,Z_S) | ５．発行年<br>2020年 |
| ３．雑誌名<br>Toyama Mathematical Journal | ６．最初と最後の頁<br>83 - 122 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Jun Morita | ４．巻<br>61 |
| ２．論文標題<br>Simple Kac-Moody groups with trivial Schur multipliers | ５．発行年<br>2018年 |
| ３．雑誌名<br>Science China Mathematics | ６．最初と最後の頁<br>311 -- 316 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s11425-016-9170-1 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Robert Moody, Jun Morita | ４．巻<br>46 |
| ２．論文標題<br>Discretization of SU(2) and the orthogonal group using icosahedral symmetries and the golden numbers | ５．発行年<br>2018年 |
| ３．雑誌名<br>Communications in Algebras | ６．最初と最後の頁<br>2510 -- 533 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1080/00927872.20171388815 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>該当する |

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　2件／うち国際学会　1件）

| |
|---|
| １．発表者名<br>Jun Morita |
| ２．発表標題<br>Chevalley groups over Dedekind domains and K2 groups |
| ３．学会等名<br>The second meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and Related Topics（招待講演）（国際学会） |
| ４．発表年<br>2020年 |

| |
|---|
| 1．発表者名<br>森田純 |
| 2．発表標題<br>Kac-Moody algebras, groups and related topics |
| 3．学会等名<br>Finite Groups, VOAs, and Related Topics 2018（招待講演） |
| 4．発表年<br>2018年 |

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

| | 氏名<br>（ローマ字氏名）<br>（研究者番号） | 所属研究機関・部局・職<br>（機関番号） | 備考 |
|---|---|---|---|

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|---|---|---|---|---|
| カナダ | アルバータ大学 | | | |