

令和 5 年 6 月 22 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03598

研究課題名（和文）グラフ・ポセット・マトロイドと有限離散構造の組合せ論およびその応用

研究課題名（英文）Combinatorics of graphs, posets, matroids, and finite discrete structure and their applications

研究代表者

佐野 良夫 (SANO, Yoshio)

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：20650261

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：グラフ・ポセット・マトロイドと有限離散構造の組合せ論およびその応用についての研究を実施し、その研究の成果として、有限離散構造について、様々な側面からの組合せ論的結果、およびその応用についての結果が得られた。より具体的には、（1）「ポセット・マトロイド」の組合せの性質の研究、（2）スペクトラルグラフ理論におけるホフマンの極限定理の符号付きグラフへの一般化の研究、（3）無符号ラプラシアン行列が整数固有値しか持たない「Q-整数グラフ」の研究、および、（4）アルゴリズム的ゲーム理論・メカニズムデザイン分野の財の割り当て問題の研究を行い、それぞれについて新たな研究成果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の1つはマトロイドの自然な一般化であるポセット・マトロイドに関する研究であり、マトロイドが離散最適化アルゴリズム設計において非常に有用な概念であったのと同様に、ポセット・マトロイドの理論が順序構造を含むより一般的な設定での最適化問題に対するアルゴリズム設計へ有用であることが期待され、離散最適化をはじめとする応用数学分野への波及効果が期待できる。

また研究成果の1つであるホフマンの極限定理の符号付きグラフへの一般化の研究では、ホフマン符号付きグラフ、ライン符号付きグラフという新たな概念を導入しており、スペクトラルグラフ理論における新たな研究テーマの創出が期待できる。

研究成果の概要（英文）：In this research, I studied combinatorics of graphs, posets, matroids, and finite discrete structure and their applications. More specifically, I have studied on (1) combinatorial properties of "poset matroids", (2) a generalization of Hoffman's limit theorem from graphs to signed graphs in Spectral Graph Theory, (3) Q-integral graphs, i.e., graphs whose signless Laplacian matrix has only integral eigenvalues, (4) assignment problems in Algorithmic Game Theory and Mechanism Design, and I have obtained new research results for each research topics.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ ポセット マトロイド 離散構造 組合せ論 最適化 アルゴリズム

## 1. 研究開始当初の背景

「マトロイド」とは、ベクトル空間における線形独立性の概念を抽象化したものであり、有限集合を台集合としてその上に定義される離散構造である。このマトロイドという構造は、効率の良いアルゴリズムと密接な関連があるため、純粋数学分野だけでなく離散最適化をはじめとする応用数学分野においてもこれまで非常によく研究されてきた。本研究は、この研究の流れの延長線上に位置づけられる。

マトロイドの一般化として、台集合に半順序構造(ポセット)を考えることで、マトロイド独立集合族の公理系をもとにした「ポセット・マトロイド」が定義される。またマトロイドの別の一般化として、1980年に Faigle によって導入された、マトロイド閉包作用素をもとにポセット上に定義される「Faigle 幾何」がある。これら「ポセット・マトロイド」や「Faigle 幾何」に対して、普通のマトロイド理論で成立した命題や定理が拡張されている。しかしながら、まだ拡張の与えられていない重要なマトロイドの定理もまだまだあるという状況にあった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、グラフやマトロイドの拡張、特にポセット・マトロイドやFaigle幾何などの有限離散構造の組合せ論について、普通のマトロイド理論で成立した命題や定理をポセット・マトロイドやFaigle幾何へと拡張することにより、その組合せ構造の特徴づけや性質を明らかにすることである。また、これらの応用として、これらの有限離散構造が関連する最適化問題に対する効率的なアルゴリズムの設計も行うことも研究の目的とする。

## 3. 研究の方法

研究の方法としては、本研究に関連する論文・文献調査を継続的に行うとともに、本研究に関する研究集会等に参加することで最新の情報を収集しつつ、共同研究者たちと定期的に連絡を取り合うことによって、計画的に研究を推進した。

## 4. 研究成果

本研究課題の研究期間全体を通じて実施した研究の成果として、グラフやポセット・マトロイドなどの有限離散構造について、様々な側面からの組合せ論的結果、およびその応用の1つとして、アルゴリズム的ゲーム理論・メカニズムデザイン分野における結果が得られた。

より具体的には、研究を進めた結果、以下のことが明らかになった。

2019年度の研究成果は以下の通りである。

(1) グラフの「無符号ラプラシアン行列」は、グラフの隣接行列と次数対角行列の和として定義され、Cvetkovic, Rowlinson, & Simic によって2007年に導入された概念であり、「Q-整数グラフ」とは、無符号ラプラシアン行列の固有値が全て整数であるようなグラフのことである。Q-整数グラフに関する研究として、Simic & Stanic は2008年の論文で、グラフの「辺次数」が小さい場合に、Q-整数グラフの分類を与えていた。本研究では、グラフの「辺次数」が

高々6である場合に、Q-整数グラフの構造の分類についての結果を与えた。

(2) chordal graph の部分クラスとして、新たに interval-like graph を定義しその性質について研究を行った。これは、interval graph を含むグラフクラスである。また、bull-free chordal graph や diamond-free chordal graph は、interval-like graph であることを示した。

(3) アルゴリズム的ゲーム理論・メカニズムデザイン分野における問題を扱った。本研究では「可分財」を、財への選好を表す効用関数を持つ個人への貨幣を用いない効率的かつ公平な分配方法についての研究を行った。その結果として、近年、ゲーム理論・ミクロ経済学分野で盛んに研究されているランダム割当問題とその様々な拡張に対する割当メカニズムが、離散最適化分野で古くから研究されていた劣モジュラ構造を持つ問題に対するアルゴリズムと密接な関係があることを明らかにした。さらに、Bogomolnaia & Moulin の割当メカニズムが、可分財に劣モジュラ制約があるようなより一般的な問題に拡張できることを示した。

2020年度は、主に、半順序集合上のマトロイド的構造の1つであるポセット・マトロイドについての研究を進めた。1990年に E. Tardos が与えたポセット・マトロイドに対する交差定理と関連して、ポセット・マトロイドの基階数関数についてその性質や特徴づけについての研究を行った。

それから、2021年3月に開催された日本数学会の応用数学分科会において、「半順序集合上のマトロイド的構造とその周辺」という題目で特別講演を行った。半順序集合上に定義されるマトロイド的構造には、1972年に F. D. J. Dunstan, A. W. Ingleton, D. J. A. Welsh によって定義されたスーパーマトロイド、1980年に U. Faigle によって定義された半順序組合せ幾何、1990年代に M. Barnabei, G. Nicoletti, L. Pezzoli によって研究が進められたポセット・マトロイドなどがあるが、それらの数理構造およびその上での最適化問題（最大独立集合問題、最大共通独立集合問題、最大独立マッチング問題など）に関して、既存の研究のサーベイを与えるとともに、現在進めている研究について講演した。

2021年度の研究成果は以下の通りである。

(1) スペクトラルグラフ理論の研究を行った。符号付きグラフとは無向グラフの各辺に+または-の符号をつけたものである。符号付きグラフの符号付き隣接行列とは、頂点で添え字づけられた正方行列で、対角成分は0、非対角成分の+の辺には+1、-の辺には-1、辺のない頂点対には0を持つような行列である。本研究では、符号付き隣接行列の最小固有値が-2よりも大きく最小次数が十分大きい連結な符号付きグラフは、完全グラフにスイッチング同値であるという定理を示した。これは符号なしグラフに対するホフマンの定理の符号付きグラフ版といえるものである。その証明は、ホフマンの極限定理をエルミート行列に対しての定理へと拡張し、またホフマン・グラフと一般化ライングラフの概念を符号付きグラフへと拡張し、ホフマン符号付きグラフ、ライン符号付きグラフを考えることにより与えた。

(2) アルゴリズム的ゲーム理論・メカニズムデザイン分野における問題を扱った。本研究では「非可分財」を財への選好を持つ個人への貨幣を用いない効率的かつ公平な分配方法についての研究を行った。2018年、2019年の我々の研究において、2001年に Bogomolnaia & Moulin より与えられたランダム割当問題に対する割当メカニズムが、財に劣モジュラ制約があるようなより一般的な問題に拡張できることを示したが、本研究では、さらに各個人の財への選好に同順位を許した場合にも拡張できることを示した。

2022年度の研究成果は以下の通りである。

グラフの「無符号ラプラシアン行列」は、グラフの隣接行列と次数対角行列の和として定義され、Cvetkovic, Rowlinson, & Simic によって2007年に導入された概念であり、「Q-整数グラフ」とは、無符号ラプラシアン行列の固有値が全て整数であるようなグラフのことである。Q-整数グラフに関する研究として、Simic & Stanic は2008年の論文で、グラフの辺次数が小さい場合に、Q-整数グラフの分類を与えていた。Park & Sano は2019年の論文で、グラフの辺次数が高々6である場合に、Q-整数グラフの構造の分類についての結果を与えた。グラフの「Q-固有値半径」は、そのグラフの無符号ラプラシアン行列の固有値の最大値として定義される。Park & Sano は2019年の論文の結果の1つとして、グラフの「Q-固有値半径」が6である場合に、Q-整数グラフの構造の分類についての結果を与えていた。本研究では、次数列が  $(4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  のダブルスターグラフを誘導部分グラフとして含むようなQ-固有値半径が6であるQ-整数グラフは存在しないことを証明した。これにより、グラフのQ-固有値半径が6のQ-整数グラフの構造の分類についてより詳しい結果を与えた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Alexander L. GAVRILYUK, Akihiro MUNEMASA, Yoshio SANO, and Tetsuji TANIGUCHI	4. 巻 98
2. 論文標題 Signed analogue of line graphs and their smallest eigenvalues	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 309 ~ 325
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22699	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshio SANO and Ping ZHAN	4. 巻 2
2. 論文標題 Extended random assignment mechanisms on a family of good sets	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Operations Research Forum	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s43069-021-00095-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jongyook PARK and Yoshio SANO	4. 巻 577
2. 論文標題 On Q-integral graphs with edge-degrees at most six	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 384 ~ 411
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2019.04.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Changseong JO, Jihoon CHOI, Suh-Ryung KIM, and Yoshio SANO	4. 巻 791
2. 論文標題 On the minimum clique partitioning problem on weighted chordal graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 1 ~ 9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.tcs.2019.05.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Satoru FUJISHIGE, Yoshio SANNO, and Ping ZHAN	4. 巻 178
2. 論文標題 Submodular optimization views on the random assignment problem	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 485 ~ 501
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-018-1310-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Semin OH, Jeong Rye PARK, Jongyook PARK, and Yoshio SANNO	4. 巻 654
2. 論文標題 On Q-integral graphs with Q-spectral radius 6	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 267 ~ 288
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.08.031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 佐野良夫
2. 発表標題 半順序集合上のマトロイド的構造とその上の最適化問題について
3. 学会等名 組合せ最適化セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野良夫
2. 発表標題 半順序集合上のマトロイド的構造と効率の良い最適化アルゴリズム
3. 学会等名 筑波セミナー (代数特別セミナー) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野良夫
2. 発表標題 半順序集合上のマトロイド的構造とその周辺
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kotaro TSUTSUMI, Yoshio SAN0, and Takahito KUNO
2. 発表標題 On Reconfiguration of Directed Graph Homomorphisms
3. 学会等名 The 24th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<a href="https://researchmap.jp/sano/">https://researchmap.jp/sano/</a> <a href="https://trios.tsukuba.ac.jp/en/researcher/3333">https://trios.tsukuba.ac.jp/en/researcher/3333</a> <a href="http://syou.cs.tsukuba.ac.jp/sano/index.html">http://syou.cs.tsukuba.ac.jp/sano/index.html</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Pusan National University	Kyungpook National University		
韓国	Seoul National University	Cheongju University		