

令和 5 年 10 月 25 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05159

研究課題名(和文) 数論的アルゴリズムの自己誘導構造

研究課題名(英文) Self-inducing structure of arithmetic algorithms

研究代表者

秋山 茂樹 (Akiyama, Shigeki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：60212445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：置換規則力学系とその自己相似構造に関連する広い話題の研究を進めることができ、主な成果を列挙する。Bernoulli convolution の Garcia entropy の計算アルゴリズム。有理数ベース数系に対応する自己相似構造。強振動数列のメビウス直交性。双曲空間タイル張りでは、一種タイルからなる強い非周期性タイル張り。コロナ極限の定義を一般的な枠組みで与え、その基本的性質を調べた。数論の正規性の問題を力学系の観点から考え、区分線形で傾きの絶対値が Pisot 数の冪だけからなるような系において、生成的であることが保たれる例を多数構成。

研究成果の学術的意義や社会的意義
成果は査読付きの数学の専門誌に掲載された。これらの一般化の方向で共同研究は引き続き行われている。コロナ極限については研究方向が定まり、非周期タイル張りの場合に関心が向かっている。Bernoulli 畳み込みについては、代数的パラメータについての世界的に多くの研究が進んでいる。Sarnak 予想についても多くの関連研究が次々に発表されている。

研究成果の概要(英文)：We were able to advance research on a wide range of topics related to dynamical systems with self-similar structures. Here we list major achievements: Garcia entropy calculation algorithm of Bernoulli convolution, Self-similar structures corresponding to rational-based number systems, Moebius orthogonality of strong frequency sequences, a strong aperiodic tiling consisting of one type of tile in hyperbolic space, corona limit in a general framework and investigate its fundamental properties, normality in number theory from the point of view of dynamical systems: piecewise linear map Pisot slopes having identical generic points.

研究分野：Number Theory

キーワード：ピゾ数 自己相似構造 自己誘導構造 Bernoulli convolution Sarnak conjecture normal numbers rational number system corona limit

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

大枠では、数論とエルゴード理論の繋がりを調べることを研究課題としている。本研究では数論的アルゴリズムが自己誘導構造を持つとき置換規則 (Substitution) という置換操作でコード化されることに特に注目した。この場合は数論的なアルゴリズムの周期構造の研究にも応用ができ、数論と力学系の関係は特に密接になることが判明してきている。離散時間の置換規則力学系は整数作用の軌道を考察するが、時間を連続化、高次元化すると様々なタイル張りの空間が現れる。さらに置換規則力学系も含め零エントロピーの力学系は、一般の力学系の静的で理想状況、あるいは絶対零度での振舞を表し、そのような場合には高度な対称性をもつことが多いことが知られている。このように置換規則力学系、タイル張り力学系の数論への応用の研究は、裾野が広く発展の方向が広いと考え、2017 年度後期 Morlet Chair の活動と連携させ国内外で推し進めることを目標とした。

2. 研究の目的

様々な数論の問題に力学系の性質が役にたつことを示し、そのような応用を具体的に実現して、数論とエルゴード理論の異なる研究分野のこれまでにない繋がりをもたらすことを示すことが大きな目標である。特にエントロピー零の力学系において生じる様々な系の対称性に興味をもって研究をすすめる。研究対象としては、ベルヌーイ畳み込みの Erdos 予想、区間自己写像の生成点集合、自己相似タイル張りの中に生ずる等差数列構造などが思考実験の大きな対象となる。自己誘導構造の拡大係数はしばしば Pisot 数や Salem 数という特殊な代数的整数で記述されるので、これらの代数的数とのつながりの研究を深める。Salem 数の拡大係数は離散回転など、しばしば面白い研究対象をうむことにも注目する。

3. 研究の方法

数論的アルゴリズムの周期を研究するため、力学系の適切な自然拡大を作ることによって自己誘導構造を明らかにする。測度論的性質以外に代数的性質、周期の分布などを、自己誘導構造を用いることで調べる。タイリングは自己相似構造をもつ力学系の一つの高次元化であり、これを詳しくしらべることによって数論的力学系の自然拡大の様々な性質をしらべる。自己誘導構造は珍しいものではなく、一般の区間力学系、タイル張り力学系でも観察することができるが、特に具体例を詳しくしらべそこで見つかった現象を一般化していく abductive な接近も有効な方法である。この研究の研究者が世界に広く散らばっており、共同研究と研究交流がもっとも大きな推進力となる。

4. 研究成果

本研究は予想以上に多数の重要な結果が得られたので主なものを列挙する。カッコ内は共著者である。

Bernoulli convolution の研究では Garcia entropy を評価するのが本質的であることが知られている。代数的数でこの計算アルゴリズムを与えることは重要な課題であったが、対応する零オートマトンに行列の積を対応させることでこの計算のアルゴリズムを与えた。これにより対応する自己相似測度の次元の上限は計算できることになったので、具体的に傾きを与えられると Salem 数の傾きであっても計算が実行可能となった。実際の計算は膨大であり、さらなる研究を要する。(T.Kempton, T.Persson, D.J.Feng)

非整数の有理数をベースとする数系は、整数および実数の表示に用いることができ、興味深い性質を示すことが知られている。この有理数ベース数系に対応する言語の木構造は、各枝が全て非同型という極めて複雑なものである。しかし驚くべきことに隣接する極小語同志を変換する transducer が全体を成す木と部分同型であることを示せた。この結果により有理数を底とする数系は自己言及構造をもっていることが分かる。(J.Sakarovitch, V.Marsault)

零エントロピーの力学系のコーディングに関するメビウス直交性は Sarnak 予想として知られている。この問題は力学系的ランダムネスを数論的に記述し様々な新しい問題を与え続けている。この問題と派生して強く振動する数列を構成しそのメビウス直交性を調べた。証明には一様分布論の様々な古典的結果を用いることになった。(Y.Zhang)

双曲空間タイル張りでは、タイル張りの自由度はユークリッド空間よりも緩やかである。そのためユークリッド空間よりも制限の厳しいタイル張りを具体的に構成することは興味深い問題となる。今回の論文では、総局空間で一種タイルからなる非常に強い意味での非周期性タイル張り

を構成できることを示した。(K.Ahara, K.Komatsu,H.Hayashi)

結晶成長の簡単なモデルとしてタイル張りの逐次コロナを相似縮小し正規化した形の極限をコロナ極限という。本研究では、隣接構造、成長速度などの基本的定義を与えコロナ極限のより一般的な数学的枠組みを与えた。さらにその基本的性質を調べ、特に周期的なタイリングの場合にはコロナ極限は中心対称な多面体となることも示せた。さらに平面においてコロナ極限の頂点を具体的な周期タイリングで計算した。(K.Imai,J.Caaliim, H.Kaneko)

B進正規数とはB進数で任意の長さのブロックが期待された確率で現れる数である。数論において正規数の研究の歴史は長い。この正規性の問題を区間力学系の観点から考えなおし、区分線形で傾きの絶対値がPisot数の冪だけからなるような系において生成点集合が保たれる例を非可算無限に構成した。生成点が正規数に対応するものであるがこれを集合レベルで調べる研究はこれまで成されていなかったものである。(H.Kaneko)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shigeki Akiyama, Jonathan Caalim, Katsunobu Imai, Hajime Kaneko	4. 巻 61
2. 論文標題 Corona Limit of tilings:Periodic Case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete and Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 626-652
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/S00454-018-0033-X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shigeki Akiyama and Yunping Jiang	4. 巻 14
2. 論文標題 Higher Order Oscillation and Uniform Distribution,	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Uniform Distribution Theory	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2478/udt-2019-0001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shigeki Akiyama, Victor Marsault, Jacques Sakarovitch	4. 巻 20:1
2. 論文標題 On subtrees of the representation tree in rational base numeration systems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 1-33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.23638/DMTCS-20-1-10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazushi Ahara, Shigeki Akiyama, Hiroko Hayashi and Kazushi Komatsu	4. 巻 48
2. 論文標題 Strongly non-periodic hyperbolic tilings using a single vertex configuration, Hiroshima Mathatical Journal, Vol 48, No. 2	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathatical Journal	6. 最初と最後の頁 133-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeki Akiyama and Yunping Jiang	4. 巻 14
2. 論文標題 Higher Order Oscillation and Uniform Distribution,	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Uniform Distribution Theory	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2478/udt-2019-0001	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeki Akiyama, Jonathan Caalim, Katsunobu Imai and Hajime Kaneko	4. 巻 61
2. 論文標題 Corona Limits of Tilings: Periodic Case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 626-652
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00454-018-0033-x	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeki Akiyama, De-Jun Feng, Tom Kempton, Tomas Persson	4. 巻 3 Sep
2. 論文標題 On the Hausdorff Dimension of Bernoulli Convolutions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny209	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 Arithmetic progressions in self-similar tilings
3. 学会等名 Mathematics of quasiperiodic systems and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 Spiral Delone set
3. 学会等名 Equidistribution: Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 A criterion for almost periodicity of sequences
3. 学会等名 Number Theory and Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 A criterion for almost periodicity of substitutive systems
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Taipei (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 On minimal convex polyhedra
3. 学会等名 Tilings, quasiperiodicity and related topics, RIMS, Kyoto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 Corona Limit of tilings
3. 学会等名 Fractal and dynamical system workshop, Guangzhou (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shigeki Akiyama
2. 発表標題 Delone sets of Spirals
3. 学会等名 MATRIX Program: Aperiodic Order Meets Number Theory, Australia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Shigeki Akiyama and Pierre Arnoux	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer Nature Switzerland	5. 総ページ数 453
3. 書名 Substitution and Tiling Dynamics: Introduction to Self-inducing Structures	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shigeki Akiyama's HP
<http://math.tsukuba.ac.jp/~akiyama/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	湯浅 久利 (Yuasa Hisatoshi) (50363346)	大阪教育大学・教育学部・准教授 (14403)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Dongguk University			
米国	University of Texas			
オーストリア	Leoben University			
フランス	Aix Marseille University			