

令和 5 年 5 月 22 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K18636

研究課題名（和文）算数・数学科における前提追究活動を促進する教材の開発原理の構築と検証

研究課題名（英文）Development of task design principles for promoting mathematical activity involving assumptions in school mathematics

研究代表者

小松 孝太郎（Komatsu, Kotaro）

筑波大学・人間系・准教授

研究者番号：40578267

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、算数・数学科において前提追究活動を促進するための課題の設計原理を開発することを目的とした。ねらいとする学習目標を相対的真理観に基づいて設定し、先行研究の知見を根拠として課題設計原理を構築した。次に、原理に基づいて設計した課題を小中学校の授業で実践し、その実践の分析結果から、構築した原理を洗練した。そして、洗練した原理が、上述の学習目標を達成するための課題を設計する際に有効であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来の数学教育では、前提が明確な状況で推論を積み重ねる論理的思考力の育成が志向されてきたが、日常社会では条件が明確な問題に直面することは少ない。そこで本研究では前提追究活動に着目し、真に生きて働く力を算数・数学科で育成することを目指した。さらに、個々の具体的な課題を設計することよりも、そうした課題設計を裏付ける一般的な設計原理を開発した。これにより、原理に基づいて、研究で開発した課題以外にも多くの課題を設計できるようになることが期待される。

研究成果の概要（英文）：This research project aimed to develop task design principles for promoting mathematical activity involving assumptions in school mathematics. I specified learning goals targeted in this project from the perspective that truth in mathematics depends on assumptions and used the literature to construct a preliminary version of task design principles. I then implemented tasks designed based on these principles in primary and secondary schools and analysed the implementation to refine the preliminary principles. From this project, I showed that the refined principles can underpin the design of tasks for achieving the intended learning goals.

研究分野：数学教育学

キーワード：算数・数学 前提追究 教材開発

1. 研究開始当初の背景

従来の数学教育では、説明・証明に関する研究に代表されるように、前提が明確に示された問題に対して、一つ一つ推論を積み重ねて結論を導く論理的思考力の育成が志向されてきた。しかし、我々が生きている社会では、条件が明確な問題に直面することはむしろ少なく、そうした前提の違いにより合意形成が進まないことがしばしばある。そこで本研究では、「前提追究活動」に着目し、真に生きて働く力を算数・数学科で育成することを目指した。

こうした力を育成する方法として、本研究では「課題設計」(task design) に焦点を当てた。なぜなら、児童生徒は普段数学の問題や課題を解くことを通じて学習するからである。本研究では、とりわけ個々の具体的な課題を設計することよりも、そうした課題設計を裏付けるメタ的な「設計原理」(task design principles) を開発することを目的とした。その理由は、課題設計の一般的な原理が明らかになれば、その原理に基づいて教師がそれぞれの教室に応じてより柔軟に課題を実践したり、研究で開発した課題以外にも多くの課題を設計したりすることができるようになることと期待されるからである。以上より、本研究では次の2つを達成することを目的とした。

2. 研究の目的

- (1) 算数・数学科において前提追究活動を促進するための課題の設計原理を構築する。
- (2) 設計した課題を小中学校で実践し、その結果を分析することにより、構築した課題設計原理の有効性を明らかにする。

3. 研究の方法

本研究では方法論として「デザイン研究」を採用した。具体的には、意図する学習目標の明確化、先行研究の知見を根拠とした課題設計原理の設定、原理に基づく課題の設計と実践、実践結果の分析による課題設計原理の洗練から成るサイクルを繰り返した。

4. 研究成果

(1) 学習目標の明確化

Lampert (1992) が提唱した「真正な数学」という概念に着目して、本研究で達成を意図する学習目標を明確化した。とりわけ、数学において前提が果たしてきた役割の中でも次の2つを取り上げた。一つは真理の相対性であり、命題が真か偽かは、絶対的に定まるものではなく、前提に依存するという点である。もう一つは、推測の真偽について論争が起きたときに、数学者はその推測の背後に隠れている前提を明確にすることで論争を解決してきたことである。以上より、本研究でねらいとする学習目標を次の通りとした。

目標1：結論が正しいかどうかは、その結論を導き出した推論が何を前提としているのかによることを理解する。

目標2：何を前提としているのかを明確にすることは、一つの共通した結論にたどり着くために重要であることを理解する。

(2) 前提の分類

本研究の主要な考察対象である前提について、その種類の分類を行った。これまでの先行研究では、前提の種類として、主に証明の文脈で公理と定義が議論されてきた。本研究では、前提に関する学習の機会を広げるために、証明に限らず問題解決の文脈も含め、前提の種類として他に「問題の条件」と「一般用語の意味」を加えた。そして、大局的/局所的、命題的/用語的の観点から、前提の種類を次の表の通りに整理した。

	命題的	用語的
大局的	公理	定義
局所的	問題の条件	一般用語の意味

公理と定義を大局的としたのは、例えば何を公理とするのかは、他の公理、定義、命題など理論全体を考慮して決めるからである。それに対して、問題の条件は、当該の問題のみが関わるため局所的とした。以上の点は定義と一般用語の意味についても同様である。また、公理と問題の条件を命題的としたのは、それらが命題の形式で特徴付けられるからであり(公理は $p \Rightarrow q$ 、問題の条件は p)、定義と一般用語の意味を用語的としたのは、それらがいずれも用語の意味に関わるからである。

(3) 課題設計原理の開発

① 原理の暫定版の構築

学習目標を達成するための課題の設計原理として、「生産的曖昧性」(Foster, 2011) 等の先行研究や、筆者のこれまでの研究から、次の3つを設定した。

原理1：課題の前提を意図的に明示しないことにより、課題が異なった前提の下で考えら

れるようにする。

原理2：それらの異なった前提によって異なった正答が生まれるようにする。

原理3：異なる正答が理論上は可能であっても児童生徒から自発的に出てこないことが予想される場合には、そうした正答が存在する可能性を示唆する。

この中でも原理1と2は必須のものであり、原理3はそうした状況が想定される場合のみに用いられるものである。

② 課題の設計と実践

先行文献で示されている課題 (Beckmann, 2005; 国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2016) を参考にしつつ、上記の原理を用いて2つの課題を設計した。課題設計原理の有効性を異なる文脈で検討するために、2つの課題には次の違いを持たせた。すなわち、課題1は中学校第3学年(対象学年)、関数(内容領域)、問題の条件(前提の種類)、原理1、2の使用(原理)に関係するものであり、課題2は小学校第5学年(対象学年)、図形(内容領域)、一般用語の意味(前提の種類)、原理1～3の使用(原理)に関係するものである。右図は課題2である。

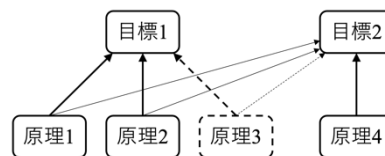
そして、教師の協力の下、課題1を中学校2クラスで、課題2を小学校3クラスでそれぞれ実践した。学習目標が達成されたかどうかを検討するために、仮説的学習軌道 (Simon & Tzur, 2004) という概念を援用した。その上で、実際の児童生徒の活動が仮説的学習軌道と一致したかどうかを質的に分析することによって、構築した課題設計原理の有効性を明らかにした。

③ 原理の洗練

実践の分析から、児童生徒が結論の正否の相対性と前提の明確化の必要性を認識し、2つの学習目標を達成していたことを明らかにした。一方で、授業では教師が、設計した課題とは別に、問題文を修正することを児童生徒に提案していた。これが学習目標2の達成にとって重要であったことから、以下の課題設計原理を追加した。

原理4：正答が一つのみとなるように課題を修正し、その修正の是非について議論する機会を設ける。

そして、学習目標と課題設計原理の関係を右図のように整理した。このうち原理1～3と目標2が細線で結ばれているのは、原理1～3が目標2の達成の前段階として位置付けていることを意味する。また、原理3は必須ではないため点線で表されている。



(4) 数学的知識の生成におけるアブダクション

本研究が方法論として採用したデザイン研究は、その目的として、ある特定の学習を支援する方法についての理論を生成することの他に、研究を通じて児童生徒の思考や教師の指導等について理論的な貢献をもたらすことも含む。このことから、本研究では、前提追究活動に関わってこれまで行ってきた授業実践を分析し、数学的知識の生成における生徒の思考の様相も明らかにした。具体的には、生徒の活動を捉える枠組みとして、推測・事柄、証明、論駁、数学的知識の生成から成るモデルを構築した。そして、関連の授業を、エーコ (Eco, 1986) によるアブダクションの分類 (過剰コード化アブダクション、過小コード化アブダクション、創造的アブダクション) を枠組みとして分析した。その結果、授業で生徒が定理を生み出した際、創造的アブダクションに相当する行為を行っていたことを明らかにした。

<引用・参考文献>

Beckmann, S. (2005). *Class activities to accompany Mathematics for Elementary Teachers*. Pearson.

Eco, U. (1986). *Semiotics and the philosophy of language*. Indiana University Press.

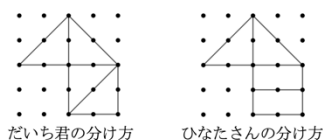
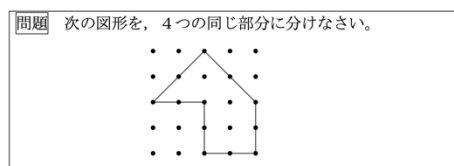
Foster, C. (2011). Productive ambiguity in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), 3-7.

国立教育政策研究所教育課程研究センター (2016). 『平成28年度全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校数学』.

Lampert, M. (1992). Practices and problems in teaching authentic mathematics. In F. K. Oser, A. Dick, & J. L. Patry (Eds.), *Effective and responsible teaching: The new synthesis* (pp. 295-314). Jossey-Bass Publishers.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

次の問題に対して、だいいち君とひなたさんは次のように考えました。



二人の分け方について、どのように考えますか。次のア～エの中から、あなたの考えを選んで、○をつけましょう。また、それを選んだ理由も説明しましょう。

- ア だいいち君の分け方は正しいが、ひなたさんの分け方は正しくない。
- イ ひなたさんの分け方は正しいが、だいいち君の分け方は正しくない。
- ウ だいいち君の分け方も、ひなたさんの分け方も、どちらも正しい。
- エ だいいち君の分け方も、ひなたさんの分け方も、どちらも正しくない。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件／うち国際共著 11件／うちオープンアクセス 14件）

1. 著者名 Reid, D., Shinno, Y., Komatsu, K., & Tsujiyama, Y.	4. 巻 1
2. 論文標題 Toulmin analysis of meta-mathematical argumentation in a Japanese grade 8 classroom	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 234-241
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 青山和裕・辻山洋介・小松孝太郎・永田潤一郎・吉川厚	4. 巻 46(1)
2. 論文標題 教師による生徒の非認知的スキルの評価要因に関する研究：中学校数学科「データの活用」領域における調査結果の考察	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 科学教育研究	6. 最初と最後の頁 91-103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14935/jssej.46.91	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Komatsu, K., & Jones, K.	4. 巻 109(3)
2. 論文標題 Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Educational Studies in Mathematics	6. 最初と最後の頁 567-591
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10649-021-10086-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Komatsu, K., & Jones, K.	4. 巻 6(2)
2. 論文標題 Interplay between paper-and-pencil activity and dynamic-geometry-environment use during generalisation and proving	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Digital Experiences in Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 123-143
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40751-020-00067-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Bokhove, C., Miyazaki, M., Komatsu, K., Chino, K., Leung, A., & Mok, I. A. C.	4. 巻 4
2. 論文標題 The role of "opportunity to learn" in the geometry curriculum: A multilevel comparison of six countries	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Frontiers in Education	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3389/feduc.2019.00063	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Sasa, H., Fujita, T., Komatsu, K., & Shimizu, S.	4. 巻 4
2. 論文標題 Curriculum development for explorative proving in lower secondary school geometry: Focusing on the levels of planning and constructing a proof	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Frontiers in Education	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3389/feduc.2019.00031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Komatsu, K., & Jones, K.	4. 巻 17(4)
2. 論文標題 Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Science and Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 801-824
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10763-018-9892-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Komatsu, K., Yamazaki, M., Fujita, T., Jones, K., & Sue, N.	4. 巻 3
2. 論文標題 Secondary school students' appraisal of mathematical proofs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 227-234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Miyazaki, M., Nakagawa, H., Chino, K., Iwata, K., Komatsu K., & Fujita, T.	4. 巻 -
2. 論文標題 Domain-specific frameworks for curriculum development of explorative proving in junior high school mathematics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities (ICMI Study 24 conference proceedings)	6. 最初と最後の頁 269-276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Komatsu, K., Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J.	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Task design for developing students' recognition of the roles of assumptions in mathematical activity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Komatsu, K., & Jones, K.
2. 発表標題 Approaches to analysing classroom argumentation
3. 学会等名 The 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小松孝太郎・Andreas J. Stylianides・Gabriel J. Stylianides・和田聖国
2. 発表標題 前提の役割に関する生徒の認識を育成するための課題設計
3. 学会等名 日本数学教育学会第52回秋期研究大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 真野祐輔・David A. Reid・小松孝太郎・辻山洋介
2. 発表標題 授業過程の研究手法としてのアーギュメンテーション分析
3. 学会等名 日本科学教育学会第43回年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 辻山洋介・青山和裕・小松孝太郎・永田潤一郎・吉川厚
2. 発表標題 科学教育の内容・活動に固有な非認知的スキルの評価法の開発：領域「データの活用」における調査結果の考察
3. 学会等名 日本科学教育学会第43回年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Bokhove, C., Miyazaki, M., Leung, A., Mok, I., Komatsu, K., & Chino, K.
2. 発表標題 The role of 'opportunity to learn' in the geometry curriculum: A multilevel comparison of six countries
3. 学会等名 2019 American Educational Research Association Annual Meeting (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小松孝太郎・永田潤一郎・辻山洋介
2. 発表標題 課題探究として証明することを実現する指導法の開発：領域「データの活用」に焦点をあてて
3. 学会等名 日本数学教育学会第6回春期研究大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 永田潤一郎・青山和裕・小松孝太郎・辻山洋介
2. 発表標題 科学教育の内容・活動に固有な非認知的スキルの評価法の開発：領域「データの活用」における調査内容について
3. 学会等名 日本科学教育学会第42回年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jones, K., & Komatsu, K.
2. 発表標題 Task design with DGEs: The case of students' counterexamples
3. 学会等名 The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計8件

1. 著者名 小松孝太郎	4. 発行年 2021年
2. 出版社 協同出版	5. 総ページ数 201
3. 書名 磯田正美・影山和也（編著），『中等数学科教育（新・教職課程演習第19巻）』（Q31 数学的な見方・考え方および態度とは何かを述べなさい，Q32 中学校数学科の問題解決において数学的な見方・考え方が働く場面を示しなさい，Q33 高等学校数学科の問題解決において数学的な見方・考え方が働く場面を示しなさい）	

1. 著者名 Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., & Stylianides, G. J.	4. 発行年 2022年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 1406
3. 書名 M. Danesi (Ed.), Handbook of cognitive mathematics (Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving)	

1. 著者名 小松孝太郎	4. 発行年 2021年
2. 出版社 協同出版	5. 総ページ数 201
3. 書名 蒔苗直道・松浦武人（編著），『初等算数科教育（新・教職課程演習第13巻）』（「Q11算数科で用いる記号や式について説明しなさい，Q14空間概念の育成とはどのようなことか説明しなさい，Q27図形の求積公式の指導について説明しなさい」の執筆）	

1. 著者名 Komatsu, K., & Jones, K.	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 379
3. 書名 G. Hanna, D. A. Reid, & M. de Villiers (Eds.), Proof technology in mathematics research and teaching (Virtual manipulatives and students' counterexamples during provingの執筆)	

1. 著者名 吉田武男（監修）清水美恵（編著）	4. 発行年 2019年
2. 出版社 ミネルヴァ書房	5. 総ページ数 200
3. 書名 初等算数科教育（第5章執筆）	

1. 著者名 算数科教育学研究会（編）	4. 発行年 2019年
2. 出版社 東洋館出版社	5. 総ページ数 218
3. 書名 新版算数科教育研究（第2章第5節執筆）	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 証明の指導と学習に関する国際研究集会 (International Seminar of Research on Teaching and Learning Mathematical Proof)	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
英国	University of Cambridge	University of Oxford	