

コンピュータによる金融市場の依存構造の定量化と  
資産運用実務への応用

筑波大学審査学位論文（博士）

2023

夷 藤 翔

筑波大学大学院  
人文社会ビジネス科学学術院 ビジネス科学研究群 経営学学位プログラム

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>5</b>
1.1	研究の背景	5
1.2	研究の目的	7
1.3	本稿の構成と概要	8
<b>第2章</b>	<b>先行研究</b>	<b>12</b>
2.1	はじめに	12
2.2	コピュラ	12
2.2.1	スクラーの定理	12
2.2.2	裾依存性とコピュラ	13
2.2.3	コピュラの種類	14
2.2.4	コピュラのパラメータ推定	17
2.2.5	コピュラの選択規準と乱数の生成	18
2.3	時系列モデル	19
2.3.1	単変量時系列モデル	19
2.3.2	多変量時系列モデル	20
2.3.3	状態変化を伴うモデル	22
2.3.4	MS ダイナミックコピュラ	24
2.4	テイルリスク管理とポートフォリオ最適化	24
2.4.1	テイルリスクの尺度	24
2.4.2	CVaR を考慮したポートフォリオ最適化	25
2.4.3	VaR および CVaR の推定精度に関する検証方法	26
2.5	コピュラとファイナンス分野での実証分析	27
2.5.1	ポートフォリオ最適化に関する実証分析	27
2.5.2	テイルリスクの推定精度に関する実証分析	29
2.5.3	金融市場の依存構造の特性に関する実証分析	30
2.6	先行研究の課題と本研究との関連性	31

<b>第3章</b>	<b>コピュラの選択が最適資産配分に与える影響</b>	<b>34</b>
3.1	はじめに	34
3.2	CVaR・最適資産配分への影響分析	35
3.2.1	コピュラの選択と CVaR	36
3.2.2	コピュラの選択と CVaR 最小化問題の最適投資比率	40
3.2.3	コピュラの選択と CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率	43
3.3	資産クラス間の依存構造の特徴分析	48
3.3.1	分析対象データ	48
3.3.2	周辺モデルの推定結果	49
3.3.3	コピュラの推定結果	52
3.4	テイルリスクを考慮した最適資産配分に関する実証分析	53
3.4.1	CVaR 制約付き期待収益率最大化問題	54
3.4.2	CVaR 最小化問題	57
3.5	終わりに	67
<b>第4章</b>	<b>ダイナミック非対称 <math>t</math> コピュラを用いた新興国国債市場の依存構造の分析</b>	<b>69</b>
4.1	はじめに	69
4.2	ダイナミック非対称 $t$ コピュラ	70
4.2.1	モデルの概要	70
4.2.2	パラメータの推定方法	74
4.3	新興国国債の依存構造の特徴分析	75
4.3.1	分析対象データ	75
4.3.2	周辺モデルの推定結果	79
4.3.3	コピュラの推定結果	80
4.4	高次モーメントを考慮した最適資産配分に関する実証分析	85
4.4.1	分析方法	86
4.4.2	分析結果	88
4.5	終わりに	94
<b>第5章</b>	<b>ダイナミック非対称 <math>t</math> コピュラを用いた本邦株式市場のスタイル・ファクター間の依存構造の分析</b>	<b>97</b>
5.1	はじめに	97

5.2	6ファクターの統計的特徴 . . . . .	98
5.3	6ファクター間の依存構造の特徴分析 . . . . .	101
5.3.1	周辺モデルの推定結果 . . . . .	101
5.3.2	コピュラの推定結果 . . . . .	102
5.4	テイルリスク・パリティに関する実証分析 . . . . .	112
5.4.1	分析方法 . . . . .	112
5.4.2	分析結果 . . . . .	113
5.5	終わりに . . . . .	120
<b>第6章</b>	<b>MS ダイナミック非対称 <math>t</math> コピュラを用いた本邦株式市場のセクター間の依 存構造の分析</b>	<b>122</b>
6.1	はじめに . . . . .	122
6.2	MS ダイナミック非対称 $t$ コピュラ . . . . .	124
6.2.1	モデルの概要 . . . . .	124
6.2.2	パラメータの推定方法 . . . . .	126
6.3	セクター間の依存構造の特徴分析 . . . . .	128
6.3.1	分析対象データ . . . . .	129
6.3.2	周辺モデルの推定結果 . . . . .	129
6.3.3	コピュラの推定結果 . . . . .	134
6.4	VaR および CVaR の推定精度に関する検証 . . . . .	142
6.4.1	検証方法 . . . . .	142
6.4.2	検証結果 . . . . .	145
6.5	終わりに . . . . .	150
<b>第7章</b>	<b>総括と今後の研究展望</b>	<b>151</b>
	<b>参考文献</b>	<b>155</b>

# 第1章 序論

## 1.1 研究の背景

Markowitz (1952) の平均分散アプローチによって、リスク尺度として収益率の分散、標準偏差が資産運用、リスク管理の実務に普及した。その後、学术界では分散の問題点が指摘される中で 1990 年代以降にテイルリスク尺度の議論が発展し、VaR (Value at Risk) や CVaR (Conditional Value at Risk) が提案された (Artzner et al. (1997, 1999))。時を同じくして実務では、米国の資産運用会社である Long Term Capital Management<sup>1)</sup> が 1998 年に破綻した。その主要因が自己資金を遥かに上回る高いレバレッジ運用にあったことから、金融機関ではテイルリスクを考慮した経営意識が醸成されることとなった。このような背景が重なったことで VaR や CVaR は金融機関に普及し、資産運用の実務では CVaR 最小化戦略等が応用され、リスク管理の実務ではテイルリスクの推定精度の向上が意識されるようになった。

VaR や CVaR の推定にはポートフォリオの将来の分布を推定する必要がある、特に多変量分布を扱う際には資産間の依存構造に関する統計的特徴を捕捉することが重要となる。実務ではこれまで相関係数が主に活用されてきた。一方、現実の金融市場では、資産が共に大きく上昇あるいは下落する局面で依存構造が強まる傾向にある (Fortin and Kuzmics (2002), Clemente and Romano (2004), Stulajter (2009), Autchariyapanitkul et al. (2014), Huang and Hsu (2015), Lucas et al. (2017))。さらには、資産が共に大きく上昇する局面に比べて共に大きく下落する局面で依存構造が強まる傾向についても報告されている (Longin and Solnik (2001), Poon et al. (2004), Patton (2006a), Alcock and Hatherley (2009), Tsafack (2009), Okimoto (2008, 2014), Zhou and Qin (2021))。こうした分布の裾での依存構造やその非対称性に関する統計的特徴は相関のみで捕捉することが難しい。一方、この点を看過するとポートフォリオの想定以上のドローダウンの発生や CVaR 等のテイルリスクの推定精度の悪化に繋がる可能性がある (Arnott et al. (2021))。

---

<sup>1)</sup>米国大手投資銀行ソロモンブラザーズのジョン・メリウェザーによって 1994 年に設立された。その他の主要メンバーはノーベル経済学賞を受賞したマイロン・ショールズ、ロバート・マートン、元 FRB 議長のデビッド・マリンスである。

こうした課題に対応するため、コピュラが活用されてきた。コピュラは、周辺分布が区間  $[0,1]$  上の一様分布である多変量同時確率分布関数として定義され、多変量分布を周辺分布と依存構造に分割したときの依存構造を表す部分として解釈できる (Sklar (1959), 沖本 (2012))。コピュラのメリットは、周辺分布の統計的特徴を考慮したうえで依存構造を柔軟に捕捉できる点である。具体的には、コピュラに分布の裾での依存構造を捕捉可能な関数を適用することで、その統計的特徴の捕捉が可能となる。実際に金融市場では、資産が共に大きく上昇あるいは下落する局面で依存構造が強まる傾向について実証されてきた (Fortin and Kuzmics (2002), Clemente and Romano (2004), Stulajter (2009), Autcharyapanitkul et al. (2014), Huang and Hsu (2015), Lucas et al. (2017))。相関のみを捕捉する正規コピュラでは分布の裾での依存構造の特徴は表現できず、その対応として相関行列に自由度がパラメータとして加わる  $t$  コピュラがこれまで活用されてきた。 $t$  コピュラでは上述した分布の裾での依存構造に関する非対称性は捕捉できない。一方先行研究では、資産が共に大きく上昇する局面に比べて共に大きく下落する局面で依存構造が強まる傾向についても実証されている (Longin and Solnik (2001), Poon et al. (2004), Patton (2006a), Alcock and Hatherley (2009), Tsafack (2009), Okimoto (2008, 2014), Zhou and Qin (2021))。そうした中、近年ファイナンス分野では非対称  $t$  コピュラが注目されている。非対称  $t$  コピュラは相関行列、自由度に加えて歪度がパラメータとして加わり、分布の裾での依存構造に関する非対称性も捕捉できるメリットがある。非対称  $t$  コピュラは他のコピュラに比べてパラメータの推定に時間を要するといった難点があるが、Yoshiba (2018) により効率的な推定方法が提案されたことで、実証分析での活用が進んでいる。

このような背景から、近年は非対称  $t$  コピュラを用いたポートフォリオ最適化、VaR や CVaR の推定に関する実証分析が行われ、ポートフォリオのパフォーマンスやテイルリスクの推定精度の改善が報告されている (Christoffersen and Langlois (2013), González-Pedraz et al. (2015), Cerrato et al. (2017b), Yoshiba (2019), Allen et al. (2020), Zhou and Qin (2021))。一方、これらの先行研究では、コピュラに加えて周辺モデルにも相違がある実証分析や、投資家の期待効用関数や分位ポートフォリオ等現実的に投資が難しい手法を仮定した実証分析が主である。コピュラおよび周辺モデルに相違がある場合、ポートフォリオのパフォーマンスの改善が依存構造の捕捉方法の相違に起因しているか特定することが難しい。また、投資家の期待効用関数の特定は一般的には困難である。

また、依存構造は時系列に変化していることが指摘されている (Okimoto (2008), Cherubini et al. (2011))。非対称  $t$  コピュラについても、相関行列に DCC (Engle (2002)) を

適用したダイナミック非対称  $t$  コピュラ<sup>2)</sup>が提案され、ダイナミック  $t$  コピュラやダイナミック正規コピュラに比べた優位性が示されている (Christoffersen and Langlois (2013), Cerrato et al. (2017b), Zhou and Qin (2021)). これらは、相関の時変性を考慮しても分布の裾での依存構造の影響が残存し、その点を看過するとポートフォリオのパフォーマンスやテイルリスクの推定精度の悪化に繋がることを示した点で有用である。一方、Aielli (2013) は DCC モデルが無条件分散共分散にバイアスを齎すことを指摘し、この点を修正した cDCC を提案した。無条件分散共分散行列の一致性を担保しつつ、相関の時変性と分布の裾での依存構造を捕捉し、ポートフォリオ最適化等に応用するためには、cDCC と整合的なダイナミック非対称  $t$  コピュラの構築が必要である。加えて、先行研究では非対称  $t$  コピュラやダイナミック非対称  $t$  コピュラの自由度、歪度は観測期間を通じて一定とされている。一方、これらのパラメータは全ての変量間の裾での依存関係を表現するため、テイルリスク顕在化局面と関連することが想定される。テイルリスク顕在化局面では CVaR 等の推定精度が低下する傾向にあるが、自由度や歪度の変動を捉えることで同局面の捕捉に繋がり、VaR や CVaR の推定精度の改善に繋がることが期待される。

さらに、先行研究では欧米の株式市場に焦点を当てた研究が主である。一方、他の市場や資産クラスに関しても効率的なポートフォリオの運用やテイルリスクの推定精度の向上は重要な論点である。また、幅広い種類の実証データからの示唆を積み上げることにより、非対称  $t$  コピュラの有用性に関して頑健性が高まることも期待される。

## 1.2 研究の目的

こうした背景を踏まえ、本稿ではコピュラの選択が最適投資比率、ポートフォリオのパフォーマンス、テイルリスクの推定精度に与える影響について考察する。周辺モデルの影響を同一としたうえでコピュラの違いのみに着目し、非対称  $t$  コピュラを軸に、分布の裾での依存構造や非対称性の捕捉が上述した点の改善に繋がるのかについて、応用性の高い複数のポートフォリオ最適化手法、様々な資産クラスの実証データを用いて分析を行う。

理論面では、先行研究において依存構造の時系列変化が指摘されている点に鑑み、現実の金融市場のデータにより適合する非対称  $t$  コピュラに拡張する。一つ目は、cDCC と整合的なダイナミック非対称  $t$  コピュラである。これにより、無条件分散共分散行列の一致性を担保しつつ、相関の時変性と分布の裾での依存構造を捕捉し、ポートフォリオ最適化等に応用することが可能となる<sup>3)</sup>。二つ目は、ダイナミック非対称  $t$  コピュラの自由度や

<sup>2)</sup>ダイナミックコピュラについては2章で詳細を記載する。

<sup>3)</sup>4章と5章では、ダイナミック非対称  $t$  コピュラとダイナミック正規コピュラを用いた比較分析を通じ

歪度の状態変化を許容したマルコフ転換ダイナミック非対称 $t$ コピュラである。マルコフ転換ダイナミック非対称 $t$ コピュラは、相関の変動によっても捕捉されない、分布の裾での依存構造やその非対称性に関する状態変化に着目することとなり、テイルリスク顕在化局面の捕捉やテイルリスクの推定精度の向上が期待できる<sup>4)</sup>。

実証面では、先行研究が実務への応用性の低いポートフォリオ構築手法を中心に扱っている点に鑑み、CVaR 最小化問題、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題、テイルリスク・パリティ<sup>5)</sup>といった応用性の高いポートフォリオ構築手法を主として扱う。また、先行研究では欧米の株式市場といった伝統的な市場についての考察が中心である点に鑑み、実証データには本邦株式市場やアセットアロケーション、さらにはリーマン・ショック以降に急速に普及した新興国投資やファクター投資等、実証分析の蓄積が少ない投資対象、投資戦略に関する実証データを幅広く採用する。

また、実務への応用という観点では、コピュラ間の最適投資比率の乖離度合やその背景、ポートフォリオ特性との関連性<sup>6)</sup>といった視点からの考察も必要である。先行研究ではこれらの観点には十分に言及されていないことから、本稿ではこうした観点も取り上げる。

### 1.3 本稿の構成と概要

本稿の3章は夷藤・牧本（2022）、4章は夷藤・中村（2019）、6章は夷藤・牧本（2021）を基に構成されている。図 1.1 には、3章から6章までの研究概要を俯瞰した図を記載した。以下では各章の内容を概説する。

2章では、コピュラ、時系列モデル、テイルリスクを考慮したポートフォリオ最適化問題とテイルリスクのバックテスト手法、コピュラを用いた実証分析の順に本稿に関連する先行研究を纏め、先行研究の課題と本研究の関連性について述べる。

3章では、コピュラの選択がCVaRを考慮した最適資産配分に与える影響を考察する。アセットアロケーションを念頭に置き、伝統的な資産クラスである債券、クレジット、株式、不動産（REIT）に関する依存構造について、Demarta and McNeil（2005）の非対称 $t$ コピュラと他の代表的な多変量コピュラである正規コピュラおよび $t$ コピュラを用いて捕

---

て、相関の変動を考慮したうえでなお、分布の裾での依存構造の捕捉がポートフォリオのパフォーマンスの改善に寄与するかについて考察する。

<sup>4)</sup>6章では、マルコフ転換ダイナミック非対称 $t$ コピュラ、ダイナミック非対称 $t$ コピュラ、非対称 $t$ コピュラを用いた比較分析を通じて、分布の裾での依存構造に関する状態変化の捕捉がテイルリスクの推定精度の改善に寄与するかについて考察する。

<sup>5)</sup>ポートフォリオのCVaRに対する投資対象のリスク寄与を等しくする投資戦略である。

<sup>6)</sup>例えば、順相関と逆相関のポートフォリオの場合でコピュラの違いによる最適投資比率の乖離度合が異なるか等である。



捉する。そのうえで、(1) コピュラの違いが CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率に与える影響、(2) コピュラの違いが CVaR 最小化問題の最適投資比率に与える影響、(3) コピュラ毎の CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンスに関する特徴について考察する。

分析の結果、上記(1)、(2)ともに正規コピュラや $t$ コピュラは AIC 規準で選択された非対称 $t$ コピュラに比べて CVaR を小さく評価し、株式等のハイリスク・ハイリターンの資産の最適投資比率が高まることを示した。CVaR 制約付き期待収益率最大化問題では、CVaR の上限制約が緩い保守的な投資家ほど上述した影響が大きくなること、CVaR 最小化問題では、非対称 $t$ コピュラを用いることでソルティノレシオやカルマーレシオが改善することも併せて示した。応用性の高い CVaR 最小化問題、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題について、周辺モデルを統一しコピュラにのみ異なるモデルを適用し、非対称 $t$ コピュラの活用によるパフォーマンスの改善を示したこと、コピュラの違いが最適投資比率やパフォーマンスに与える影響について、その背景とともに詳細に考察し明らかにしたことが 3 章の貢献である。

4 章では、cDCC と統合的なダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて新興国債市場の依存構造を捕捉する。そのうえで、同市場への投資に際して重要な為替変動リスクのヘッジの有無による影響に焦点をあて、(1) 相関の時系列推移の特徴、(2) 分布の裾での依存構造の有意性と特徴、(3) コピュラの違いと新興国債ポートフォリオのパフォーマンス、(4) 高次モーメントを用いたポートフォリオのパフォーマンスについて考察する。

分析の結果、為替変動リスクをヘッジしない場合には、ヘッジする場合に比べて相関が高位で推移する傾向にあり分散投資効果を期待し難いこと、また分布の裾での依存構造や、上昇時よりも下落時に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性が有意であることを明らかにした。さらに高次モーメントを考慮したポートフォリオ最適化による実証分析では、為替変動リスクをヘッジしない場合にダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることでポートフォリオのパフォーマンスが改善することを示した。cDCC と統合的なダイナミック非対称 $t$ コピュラを明示したこと、新興国債の投資に際して重要な為替変動リスクのヘッジの有無を勘案したうえで実証分析を行い、ダイナミック非対称 $t$ コピュラの活用によるポートフォリオのパフォーマンスの改善を示したことが 4 章の貢献である。

5 章では、本邦株式市場の代表的なスタイル・ファクター間の依存構造を 4 章のダイナミック非対称 $t$ コピュラで捕捉する。そのうえで、(1) ファクター間の相関の時系列推移の特徴、(2) 分布の裾での依存構造の有意性と特徴、(3) コピュラの違いがテイルリスク・パリティのパフォーマンスに与える影響について考察する。

分析の結果、ファクター間の相関は安定的に無相関ではなく時系列に変動しているこ

と、また分布の裾での依存構造や、上昇時よりも下落時に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性が有意であることを明らかにした。さらに、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて CVaR の目標水準を定めたテイルリスク・パリティを構築することで、最大ドローダウンやカルマーレシオが改善することを示した。安定的な無相関性が期待されてきたスタイル・ファクターの依存構造について、相関の変化と分布の裾での依存構造の観点から統計的特徴を明らかにしたことで、ファクター投資に活用される機会が多いリスク・パリティ戦略について、リスク尺度に CVaR を適用しその推定にダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることで、パフォーマンスが改善することを示した点が5章の貢献である。

6章では、ダイナミック非対称 $t$ コピュラの自由度、歪度の状態変化をマルコフ転換モデルにより捕捉できる、マルコフ転換ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて、本邦株式市場のセクター間の依存構造を捕捉する。TOPIX17業種を分析対象とし、(1)自由度、歪度の状態変化が示唆する市場環境、(2)資産間の下側裾依存性に関する動的特徴、(3)自由度、歪度の状態変化の捕捉が VaR や CVaR の推定精度に与える影響について考察する。

分析の結果、ダイナミック非対称 $t$ コピュラの自由度と歪度に状態変化を許容することで、テイルリスク顕在化局面と平常局面を表現できること、シクリカルセクターとディフェンシブセクターへの分散投資によりテイルリスク顕在化局面での耐性が向上することを示した。さらに、MS ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることで、新型コロナ・ショック等を含む局面でのテイルリスクの推定精度が改善することを示した。MS ダイナミック非対称 $t$ コピュラを構築し状態変化の解釈を与えたこと、自由度や歪度の状態変化の捕捉によりテイルリスクの推定精度の改善を示したことが6章の貢献である。

7章では、本稿を総括するとともに今後の研究課題について述べる。

	第3章	第4章	第5章	第6章
分析対象	伝統的4資産 新興国債	新興国債	本邦株式市場 スタイルファクター	本邦株式市場 セクター
主要モデル	非対称コピュラ	ダイナミック非対称コピュラ	ダイナミック非対称コピュラ	MSダイナミック非対称コピュラ
実証分析 (インサンブル)	分布の裾での依存構造の特徴	分布の裾での依存構造の特徴	相関の時変性の特徴	自由度・歪度の状態変化解釈
実証分析 (アウトオブサンブル)	コピュラの違いと最適投資比率・ポートフォリオのパフォーマンスへの影響 CVaR最小化 CVaR制約付き期待収益率最大化 コピュラの違いとCVaRへの影響	コピュラの違いと最適投資比率・ポートフォリオのパフォーマンスへの影響 CRRR効用(高次モーメント考慮)	CVaR Risk Parity コピュラの違いとCVaRへの影響	VaR・CVaRの推定精度
原論文	夷藤/牧本[2022]	夷藤/中村[2019]	-	夷藤/牧本[2021]

図 1.1: 研究の構成

## 第2章 先行研究

### 2.1 はじめに

本章ではまず、コピュラの理論や種類について纏め、近年ファイナンス分野で注目されている非対称 $t$ コピュラの特徴を記載する。また、実証分析において必要なコピュラのパラメータの推定方法や選択規準、乱数の生成についても言及する。

次に、時系列モデルについて纏める。本稿では分析対象である多変量時系列データに対して適用する周辺モデルおよびコピュラに時系列モデルを適用する。そのため、先行研究において提案された時系列モデルを概観する。

次に、テイルリスクを考慮したポートフォリオ最適化問題、テイルリスクのバックテスト手法について纏める。VaR および CVaR の発展経緯を言及したうえで、ポートフォリオ最適化問題としては、CVaR 最小化問題と CVaR 制約付き期待収益率最大化問題を記載する。また、VaR と CVaR に関するバックテスト手法について先行研究を概観する。

最後に、コピュラを用いた実証分析についてサーベイする。コピュラは幅広いファイナンス分野のテーマに応用されているが、本研究との関連性に鑑み、ポートフォリオ最適化に関する実証分析、テイルリスクのバックテストに関する実証分析、依存構造の特性に関する実証分析について先行研究を纏める。

### 2.2 コピュラ

#### 2.2.1 スクラールの定理

スクラールの定理 (Sklar (1959)) は、 $n$  変量連続同時確率分布関数  $F$  がコピュラ  $C$  を用いて式 (2.1) のように記述できることを示している。

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (2.1)$$

ただし、 $F_i (i = 1, \dots, n)$  は  $i$  番目の確率変数  $X_i$  の周辺分布関数である。式 (2.1) は、連続同時分布関数が各変数の周辺分布とコピュラに分解できることを意味している。また、

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)'$   $u_i = F_i(x_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) とすると, 同時分布関数  $F(\mathbf{x})$  の密度関数  $f(\mathbf{x})$  は, コピュラの密度関数  $c(\mathbf{u}) = \partial^n C(\mathbf{u}) / \partial u_1 \cdots \partial u_n$  を用いて式 (2.2) のように表される.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \frac{\partial^n C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} \frac{\partial u_1 \cdots \partial u_n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = c(\mathbf{u}) \prod_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (2.2)$$

コピュラの理論に関する詳細については, Joe (1997, 2014), Nelsen (2007), 吉羽 (2010) 等に纏められている.

## 2.2.2 裾依存性とコピュラ

スクラーの定理が示すように, コピュラを活用するメリットの一つは周辺分布の影響を取り除いたうえで依存構造を捕捉できる点である. 一方, 金融市場では, 資産が共に大きく上昇あるいは下落する局面で依存構造が強まる傾向について実証されてきた (Fortin and Kuzmics (2002), Clemente and Romano (2004), Stulajter (2009), Autchariyapanitkul et al. (2014), Huang and Hsu (2015), Lucas et al. (2017)). さらに, 資産が共に大きく上昇する局面に比べて共に大きく下落する局面において依存構造が強まる傾向があると指摘されている (Longin and Solnik (2001), Poon et al. (2004), Patton (2006a), Alcock and Hatherley (2009), Tsafack (2009), Okimoto (2008, 2014), Zhou and Qin (2021)). このような分布の裾での依存構造やその非対称性に関する強弱を定量化する指標として, 上側裾依存係数  $\lambda^U$  および下側裾依存係数  $\lambda^L$  が活用されてきた. これらは相関と同様 2 変量に対して計測され, 式 (2.3), 式 (2.4) のように条件付き確率の極限で定義する (戸坂・吉羽 (2005), McNeil et al. (2015)).

$$\lambda^U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(X_2 > F_2^{-1}(u) | X_1 > F_1^{-1}(u)), \quad (2.3)$$

$$\lambda^L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr(X_2 < F_2^{-1}(u) | X_1 < F_1^{-1}(u)). \quad (2.4)$$

ここで,  $F_i^{-1}$  は確率変数  $X_i$  の周辺分布関数の逆関数である. 裾依存係数は 0 から 1 の値をとり, 1 に近いほど分布の裾での依存構造が強いことを意味する. このように裾依存係数は, 分布の裾での依存構造やその非対称性の度合を把握する手段としては有用だが, ポートフォリオの運用やリスク管理には直接応用できないという難点がある.

一方, 上述した裾依存係数は式 (2.5), 式 (2.6) のようにコピュラ  $C$  の極限の形でも記述

できる（戸坂・吉羽（2005），McNeil et al.（2015））。

$$\lambda^U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad (2.5)$$

$$\lambda^L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (2.6)$$

このことは、コピュラを活用することで分布の裾での依存構造やその非対称性を捕捉できることを示している。したがって、コピュラを用いて金融市場の多変量分布を捕捉することで、上述した依存構造の特徴をポートフォリオの運用やリスク管理には反映することが可能となる。この点がコピュラを活用するもう一つのメリットである。なお、裾依存係数は適用するコピュラによって異なる。例えば、相関行列のみをパラメータとして有する正規コピュラは上側裾依存係数，下側裾依存係数ともにゼロである。後述する各コピュラの裾依存係数については新谷他（2010），吉羽（2010，2020）等に纏められている。

### 2.2.3 コピュラの種類

パラメトリックなコピュラは，単純な閉じた形を持つ陽なコピュラと，単純な閉じた形を持たずスクラーの定理を用いて多変量分布の積分の形で表現される陰なコピュラ<sup>7)</sup>に大別される（McNeil et al.（2015））。

#### 2.2.3.1 代表的なコピュラ

代表的なコピュラの特徴については表 2.1 に纏めた。陽なコピュラの代表例としては，ガンベルコピュラ（Gumbel（1960）），クレイトンコピュラ（Clayton（1978）），フランクコピュラ（Frank（1979）），SJC コピュラ（Patton（2006a））が挙げられる。ガンベルコピュラは上側裾依存性，クレイトンコピュラは下側裾依存性，SJC コピュラは両側の裾依存性を表現できる。一方フランクコピュラは裾依存係数がゼロである。これらのコピュラはアルキメディアンコピュラと呼ばれ，変量間の依存構造を一つあるいは二つ<sup>8)</sup>のパラメータで表現するのが特徴である（戸坂・吉羽（2005），McNeil et al.（2015））。つまり，分析対象の変量数が増加してもパラメータが増加しない。したがって，実務で扱うような相応に変量数が多い分析対象の場合には安定した結果が得られないことが指摘されている（Clemente and Romano（2004））。陰なコピュラの代表例としては，正規コピュラや  $t$  コピュラ等が挙げられる。正規コピュラは多変量正規分布関数， $t$  コピュラは多変量  $t$  分

<sup>7)</sup>例えば，陰なコピュラの一つである非対称  $t$  コピュラは式 (2.9) で表される。

<sup>8)</sup>SJC コピュラは二つ，他のコピュラは一つのパラメータである。

布関数を用いて表現される<sup>9)</sup>。これらのコピュラの特徴は、依存構造を相関行列を含むパラメータで捕捉する点である。したがって、アルキメディアンコピュラに比べて変量数の増加に対応しやすいというメリットがある。また、実務では依存構造の捕捉に相関行列が使われることが多いことに鑑みると、実務との親和性が高いコピュラと言える<sup>10)</sup>。

### 2.2.3.2 非対称 $t$ コピュラ

近年、金融資産間の依存構造の捕捉に非対称  $t$  コピュラが注目されている。非対称  $t$  コピュラは、非対称  $t$  分布を用いて構築されるコピュラであり、Yoshida (2018) によれば非対称  $t$  分布に関するパラメトリゼーションの違いによって三つに分類される。一つ目は、Barndorff-Nielsen (1977) によって提案された一般化双曲型 (generalized hyperbolic) 非対称  $t$  分布を用いたコピュラであり、Demarta and McNeil (2005) によって提案された<sup>11)</sup>。二つ目は、Azzalini and Capitanio (2003) によって提案された非対称  $t$  分布を用いたコピュラであり、Joe (2006) によって提案された。三つ目は、Sahu et al. (2003) によって提案された非対称  $t$  分布を用いたコピュラであり、Smith et al. (2012) によって提案された。このうち Demarta and McNeil (2005) の非対称  $t$  コピュラは、パラメトリゼーションが解釈しやすく推定も容易である<sup>12)</sup>。

本研究では、非対称  $t$  コピュラ、 $t$  コピュラ、正規コピュラを扱うためこれらの関数型を記載する。相関行列を  $\Sigma$ 、自由度パラメータ (以下、本稿では「自由度」と呼ぶ。) を  $\nu$ 、歪度パラメータ (以下、本稿では「歪度」と呼ぶ。) のベクトルを  $\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  とすると、正規コピュラ  $C^N$ 、 $t$  コピュラ  $C^t$ 、非対称  $t$  コピュラ  $C^{st}$  は以下のとおり与えられる。

---

<sup>9)</sup>  $t$  コピュラは分布の裾での依存構造を司る自由度は一つであり、Clemente and Romano (2004) や Demarta and McNeil (2005) では自由度を複数内包する群別  $t$  コピュラが提案されている。

<sup>10)</sup> アルキメディアンコピュラ等のペアコピュラを結合し多変量分布の依存構造を捕捉するヴァインコピュラ (Aas et al. (2009)) も研究されている。ヴァインコピュラはペア毎に異なるコピュラを適用できるが、コピュラの条件付密度関数を階層的に適用するため変量数が増加するとパラメータの推定の計算負荷が相応に大きくなる。本研究では実務への応用可能性に鑑み相関行列を有するコピュラを軸に研究することから、ヴァインコピュラの詳細は省略する。

<sup>11)</sup> 一般化双曲型非対称  $t$  分布の性質については、増田 (2002) や吉羽 (2020) 等を参照されたい。なお、増田 (2002) には一般化双曲型分布の性質について広く纏められている。

<sup>12)</sup> Demarta and McNeil (2005) および Joe (2006) の非対称  $t$  コピュラは最尤法によってパラメータを推定可能である。Smith et al. (2012) の非対称  $t$  コピュラは、Sahu et al. (2003) の非対称  $t$  分布の同時密度関数に高次元  $t$  分布関数を含んでおり、最尤推定法の実装には不向きである。Smith et al. (2012) は MCMC を用いてパラメータを推定した。

・ 正規コピュラ

$$C^N(\mathbf{u}; \Sigma) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right) dx_1 \cdots dx_n. \quad (2.7)$$

・  $t$  コピュラ

$$C^t(\mathbf{u}; \Sigma, \nu) = \int_{-\infty}^{\Psi^{-1}(u_1; \nu)} \cdots \int_{-\infty}^{\Psi^{-1}(u_n; \nu)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi\nu)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (2.8)$$

・ 非対称  $t$  コピュラ

$$C^{st}(\mathbf{u}; \Sigma, \nu, \gamma) = \int_{-\infty}^{\Theta^{-1}(u_1; \nu, \gamma)} \cdots \int_{-\infty}^{\Theta^{-1}(u_n; \nu, \gamma)} \frac{2^{\frac{2-(\nu+n)}{2}} \Upsilon_{\frac{\nu+n}{2}}(\eta(\mathbf{x})) \exp(\mathbf{x}' \Sigma^{-1} \gamma)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi\nu)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \eta(\mathbf{x})^{-\frac{\nu+n}{2}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{\frac{\nu+n}{2}}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (2.9)$$

ここで、 $\eta(\mathbf{x}) = \sqrt{(\nu + \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}) \gamma' \Sigma^{-1} \gamma}$ 、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$  であり、「 $'$ 」は転置である。また、式(2.7)の  $\Phi^{-1}$  は1変量標準正規分布関数の逆関数(分位点関数)、式(2.8)の  $\Psi^{-1}(\cdot; \nu)$  は自由度  $\nu$  の1変量  $t$  分布関数の逆関数、式(2.9)の  $\Upsilon(\cdot; \nu)$  は第3種の修正ベッセル関数、 $\Theta^{-1}(\cdot; \nu, \gamma)$  は自由度  $\nu$ 、歪度  $\gamma$  の1変量一般化双曲型非対称  $t$  分布関数の逆関数である。

正規コピュラは相関行列によって線形の依存構造のみを表現する。 $t$  コピュラは相関行列に自由度がパラメータとして加わり、各資産が同時に大きく下落あるいは上昇する際に依存構造が強まるといった分布の裾での依存構造の特徴も表現する。自由度が低いほど分布の裾での依存構造は強まり、高いほど弱まる関係にある。 $t$  コピュラでは分布の裾での依存構造が対称であることを仮定している。金融市場では分布の裾での依存構造が非対称である場合があり、特に各資産が同時に大きく上昇する場合に比べて同時に大きく下落する場合に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性を有することが多い。Demarta and McNeil (2005) の非対称  $t$  コピュラでは、相関行列および自由度に加えて歪度がパラメータとして加わるため、分布の裾での依存構造を非対称性も含めて表現できる。歪度がゼロの場合には  $t$  コピュラと同じく分布の裾での依存構造が対称であることを表現する。歪度がマイナスの場合には、資産が共に上昇する場合に比べて共に下落する場合に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性を表現し、プラスの場合にはその逆の非対称性を表現する。また、前述したアルキメディアンコピュラと比較した場合も、表



2.1 のとおり依存構造の表現や変量数の拡張に優位性がある。このような背景から、近年は Demarta and McNeil (2005) の非対称  $t$  コピュラを用いた実証分析が多く行われている (Christoffersen et al. (2012, 2018), González-Pedraz et al. (2015), Allen et al. (2020), Zhou et al. (2021))。本研究においても上述した点を勘案し Demarta and McNeil (2005) の非対称  $t$  コピュラを用いる<sup>13)</sup>。

表 2.1: 非対称  $t$  コピュラと他の代表的なコピュラとの比較

Notes: 「裾依存性の有無」は裾依存係数が 0 より大きい値となり得る場合に丸印, 「依存構造の非対称性」は上側裾依存係数と下側裾依存係数の値が異なり得る場合に丸印, 「変量数の拡張」は変量数の増加に対応しコピュラのパラメータ数も増加する場合に丸印とした。

	非対称 $t$	$t$	正規	アルキメディアン			
				クレイトン	ガンベル	フランク	SJC
相関行列の有無	○	○	○	×	×	×	×
正の依存構造	○	○	○	○	○	○	○
負の依存構造	○	○	○	×	×	○	×
裾依存性の有無	○	○	×	○	○	×	○
上側裾依存性	○	○	×	×	○	×	○
下側裾依存性	○	○	×	○	×	×	○
依存構造の非対称性	○	×	×	○	○	×	○
変量数の拡張	○	○	○	×	×	×	×

## 2.2.4 コピュラのパラメータ推定

時点  $s$  の  $i$  番目の分析対象の観測データを  $r_{s,i}$ , コピュラのパラメータを  $\theta^{cpl}$ ,  $i$  番目の周辺分布のパラメータを  $\theta_i^{mgn}$ , 観測時点数を  $S$  個とすると, 式 (2.2) からコピュラを内包する  $n$  変量分布の対数尤度関数は, 式 (2.10) と表される。

$$\log(f(\theta^{cpl}, (\theta_i^{mgn})_{i \in \{1, \dots, n\}})) = \sum_{s=1}^S \log(c(\theta^{cpl} | (F(r_{s,i} | \theta_i^{mgn}))_{i \in \{1, \dots, n\}})) + \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n \log(f(\theta_i^{mgn} | r_{s,i})). \quad (2.10)$$

コピュラの推定方法には, 周辺分布とコピュラを同時に推定する EML (Exact Maximum Likelihood method) と周辺分布を推定したうえで, 周辺分布関数を用いて一様化したデータ

<sup>13)</sup>非対称  $t$  コピュラの性質については, 吉羽 (2020), Demarta and McNeil (2005), McNeil et al. (2015) 等を参照されたい。

を観測データと見做しコピュラのパラメータを2段階で推定する IFM (Inference Functions for Margin method) がある。EML は式 (2.10) を纏めて推定することを意味し、IFM は式 (2.10) 右辺第 2 項の周辺分布のパラメータを推定した後第 1 項のコピュラのパラメータを推定することを意味する。EML は推定精度の高さが期待できる一方、推定するパラメータの数が増加するため計算負荷が大きいというデメリットがある。この課題に対応するため、IFM が提案された (Joe and Xu (1996), Joe (1997))。IFM のメリットは 2 段階推定を行うことで計算負荷を抑制できる点、周辺分布を精度高く推定することで、モデル全体のパラメータ数が増加してもコピュラのパラメータの推定値に関する安定性を確保できる点である。IFM を活用することにより幅広いモデルを用いた分析が可能となり考察を深めることが期待できる (McNeil et al. (2015))。IFM は、周辺分布にパラメトリックな分布を仮定する場合 (Mashal and Naldi (2002)) と経験周辺分布を仮定する場合 (Romano (2002)) がある。後者の場合、コピュラのパラメータの推定値はセミパラメトリックと見做され、そのアプローチは擬似最尤法と呼ばれている (Genest et al. (1995))。IFM が提案されて以降、IFM と EML によるコピュラのパラメータの推定結果が大きく乖離しないことが Bouyé et al. (2000), Panagiotelis et al. (2012) 等で確認された。このような背景から、多くの先行研究では IFM が採用されている。また、IFM を適用する際に周辺分布の推定精度を確認する方法としては、例えばコルモゴロフ-スミルノフ検定 (Frank and Massey (1951)) が活用されている (Patton (2004), Sriboonchitta et al. (2014), Tang et al. (2015))。コピュラのパラメータの推定方法の詳細については戸坂・吉羽 (2005), Joe (2014) 等、非対称  $t$  コピュラのパラメータの推定方法は Yoshiba (2018), 吉羽 (2020) 等に纏められている。

なお、非対称  $t$  コピュラのパラメータの推定では、時点  $s$  毎の  $\Theta^{-1}(u_{s,i}; \mathbf{v}, \gamma)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を求める必要があり、この精緻な計算には時間を要する。Yoshiba (2018) では、区分的 3 次元エルミート内挿多項式を用いて計算する方法を提案しており、その分位点の精度が精緻な分位点に比して大きく劣らないことを確認している<sup>14)</sup>。上述の点に鑑み、本研究においてもこの手法を採用する。

## 2.2.5 コピュラの選択規準と乱数の生成

コピュラの選択規準としては、情報量規準である AIC (Akaike Information Criterion) や BIC (Bayesian Information Criterion) が活用されている (Breyman et al. (2003), Patton

<sup>14)</sup>150 個の分位点をもとに補間した場合の平均絶対誤差を評価し、小数点以下 5 から 6 桁の精度であることを確認している。

(2004), Tsafack (2009)). その他, Patton (2013) 等では尤度比検定 (Vuong (1989), Rivers and Vuong (2002)) を活用した. コピュラを用いて実証分析を行う際にはコピュラから乱数を生成する必要がある. 代表的なコピュラの乱数の生成方法については戸坂・吉羽 (2005), 非対称  $t$  コピュラの乱数の生成方法については Yoshida (2018) 等に纏められている.

## 2.3 時系列モデル

### 2.3.1 単変量時系列モデル

単変量時系列モデル (以下, 本稿では「周辺モデル」とする.) は, 時点  $s$  の分析対象  $i$  のリターンを  $r_{s,i}$ ,  $s-1$  時点での条件付き期待収益率を  $\mu_{s|s-1,i}$ , 条件付き標準偏差を  $\sigma_{s|s-1,i}$ , 誤差項を  $\varepsilon_{s,i}$  とし, 式 (2.11) を仮定したうえで条件付き期待収益率と条件付き分散の時系列構造および誤差項分布を特定することが一般的である.

$$r_{s,i} = \mu_{s|s-1,i} + \sigma_{s|s-1,i} \varepsilon_{s,i}. \quad (2.11)$$

条件付き期待収益率モデルとしては, AR (Autoregressive) モデル, MA (Moving Average) モデル, それらを組み合わせた ARMA (Autoregressive Moving Average) モデルが代表的である.

条件付き分散モデルとしては, ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) モデル (Engle (1982)) や ARCH モデルを拡張した GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) モデル (Bollerslev (1986)) が代表的である. 分散不均一性は金融市場で頻繁に観測される事象であることから, これらを更に拡張したモデルが提案され実証分析が行われるようになった. 例えば, GARCH モデルは正のショックと負のショックが分散に同一の影響を齎すことを仮定しているが, 実際の金融市場では負のショックが大きな影響を持つことが観測されている. この効果 (レバレッジ効果) を捕捉できるよう GARCH モデルを拡張したものとして GJR モデル (Glosten et al. (1993)) がある. その他の派生モデルとしては, GARCH-M モデル (Engle et al. (1987)), EGARCH モデル (Nelson (1991)), IGARCH モデル (Bollerslev and Engle, (1993)), TARARCH モデル (Zakoian (1994)) 等が挙げられる.

誤差項分布としては, 正規分布,  $t$  分布, 非対称  $t$  分布を適用することが多い. このうち非対称  $t$  分布については, これまで様々なパラメトリゼーションを持つ分布が提案されており, Hansen (1994) の非対称  $t$  分布が誤差項分布としては適用されることが多い. 例え

ばコンピュータを用いた実証分析において、周辺モデルの誤差項分布に Hansen (1994) の非対称  $t$  分布を適用した論文としては Jondeau and Rockinger (2006) が挙げられる。また、その他の非対称  $t$  分布としては Barndorff-Nielsen (1977), Jones and Faddy (2003), Aas et al. (2006) 等が挙げられる。モデルの選択規準としては後述する多変量時系列モデルも含め AIC や BIC 等が活用される (沖本 (2010))。なお、本研究では誤差項分布に適用する非対称  $t$  分布に Hansen (1994) を用いる。自由度を  $\nu$ , 歪度を  $\lambda$ , ガンマ関数を  $\Gamma$  とすると、周辺モデルの誤差項  $\varepsilon_{s,i}$  に適用される同分布の密度関数  $g^{st}$  は次式で与えられる。

$$g^{st}(\varepsilon_{s,i}; \nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left( 1 + \frac{1}{\nu-2} \left( \frac{b\varepsilon_{s,i}+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-(\nu+1)/2} & \varepsilon_{s,i} < -\frac{a}{b} \\ bc \left( 1 + \frac{1}{\nu-2} \left( \frac{b\varepsilon_{s,i}+a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-(\nu+1)/2} & \varepsilon_{s,i} \geq -\frac{a}{b} \end{cases} \quad (2.12)$$

ただし,

$$\begin{aligned} a &= 4\lambda c \left( \frac{\nu-2}{\nu-1} \right), \\ b^2 &= 1 + 3\lambda^2 - a^2, \\ c &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

である。  $\lambda > 0$  の場合、式 (2.12) の最頻値は 0 よりも小さくなり右側の裾にかけて歪んだ分布となる。  $\lambda < 0$  の場合は上述と逆の分布となり、  $\lambda = 0$  のとき自由度  $\nu$  の  $t$  分布となる。

## 2.3.2 多変量時系列モデル

多変量時系列モデルは、分散共分散行列の時系列構造に焦点を当てた多変量 GARCH モデルと相関やコンピュータといった依存構造の時系列構造に焦点を当てたモデルに大別できる<sup>15)</sup>。

### 2.3.2.1 多変量 GARCH モデル

初期の多変量 GARCH モデルとしては VEC モデル (Bollerslev et al. (1988)) がある。VEC モデルは vec 作用素を活用し分散共分散行列の各要素を GARCH モデルのように記述したモデルであり、パラメータ数が多いという難点がある。この課題に対応し、パラ

<sup>15)</sup>その他、条件付き期待収益率に関して AR モデルを多変量に拡張した VAR (Vector Autoregressive) モデル (Sims (1980)) がある。本研究との関連性に鑑み詳細は割愛する。

メータ数を抑制したモデルとしては BEKK モデル (Baba et al. (1990), Engle and Kroner (1995)) がある。その他、対角成分にのみ GARCH モデル等を適用し無条件相関行列と組合せ条件付き分散共分散行列を構築する CCC モデル (Bollerslev (1990)) がある。上述したモデルの詳細は Tsay (2005), Bauwens et al. (2006) 等に纏められている。

### 2.3.2.2 相関と時系列モデル

金融市場における相関の時間的な変化は Erb et al. (1994) や Longin and Solnik (2001) 等によって指摘され、その後相関の時系列モデルが提案された。初期のモデルは各相関係数を GARCH モデルのように記述したモデルであり (Tse (2000), Jondeau and Rockinger (2002)), VEC モデルと同様に変量数が増加した場合パラメータ数が飛躍的に増加するという難点があった。この課題に対応し、パラメータ数を抑制した相関の時系列モデルが提案された。代表的なモデルが DCC (Dynamic Conditional Correlation) モデル (Engle (2002)) である。DCC モデルは無条件分散共分散行列を  $\bar{Q}$ , 式 (2.11) の誤差項のベクトル  $\epsilon_s = (\epsilon_{s,1}, \dots, \epsilon_{s,n})'$  とするとき、時点  $s$  における相関行列  $\Sigma_s$  を式 (2.14), 式 (2.15) で記述する。

$$\Sigma_s = \text{diag}(Q_s)^{-\frac{1}{2}} Q_s \text{diag}(Q_s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

$$Q_s = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha (\epsilon_{s-1} \epsilon'_{s-1}) + \beta Q_{s-1}. \quad (2.15)$$

その後、DCC モデルは無条件分散共分散行列にバイアスを齎すことが指摘され、この点を修正した cDCC (consistent Dynamic Conditional Correlation) モデル (Aielli (2013)) が提案された。cDCC モデルは DCC モデルの式 (2.15) を式 (2.16) に置き換えている。

$$Q_s = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha (\text{diag}(Q_{s-1})^{\frac{1}{2}} \epsilon_{s-1} \epsilon'_{s-1} \text{diag}(Q_{s-1})^{\frac{1}{2}}) + \beta Q_{s-1}. \quad (2.16)$$

DCC モデルや cDCC モデルは各変数の誤差項が相関の変動に影響を齎す構造となっているが、この部分を誤差項の標本相関行列に置き換えたモデルも提案されている (Tse and Tsui (2002))。

### 2.3.2.3 コピュラと時系列モデル

相関の時系列モデルが発展する中で、相関では分布の裾での依存構造を捕捉できない点が Embrechts et al. (2002) 等によって指摘され、コピュラの時系列モデルへの拡張が行われるようになった。時系列モデルを適用したコピュラ (以下、本稿では「ダイナミックコ

ピュラ」とする。) について、拡張の方向としては二つに大別できる。一つはコピュラのパラメータが自己回帰移動平均モデルとロジスティック関数等の変換関数によって変動するモデルである。このパラメトリゼーションは、Patton (2001, 2006a, 2006b) によってダイナミックコピュラのコセプトが導入される中で提案され<sup>16)</sup>、主にアルキメディアンコピュラに適用されている (Patton (2001, 2004, 2006a), De Luca and Riviaccio (2009), Hu (2010), Wang et al. (2011), Yang and Hamori (2014))。例えば、Patton (2006a) は SJC コピュラの条件付きパラメータ  $\theta_s^{SJC}$  に式 (2.17) の変動過程を導入した。

$$\theta_s^{SJC} = \Lambda \left( \omega + \alpha \Lambda^{-1}(\theta_{s-1}^{SJC}) + \beta \sum_{j=0}^{m-1} |u_{s-j,1} - u_{s-j,2}| \right). \quad (2.17)$$

$\Lambda(x)$  は変換関数であり、この部分が適用するコピュラによって異なる。SJC コピュラでは  $(1 + \exp(-x))^{-1}$  が適用される。また類似した変動過程のダイナミックコピュラとして、GAS (Generalized Autoregressive Score) を適用したコピュラがある (Creal et al. (2013))。

もう一つは、相関行列を内包するコピュラに既述の DCC モデルや cDCC モデルを適用するモデルであり、正規コピュラ、 $t$  コピュラ、非対称  $t$  コピュラに適用されている (Avouyi-Dovi et al. (2004), Şerban et al. (2007), Christoffersen et al. (2012, 2018), Righi and Ceretta (2012), Lucas et al. (2017), Denkowska and Wanat (2019), Zhou and Qin (2021))。ダイナミックコピュラの詳細については、Cherubini et al. (2011), Manner and Reznikova (2012) 等に纏められている。

### 2.3.3 状態変化を伴うモデル

状態変化を伴うモデルは、状態が観測可能な変数によって決まるモデルと、観測不可能な変数によって決まるモデルに大別できる (沖本 (2010))。

#### 2.3.3.1 状態が観測可能なモデル

状態が観測可能な変数によって決まる代表的なモデルは閾値モデルと平滑化推移モデルである。閾値モデルの典型例としては、AR モデルを拡張した TAR (Threshold Autoregressive) モデル (Tong and Lim (1980)) がある。TAR モデルは、状態変数が閾値超か否かによって AR のパラメータが切り替わるモデルであり、状態変数としては時間軸に応じた線形トレ

<sup>16)</sup>Fermanian and Wegkamp (2012) は、Patton (2001, 2006a, 2006b) のダイナミックコピュラの定義を拡張し、より広範囲の条件下において適用可能なダイナミックコピュラを導入した。このコピュラは Pseudo コピュラと呼ばれている (Cherubini et al. (2011))。

ンド等が選択される。閾値モデルは状態変化が離散的に生じる。一方、状態変化が徐々に織り込まれるよう拡張したモデルがST (Smooth Transition) モデルである。STモデルの詳細についてはDijk et al. (2002) 等に纏められている。STモデルの典型例としては、ARモデルを拡張した平滑推移STAR (Smooth Transition Autoregressive) モデル (Teräsvirta (1994)) がある。STARモデルにおいても状態変数としては時間軸に応じた線形トレンド等が選択され、趨勢的な状態変化を想定し実証分析する場合にはTARモデルより効果的である。また、コピュラの拡張という観点では、コピュラにSTモデルを適用したSTコピュラを用いて資産間の依存構造に関する趨勢的な変化を実証する研究も行われている (Okimoto (2014))。

### 2.3.3.2 状態が観測不可能なモデル

状態が観測不可能な変数によって決まる代表的なモデルがMS (Markov Switching) モデルである。ファイナンス分野では、分析対象データが観測できないファクターから影響を受け変化することが一般的であり、MSモデルを用いて推定された状態を解釈し、示唆を得る場合が多い。MSモデルはHamilton (1989) が景気循環のモデル化を行って以降、ファイナンス分野の研究で数多く活用されている。MSモデルの推定について、Hamilton (1990) はEMアルゴリズム (Dempster et al. (1977)) を活用した。この他ベイズ推定を用いる場合もある。また、MSモデルを活用する際は状態数を選択する必要がある。分析目的等から分析者が定める場合と、MSモデルに対応した尤度比検定 (Kasahara et al. (2014)) や情報量基準 (Smith et al. (2006)) 等により選択する場合がある。MSモデルの詳細についてはFranses and van Dijk (2000), Hamilton (2020) 等に纏められている。

### 2.3.3.3 コピュラとMSモデル

MSモデルを適用したコピュラ (以下、本稿では「MSコピュラ」とする。) は、異なるコピュラにマルコフ転換するモデルである。MSコピュラには、周辺モデルと同時にMSモデルを適用する場合 (Rodriguez (2007), Okimoto (2008)) と、コピュラにのみMSモデルを適用する場合 (Chollete et al. (2009), Garcia and Tsafack (2011), Wang et al. (2013), Otani and Imai (2018)) がある。前者は、分析対象の期待収益率や分散と併せて依存構造の状態変化を考察したい場合に有用である。例えばOkimoto (2008) は、周辺モデルと同時にMSモデルを適用したMSコピュラを用いて、株式市場のベア相場<sup>17)</sup>にお

<sup>17)</sup>株式市場は期待収益率が高く分散が低いブル相場と期待収益率が低く分散が高いベア相場の2状態で認識されることが多い。Ang and Chen (2002) やOkimoto (2008) はこの点も実証している。

ける依存構造の特徴を考察した．一方このパラメトリゼーションでは，推定の計算負荷が高いため変量数を増やして分析することは難しい．実際，Rodriguez (2007) や Okimoto (2008) は 2 変量のケースで MS コピュラを推定した．後者は，変量数を増やして依存構造の状態変化を考察したい場合や依存構造の状態変化にのみ焦点を当てて分析したいときに有用である．例えば Garcia and Tsafack (2011) や Otani and Imai (2018) は，2 か国の債券と株式の 4 変量のデータに対してコピュラのみ MS モデルを適用した MS コピュラを用いて，依存構造の特徴を考察した．なお，MS コピュラの状態数はファイナンス分野の実証分析では 2 状態を仮定することが多い．

### 2.3.4 MS ダイナミックコピュラ

ダイナミックコピュラと MS コピュラの研究が発展する中で，ダイナミックコピュラのパラメータの一部あるいは全てがマルコフ転換するモデル（以下，本稿では「MS ダイナミックコピュラ」とする．）が近年扱われるようになった (da Silva Filho et al. (2012), Boubaker and Sghaier (2016), Fei et al. (2017), Ji et al. (2020), Tiwari et al. (2020), Maneejuk et al. (2021))．MS ダイナミックコピュラのメリットは，分析目的に応じてコピュラの中で短期的に変化するパラメータと中長期的に状態変化するパラメータを定めることができる点である．例えば，Ji et al. (2020) は無条件相関行列に MS モデルを適用した MS ダイナミック  $t$  コピュラを導入し，短期的な相関の変動に加えて，構造変化などによる相関の状態変化，分布の裾での依存構造の有意性を包括的に考察した．

## 2.4 テイルリスク管理とポートフォリオ最適化

### 2.4.1 テイルリスクの尺度

Markowitz (1952) の平均分散アプローチによって，リスク尺度として収益率の分散，標準偏差が普及した後，テイルリスクへの備えが金融機関の重要テーマとなる中で新たなリスク尺度が提案された．代表的なテイルリスク尺度が VaR と CVaR である．VaR は，信頼水準  $(1 - q) \times 100\%$  で発生するポートフォリオの損失であることから，これを自己資本の範囲内の範囲内に収めることで，ポートフォリオの損失によってデフォルトする確率を  $q \times 100\%$  以内に収めると考えることができ，その解釈性の高さからテイルリスク管理の実務に普及した．一方，Artzner et al. (1997, 1999) は VaR が信頼区間外のリスクを捕捉できない，また分布の前提によっては劣加法性を満たさないといった問題点を指摘し，この課



題に対応したテイルリスク尺度として CVaR を提案した。CVaR は損失が VaR を上回ることを条件とした条件付き期待値であり、ポートフォリオのリターンを  $r_p$ 、信頼水準  $(1-q)$  の VaR の推定値を  $\widehat{\text{VaR}}_{1-q}$  とするとき、信頼水準  $(1-q)$  の CVaR の推定値  $\widehat{\text{CVaR}}_{1-q}$  は式 (2.18) で与えられる。

$$\widehat{\text{CVaR}}_{1-q} = -E[r_p | r_p \leq \widehat{\text{VaR}}_{1-q}]. \quad (2.18)$$

今日では CVaR は VaR と並んでリスク管理やポートフォリオ最適化の実務に活用されている。なお、VaR の問題点や CVaR と VaR の比較については Basak and Shapiro (2001), Danielsson (2002), 山井・吉羽 (2001), 吉羽 (2010) 等に纏められている。

## 2.4.2 CVaR を考慮したポートフォリオ最適化

Artzner et al. (1997, 1999) によって CVaR が着目され始めて以降、CVaR を考慮したポートフォリオ最適化問題の研究へと発展した。代表的なものには CVaR 最小化 (Rockafellar and Uryasev (2000, 2002))<sup>18)</sup>, CVaR 制約付き期待収益率最大化 (Lucas and Klaassen (1998), Campbell et al (2001), Chekhlov (2005)) がある。

CVaR 最小化問題は、資産数を  $n$ 、各資産の投資比率ベクトルを  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)'$ 、ポートフォリオの信頼水準  $(1-q)$  の CVaR の推定値を  $\widehat{\text{CVaR}}_{1-q}$  とし、式 (2.19) で与える。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \widehat{\text{CVaR}}_{1-q} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}'\mathbf{1}_n = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ただし、 $\mathbf{1}_n$  は  $n$  行 1 列、要素が全て 1 の行列である。コンピュータを用いて CVaR 最小化問題を考察した研究としては Huang and Hsu (2015) や Zhou and Qin (2021) 等がある。

CVaR 制約付き期待収益率最大化問題は、各資産の期待収益率ベクトルを  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ 、CVaR 制約を  $\text{CVaR}_{\text{target}}$  とし、式 (2.20) で与える。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \\ \text{s.t.} \quad & \widehat{\text{CVaR}}_{1-q} \leq \text{CVaR}_{\text{target}}, \quad \mathbf{w}'\mathbf{1}_n = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

コンピュータを用いて CVaR 制約付き期待収益率最大化問題を考察した研究としては Stulajter (2009) や Allen et al. (2020) 等がある。この他、リスク・パリティ (Roncalli (2013)) のリスク尺度に CVaR を適用したテイルリスク・パリティも近年では研究されている (Boudt et al. (2012), Alankar et al. (2013), Kato and Hibiki (2017))。

<sup>18)</sup> Andersson et al. (2001) は、Rockafellar and Uryasev (2000) の CVaR 最小化アルゴリズムにポートフォリオの期待収益率に関する制約を導入し、平均 CVaR フロンティアの分析へと発展した。コンピュータを用いて平均 CVaR フロンティアの考察を行った研究としては Bai and Sun (2007), Alcock and Hatherley (2009), Boubaker and Sghaier (2013) 等がある。

### 2.4.3 VaR および CVaR の推定精度に関する検証方法

VaR の推定精度に関する検証について、代表的な手法は VaR 超過率、Kupiec (1995) の尤度比検定である。バックテスト期間を  $S'$ 、時点  $s$  のポートフォリオの実現リターンを  $r_s^{port}$ 、時点  $s$  の VaR の推定値を  $\widehat{\text{VaR}}_s$  とする時、VaR 超過率  $HR$  は式 (2.21) によって計測される。

$$HR = \frac{\sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{\text{VaR}}_s\}}}{S'} \quad (2.21)$$

式 (2.21) は、バックテスト期間においてポートフォリオの実現リターンが  $\widehat{\text{VaR}}_s$  を下回った割合を示している。したがって、信頼水準を  $\ell$  とすると、式 (2.21) が「 $1 - \ell$ 」に近いほどモデルの VaR の推定精度が高いことを示唆する。

Kupiec (1995) の尤度比検定は、信頼水準  $\ell$  に対応した VaR 超過率を  $\tau = 1 - \ell$  とし、式 (2.21) で計算された  $HR$  について、帰無仮説「 $\tau = HR$ 」を対立仮説「 $\tau \neq HR$ 」のもとで検定する。VaR を超過する確率が各時点において独立であると仮定し、バックテスト期間のポートフォリオの実現リターンが VaR を下回った回数を  $N = \sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{\text{VaR}}_s\}}$  とする時、尤度比検定量  $\chi^{Kupiec}$  は式 (2.22) で表される。

$$\chi^{Kupiec} = -2 \log \frac{\tau^N (1 - \tau)^{S' - N}}{HR^N (1 - HR)^{S' - N}} \quad (2.22)$$

帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が正しい時、式 (2.22) は、漸近的に自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う。したがって、式 (2.22) を自由度 1 のカイ 2 乗分布で評価した際の p 値が高いほど、帰無仮説を支持する確率が高く、モデルの VaR の推定精度が高いことを示唆する。その他、VaR 超過の連続性を考慮した検定や両者を組み合わせた検定も提案されている (Christoffersen (1998))。

CVaR の推定精度に関する検証について、代表的な手法は Danielsson (2011), Embrechts et al. (2005) である。Danielsson (2011) の手法では、時点  $s$  の CVaR の推定値を  $\widehat{\text{CVaR}}_s$  とする時、評価指標  $\chi^{Danielsson}$  を式 (2.23) により計算する。

$$\chi^{Danielsson} = \frac{\sum_{s=1}^{S'} \frac{\widehat{\text{CVaR}}_s}{r_s^{port}} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{\text{VaR}}_s\}}}{\sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{\text{VaR}}_s\}}} \quad (2.23)$$

式 (2.23) は、 $\widehat{\text{VaR}}_s$  を下回った各時点における、 $\widehat{\text{CVaR}}_s$  とポートフォリオの実現リターンとの比率に関する平均値を CVaR の推定精度として評価している。したがって、式 (2.23) が 1 に近いほど、モデルの CVaR の推定精度が高いことを示唆する。

Embrechts et al. (2005) の手法では、 $\varphi_s = (r_s^{port} - (-\widehat{CVaR}_s))$  とし、信頼水準  $\ell$  に対応したバックテスト期間  $S'$  における  $\varphi_s$  の  $\ell$  分位点を  $\zeta_\ell$  とする時、評価指標  $\chi^{Embrechts}$  を式 (2.24), (2.25), (2.26) により計算する.

$$\chi^{Embrechts} = \frac{|\chi_1^{Embrechts}| + |\chi_2^{Embrechts}|}{2}, \quad (2.24)$$

$$\chi_1^{Embrechts} = \frac{\sum_{s=1}^{S'} \varphi_t \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{VaR}_s\}}}{\sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{VaR}_s\}}}, \quad (2.25)$$

$$\chi_2^{Embrechts} = \frac{\sum_{s=1}^{S'} \varphi_s \mathbf{1}_{\{\varphi_s < \zeta_\ell\}}}{\sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{\varphi_s < \zeta_\ell\}}}. \quad (2.26)$$

Embrechts et al. (2005) の手法では、式 (2.25) で計算される  $\widehat{VaR}_s$  に依存した評価指標  $\chi_1^{Embrechts}$  と、式 (2.26) で計算される  $\widehat{VaR}_s$  に依存しない評価指標  $\chi_2^{Embrechts}$  を併せて推定精度を評価する. 式 (2.24) が 0 に近いほど、モデルの CVaR の推定精度が高いことを示唆する.

## 2.5 コピュラとファイナンス分野での実証分析

コピュラをファイナンス分野の実証分析に応用した初期の論文としては Li (2000) や Embrechts et al. (2002) 等が挙げられる. その後幅広いテーマにおいてコピュラを用いた実証分析が行われている. 以下では、資産運用実務への応用可能性が高い三つの主要なテーマについてコピュラを応用した文献をサーベイする. ファイナンス分野におけるその他のテーマに対する応用事例は、Patton (2009, 2012), Fan and Patton (2014) 等に纏められている.

### 2.5.1 ポートフォリオ最適化に関する実証分析

コピュラがファイナンス分野で注目され始めた当初、ポートフォリオ最適化に関する実証分析は主としてアルキメディアンコピュラを用いて行われた (Patton (2004), Bai and Sun (2007), Hong et al. (2007), Alcock and Hatherley (2009), Boubaker and Sghaier (2013)). Bai and Sun (2007), Alcock and Hatherley (2009), Boubaker and Sghaier (2013) は平均 CVaR 平面上の効率的フロンティアを代表的なアルキメディアンコピュラと正規コピュラあるいは多変量正規分布と比較し、CVaR 水準を同一とした場合、期待収益率最大化ポートフォリオにおける期待収益率はクレイトンコピュラ等のアルキメディア

ンコピュラが低くなる傾向を示した<sup>19)</sup>。また、投資家の効用最大化問題に対してコピュラの違いが与える影響を考察した研究としては、CRRA 効用を仮定した Patton (2004) や Disappointment Aversion Preferences (Gul (1991), Ang et al. (2005)) を仮定した Hong et al. (2007) がある。上述した研究では、アルキメディアンコピュラを用いているため分析対象の変量数が2から3と後述する先行研究に比べて少ない。

アルキメディアンコピュラに比べて変量数の増加に対応でき、分布の裾での依存構造を捕捉可能な  $t$  コピュラを用いた実証分析も行われている (Clemente and Romano (2004), Stulajter (2009), Autcharyapanitkul et al. (2014), Huang and Hsu (2015))<sup>20)</sup>。Clemente and Romano (2004) は、イタリアのローンポートフォリオ 10 変量の依存構造を  $t$  コピュラ、クレイトンコピュラ、正規コピュラで捕捉し、平均 CVaR フロンティアの分析を行った。その結果、クレイトンコピュラの最適投資比率の特徴が他のコピュラと顕著に異なり、リスクリターン効率の観点に鑑み不整合であることを示し、分析対象の変量数が増加した場合にアルキメディアンコピュラを用いた結果が頑健ではなくなることを示唆した。また、 $t$  コピュラと正規コピュラの比較では、Bai and Sun (2007) 等と同様に CVaR 水準を同一とした場合、期待収益率最大化ポートフォリオにおける期待収益率は  $t$  コピュラが低くなる傾向を示した。Stulajter (2009) は先進国株式指数と先進国債券 9 変量に対して CVaR 制約付き期待収益率最大化ポートフォリオの最適投資比率を  $t$  コピュラと正規コピュラの間で比較し、CVaR の信頼水準が低い場合に正規コピュラは  $t$  コピュラに比べて株式に多く配分する傾向を示した。Huang and Hsu (2015) は先進国株式 8 変量に対して CVaR 最小化ポートフォリオの特徴を  $t$  コピュラと正規コピュラの間で比較し、 $t$  コピュラを用いることでシャープレシオやリターンが有意に改善することを示した。

近年は、 $t$  コピュラ対比で分布の裾での依存構造に関する非対称性も捕捉できる非対称  $t$  コピュラを用いた実証分析が行われている (Christoffersen and Langlois (2013), González-Pedraz et al. (2015), Allen et al. (2020), Zhou and Qin (2021))。Christoffersen and Langlois (2013) は、Fama-French の 4 ファクターの依存構造をダイナミック非対称  $t$  コピュラ、ダイナミック  $t$  コピュラ、ダイナミック正規コピュラ、非対称  $t$  コピュラ、 $t$  コピュラ、正規コピュラで捕捉し、CRRA 効用を用いてポートフォリオのバックテスト結果を比較した。その結果、非対称  $t$  コピュラやダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いることで投資

<sup>19)</sup>Bai and Sun (2007) は、周辺モデルに時系列モデルを適用したうえでクレイトンコピュラを適用した場合と、周辺モデルに時系列モデルを適用せずに多変量正規分布を適用した場合を比較しているため、実証分析の乖離は依存構造の捕捉方法の差だけから生じているわけではない。一方、Alcock and Hatherley (2009) や Boubaker and Sghaier (2013) は周辺モデルが同一であり、コピュラの違いのみが実証分析結果の差に反映されている。

<sup>20)</sup>このうち Autcharyapanitkul et al. (2014) は、 $t$  コピュラのみを用いて平均 CVaR フロンティアを分析しておりコピュラ間の比較は行われていない。

家のアウトオブサンプルの実現効用が高まる傾向を示した。González-Pedraz et al. (2015) は原油、金、米国株式間の依存構造をダイナミック非対称  $t$  コピュラ、ダイナミック  $t$  コピュラ、ダイナミック正規コピュラで捕捉し、高次モーメントを考慮した効用関数を用いてポートフォリオのバックテスト結果を比較した<sup>21)</sup>。その結果、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いることでソルティノレシオやシャープレシオが改善する傾向を示した。Allen et al. (2020) は複数の投資ユニバース（米国株式の主要 10 セクターや Fama-French の 5 ファクター等）を用いて、CVaR 制約付き期待収益率最大化ポートフォリオの特徴を非対称  $t$  コピュラを含む多変量モデルと類似する複数のモデルとの間で比較した。その結果、非対称  $t$  コピュラを含む多変量モデルを用いることで最大ドロダウンや、実現リターンの平均値を CVaR の実現値で除した効率性等が改善する傾向を示した。Zhou and Qin (2021) は、北米株式、欧州株式、新興国株式の 3 変量の依存構造をダイナミック非対称  $t$  コピュラ、ダイナミック  $t$  コピュラ、ダイナミック正規コピュラで捕捉し、CVaR 最小化ポートフォリオのバックテスト結果を比較した。その結果、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いることでソルティノレシオやシャープレシオが改善する傾向を示した。

## 2.5.2 テイルリスクの推定精度に関する実証分析

コピュラを用いた VaR や CVaR の推定精度に関する実証分析については浩瀚な先行研究が存在する (Palaro and Hotta (2006), Martellini and Meyfredi (2007), Ozun and Cifter (2007), Huang et al. (2009), Hsu et al. (2012), Weiß (2013), Berger and Missong (2014), Lu et al. (2014), Zhang et al. (2014), Karmakar and Paul (2019))。その中で近年は、ファイナンス分野で注目されている非対称  $t$  コピュラを用いた実証分析が行われている (Christoffersen et al. (2013), Cerrato et al. (2017b), Yoshiba (2019), Allen et al. (2020))。Christoffersen et al. (2013) は、米国株式のマーケット、バリュー、サイズ、モメンタムの四つファクターに関する等ウェイトポートフォリオに対して、ダイナミック非対称  $t$  コピュラ、ダイナミック  $t$  コピュラ、ダイナミック正規コピュラから推定される CVaR を比較した。その結果、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて推定される CVaR はダイナミック正規コピュラに比べ最大 50%、ダイナミック  $t$  コピュラに比べても最大 20% 上振れることを明らかにした<sup>22)</sup>。Cerrato et al. (2017b) は、米国および英国株式の市場ベータ、共歪度、共尖度に関する分位ポートフォリオに対して、ダイナミック非

<sup>21)</sup>González-Pedraz et al. (2015) では相関行列に DCC ではなく Patton (2006a) で提案された変動過程を応用している。

<sup>22)</sup>Christoffersen et al. (2013) は推定 CVaR の水準をコピュラ間で比較しているが推定精度の検証は行っていない。

対称 $t$ コピュラ, ダイナミック $t$ コピュラ, DCC から推定される VaR および CVaR を比較した. その結果, ダイナミック非対称 $t$ コピュラの CVaR の推定精度が高い傾向にあることを明らかにした. Yoshiba (2019) は, TOPIX の業種別インデックスのうち, 相関が高い4業種と低い4業種の二つの等ウェイトポートフォリオに対して, 非対称 $t$ コピュラ<sup>23)</sup>,  $t$ コピュラ, 正規コピュラから推定される CVaR の精度を比較した. その結果, 相関が低いポートフォリオでは非対称 $t$ コピュラの CVaR の推定精度が高い傾向にあることを明らかにした. Allen et al. (2020) は, 複数の投資ユニバース (米国株式の主要 10 セクターや Fama-French の 5 ファクター等) に対して, 非対称 $t$ コピュラを含む多変量モデルと類似する複数のモデルから推定される VaR の精度を比較した. その結果, 非対称 $t$ コピュラを含む多変量モデルは他のモデルに比べて VaR の推定精度が高い傾向にあることを明らかにした.

### 2.5.3 金融市場の依存構造の特性に関する実証分析

コピュラがファイナンス分野の実証分析に応用され始めた 2000 年初頭以降, DCC モデルやダイナミックコピュラの発展とともに, ダイナミックコピュラを用いた金融市場の依存構造の考察が進んだ (Patton (2001, 2004, 2006a), De Luca and Riviello (2009), Hu (2010), Wang et al. (2011), Yang and Hamori (2014)). これらの研究では, 主にアルキメディアンコピュラのパラメータに時系列モデルを導入し, 金融市場の 2 変量間の依存構造に関する特性を考察した. 例えば Patton (2006a) は, ダイナミック SJC コピュラを導入し DM (ドイツマルク) -USD と JPY-USD の依存構造を捕捉した. その結果, 両通貨の下落時に依存構造が強まることを確認し, 特にユーロ導入後にその傾向が強まったことを明らかにした. 一方, 国際分散投資の重要性や金融危機時の依存構造の特性に対する関心の高まり等を受けて<sup>24)</sup>, 多変量データの依存構造を包括的に捕捉し特性を考察する研究も行われた (Christoffersen et al. (2012, 2018), Righi and Ceretta (2012), Christoffersen and Langlois (2013), Cerrato et al. (2017a, 2017b), Lucas et al. (2017), Denkowska and Wanat (2019)). これらの研究では, ダイナミック $t$ コピュラやダイナミック非対称 $t$ コピュラを適用し, 相関のダイナミクスとともに分布の裾での依存構造やその非対称性の特性を考察した. 例えば Christoffersen et al. (2012) は, ダイナミック非対称 $t$ コピュ

<sup>23)</sup>Yoshiba (2019) は Demarta and McNeil (2005) と Joe (2006) の二つの非対称 $t$ コピュラを用いて実証分析を行った.

<sup>24)</sup>リーマン・ショックや欧州債務危機時に大宗の銘柄やセクターのパフォーマンスが国際金融市場で一斉に悪化したことを契機に関心が高まった.

ラを用いてグローバル株式市場の 29 変量の依存構造を捕捉した<sup>25)</sup>。その結果、グローバル株式市場の相関が趨勢的に高まっていること、分布の裾での依存構造が認められ特に下落時に強まるといった非対称性が存在すること、これらの傾向は新興国株式市場が先進国株式市場に比して小さく分散投資効果を享受しやすいことを明らかにした。

また、ダイナミックコピュラを用いた研究と並行して MS コピュラを用いた研究も進んだ (Rodriguez (2007), Okimoto (2008), Chollete et al. (2009), Garcia and Tsafack (2011), Wang et al. (2013), Otani and Imai (2018))。これらの研究では、正規コピュラ等の分布の裾での依存構造を捕捉しないコピュラと他の捕捉可能なコピュラとの間を遷移する MS コピュラを導入し、分布の裾での依存構造が強まる時期がどのような市場局面と対応しているのかについて考察した。例えば Okimoto (2008) は、正規コピュラとアルキメディアン・コピュラ間を MS 転換するモデルを導入し、米国株式と英国株式との 2 変量間の依存構造を捕捉した。その結果、株式市場のベア相場時には下側裾依存性が強まる状態に滞留する傾向にあることを明らかにした<sup>26)</sup>。

近年では、MS ダイナミックコピュラを用いた研究が行われている (Boubaker and Sghaier (2016), Fei et al. (2017), Ji et al. (2020), Tiwari et al. (2020), Maneejuk et al. (2021))。これらの研究では、ダイナミックコピュラと MS コピュラの両モデルの特徴を活かし、依存構造の短期的な変化の特性と構造変化等に伴う中長期的な状態変化のタイミングを同時に考察した。例えば Ji et al. (2020) は、ダイナミック  $t$  コピュラの無条件相関が MS 転換する MS ダイナミック  $t$  コピュラを導入し、主要先進国株式市場間の依存構造を 100 年以上にわたって捕捉した。その結果、21 世紀以降は無条件相関が高い状態に滞留する傾向にあり、特にリーマン・ショック時には相関の短期的な上昇も伴って裾依存性<sup>27)</sup>が一段と強まったことを明らかにした。

## 2.6 先行研究の課題と本研究との関連性

本章では、コピュラ、時系列モデル、テイルリスク管理とポートフォリオ最適化について纏め、実務と関連性が高い三つの主要テーマにおけるコピュラの応用事例を整理した。

ポートフォリオ最適化に関する実証分析では、近年ファイナンス分野で注目されている非対称  $t$  コピュラを用いた実証分析が行われ、他の代表的なコピュラに比べた優位性が示

<sup>25)</sup> 16 か国の先進国株式市場、13 か国の新興国株式市場、更に両者を併せた 29 か国の株式市場の依存構造を捕捉した。

<sup>26)</sup> Okimoto (2008) は、周辺モデルとコピュラの両方に MS モデルを適用しており、期待収益率が低く分散が高い状態をベア相場と位置付け同状態における依存構造の特性を考察している。

<sup>27)</sup>  $t$  コピュラでは自由度が低いほど、また相関が高いほど裾依存性は強まる。

唆されている。先行研究ではコピュラに加えて周辺モデルにも相違がある実証分析や、投資家の期待効用関数を仮定した実証分析が主である（Christoffersen and Langlois (2013), González-Pedraz et al. (2015), Allen et al. (2020)）。コピュラおよび周辺モデルに相違がある場合、ポートフォリオのパフォーマンスの改善が依存構造の捕捉方法の相違に起因しているか特定することが難しい。また、投資家の期待効用関数の特定は一般的には困難である。本稿では、周辺モデルを統一しコピュラにのみ異なるモデルを適用することで、依存構造の捕捉方法の違いがポートフォリオのパフォーマンスに与える影響を考察する。またポートフォリオ最適化については、これまで学術的な実証分析に活用され、実務にも応用されている CVaR 最小化問題、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題、テイルリスク・パリティを主として扱う<sup>28)</sup>。また、幾つかの先行研究では Christoffersen et al. (2012) に倣い非対称  $t$  コピュラの相関行列に DCC を適用したダイナミック非対称  $t$  コピュラを適用し、ダイナミック  $t$  コピュラやダイナミック正規コピュラ対比で優位性を示している（Christoffersen and Langlois (2013), Zhou and Qin (2021)）。これらは、相関の時変性を考慮しても分布の裾での依存構造の影響が残存し、その点を看過するとポートフォリオのパフォーマンスやテイルリスクの推定精度の悪化に繋がることを示した点で有用である。一方、Aielli (2013) は DCC モデルが無条件分散共分散にバイアスを齎すことを指摘し、この点を修正した cDCC を提案した。本稿では cDCC と整合的なダイナミック非対称  $t$  コピュラを構築し、無条件分散共分散行列の一致性を担保しつつ、ポートフォリオ最適化やテイルリスクの推定に応用する<sup>29)</sup>。さらに、実務への応用という観点では、コピュラ間の最適投資比率の乖離度合やその背景、ポートフォリオ特性との関連性といった視点からの考察も必要である。先行研究ではこれらの観点には十分に言及されていないことから、本稿ではこうした観点も考察し実証分析の質や頑健性を向上させる<sup>30)</sup>。

テイルリスクの推定精度に関する実証分析では、非対称  $t$  コピュラやダイナミック非対称  $t$  コピュラの VaR や CVaR の推定精度について研究が行われ、他の代表的なコピュラに比べた優位性が示唆されている。非対称  $t$  コピュラやダイナミック非対称  $t$  コピュラでは分布の裾での依存構造を司る自由度やその非対称性を司る歪度は不変である。一方、リーマン・ショックや新型コロナ・ショックなどを契機とした急速な市場環境の悪化時には分布の裾での依存構造も変化している可能性がある。非対称  $t$  コピュラやダイナミック非対称

<sup>28)</sup>3 章では CVaR 最小化問題、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題、5 章ではテイルリスク・パリティを用いる。4 章では CRRA 型効用関数を仮定し高次モーメントを考慮したポートフォリオ最適化を用いる。

<sup>29)</sup>3 章では観測期間を通じてパラメータが一定なコピュラを扱い、4 章以降ではパラメータが変動するコピュラを扱う。

<sup>30)</sup>こうした視点を取り入れた分析は主に 3 章で取り上げる。



$t$  コピュラの自由度，歪度は全ての変量間の裾での依存関係を表現することから，これらのパラメータへの状態変化の導入がテイルリスク顕在化局面の捕捉に繋がり，ポートフォリオのパフォーマンスやテイルリスクの推定精度を改善する期待もある．テイルリスクの推定精度は，一般的にテイルリスク顕在化局面で低下する傾向にある．一方で資産運用，リスク管理の実務では，そうした市場環境の急変時にテイルリスクを精度高く推定しリスク許容度をコントロールすることが求められることから，上述した課題に取り組む意義は高い．本稿では，MS ダイナミック非対称  $t$  コピュラを構築し既述の観点を考察する．

依存構造の特性に関する実証分析では，コピュラと時系列モデルの発展により近年はダイナミックコピュラやMS ダイナミックコピュラを用いた考察が多く行われている．これらの実証分析は主に欧米の株式市場を対象としている．一方，他の市場や資産クラス等の幅広い種類の実証データからの示唆を積み上げることにより，非対称  $t$  コピュラの有用性に関して頑健性が高まることも期待される．本稿では，本邦株式市場やアセットアロケーション，さらにはリーマン・ショック以降に急速に普及した新興国投資やファクター投資等幅広い投資対象，投資戦略に関する実証データを採用し，幅広い金融データからインプリケーションを得ることを試みる．

# 第3章 コピュラの選択が最適資産配分に与える影響

## 3.1 はじめに

金融資産間の依存構造の捕捉は、資産配分の決定に重要な影響をもたらす。特に、CVaR等のテイルリスクを考慮した最適資産配分を考える場合、各資産が同時に大きく下落する際に依存構造が強まる可能性を考慮する必要がある、分布の裾での依存構造を定量的に捕捉することが重要となる。実際に金融市場では、資産が共に大きく上昇あるいは下落する局面で依存構造が強まる傾向について実証されてきた (Fortin and Kuzmics (2002), Clemente and Romano (2004), Stulajter (2009), Autcharyapanitkul et al. (2014), Huang and Hsu (2015), Lucas et al. (2017))。2章で示したように、コピュラを活用することで分布の裾での依存構造に関する特徴をパラメトリックに捕捉し、CVaRの推定やポートフォリオ最適化に应用することができる。相関のみを捕捉する正規コピュラでは上述した分布の裾での依存構造の特徴は表現できず、その対応として相関行列に自由度がパラメータとして加わる $t$ コピュラがこれまで活用されてきた。

一方先行研究では、資産が共に大きく上昇する局面に比べて共に大きく下落する局面で依存構造が強まる傾向についても実証されている (Longin and Solnik (2001), Poon et al. (2004), Patton (2006a), Alcock and Hatherley (2009), Tsafack (2009), Okimoto (2008, 2014), Zhou and Qin (2021))。このような分布の裾での依存構造に関する非対称性は、正規コピュラや $t$ コピュラでは表現できない。したがってこれらのコピュラでは、ポートフォリオのCVaRを小さく評価し、リスクの高い資産の最適投資比率を高めることが懸念される<sup>31)</sup>。非対称 $t$ コピュラは相関行列、自由度に加えて歪度がパラメータとして加わり、多変量データに対しても線形の依存構造、分布の裾の依存構造に加えて、その非対称性を捕捉することができる。よって非対称 $t$ コピュラを用いることで、金融市場の分布の裾での依存構造や非対称性に関する特徴を考慮した、ポートフォリオのCVaRの推定

<sup>31)</sup>クレイトンコピュラやSJC等のアルキメディアンコピュラを活用すれば上述した非対称性は捕捉できるが、これらのコピュラは変量数の増加に対してパラメータが増加しないため、ポートフォリオの最適化等には不向きである (Clemente and Romano (2004))。

や最適投資比率の決定に繋がることを期待できる。

上述した背景に鑑み本章では、コピュラの選択がテイルリスクを考慮した最適資産配分に与える影響を考察する。具体的には、実務において資産配分を検討する際に主として用いられる資産クラスである債券、クレジット、株式、不動産（REIT）に関する依存構造について、Demarta and McNeil（2005）の非対称  $t$  コピュラと他の代表的な多変量コピュラである正規コピュラおよび  $t$  コピュラを用いて捕捉する<sup>32)</sup>。そのうえで、(1) コピュラの違いが CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率に与える影響、(2) コピュラの違いが CVaR 最小化問題の最適投資比率に与える影響、(3) コピュラ毎の CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンスに関する特徴について考察する<sup>33)</sup>。

本章の構成は次のとおりである。3.2 節では、本章で扱うコピュラについて記載したうえで、周辺分布およびコピュラにパラメータを仮定し CVaR や最適投資比率に関するコピュラ間の乖離について考察する。3.3 節では実証分析として周辺モデルやコピュラの推定結果、3.4 節ではテイルリスクを考慮した最適資産配分の分析結果を考察する。3.5 節では結論を述べる。

## 3.2 CVaR・最適資産配分への影響分析

本節では、式 (2.7), (2.8), (2.9) で記述した正規コピュラ,  $t$  コピュラ, 非対称  $t$  コピュラの違いによる影響について幾つかのパラメータ設定にもとづく結果を比較しながら考察する。まずコピュラの違いが CVaR に与える影響について考察する。次に、コピュラの違いが CVaR 最小化問題および CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率に与える影響について考察する。なお、実証分析データを用いた考察は 3.3 節および 3.4 節で行う。

CVaR 最小化問題は年金運用やファンド運用に応用されている<sup>34)</sup>。また、銀行等の機関投資家における長期的な投資戦略の策定に際しては、テイルリスクに関する許容範囲を定

---

<sup>32)</sup>本章ではコピュラのパラメータが観測期間を通じて一定な場合について考察する。一方、次章以降ではパラメータが観測期間内で変動するコピュラを扱う。

<sup>33)</sup>2 章で示したように、Christoffersen and Langlois（2013）、González-Pedraz et al.（2015）、Allen et al.（2020）では非対称  $t$  コピュラの活用により、 $t$  コピュラや正規コピュラに比べてポートフォリオのパフォーマンスが改善することを示している。一方、これらの実証分析ではコピュラに加えて周辺モデルにも相違がある、あるいは投資家の期待効用関数を仮定している。本稿では、周辺モデルを統一しコピュラにのみ異なるモデルを適用することで、依存構造の捕捉方法の違いとポートフォリオのパフォーマンスの改善可能性について考察する。またポートフォリオ最適化は、これまで学術的な実証分析に活用され、実務にも応用されている CVaR 最小化問題、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題を用いる。

<sup>34)</sup>例えば、GPIF（年金積立金管理運用独立行政法人）では一定の賃金上昇率を下回るリスク（相対的な CVaR）について最小化する形で基本ポートフォリオを策定している。

めたうえで収益を最大化するよう資産配分を行うことが一般的である。このような実務的な課題は、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題として捉えることができる。したがって、CVaR 最小化問題および CVaR 制約付き期待収益率最大化問題を考察する意義は高いと考えられる。

### 3.2.1 コピュラの選択と CVaR

以下では、コピュラの違いによって CVaR が如何に異なるかについて考察する。そこでまず 2 資産から成る等ウェイト・ポートフォリオを考える。次に、正規コピュラの CVaR を基準としてそこから乖離度合を示す尺度として、正規コピュラの CVaR を分母、非対称  $t$  コピュラや  $t$  コピュラの CVaR を分子とした指標を CVaR 比率と定める。例えば、正規コピュラから推定される CVaR を  $\widehat{CVaR}_N$ 、非対称  $t$  コピュラから推定される CVaR を  $\widehat{CVaR}_{St}$  とする時、非対称  $t$  コピュラの CVaR 比率 CVaRratio<sub>St</sub> は式 (3.1) のとおりである。

$$CVaRratio_{St} = \widehat{CVaR}_{St} / \widehat{CVaR}_N. \quad (3.1)$$

そのうえで、表 3.1 のとおり複数のパラメータ設定の下で CVaR 比率を推定し、コピュラ間の CVaR を比較する。なお、信頼水準は 99%、95% とした。

パラメータ設定について、周辺モデルには各資産のリターンは標準正規分布を仮定した。コピュラに関しては、順相関の場合として相関行列のパラメータ（以下、本稿では「相関」とする。）が 0.3、逆相関の場合として -0.3 とし、自由度が 5, 10, 15, 20, 歪度が -0.7, -0.5, -0.3, -0.1 とした<sup>35)</sup>。非対称  $t$  コピュラの歪度は、金融分野の実証分析データにおいてマイナスとなることが多い点に鑑み、マイナスの場合のみ記載した。なお、CVaR 比率は資産数、投資比率、周辺分布の前提にも影響されるが、コピュラの違いに着目するためこれらについては基本的な設定とした。

先行研究では、株式などの互いに順相関である資産に非対称  $t$  コピュラを適用し有用性を実証したものが多い。一方、アセットアロケーションの実務では逆相関を活かしたポートフォリオ構築が行われている。そのような場合に、非対称  $t$  コピュラと  $t$  コピュラや正規コピュラの CVaR にどの程度乖離が生じ得るかについて考察することは有益だと考え、上述の設定とした。

<sup>35)</sup> 非対称  $t$  コピュラは各変量に個別の歪度を付与することもできるが、本節の分析ではパラメータ設定が複雑とならないよう、全ての変量に同一の歪度を仮定する。一方、3.3 節、3.4 節の実証分析では共通の歪度を仮定した非対称  $t$  コピュラおよび個別の歪度を仮定した非対称  $t$  コピュラを推定し、AIC 規準の観点から現実の市場データへの適合度合を判定したうえで考察を行う。

表 3.1: CVaR 比率のパラメータ設定

Notes: 各資産のリターンには標準正規分布を仮定した。順相関のケースとして相関が0.3, 逆相関のケースとして-0.3を仮定し, 各々のケースについて自由度および歪度の全ての組み合わせ(4 × 4 = 16通り)における CVaR 比率を推定する。なお, 各コピュラにつき 100 万個の乱数を生成する。

		資産1	資産2
周辺モデルの	期待収益率	0.00	0.00
パラメータ	標準偏差	1.00	1.00
コピュラの	相関	0.3,-0.3	
パラメータ	自由度	5,10,15,20	
	歪度	-0.1,-0.3,-0.5,-0.7	

表 3.2: コピュラの違いと CVaR 比率

Notes: 各コピュラにつき 100 万個の乱数を生成し CVaR 比率を推定した。なお, 資産数は 2, 投資比率は均等, 周辺分布は標準正規分布, 信頼水準は 99% および 95% である。

1. 相関:-0.3, 信頼水準:99%						2. 相関:0.3, 信頼水準:99%							
		自由度						自由度					
		5	10	15	20			5	10	15	20		
非 対 称 t / 正 規	歪 度	-0.7	1.595	1.368	1.247	1.181	非 対 称 t / 正 規	歪 度	-0.7	1.199	1.124	1.088	1.057
		-0.5	1.539	1.282	1.180	1.129			-0.5	1.182	1.098	1.069	1.041
		-0.3	1.428	1.189	1.117	1.082			-0.3	1.152	1.070	1.051	1.026
		-0.1	1.232	1.105	1.062	1.043			-0.1	1.096	1.044	1.034	1.015
t / 正 規		1.133	1.067	1.048	1.033	t / 正 規		1.057	1.027	1.027	1.011		
3. 相関:-0.3, 信頼水準:95%						4. 相関:0.3, 信頼水準:95%							
		自由度						自由度					
		5	10	15	20			5	10	15	20		
非 対 称 t / 正 規	歪 度	-0.7	1.490	1.276	1.186	1.128	非 対 称 t / 正 規	歪 度	-0.7	1.164	1.096	1.066	1.041
		-0.5	1.400	1.198	1.128	1.085			-0.5	1.135	1.070	1.047	1.028
		-0.3	1.271	1.119	1.077	1.049			-0.3	1.095	1.044	1.031	1.016
		-0.1	1.118	1.053	1.035	1.021			-0.1	1.049	1.022	1.016	1.007
t / 正 規		1.052	1.027	1.019	1.013	t / 正 規		1.023	1.012	1.011	1.005		

表 3.2 にはパラメータ設定毎に CVaR 比率を示した。表 3.2 からは、全てのパラメータ設定において CVaR 比率が 1 より大きく、正規コピュラに比べて非対称  $t$  コピュラや  $t$  コピュラの CVaR が大きいことを読み取れる。表 3.2 のパラメータ設定の中では、信頼水準 99% の非対称  $t$  コピュラの CVaR 比率が最も高い場合で 1.595 となり、正規コピュラに比べて非対称  $t$  コピュラの CVaR が 60% 程度大きいケースを確認できる<sup>36)</sup>。また、非対称  $t$  コピュラと  $t$  コピュラの CVaR 比率を比較すると、自由度が同じ場合には前者が高いことを読み取れる。例えば、相関が  $-0.3$ 、自由度が 10、信頼水準 99% の場合、 $t$  コピュラの CVaR 比率は 1.067 である一方、非対称  $t$  コピュラは歪度の水準によって 1.105 から 1.368 となり、歪度がマイナスの場合には  $t$  コピュラに比べて非対称  $t$  コピュラの CVaR が大きい。歪度が小さくなるにしたがって、 $t$  コピュラと正規コピュラの CVaR の乖離よりも、これらの二つのコピュラと非対称  $t$  コピュラの CVaR の乖離の方が大きくなる点が特徴的である。さらに、相関がマイナスの場合、プラスの場合に比べて CVaR 比率が高いことを読み取れる。例えば、相関が 0.3、自由度が 10、歪度が  $-0.3$ 、信頼水準 99% の場合、非対称  $t$  コピュラの CVaR 比率は 1.070 である一方、相関が  $-0.3$  の場合には既述の CVaR 比率が 1.189 であり、順相関の場合に比して 0.119 高い。

次に、自由度や歪度と CVaR 比率の関係性について、図 3.1 には相関を  $-0.3$ 、歪度を  $-0.3$  とし、自由度を 4 から 20 まで 1 ずつ変化させた場合の非対称  $t$  コピュラの CVaR 比率、図 3.2 には相関を  $-0.3$ 、自由度を 10 とし、歪度を 0 から  $-1$  まで 0.1 ずつ変化させた場合の非対称  $t$  コピュラの CVaR 比率を図示した。図 3.1、図 3.2 からは、CVaR 比率と自由度や歪度との関係性は非線形であり、特に自由度の低下に伴い CVaR 比率の上昇割合が高まることを読み取れる。例えば、自由度が 20 から 10 にかけては、図 3.1 に示した信頼水準 99% の非対称  $t$  コピュラの CVaR 比率は 1.10 程度から 1.20 程度に上昇する一方、自由度が 10 から 4 にかけては CVaR 比率は 1.20 程度から 1.50 程度まで上昇する。

以上の結果を踏まえると、コピュラによって CVaR は異なり、自由度が低いあるいは歪度が小さいほどコピュラ間の CVaR の乖離が拡大すると示唆される。また、資産間が逆相関関係にある場合には、順相関の場合に比して上述した影響が高まると示唆される。なお、この結果は信頼水準 99% および 95% において同様である。この点に鑑み、以下の分析では、実務において重視される信頼水準 99% について考察する。

<sup>36)</sup> 現実の金融市場においてコピュラの違いによりどの程度 CVaR が乖離するかについては実証分析データのコピュラの推定結果次第であり、この点は 3.3 節、3.4 節で考察する。

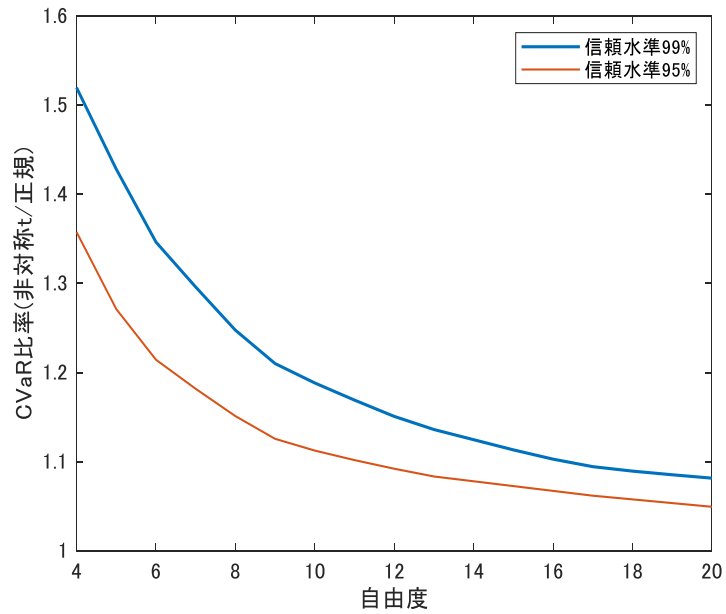


図 3.1: 自由度と CVaR 比率 (非対称  $t$  コピュラ/正規コピュラ)

Notes: 非対称  $t$  コピュラの自由度を 4 から 20 まで変化させた際の信頼水準 99%, 95% の CVaR 比率を図示した. 相関は  $-0.3$ , 歪度は  $-0.3$  である. なお, 各コピュラにつき 100 万個の乱数を生成し CVaR 比率を推定した.

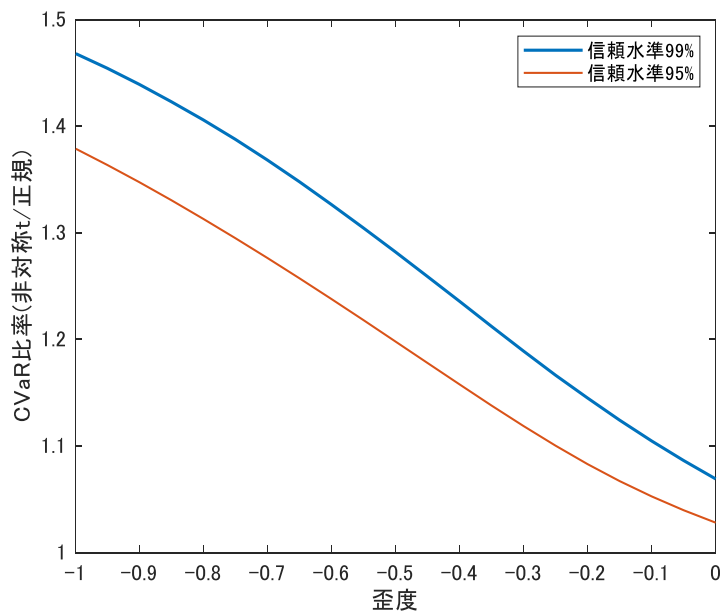


図 3.2: 歪度と CVaR 比率 (非対称  $t$  コピュラ/正規コピュラ)

Notes: 非対称  $t$  コピュラの歪度を  $-1$  から  $0$  まで変化させた際の信頼水準 99%, 95% の CVaR 比率を図示した. 相関は  $-0.3$ , 自由度は  $10$  である. なお, 各コピュラにつき 100 万個の乱数を生成し CVaR 比率を推定した.

### 3.2.2 コピュラの選択と CVaR 最小化問題の最適投資比率

以下では、コピュラの違いによって CVaR 最小化問題の最適投資比率が如何に異なるかについて考察する。CVaR 最小化問題は式 (2.19) で与える。3.2.1 項と同じく 2 資産のポートフォリオを考え、表 3.3 のとおり複数のパラメータ設定の下で式 (2.19) の最適解を求め、各コピュラの最適投資比率を比較する。各資産のリターンは正規分布を仮定し、実証デー

表 3.3: CVaR 最小化問題のパラメータ設定

Notes: 各資産のリターンには正規分布を仮定した。順相関のケースとして相関が 0.3, 逆相関のケースとして  $-0.3$  を仮定し、各々のケースについて自由度および歪度の全ての組み合わせ ( $4 \times 4 = 16$  通り) における最適投資比率を求める。なお、各コピュラにつき 100 万個の乱数を生成し最適投資比率を求める。

		資産1	資産2
周辺モデルの パラメータ	期待収益率	0.0020	0.0010
	標準偏差	0.0200	0.0100
コピュラの パラメータ	相関	0.3, -0.3	
	自由度	5, 10, 15, 20	
	歪度	-0.1, -0.3, -0.5, -0.7	

タの統計値等を踏まえ、表 3.3 のように期待収益率と標準偏差を設定した。また、期待収益率および標準偏差は資産 1 が資産 2 より大きい前提とし、資産 1 をハイリスク・ハイリターン、資産 2 をローリスク・ローリターンと見做す<sup>37)</sup>。コピュラに関する相関、自由度および歪度については 3.2.1 項と同じ設定とした。

表 3.4 には、パラメータ設定毎に資産 1 の最適投資比率を示した。図 3.3 には相関を  $-0.3$ 、歪度を  $-0.3$  とし、自由度の水準別に資産 1 の投資比率とポートフォリオの CVaR の関係性を図示した。図 3.4 には相関を  $-0.3$ 、自由度を  $\nu = 10$  とし、歪度の水準別に資産 1 の投資比率とポートフォリオの CVaR の関係性を図示した。なお、丸印が CVaR 最小化問題の最適投資比率である。x 軸に示した資産 1 の投資比率を所与とした場合に y 軸に示したポートフォリオの CVaR が小さいほど、分散投資効果を大きく見積もっていると解釈できる。

表 3.4 からは、非対称  $t$  コピュラや  $t$  コピュラについてハイリスク・ハイリターンの資産 1 の最適投資比率が正規コピュラに比べて低いことを読み取れる。表 3.4 で逆相関を前提とした場合、正規コピュラの資産 1 の最適投資比率が 26.4% であるのに対し、 $t$  コピュラでは自由度の水準によって 18.5% から 25.0%、非対称  $t$  コピュラでは自由度および歪度

<sup>37)</sup> 実証データにおいても不動産 (REIT)、株式、クレジット、債券の順に期待収益率および標準偏差が大きい関係にあることに鑑み、このような設定とした。



表 3.4: コピュラの違いと CVaR 最小化問題の最適投資比率

Notes: パラメータ設定毎に資産 1 (ハイリスク・ハイリターン) の最適投資比率を示した.

1. 相関:-0.3					2. 相関:0.3						
		自由度						自由度			
		5	10	15	20			5	10	15	20
非 対 称 t	歪 度	-0.7	0.000	0.073	0.174	0.197	-0.7	0.000	0.002	0.032	0.053
		-0.5	0.019	0.123	0.198	0.214	-0.5	0.000	0.002	0.039	0.071
		-0.3	0.075	0.180	0.220	0.234	-0.3	0.001	0.031	0.073	0.093
		-0.1	0.153	0.211	0.240	0.245	-0.1	0.029	0.075	0.088	0.101
t		0.185	0.222	0.248	0.250	t		0.065	0.080	0.098	0.100
正 規		0.264				正 規		0.124			

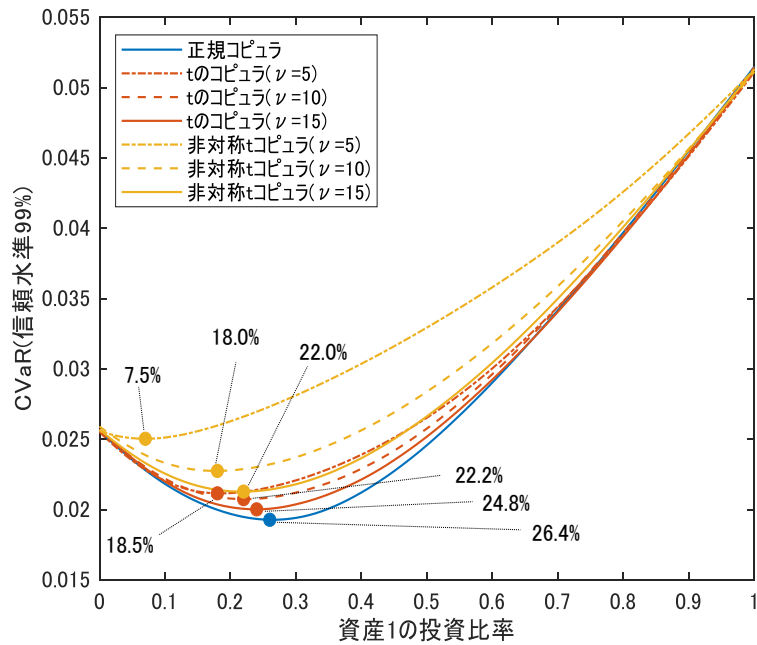


図 3.3: CVaR 最小化問題の最適投資比率 (自由度別)

Notes: 相関を  $-0.3$ , 非対称  $t$  コピュラの歪度を  $-0.3$  とし,  $t$  コピュラと非対称  $t$  コピュラの自由度の水準別に資産 1 の投資比率とポートフォリオの CVaR (信頼水準 99%) との関係性を図示した. なお, 丸印は CVaR 最小化問題の最適投資比率である.

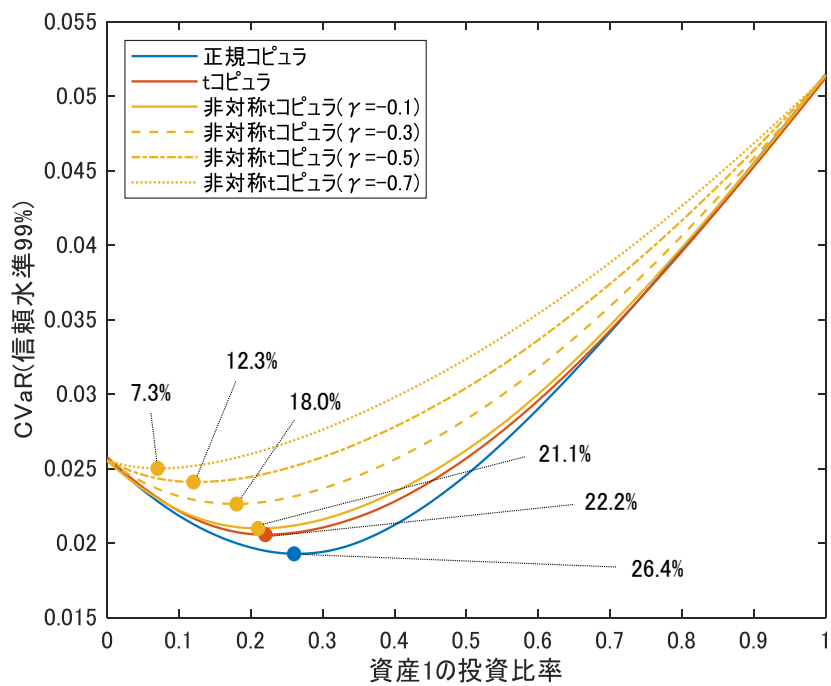


図 3.4: CVaR 最小化問題の最適投資比率 (歪度別)

Notes: 相関を  $-0.3$ ,  $t$  コピュラと非対称  $t$  コピュラの自由度を  $10$  とし, 非対称  $t$  コピュラの歪度の水準別に資産 1 の投資比率とポートフォリオの CVaR (信頼水準 99%) との関係性を図示した. なお, 丸印は CVaR 最小化問題の最適投資比率である.

の水準によって 0.0% から 24.5% である。また、非対称  $t$  コピュラと  $t$  コピュラの自由度が同一の場合、非対称  $t$  コピュラの資産 1 の最適投資比率が  $t$  コピュラより低いことを読み取れる。例えば、相関が  $-0.3$ 、自由度が 10 の場合における  $t$  コピュラの資産 1 の最適投資比率は 22.2% である一方、歪度が  $-0.3$  の場合における非対称  $t$  コピュラの資産 1 の最適投資比率は 18.0% であり、 $t$  コピュラに比して 4.2pt（以下、本稿では投資比率 % の差分を「pt」と表す。）低い。さらに、図 3.3 からは、自由度が低いほど非対称  $t$  コピュラや  $t$  コピュラにおける資産 1 の最適投資比率が正規コピュラに比べて低下し乖離が拡大すること、図 3.4 からは、歪度が小さいほど非対称  $t$  コピュラにおける資産 1 の最適投資比率が正規コピュラや  $t$  コピュラに比べて低下し乖離が拡大することを読み取れる。資産 1 の投資比率を 0% から上昇させた際、ポートフォリオの CVaR の減少度合は正規コピュラが最も大きく、資産 1 の投資比率が各コピュラで同一の場合には正規コピュラの CVaR が最も小さい。したがって、正規コピュラが分散投資効果を最も大きく見積もり、その結果として資産 1 の最適投資比率が他のコピュラに比べて高くなると解釈できる。一方、非対称  $t$  コピュラは自由度が低いあるいは歪度が小さいほど、 $t$  コピュラでは自由度が小さいほど分散投資効果を小さく見積もる結果として資産 1 の最適投資比率が低下すると解釈できる。特に、歪度が小さくなるにしたがって、 $t$  コピュラと正規コピュラの最適投資比率の乖離よりも、これらの二つのコピュラと非対称  $t$  コピュラの最適投資比率の乖離の方が大きくなる点が特徴的である。

以上の結果を踏まえると、コピュラによって CVaR 最小化問題の最適投資比率は異なり、自由度が低いあるいは歪度が小さいほどコピュラ間の最適投資比率の乖離が拡大すると示唆される。

### 3.2.3 コピュラの選択と CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率

以下では、コピュラの違いによって CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率が如何に異なるかについて考察する。CVaR 制約付き期待収益率最大化問題は式 (2.20) で与える。ここでは 3 資産のポートフォリオを考え、CVaR 制約を満たす投資比率集合および最適投資比率をコピュラ間で比較する。また、式 (2.20) は CVaR 制約毎に最適解が存在するため、分析結果が煩雑とならないようパラメータ設定は一つとし、CVaR 制約を変化させた場合の投資比率集合や最適投資比率のコピュラ間の乖離についても考察する。パラメータ設定を表 3.5 に示した。各資産のリターンは正規分布を仮定し、期待収益率、標準偏差、コピュラについて、実証データの統計値等を踏まえ現実的なパラメータを設定し

表 3.5: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題のパラメータ設定

Notes: 各資産のリターンには正規分布を仮定した。なお、各コピュラにつき 100 万個の乱数を生成し最適投資比率を求める。

		資産1	資産2	資産3
周辺モデルの パラメータ	期待収益率	0.0020	0.0015	0.0010
	標準偏差	0.0200	0.0150	0.0100
コピュラの パラメータ		1	0.3	-0.5
	相関行列	0.3	1	-0.3
		-0.5	-0.3	1
	自由度		10	
	歪度		-0.3	

た。期待収益率および標準偏差は資産 1, 2, 3 の順に大きい前提とし、資産 1 をハイリスク・ハイリターン、資産 2 をミドルリスク・ミドルリターン、資産 3 をローリスク・ローリターンと見做す。各コピュラの相関行列は、ローリスク・ローリターンである資産 3 と他の 2 資産が逆相関、資産 1 と資産 2 は順相関とした<sup>38)</sup>。

図 3.5 から図 3.7 について、 $x$  軸を資産 1 の投資比率、 $y$  軸を資産 3 の投資比率とし、原点  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  で囲まれた左下三角形が式 (2.20) の投資制約  $w'1_3 = 1, 0 \leq w_i \leq 1 (i=1, \dots, 3)$  を満たす領域である。その中で、各コピュラにつきポートフォリオの CVaR が  $CVaR_{target}$  となる投資比率集合を実線、最適化点を丸印で示した。なお、 $CVaR_{target}$  を 0.030 とした場合が図 3.5,  $CVaR_{target}$  を 0.025 とした場合が図 3.6,  $CVaR_{target}$  を 0.020 とした場合が図 3.7 である。

図 3.5 から図 3.7 からは、CVaR 制約を満たす投資比率集合は、正規コピュラ、 $t$  コピュラ、非対称  $t$  コピュラの順に広いことが読み取れる。このことは、正規コピュラが分散投資効果を最も大きく評価しポートフォリオの CVaR を小さく見積もる結果、CVaR 制約を満たす投資領域が広がる一方、非対称  $t$  コピュラは分散投資効果を最も小さく評価しポートフォリオの CVaR を大きく見積もる結果、CVaR 制約を満たす投資領域が狭まることを意味する。また、ハイリスク・ハイリターンである資産 1 の最適投資比率は正規コピュラ、 $t$  コピュラ、非対称  $t$  コピュラの順に高く、ローリスク・ローリターンである資産 3 の最適投資比率は上述した順に低いことが読み取れる。CVaR 制約を満たす投資領域の中でポートフォリオの期待収益率を最も高めるためには、図 3.5 から図 3.7 において資産 1 の投資

<sup>38)</sup> 実証データではローリスク・ローリターンである債券が他の資産と逆相関であることに鑑み、このような前提とした。

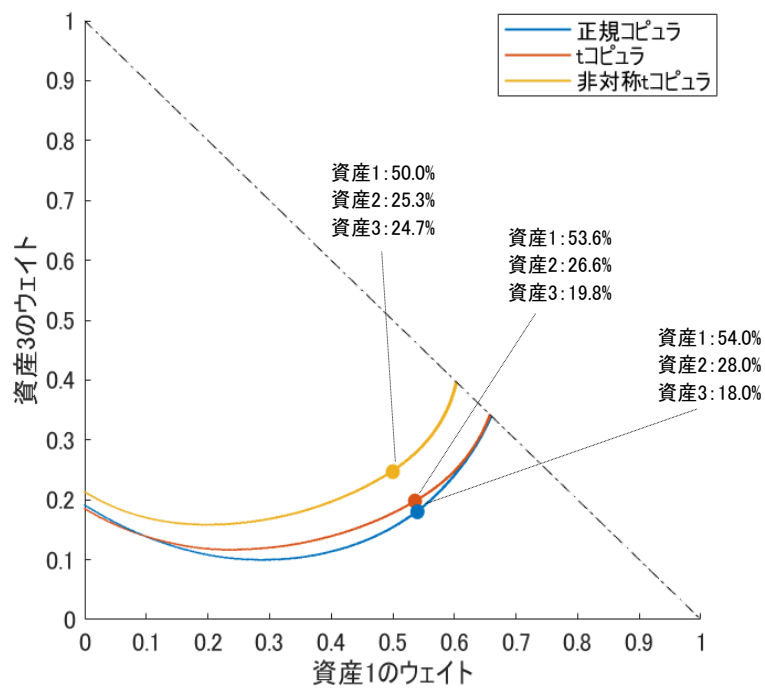


図 3.5: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の投資比率集合と最適投資比率 (CVaR 制約 : 0.030)  
 Notes: 各コピュラについて CVaR (信頼水準 99%) が 0.030 となる投資比率集合を実線, 最適投資比率を丸印で示した. なお, 鎖線より左下が資産配分制約 (非負かつ 3 資産の投資比率の合計が 1) を満たす領域である.

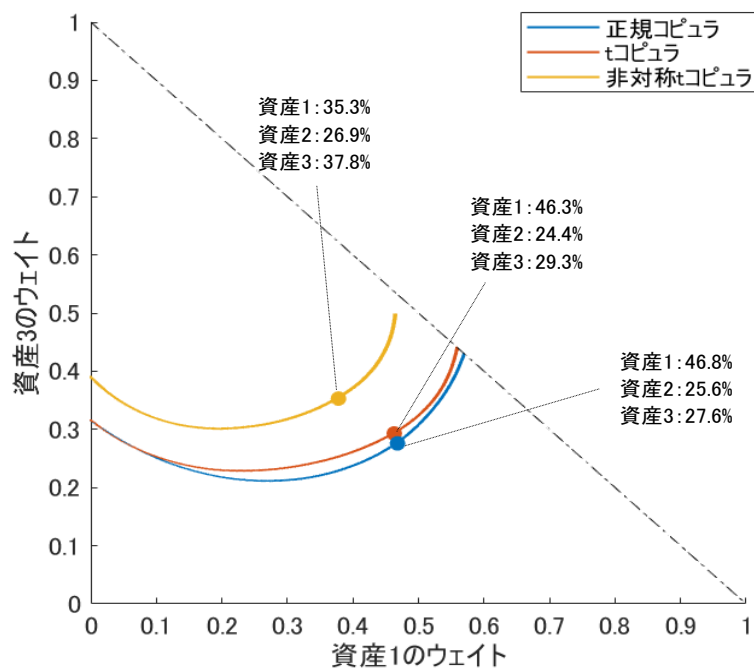


図 3.6: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の投資比率集合と最適投資比率 (CVaR 制約 : 0.025)

Notes: 各コピュラについて CVaR (信頼水準 99%) が 0.025 となる投資比率集合を実線, 最適投資比率を丸印で示した. なお, 鎖線より左下が資産配分制約 (非負かつ 3 資産の投資比率の合計が 1) を満たす領域である.

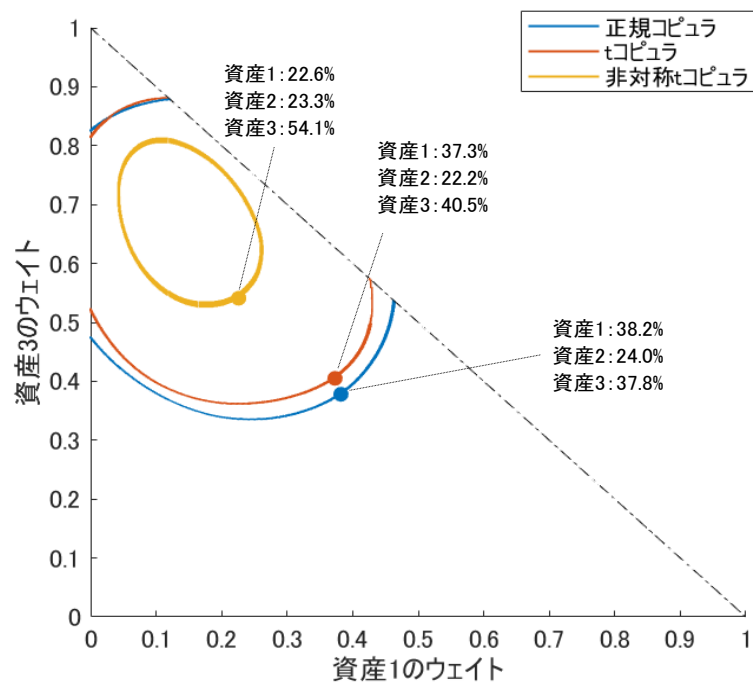


図 3.7: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の投資比率集合と最適投資比率 (CVaR 制約 : 0.020)  
 Notes: 各コピュラについて CVaR (信頼水準 99%) が 0.020 となる投資比率集合を実線, 最適投資比率を丸印で示した. なお, 鎖線より左下が資産配分制約 (非負かつ 3 資産の投資比率の合計が 1) を満たす領域である.

比率が高く資産3が低い右下のポートフォリオを最適解として選択する必要がある。その際、CVaR制約を満たす投資領域が正規コピュラが最も広く非対称 $t$ コピュラが最も狭いため、上述した最適投資比率の乖離が生じたと解釈できる。さらに、CVaR制約の水準が低下するにつれて、各コピュラの投資比率集合に関する乖離が大きくなり、最適投資比率の乖離も大きくなる。例えば、CVaR制約が0.03の場合、非対称 $t$ コピュラの資産1の最適投資比率は50.0%と正規コピュラ対比4.0pt低く、 $t$ コピュラ対比3.6pt低い。一方、CVaR制約が0.02の場合、非対称 $t$ コピュラの資産1の最適投資比率は22.6%と正規コピュラ対比15.6pt低く、 $t$ コピュラ対比14.7pt低い。正規コピュラと $t$ コピュラの投資比率集合や最適投資比率が類似しているのに対して、非対称 $t$ コピュラが他の二つのコピュラに対して乖離している点が特徴的である。

以上の結果を踏まえると、コピュラによってCVaR制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率は異なり、特にCVaR制約の水準の低下に伴い、コピュラ間の最適投資比率の乖離が拡大すると示唆される。

### 3.3 資産クラス間の依存構造の特徴分析

本節では、分析対象データ、周辺モデルの推定結果、コピュラの推定結果の順に説明する。

#### 3.3.1 分析対象データ

分析対象データには、機関投資家の実務において、資産配分を検討する際に考慮されることが多い四つの資産クラス、具体的には債券、クレジット、株式、不動産（REIT）を採用した。これらの採用インデックスは表3.6に示した。観測期間は2002年1月4日から2020年12月25日、観測頻度は週次、観測時点数は991時点である。各インデックスは国内外の各国通貨建て銘柄から構成されるため、各時点の為替評価に適用する通貨および為替ヘッジの有無に応じて累積リターンデータを取得できる。本章では資産運用実務に鑑み以下のようにインデックスを採用した。債券については、実務上金利収益およびロールダウン効果に伴う収益を享受することを目的として為替変動リスクをヘッジし投資することが多い点を考慮し、為替ヘッジ有の日本円ベースのインデックスを採用した<sup>39)</sup>。その他の三つの資産については、実務上為替変動リスクを許容することが多い点を考慮し、

<sup>39)</sup>各国通貨建て債券に為替予約によるローリング・ヘッジを行うことで、為替変動リスクをヘッジした日本円ベースのものである。



為替ヘッジ無の日本円ベースのインデックスを採用した<sup>40)</sup>。債券の分析対象データについては、近年の非伝統的金融政策による金利低下に伴い実務において投資年限が長期化していることに鑑み、10年超の債券から構成されるインデックスを採用した。なお、為替変動リスクのヘッジは現時点で将来時点の為替レートを確定する為替予約を活用して行われる。将来時点の為替レートは各国の金利と自国の金利の差から決定され、これが為替予約のコストとなる。本章で採用した為替ヘッジ有の日本円ベースの債券インデックスでは1か月の為替予約によるローリング・ヘッジが仮定されているため、為替ヘッジコストは各国と本邦の1か月金利の差である。当該差分を各国通貨建て債券のリターンから引いた為替ヘッジコスト控除後のリターンが上記インデックスのリターンとなる。

表 3.6: 分析対象データ

資産クラス	採用インデックス	平均	標準偏差	歪度	尖度
債券	Bloomberg Global Aggregate 10+ Yrs Total Return Index(Currency Hedged JPY)	0.00096	0.0091	-0.513	5.17
クレジット	Bloomberg Global High Yield Total Return Index	0.00149	0.0180	-1.473	14.02
株式	MSCI World Total Return Index	0.00165	0.0242	-0.916	11.64
不動産	Dow Jones Equity REIT Total Return Index	0.00241	0.0354	0.001	13.57

分析対象データの採用インデックスの統計値を表 3.6, 累積リターンを図 3.8 に示した。表 3.6 から、平均および標準偏差は不動産、株式、クレジット、債券の順に高いことが読み取れる。したがって、標準偏差をリスクと捉えると、不動産、株式、クレジット、債券の順にハイリスク・ハイリターンであることが示唆される。また、歪度は株式、クレジット、債券がマイナスであること、尖度は全ての資産が正規分布に比べて大きいことを読み取れる。

### 3.3.2 周辺モデルの推定結果

各資産のリターンデータに対する時系列モデルは式 (2.11) で与える。本節では、式 (2.11) における条件付き期待収益率  $\mu_{s|s-1,i}$  の時系列構造は ARMA モデルを、条件付き分散（標

<sup>40)</sup>各時点において日本円と各国通貨の為替レートをを用いて日本円ベースに換算したものであり、リターンには為替の変動率も加味される。

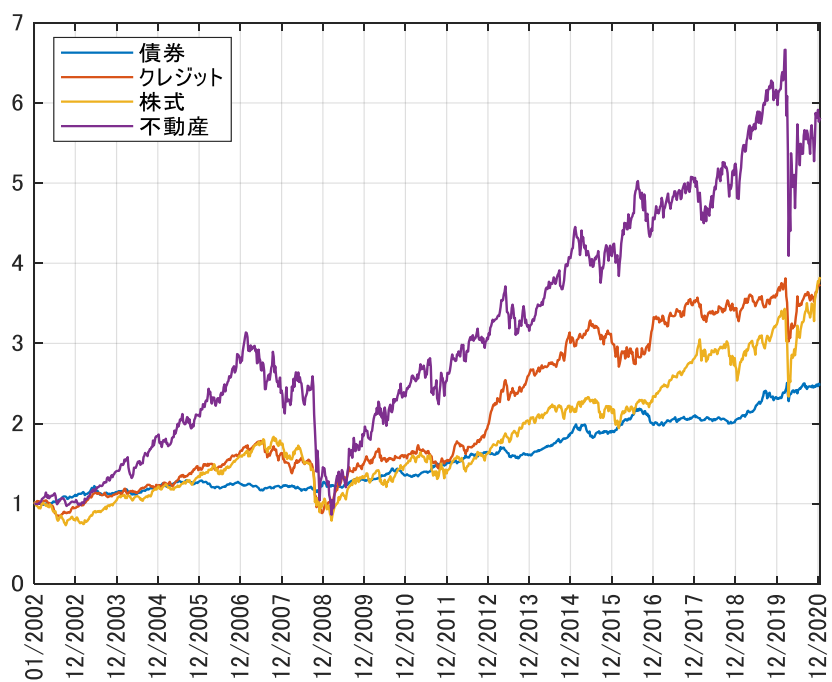


図 3.8: 分析対象データの累積リターン

Notes: 2002年1月1日を1（単位は日本円）とし、分析対象期間である2020年12月25日までの累積リターンを示した。

標準偏差)  $\sigma_{s|s-1,i}^2$  の時系列モデルは GARCH モデルおよび GJR モデルを適用する。また、誤差項  $\varepsilon_{s,i}$  の分布には、正規分布、 $t$  分布と、Jondeau and Rockinger (2006) 等に倣い Hansen (1994) の非対称  $t$  分布を採用する。モデルのパラメータは最尤法によって推定し、AIC 規準によりモデルを採択する。なお、推定に際しては、AR 項の次数は 1 または 2、MA 項の次数は 0 から 2 まで、GARCH 項もしくは GJR 項の次数は (1,1) とする<sup>41)</sup>。また、非対称  $t$  分布を誤差項分布に適用する場合、AR 項の次数は 1、MA 項の次数は 0 または 1 とする<sup>42)</sup>。

表 3.7: 周辺モデルの推定結果

Notes: 表には、AIC 規準によって選択されたモデルと、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」に対するコルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (p 値) を併記した。なお、全ての資産について有意水準 5% で帰無仮説が棄却されなかった。

	債券	クレジット	株式	不動産
AIC規準で選択されたモデル	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t ( $\nu=16.79, \lambda=-0.174$ )	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t ( $\nu=7.78, \lambda=-0.142$ )	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t ( $\nu=8.54, \lambda=-0.258$ )	AR(1) +GARCH(1,1) +Skewed-t ( $\nu=5.82, \lambda=-0.171$ )
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (P値)	0.9303	0.9070	0.8868	0.9278

各資産のリターンデータに関する周辺モデルおよび誤差項分布の推定結果は表 3.7 のとおりである。表 3.7 からは、分散の構造モデルとしては、不動産を除く全ての資産で GJR モデルが採用されることを確認できる。したがって、上述の三つの資産において、リターンのショックが分散に与える影響について非対称性を有することが分かる。また、誤差項分布については全ての資産で非対称  $t$  分布が選択され、非対称  $t$  分布の歪度は全てマイナスであることを確認できる。したがって、全ての資産の誤差項分布はファットテイルであり、全ての資産ではマイナス方向に裾の長い歪みを有することが分かる。さらに、残差についてコルモゴロフ-スミルノフ検定を行った結果からは、全てのデータが有意水準 5% において、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」が棄却されないことを確認できる。

<sup>41)</sup>GARCH 項, GJR 項に関する次数を増加させても、モデルの精度が大きく向上しないことを事前に確認したこと、Hansen (1994) に記されているように、GARCH モデルに関しては、GARCH (1,1) が選択されることが多く、天下りの GARCH (1,1) を適用する先行研究が多数あることを勘案し、既述の取扱いとす。

<sup>42)</sup>同分布を適用する際、モデルのパラメータ数を増加させると、推定精度が安定しないため、既述の取り扱いとす。

### 3.3.3 コピュラの推定結果

非対称  $t$  コピュラは、歪度  $\gamma_i (i=1, \dots, 4)$  が全て等しいと仮定した場合と異なると仮定した場合の両方について推定を行った。以下では、前者を「非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）」、後者を「非対称  $t$  コピュラ（個別の歪度）」と表記する。コピュラの推定結果を表 3.8 に示した。AIC が最も小さいコピュラは非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）である。2 番目は非対称  $t$  コピュラ（個別の歪度）、3 番目は  $t$  コピュラ、AIC が最も大きいコピュラは正規コピュラである。AIC の観点から優劣が非対称  $t$  コピュラ、 $t$  コピュラ、正規コピュラの順となる点は González-Pedraz et al. (2015) や Zhou and Qin (2021) 等の先行研究と整合的である<sup>43)</sup>。また、債券とクレジットに関する相関を除く全てのパラメータについて有意水準 5% で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された。上述した結果を踏まえると、非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）を用いて資産間の依存構造を捉えることで、AIC 規準の観点からデータへの適合度が  $t$  コピュラ、正規コピュラに比べて改善することが示唆される。

表 3.8: コピュラの推定結果

Notes: AIC 規準で選択されたモデルについては、「AIC」部分を網掛け（灰色）とした。非対称  $t$  コピュラについては歪度  $\gamma_i (i=1, \dots, 4)$  が全て等しいと仮定した場合を「共通の歪度」、異なると仮定した場合を「個別の歪度」と表記した。なお、括弧内の数値は標準誤差であり、債券とクレジットに関する相関を除く全てのパラメータについて有意水準 5% で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された。

	AIC	相関 $\rho$						自由度 $\nu$	歪度 $\gamma$			
		債券 クレジット	債券 株式	債券 不動産	クレジット 株式	クレジット 不動産	株式 不動産		債券	クレジット	株式	不動産
非対称 $t$ コピュラ (共通の歪度)	-1,901.2	-0.295 (0.171)	-0.400 (0.102)	-0.150 (0.071)	0.774 (0.022)	0.588 (0.062)	0.712 (0.018)	8.173 (0.052)	-0.282 (0.010)			
非対称 $t$ コピュラ (個別の歪度)	-1,900.1	-0.269 (0.181)	-0.387 (0.092)	-0.135 (0.065)	0.772 (0.025)	0.585 (0.072)	0.705 (0.015)	8.492 (0.002)	-0.291 (0.003)	-0.297 (0.001)	-0.305 (0.001)	-0.235 (0.009)
$t$ コピュラ	-1,880.2	-0.310 (0.151)	-0.408 (0.082)	-0.158 (0.068)	0.775 (0.032)	0.590 (0.060)	0.716 (0.016)	8.382 (0.186)	-	-	-	-
正規コピュラ	-1,793.5	-0.279 (0.194)	-0.392 (0.152)	-0.141 (0.056)	0.773 (0.018)	0.586 (0.064)	0.708 (0.016)	-	-	-	-	-

<sup>43)</sup> González-Pedraz et al. (2015) は非対称  $t$  コピュラ（個別の歪度）を適用し、Zhou and Qin (2021) は非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）を適用した。なお、これらの先行研究では AIC ではなく対数尤度が示されている。パラメータ数を考慮し各コピュラの AIC を計測した結果、本章の推定結果がこれらの先行研究と整合的であることを確認した。

パラメータの水準に着目すると、相関は債券とその他の資産間がマイナス、クレジット、株式、不動産間はプラスである。このことから、相関の観点からは債券がその他の資産に対して高い分散投資効果を有すると示唆される。非対称  $t$  コピュラおよび  $t$  コピュラの自由度は 8 程度である。非対称  $t$  コピュラの歪度は共通の歪度が  $-0.282$  であり、個別の歪度を適用した場合を含めて全てマイナスである。このような歪度の特徴も González-Pedraz et al. (2015) や Zhou and Qin (2021) 等の先行研究と同様であり、上述した結果から、資産間の分布の裾での依存構造について、上昇時よりも下落時に強まるといった非対称性を有すると示唆される。また、自由度や歪度の水準と 3.2 節の分析結果を踏まえると、正規コピュラや  $t$  コピュラは非対称  $t$  コピュラに比べて CVaR を小さく評価し、CVaR 最小化問題、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率がコピュラ間で相応に乖離することが示唆される。そこで以下では、二つの資産配分問題に関するコピュラ毎の最適投資比率について実証的に議論する。なお、非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）の AIC が非対称  $t$  コピュラ（個別の歪度）に比べて低い点に鑑み、以下の実証分析では非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）を用いる。

### 3.4 テイルリスクを考慮した最適資産配分に関する実証分析

本節では、実証分析データを用いてコピュラの違いが最適資産配分に与える影響について考察する。以下では、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題、CVaR 最小化問題の順に実証分析の結果を記載する。なお、本節の実証分析は全て乱数を活用したシミュレーションである。

資産配分を検討する際には、長期的な資産配分と短期的な市場環境の変化を考慮したダイナミック・アセット・アロケーションの両面からの考察が重要である。CVaR 制約付き期待収益率最大化問題は、これまで示したように CVaR 制約の水準によって結果が変化する。実務においては投資家の各時点の財務状況等を勘案し CVaR 制約の水準を決定することが一般的であるが、本章で実務に即して財務状況を加味し CVaR 制約を変化させてバックテストを行うことは難しい。CVaR 制約を固定したバックテストはできるものの、前述した背景から有用な示唆が得られる可能性は低いと考えられる。このような理由から、長期的な資産配分を想定した実証分析は、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題と CVaR 最小化問題について、ダイナミック・アセット・アロケーションを想定した実証分析は CVaR 最小化問題のみ行う。

### 3.4.1 CVaR 制約付き期待収益率最大化問題

ここでは、周辺モデルおよびコピュラの推定結果をもとに、以下の手順で CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率をコピュラ毎に求め比較する<sup>44)</sup>。

- 1 表 3.8 に示した各コピュラを用いて 4 資産の乱数を 100 万組生成する。
- 2 表 3.7 に示した周辺モデルを用いて手順 1 の乱数をリターンデータに置き換える。なお、各資産の期待収益率および分散（標準偏差）には周辺モデルの定常平均および定常分散（標準偏差）を用いる<sup>45)</sup>。
- 3 手順 2 のリターンデータを用いて式 (2.20) の CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率を求める。

表 3.9 には、各コピュラの CVaR 制約付き期待収益率最大化問題に関する最適投資比率を CVaR 制約毎に示した。図 3.9 には、各コピュラの債券およびクレジットの最適投資比率の合計と株式および不動産の最適投資比率の合計について、CVaR 制約毎に図示した。CVaR 制約の水準が低下した際、ローリスク・ローリターン、あるいはハイリスク・ハイリターンの資産への最適投資比率がコピュラ間で如何に異なるかについて示している。

表 3.9 からは、CVaR 制約の水準が最も高い場合、コピュラ毎の最適投資比率は概ね同様であり、全てのコピュラの最適解において四つ資産の中で最もハイリスク・ハイリターンである不動産に 98% 配分されていることが読み取れる。CVaR 制約の水準が低下すると、不動産の最適投資比率は低下し、他の三つの資産への最適投資比率が高まる。この傾向は全てのコピュラに共通するが、コピュラ間の最適投資比率の乖離については CVaR 制約の水準の低下に伴い大きくなることが表 3.9 および図 3.9 から読み取れる。例えば、CVaR 制約を 0.03 とした場合、非対称  $t$  コピュラではローリスク・ローリターンである債券およびクレジットの最適投資比率の合計が 60% となる。一方、 $t$  コピュラでは 52% と 8pt 低く、正規コピュラでは 50% と 10pt 低い。さらに、CVaR 制約を 0.02 とした場合、非対称  $t$  コピュラでは債券およびクレジットの最適投資比率の合計が 92% となる。一方、 $t$  コピュラでは 77% と非対称  $t$  コピュラ対比 15pt 低く、正規コピュラでは 68% と非対称  $t$  コピュラ対比 24pt 低い。

<sup>44)</sup> 実務において長期的な資産配分を検討する場合、長期間のデータを用いてパラメータを決定することが多い。例えば、GPIF（年金積立金管理運用独立行政法人）は基本ポートフォリオの策定において、相関係数等のパラメータをバブル崩壊以降約 25 年のデータから推定している。

<sup>45)</sup> 3.4 節で記載したように、ここでは長期的な資産配分を想定した実証分析を行うため、定常平均と定常分散を活用する。なお、後述する CVaR 最小化問題の実証分析では、ダイナミック・アセット・アロケーションも想定し、周辺モデルの条件付き期待収益率と条件付き分散を活用する。

表 3.9: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率 (CVaR 制約別)

Notes: 表 3.7 の周辺モデルの推定結果および表 3.8 のコピュラの推定結果を適用した場合の最適投資比率を CVaR 制約別に示した。

CVaR制約 (信頼水準:99%)	非対称tコピュラ				tコピュラ				正規コピュラ			
	債券	クレジット	株式	不動産	債券	クレジット	株式	不動産	債券	クレジット	株式	不動産
0.020	0.81	0.11	0.08	0.00	0.68	0.09	0.22	0.01	0.66	0.02	0.29	0.03
0.025	0.63	0.10	0.26	0.01	0.59	0.03	0.35	0.03	0.56	0.01	0.38	0.05
0.030	0.53	0.07	0.34	0.06	0.50	0.02	0.43	0.05	0.49	0.01	0.40	0.10
0.035	0.45	0.05	0.40	0.10	0.43	0.02	0.43	0.12	0.43	0.00	0.41	0.16
0.040	0.38	0.03	0.49	0.10	0.37	0.01	0.46	0.16	0.36	0.00	0.45	0.19
0.045	0.32	0.02	0.50	0.16	0.31	0.00	0.49	0.20	0.29	0.00	0.45	0.26
0.050	0.26	0.01	0.51	0.22	0.25	0.00	0.50	0.25	0.23	0.00	0.50	0.27
0.055	0.21	0.00	0.47	0.32	0.20	0.00	0.46	0.34	0.18	0.00	0.48	0.34
0.060	0.14	0.00	0.51	0.35	0.13	0.00	0.51	0.36	0.11	0.00	0.53	0.36
0.065	0.08	0.00	0.52	0.40	0.07	0.00	0.51	0.42	0.04	0.00	0.55	0.41
0.070	0.01	0.00	0.57	0.42	0.01	0.00	0.53	0.46	0.00	0.00	0.54	0.46
0.075	0.01	0.00	0.41	0.58	0.00	0.00	0.41	0.59	0.00	0.00	0.38	0.62
0.080	0.01	0.00	0.26	0.73	0.00	0.00	0.26	0.74	0.00	0.00	0.25	0.75
0.085	0.01	0.00	0.13	0.86	0.00	0.00	0.14	0.86	0.00	0.00	0.13	0.87
0.090	0.01	0.00	0.01	0.98	0.00	0.00	0.02	0.98	0.00	0.00	0.02	0.98

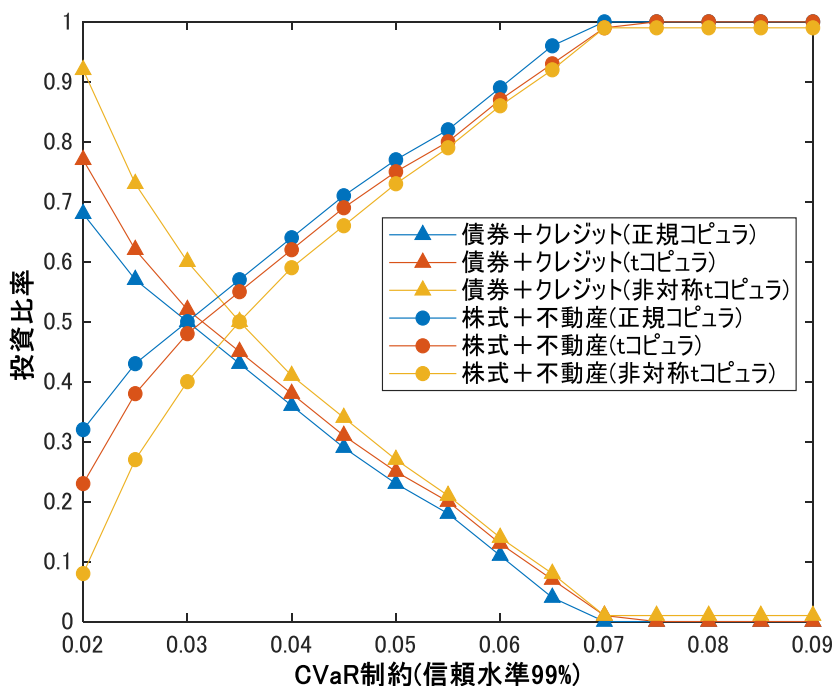


図 3.9: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率 (債券・クレジット 対 株式・不動産)

Notes: 各コピュラについて、ローリスク・ローリターンである債券およびクレジットの最適投資比率の合計とハイリスク・ハイリターンである株式および不動産の最適投資比率の合計を CVaR 制約毎に示した。

図 3.10 には、正規コピュラあるいは  $t$  コピュラを用いた場合の最適ポートフォリオの CVaR を分母、非対称  $t$  コピュラを用いた場合の上述の最適ポートフォリオの CVaR を分子とした CVaR 比率を CVaR 制約毎に図示した。当該指標が 1 より大きいほど、正規コピュラあるいは  $t$  コピュラを用いた場合の最適ポートフォリオの CVaR が非対称  $t$  コピュラを用いて評価した場合に比べて小さく評価されていることを示唆する。

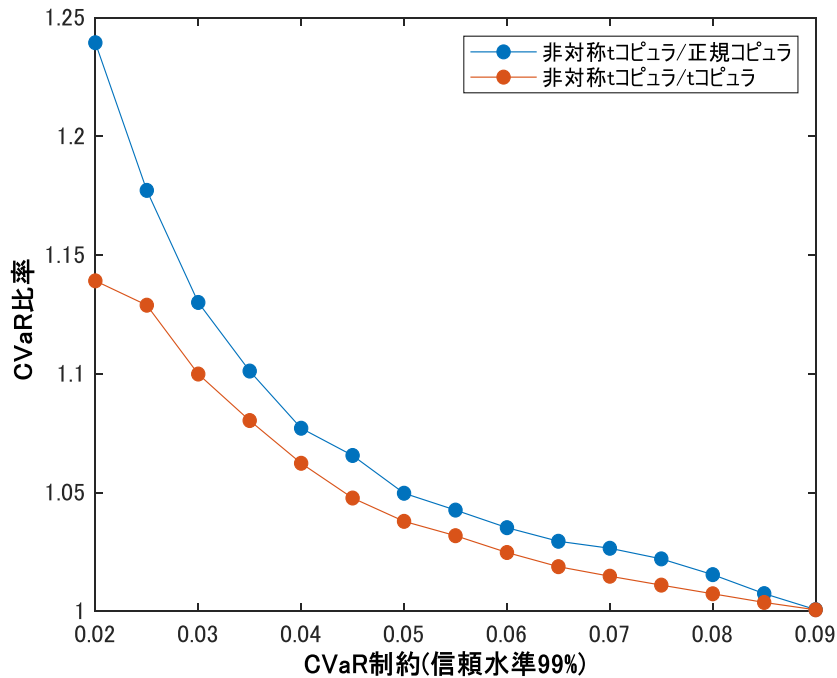


図 3.10: CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適解における CVaR 比率

Notes: 正規コピュラあるいは  $t$  コピュラを用いた場合の最適ポートフォリオの CVaR を分母、非対称  $t$  コピュラを用いて推定した既述の最適ポートフォリオの CVaR を分子とした CVaR 比率を CVaR 制約毎に図示した。

図 3.10 からは、CVaR 比率が全ての場合において 1 より大きく、CVaR 制約の水準の低下に伴い大きくなることが読み取れる。例えば、CVaR 制約が 0.02 の場合、正規コピュラの CVaR 比率が 1.24、 $t$  コピュラの CVaR 比率が 1.14 であり、正規コピュラ、 $t$  コピュラの最適ポートフォリオに関する CVaR について、非対称  $t$  コピュラを用いて評価した場合には CVaR が各々 24%、14% 増加する。

このような結果が得られた背景としては、次のことが考えられる。CVaR 制約の水準が高い場合、当該制約の影響は小さく期待収益率を重視し最適投資比率が決定されるため、全てのコピュラの最適解において最もハイリスク・ハイリターンである不動産への配分が大宗を占める。CVaR 制約の水準が低下すると資産の分散によって CVaR を低下させ投資



制約を満たそうとする。一方、分散投資効果が CVaR の減少に寄与する程度はコピュラによって異なる。ここで、3.3 節のコピュラの推定結果および 3.2 節の分析結果に鑑みると、正規コピュラや  $t$  コピュラは非対称  $t$  コピュラに比べて分散投資効果を大きく評価し、図 3.10 で示したようにポートフォリオの CVaR を小さく評価する。その結果、正規コピュラや  $t$  コピュラでは CVaR 制約を満たす投資領域を広範囲に捉え、非対称  $t$  コピュラに比べてハイリスク・ハイリターンの資産への投資を許容する。このような背景から、正規コピュラや  $t$  コピュラの最適解において株式や不動産の最適投資比率が非対称  $t$  コピュラに比べて高まったと考えられる。なお、CVaR 制約の水準が低下すると他の資産と逆相関関係にある債券の最適投資比率が高まる。その結果、順相関関係の資産を主としたポートフォリオに比べて、正規コピュラや  $t$  コピュラについて非対称  $t$  コピュラに比べて CVaR を小さく評価する度合いが大きくなる。この点も、コピュラ間の最適投資比率に関する乖離の拡大に寄与したと考えられる。

以上の結果を踏まえると、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題を検討する際、分布の裾での依存構造を考慮できない正規コピュラやその非対称性を捕捉できない  $t$  コピュラを用いると、非対称  $t$  コピュラに比べて CVaR 制約を満たす投資領域を広範囲に捉え、ハイリスク・ハイリターンの資産への最適投資比率を高めると示唆される。また、上述したコピュラの違いによる影響は、CVaR 制約の水準が低いリスク回避的な投資家の場合に大きくなり、非対称  $t$  コピュラを用いた資産配分の重要性が示唆される。

### 3.4.2 CVaR 最小化問題

以下では、2 通りの実証分析を行う。一つは上述した CVaR 制約付き期待収益率最大化問題と同じ方法での分析である。もう一つは、ダイナミック・アセット・アロケーションを想定した分析である。具体的には、バックテスト期間を 2007 年 1 月から 2020 年 12 月とし、各時点において直近 5 年間の週次データから各コピュラおよび周辺モデルをローリング推定し、1 期先の CVaR 最小化問題に関する最適投資比率を逐次的に求める。

#### ・全期間データを用いた実証分析

ここでは、CVaR 制約付き期待収益率最大化問題と同様の手順で式 (2.19) の CVaR 最小化問題の最適投資比率をコピュラ毎に求め比較する。

コピュラ毎の CVaR 最小化問題に関する最適投資比率を表 3.10 に示した。手順は CVaR 制約付き期待収益率最大化問題と同様である。表 3.10 からは、非対称  $t$  コピュラを用いた場合、ハイリスク・ハイリターンの資産である株式およびクレジットへの最適投資比

表 3.10: CVaR 最小化問題の最適投資比率

Notes: 表 3.7 の周辺モデルの推定結果および表 3.8 のコンピュータの推定結果を適用した場合の最適投資比率を示した。

	債券	クレジット	株式	不動産
非対称 $t$ コンピュータ	0.84	0.08	0.08	0.00
$t$ コンピュータ	0.79	0.12	0.09	0.00
正規コンピュータ	0.75	0.12	0.13	0.00

率が $t$ コンピュータおよび正規コンピュータに比べて低下し、ローリスク・ローリターンの資産である債券の最適投資比率が上昇することを読み取れる。具体的には、非対称 $t$ コンピュータにおける債券の最適投資比率は84%と正規コンピュータ対比で9pt高く、 $t$ コンピュータに比べても5pt高い。一方、非対称 $t$ コンピュータにおける株式およびクレジットの最適投資比率の合計は16%と正規コンピュータ対比9pt低く、 $t$ コンピュータに比べても5pt低い。なお、最もハイリスク・ハイリターンな資産である不動産は0%であり、全てのコンピュータで共通である。

このような結果が得られた背景としては、次のことが考えられる。本章で採用した資産の依存構造について、非対称 $t$ コンピュータおよび $t$ コンピュータの自由度は8程度と低く標準誤差も小さい。また、非対称 $t$ コンピュータの歪度はマイナスかつ相応に小さく、有意性も認められる。したがって3.2節での考察も勘案すると、正規コンピュータや $t$ コンピュータを用いて資産間の依存構造を捕捉すると非対称 $t$ コンピュータに比べて分散投資効果を大きく評価する。ここで、CVaR 最小化問題の最適解は周辺分布の統計的特徴と分散投資効果に影響されるため、後者を低く評価する場合には、周辺分布の統計的特徴を重視し、ローリスクの資産への投資比率を高めることでCVaRを最小化する。したがって、正規コンピュータや $t$ コンピュータに比して分散投資効果を低く評価する非対称 $t$ コンピュータでは、ローリスクの資産である債券の最適投資比率が高まったと考えられる。

以上の結果を踏まえると、実務においてCVaR 最小化問題を検討する際、分布の裾での依存構造を考慮できない正規コンピュータやその非対称性を捕捉できない $t$ コンピュータを用いると、非対称 $t$ コンピュータに比べて分散投資効果を大きく評価し、ハイリスク・ハイリターンの資産の最適投資比率を高めることから、非対称 $t$ コンピュータを用いた資産配分の重要性が示唆される。

#### ・ダイナミック・アセット・アロケーションを想定した実証分析

ここでは、以下の手順でCVaR 最小化問題の最適投資比率を逐次的に求め、コンピュータ間の乖離を比較する。

- 1 2002年1月4日から2006年12月29日までの5年分の実現リターンデータを用いて、式(2.11)の周辺モデルを推定する。周辺モデルはAICを用いて選択する。
- 2 AICで選択した周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、式(2.7)、式(2.8)、式(2.9)の三つのコピュラのパラメータを推定する。
- 3 上記2で推定したコピュラを用いて、2007年1月5日（翌期）までの1期間の乱数を10万組生成する。
- 4 上記1の周辺モデルと2006年12月29日までの実現リターンデータを用いて、各資産について2007年1月5日までの1期間の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を計算する。
- 5 手順4の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を適用した周辺モデルを用いて、手順3で生成した乱数を4資産のリターンデータのサンプルに変換する。
- 6 手順5のリターンデータを用いて、式(2.19)のCVaR最小化問題の最適投資比率を求める。
- 7 2007年1月5日までの1期間の各資産の実現リターンデータを取り込み、上記1の周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、手順2から6に倣い2007年1月12日までの1期間の最適投資比率を求める。
- 8 以下、上記の作業を2020年12月25日まで繰り返す。なお、周辺モデルは1年毎に推定する。

図3.11には、バックテスト期間におけるCVaR最小化問題の最適投資比率の時系列推移、図3.12から図3.14にはコピュラ間の最適投資比率の差分を示した。なお、図3.12は非対称 $t$ コピュラから正規コピュラの最適投資比率を引いた差分、図3.13は非対称 $t$ コピュラから $t$ コピュラの最適投資比率を引いた差分、図3.14は $t$ コピュラから正規コピュラの最適投資比率を引いた差分である。

図3.12、図3.13、図3.14からは、バックテスト期間を通じてコピュラ間の最適投資比率に差分が生じていると読み取れる。差分の内容に着目すると、非対称 $t$ コピュラは $t$ コピュラや正規コピュラに対して債券の最適投資比率が恒常的に高く、クレジットや株式の最適投資比率が恒常的に低い。また、 $t$ コピュラの正規コピュラに対する内容についても同様である。差分の大きさに着目すると、非対称 $t$ コピュラと正規コピュラでは差分が大きい時期には10%から15%程度、差分が小さい時期においても5%程度乖離している。また、

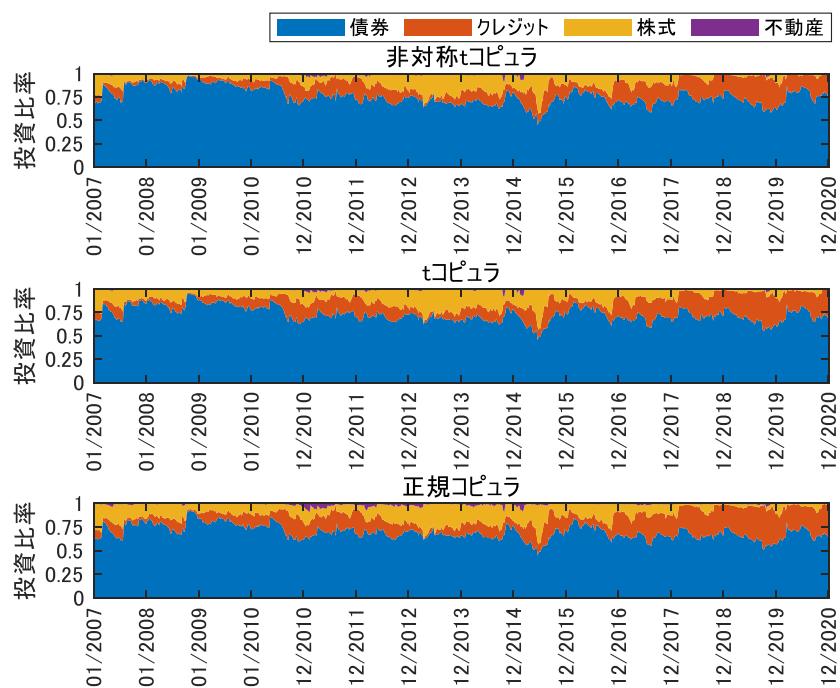


図 3.11: CVaR 最小化問題の最適投資比率に関する時系列推移

Notes: 2007 年 1 月から 2020 年 12 月までの CVaR 最小化問題に関する最適投資比率をコピュラ毎に示した.

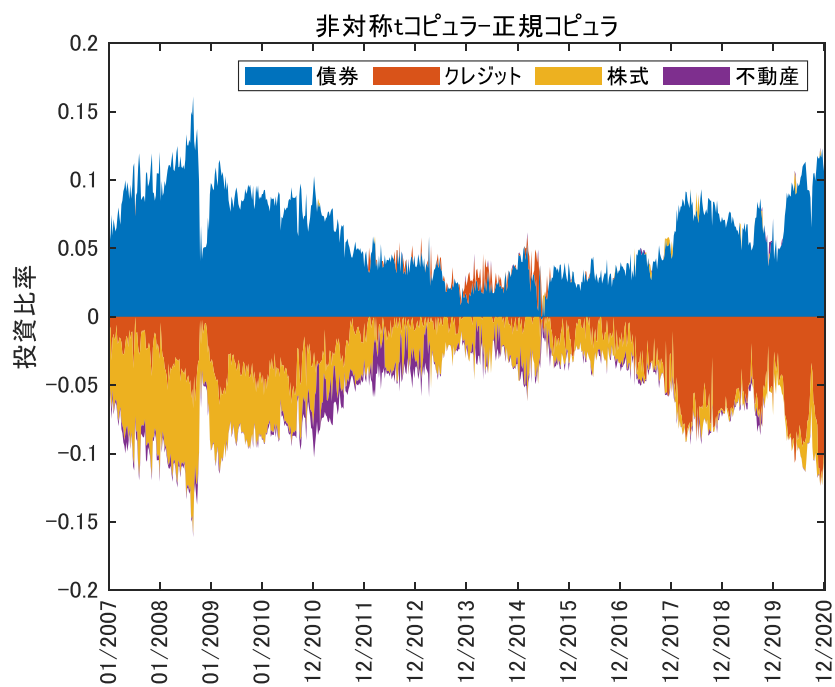


図 3.12: CVaR 最小化問題の最適投資比率に関するコピュラ間の乖離 (非対称  $t$  コピュラ - 正規コピュラ)

Notes: 非対称  $t$  コピュラから正規コピュラの最適投資比率を引いた差分を 2007 年 1 月から 2020 年 12 月まで示した。

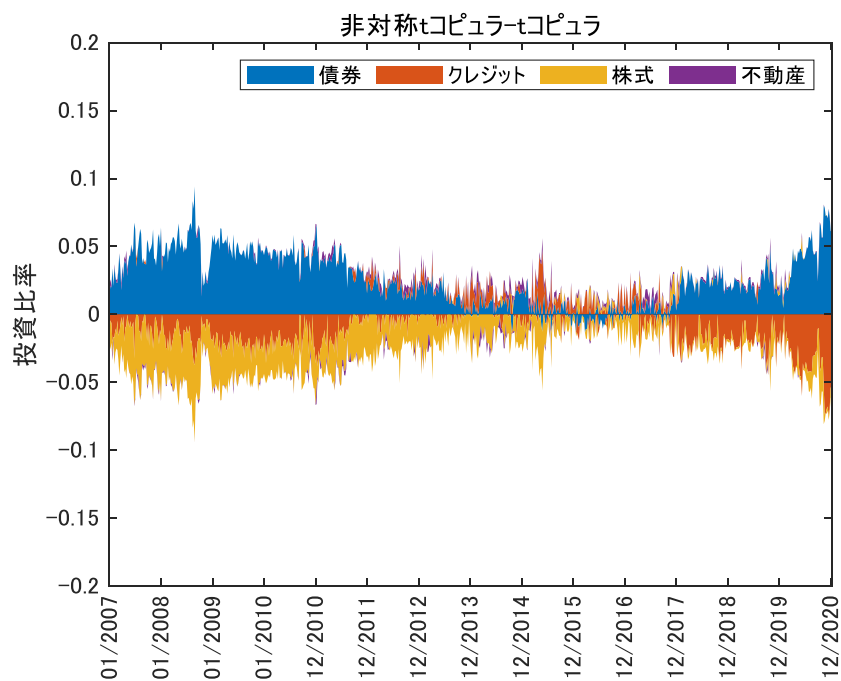


図 3.13: CVaR 最小化問題の最適投資比率に関するコピュラ間の乖離 (非対称  $t$  コピュラ -  $t$  コピュラ)  
 Notes: 非対称  $t$  コピュラから  $t$  コピュラの最適投資比率を引いた差分を 2007 年 1 月から 2020 年 12 月まで示した.

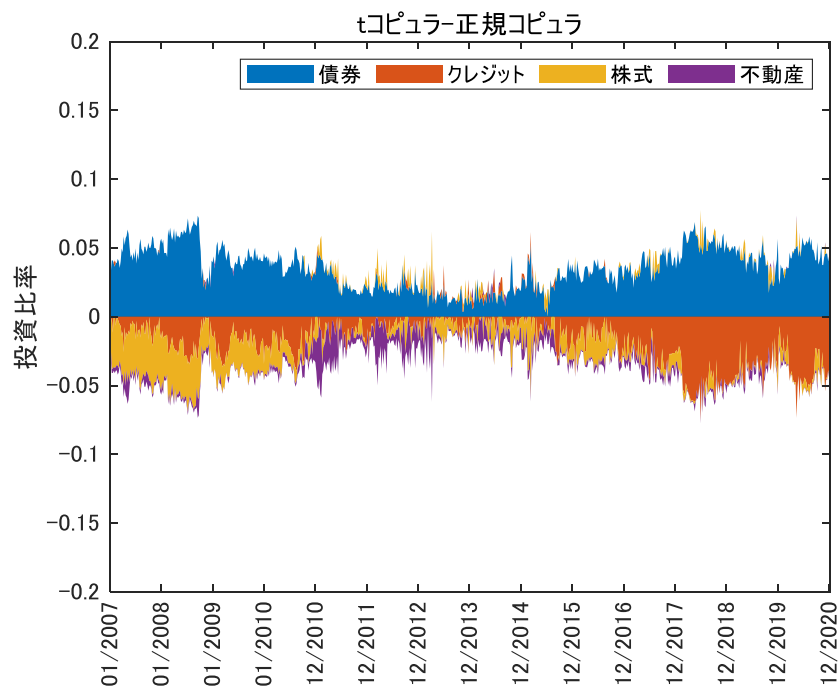


図 3.14: CVaR 最小化問題の最適投資比率に関するコピュラ間の乖離 ( $t$  コピュラ - 正規コピュラ)  
 Notes:  $t$  コピュラから正規コピュラの最適投資比率を引いた差分を 2007 年 1 月から 2020 年 12 月まで示した。

非対称 $t$ コピュラと $t$ コピュラでは差分が大きい時期には5%から10%程度乖離している。 $t$ コピュラと正規コピュラでは差分が大きい時期には5%程度乖離している。最適投資比率の差分に関する時系列的な特徴に着目すると、コピュラ間の最適投資比率に関する差分は2011年以降に縮小していることが読み取れる。この時期は、主要国の中央銀行がリーマン・ショック以降に導入した非伝統的金融政策を受けて、全ての資産が長期間に亘り安定的に上昇した。こうした中で、資産間の分布の裾での依存構造が弱まり、コピュラ間の最適投資比率の差分が縮小したと考えられる。一方、2018年以降は再びコピュラ間の最適投資比率の差分が拡大している。この時期は、米国において金融政策を正常化しており<sup>46)</sup>、市場環境が非伝統的金融政策の導入前に回帰した期間と言える。また、2018年以降には代表的な金融市場ショックであるVIXショックや米中貿易摩擦に伴う市場混乱、さらには新型コロナ・ショックが含まれている。こうした中で、資産間の分布の裾での依存構造が再度強まり、コピュラ間の最適投資比率の差分が拡大したと考えられる。

以上の結果を踏まえると、非対称 $t$ コピュラを用いることで、市場環境の変化を反映しながら依存構造の特徴を捕捉し、CVaR最小化ポートフォリオを構築することが示唆される。

CVaR最小化を検討する投資家にとっては、特にテイルリスク顕在化局面におけるコピュラの違いによる影響について把握する重要性が高い。そこで、図3.15にはリーマン・ショックの前後における、CVaR最小化ポートフォリオの累積リターンおよび最適投資比率を示した。図上段には、三つのコピュラのCVaR最小化ポートフォリオに関する累積リターンを示した。図中段には、正規コピュラの最適投資比率の時系列推移を示した。図下段には、乖離が大きく影響を考察しやすい非対称 $t$ コピュラと正規コピュラの最適投資比率の差分を示した。

図3.15上段からは、リーマン・ショックが生じた2008年10月以降、CVaR最小化ポートフォリオのリターンが悪化したと読み取れる。一方、悪化幅は非対称 $t$ コピュラ、 $t$ コピュラ、正規コピュラの順に小さく、非対称 $t$ コピュラを用いることでリターンの悪化の抑制に寄与したことが分かる。また、図3.15中段からはリターンの悪化直後には株式等の最適投資比率が低下し、債券の最適投資比率が上昇したと読み取れる<sup>47)</sup>。同時に図3.15下段からは、コピュラ間の最適投資比率の乖離が縮小したことも分かる。

リーマン・ショックのようなテイルリスク顕在化局面では、株式等のハイリスクな資産のボラティリティが上昇する。その結果、CVaR最小化ポートフォリオにおいてローリス

<sup>46)</sup>2013年12月に非伝統的金融政策(QE3)の段階的縮小を開始し、2015年12月に利上げを開始した。その後2018年12月まで段階的に利上げを実施した。

<sup>47)</sup>ここでは、簡潔に傾向を把握するため正規コピュラの最適投資比率に関する時系列推移のみ示したが、非対称 $t$ コピュラおよび $t$ コピュラについても同様の傾向である。



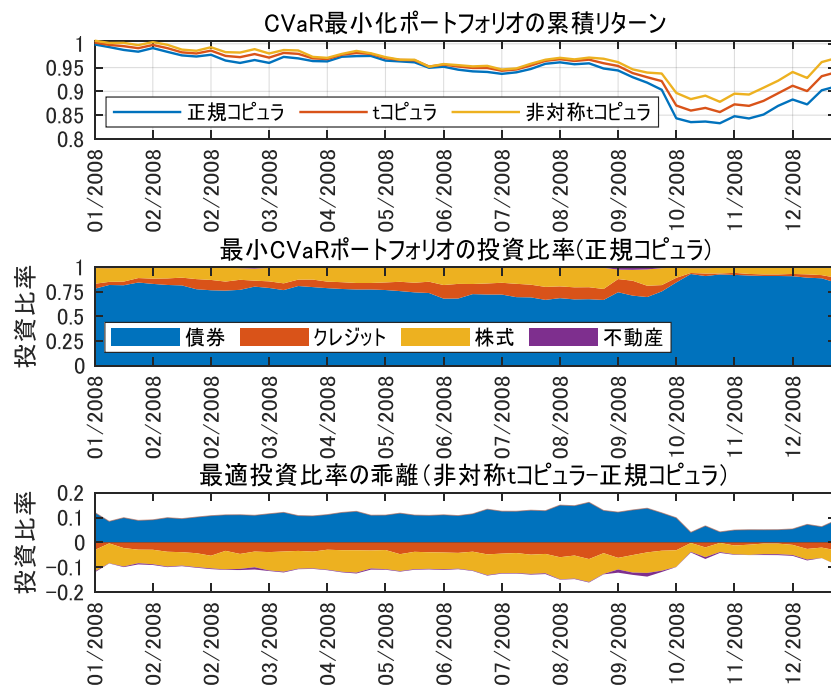


図 3.15: リーマン・ショック前後の最適投資比率および CVaR 最小化ポートフォリオの累積リターン  
 Notes: 最適投資比率の時系列推移の傾向(中段)は各コピュラで概ね同様であるため、正規コピュラのみ示した。最適投資比率の差分(下段)は、乖離が大きい非対称tコピュラと正規コピュラとの差分のみ示した。

クである債券の最適投資比率が上昇したと考えられる。また、CVaR 最小化問題の最適解は上述したように周辺分布の統計的特徴と分散投資効果から影響を受ける。テイルリスク顕在化局面では、前者の影響が高まり、コピュラ間の最適投資比率の乖離が縮小したと考えられる。これらの結果は、周辺モデルに時系列モデルを適用し、各資産の期待収益率や標準偏差の時系列変化を迅速に捉えたことが寄与していると解釈できる。一方、周辺モデルに採用した時系列モデルは、実現リターンに反応して期待収益率や標準偏差の変化を捕捉するため、特にテイルリスク顕在化局面の初期の影響には対応することができない。その結果、予め分布の裾での依存構造やその非対称性を捕捉していた非対称  $t$  コピュラが正規コピュラや  $t$  コピュラに対してリターンの悪化を抑制できたと考えられる。

以上の結果を踏まえると、分布の裾での依存構造やその非対称性を捕捉する非対称  $t$  コピュラを用いて CVaR 最小化ポートフォリオを構築することで、正規コピュラや  $t$  コピュラに比べてテイルリスク顕在化局面におけるリターンの悪化を抑制できると示唆される。

表 3.11: CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンス

Notes: 2007 年 1 月から 2020 年 12 月における CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンスをコピュラ毎に示した。リターンおよび下方偏差は年率換算後の数値である。

		非対称 $t$ コピュラ	$t$ コピュラ	正規 コピュラ
リターン	a	0.060	0.060	0.060
下方偏差	b	0.060	0.062	0.067
最大ドローダウン	c	0.159	0.180	0.203
ソルティノレシオ	a/b	1.004	0.968	0.900
カルマーレシオ	a/c	0.377	0.335	0.296

最後に、表 3.11 にはバックテスト期間における CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンスをコピュラ毎に示した。CVaR 最小化ポートフォリオがテイルリスクの抑制を目的としていることに鑑み、パフォーマンス指標には下方偏差対比のリターンを評価するソルティノレシオ (Sortino et al. (1999))、最大ドローダウン対比のリターンを評価するカルマーレシオ (Young (1991)) を採用した。なお、リターンおよび下方偏差 (Sortino et al. (1999)) は年率換算<sup>48)</sup>した数値である。

表 3.11 からは、コピュラ間で CVaR 最小化ポートフォリオのリターンに乖離はないことが読み取れる。また、下方偏差や最大ドローダウンについては、非対称  $t$  コピュラ、 $t$  コピュラ、正規コピュラの順に抑制されており、結果としてソルティノレシオおよびカル

<sup>48)</sup>下方偏差については、本章の分析対象データが週次データであることに鑑み、計測した値に  $\sqrt{52}$  を乗じた。

マーレシオは、非対称 $t$ コピュラが最も高く、正規コピュラが最も低いことが分かる。リーマン・ショック等のテイルリスク顕在化局面では、上述したように非対称 $t$ コピュラがローリスク・ローリターンである債券の最適投資比率を高位に保つことで正規コピュラや $t$ コピュラに比べてリターンの悪化の抑制に寄与する。一方、その他の平常局面においては、ハイリスク・ハイリターンである株式等のリターンが債券のリターンを上回る。図3.12から図3.14で示したように、ダイナミック・アセット・アロケーションでは、市場環境の趨勢的な変化を反映するため、平常局面が継続する際にはコピュラ間の最適投資比率の乖離が縮小する傾向にあるが、完全に乖離が無くならず、非対称 $t$ コピュラは他のコピュラに比べて債券の最適投資比率を高位に維持する。その結果、平常局面では正規コピュラや $t$ コピュラに比べて非対称 $t$ コピュラを用いた CVaR 最小化ポートフォリオのリターンが下回る。上述したダウンサイド顕在化局面の影響と平常局面の影響が作用し、コピュラ間のリターンに乖離が生じなかったと考えられる。一方、下方偏差や最大ドロウダウンは上述したダウンサイド顕在化局面の効果により非対称 $t$ コピュラが正規コピュラや $t$ コピュラに比べて抑制でき、非対称 $t$ コピュラのソルティノレシオやカルマーレシオは改善したと考えられる。なお、非対称 $t$ コピュラを適用することで CVaR 最小化ポートフォリオのソルティノレシオが正規コピュラや $t$ コピュラに比べて改善するという結果は、Zhou and Qin (2021) と整合的である。

以上の結果を踏まえると、非対称 $t$ コピュラを用いて CVaR 最小化ポートフォリオを構築することで、テイルリスク対比の投資効率性が改善すると示唆される。

### 3.5 終わりに

本章では、コピュラの違いがテイルリスクを考慮した資産配分に与える影響について研究した。コピュラには、近年注目されている非対称 $t$ コピュラと他の代表的な多変量コピュラである正規コピュラおよび $t$ コピュラを採用し、実証分析での分析対象データには実務において資産配分を検討する際に重要な資産である債券、クレジット、株式、不動産 (REIT) を採用した。そのうえで、(1) コピュラの違いが CVaR 制約付き期待収益率最大化問題の最適投資比率に与える影響、(2) コピュラの違いが CVaR 最小化問題の最適投資比率に与える影響、(3) コピュラ毎の CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンスに関する特徴について考察した。非対称 $t$ コピュラ (共通の歪度) の AIC は最も低く、同コピュラを用いることで AIC 規準の観点からデータへの適合度が改善したと考えられる。また、自由度および歪度の水準や標準誤差を踏まえると、実務上重要な資産間の依存構造について、分布の裾での依存構造が認められ、特に下落時に強まるといった非対称性が存在する

ことが示唆された。また、(1) から (3) の主要な研究課題については、以下の結果および示唆を得た。

- (1) CVaR 制約付き期待収益率最大化問題において、上述した資産間の依存構造の特徴を捕捉できない正規コピュラや  $t$  コピュラは非対称  $t$  コピュラに比して CVaR を小さく評価し CVaR 制約を満たす投資領域を広範囲に捉えることを明らかにした。その結果、ハイリスク・ハイリターンの資産の最適投資比率が高まること、その影響は CVaR の上限制約が緩くなることに伴い拡大することを明らかにし、非対称  $t$  コピュラを用いて最適資産配分を検討することの重要性を示した。
- (2) CVaR 最小化問題において、上述した資産間の依存構造の特徴を捕捉できない正規コピュラや  $t$  コピュラは非対称  $t$  コピュラに比して分布の裾での分散投資効果を大きく評価する結果、ハイリスク・ハイリターンの資産の最適投資比率が高まることを明らかにし、非対称  $t$  コピュラを用いて最適資産配分を検討することの重要性を示した。
- (3) コピュラ毎の CVaR 最小化ポートフォリオのパフォーマンスについて、リターンに差は生じない一方、下方偏差や最大ドローダウンは非対称  $t$  コピュラ、 $t$  コピュラ、正規コピュラの順に抑制されることを明らかにし、非対称  $t$  コピュラを用いた CVaR 最小化ポートフォリオの構築による、ソルティノレシオやカルマーレシオの改善を示した。

以上の研究結果を踏まえると、本章の実証分析で扱った資産のように分布の裾での依存構造が認められ、資産が共に下落する際に依存性がより強まるといった非対称性を有する場合には、非対称  $t$  コピュラを用いることでその特徴を考慮したテイルリスクの推定および資産配分の意思決定に繋がると示唆される。

# 第4章 ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いた新興国国債市場の依存構造の分析

## 4.1 はじめに

3章ではコピュラのパラメータは観測期間を通じて一定とした。一方、例えば金融資産間の相関は一定ではなく、投資家の日々のセンチメントの変化などとともに変動していると考えられる。実際、Cherubini et al. (2011)をはじめ多くの先行研究では依存構造の時変性が指摘され、その対応として相関行列にDCC等を適用したダイナミックコピュラがこれまで提案されてきた。ダイナミックコピュラを活用する利点は相関の短期的な変動と、相関の変動のみでは捉えきれない分布の裾での依存構造に関する統計的特徴をともに捕捉できる点である。非対称 $t$ コピュラの相関行列にDCCを適用したダイナミック非対称 $t$ コピュラに関する初期の先行研究としてはChristoffersen et al. (2012)が挙げられる。その後、Aielli (2013)はDCCモデルが無条件分散共分散にバイアスを齎すことを指摘し、この点を修正したcDCCを提案した。無条件分散共分散行列の一致性を担保しつつ、相関の時変性と分布の裾での依存構造を捕捉し、ポートフォリオ最適化等に应用するためには、cDCCと整合的なダイナミック非対称 $t$ コピュラの構築が必要である。

新興国国債市場は、リーマン・ショック以降の先進国国債利回りの低下に伴い、投資家から注目される機会が高まった。新興国国債に投資する際には為替変動リスクをヘッジするか否かを判断する必要がある<sup>49)</sup>。為替変動リスクをヘッジしない場合は、債券の収益率に為替変動による収益率も加わるため、追加的な収益を獲得できる可能性がある。一方、新興国通貨の変動率は先進国通貨や新興国国債に比べて大きく、為替変動リスクのヘッジの有無によって収益率の依存構造に関する統計的特徴が異なり、ポートフォリオのパフォーマンスに影響を齎すと考えられる。実際、2013年のバーナンキ・ショック<sup>50)</sup>の際

<sup>49)</sup>先進国国債の場合は債券先物の取引も検討できるため、必ずしも為替ヘッジ有無の判断が必要にはならない。一方、新興国国債は先物が取引できないことが殆どである。

<sup>50)</sup>2013年5月および6月に開催された米連邦公開市場委員会(FOMC)後に、ベン・バーナンキFRB議

には、それまで比較的安定していた新興国国債や新興国通貨のパフォーマンスが一斉に悪化した。このように、為替変動リスクをヘッジしない場合、ヘッジする場合に比べて相関や分布の裾での依存構造が強まり、ポートフォリオの耐性が弱まることが懸念される。こうした影響を定量的に把握しポートフォリオ運用に応用するためには、新興国国債の依存構造の統計的特徴やコピュラの違いがポートフォリオのパフォーマンスに与える影響について、為替ヘッジを行う場合と行わない場合で比較する必要がある。特に、相関の短期的な変動に加えて分布の裾での依存構造を捕捉することによる、ポートフォリオのパフォーマンスの改善可能性については、本章で構築するダイナミック非対称 $t$ コピュラとこれまで活用されてきたダイナミック正規コピュラを用いた比較分析により実証可能である。

以上の背景を踏まえ本章では、cDCCと統合的なダイナミック非対称 $t$ コピュラを構築する。そのうえで、新興国国債市場の依存構造を捕捉し、(1) 相関の時系列推移の特徴、(2) 分布の裾での依存構造の有意性と特徴、(3) コピュラの違いと新興国国債ポートフォリオのパフォーマンス、(4) Martellini and Ziemann (2010) の高次モーメントを用いたポートフォリオと最小分散ポートフォリオのパフォーマンスの比較について、為替変動リスクのヘッジの有無による影響を勘案し考察する<sup>51)</sup>。

本章の構成は次のとおりである。4.2節では本章で導入するダイナミック非対称 $t$ コピュラについて述べる。4.3節では周辺モデルやコピュラの推定結果、4.4節では高次モーメントを用いた最適資産配分に関する分析結果を考察する。4.5節では結論を述べる。

## 4.2 ダイナミック非対称 $t$ コピュラ

本節ではダイナミック非対称 $t$ コピュラ、パラメータの推定方法の順に記載する。

### 4.2.1 モデルの概要

本項では非対称 $t$ コピュラについて再掲した後、ダイナミック非対称 $t$ コピュラについて記載する。

---

長が量的緩和の縮小・引き締めを行う方針であるとの発言をしたことで生じた世界金融市場の動揺のこと。米国の資金供給量が絞られる懸念から、米国金利が上昇したほか、新興国からの資金流出懸念により、新興国通貨は総じて減価し、新興国の株式市場や国債市場のパフォーマンスも急激に悪化した。

<sup>51)</sup> 新興国国債市場の依存構造を考察した先行研究としては、Kim et al. (2006), Bunda et al. (2009), Plijak (2013), Miyajima et al. (2015), Ortiz et al. (2016), Plijak and Swinkels (2017) 等が挙げられる。これらの先行研究では為替変動リスクのヘッジの有無による影響やコピュラの違いとポートフォリオのパフォーマンスの関係性は考察されていない。

式(2.9)の Demarta and McNeil (2005) の非対称  $t$  コピュラ  $C^{st}$  は,  $\Sigma$  を相関行列, パラメータを  $\mathbf{v}$  を自由度,  $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  を歪度ベクトルとし, 1変量一般化双曲型非対称  $t$  分布関数の逆関数 (分位点関数)  $ST_1^{-1}(\cdot; \mathbf{v}, \gamma_i) (i = 1, \dots, n)$  と  $n$ 変量一般化双曲型非対称  $t$  分布関数  $ST_n(\cdot; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})$  を用いると式(4.1)で表される.

$$C^{st}(\mathbf{u}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = ST_n(ST_1^{-1}(u_1; \mathbf{v}, \gamma_1), \dots, ST_1^{-1}(u_n; \mathbf{v}, \gamma_n); \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (4.1)$$

ここで,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)'$  である. また,  $n$ 変量一般化双曲型非対称  $t$  分布関数  $ST_n(\mathbf{y}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})$  はその密度関数  $st_n(\mathbf{x}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})$  を用いて, 以下の式で与えられる.

$$ST_n(\mathbf{y}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_n} st_n(\mathbf{x}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) dx_1 \dots dx_n, \quad (4.2)$$

$$st_n(\mathbf{x}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{2^{\frac{2-(\mathbf{v}+n)}{2}} \Upsilon_{\frac{\mathbf{v}+n}{2}}(\eta(\mathbf{x}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})) \exp(\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right) (\pi\mathbf{v})^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\Sigma|} \eta(\mathbf{x}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})^{-\frac{\mathbf{v}+n}{2}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{v}}\right)^{\frac{\mathbf{v}+n}{2}}}. \quad (4.3)$$

ここで,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ ,  $\eta(\mathbf{x}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = \sqrt{(\mathbf{v} + \mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x})\boldsymbol{\gamma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma}}$  である. また,  $\Upsilon(\cdot; \mathbf{v})$  は第3種の修正ベッセル関数を表す.

非対称  $t$  コピュラの密度関数  $c^{st}(\mathbf{u}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})$  は, 式(2.2)と上述した式(4.1), (4.2), (4.3)から, 次のように計算される.

$$c^{st}(\mathbf{u}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{\partial^n C^{st}(\mathbf{u}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = \frac{st_n(\boldsymbol{\xi}; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})}{\prod_{i=1}^n st_1(\xi_i; \mathbf{v}, \gamma_i)}. \quad (4.4)$$

ただし,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)'$ ,  $\xi_i = ST_1^{-1}(u_i; \mathbf{v}, \gamma_i)$  である. したがって, 観測時点数を  $S$  個とした時, 非対称  $t$  コピュラの対数尤度関数  $L^{st}(\Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})$  は式(4.5)で表される.

$$\begin{aligned} L^{st}(\Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) &= \sum_{s=1}^S l_s^{st}(\Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) \\ &= S \frac{(\mathbf{v}-2)(n-1)}{2} \ln 2 - S(1-n) \ln \Gamma\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right) - \frac{S}{2} \ln |\Sigma| \\ &+ \sum_{s=1}^S \left\{ \ln \Upsilon_{\frac{\mathbf{v}+n}{2}}(\eta(\boldsymbol{\xi}_s; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma})) + \boldsymbol{\xi}_s' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\gamma} + \left(\frac{\mathbf{v}+n}{2}\right) \left( \ln \eta(\boldsymbol{\xi}_s; \Sigma, \mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) - \ln \left(1 + \frac{\boldsymbol{\xi}_s' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\xi}_s}{\mathbf{v}}\right) \right) \right\} \\ &+ \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\mathbf{v}+1}{2}\right) \left( \left(1 + \frac{\xi_{s,i}^2}{\mathbf{v}}\right) - \sqrt{\gamma_i^2 (\mathbf{v} + \xi_{s,i}^2)} \right) - \Upsilon_{\frac{\mathbf{v}+1}{2}} \left( \sqrt{\gamma_i^2 (\mathbf{v} + \xi_{s,i}^2)} \right) - \gamma_i \xi_{s,i} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで,  $\boldsymbol{\xi}_s = (\xi_{s,1}, \dots, \xi_{s,n})'$ ,  $\xi_{s,i} = ST_1^{-1}(u_{s,i}; \mathbf{v}, \gamma_i)$  である.

本章では、上述の非対称  $t$  コピュラにおける相関行列  $\Sigma$  に対して Aielli (2013) の cDCC を仮定したダイナミック非対称  $t$  コピュラを導入する。ダイナミック非対称  $t$  コピュラを初期に扱った Christoffersen et al. (2012) は相関行列が Engle (2002) の DCC に従うよう拡張しているが、DCC の修正として cDCC で示されたショックの分散調整が明示されておらず、相関行列の一致性が保たれていない可能性がある。本項では、cDCC と整合的なダイナミック非対称  $t$  コピュラの相関行列の変動構造を明示する<sup>52)</sup>。

ダイナミック非対称  $t$  コピュラの相関行列  $\Sigma_s$  に関する変動過程は、式 (4.6), (4.7) で表される。

$$\Sigma_s = \text{diag}(\mathbf{Q}_s)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_s \text{diag}(\mathbf{Q}_s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Q}_s = \tilde{\mathbf{Q}}(1 - \alpha - \beta) + \alpha \Psi(\boldsymbol{\xi}_{s-1}, \mathbf{Q}_{s-1}) + \beta \mathbf{Q}_{s-1}. \quad (4.7)$$

ここで、本章では  $\Psi(\boldsymbol{\xi}_{s-1}, \mathbf{Q}_{s-1})$  を cDCC と整合的になるよう次式のように導入した。

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}_{s-1}, \mathbf{Q}_{s-1}) := \text{diag}(\mathbf{Q}_{s-1})^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\nu-2}{\nu} \left( \left( \boldsymbol{\xi}_{s-1} - \frac{\nu}{\nu-2} \boldsymbol{\gamma} \right) \left( \boldsymbol{\xi}_{s-1} - \frac{\nu}{\nu-2} \boldsymbol{\gamma} \right)' - \frac{2\nu^2 \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}'}{(\nu-2)^2(\nu-4)} \right) \right) \text{diag}(\mathbf{Q}_{s-1})^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

$\boldsymbol{\xi}_s = (\xi_{s,1}, \dots, \xi_{s,n})'$  は、一般双曲型非対称  $t$  分布に従う確率変数ベクトルであり、形状パラメータが  $\mathbf{1}$ 、尺度パラメータが  $\mathbf{0}$  であるガンマ分布を  $\mathcal{G}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ 、平均  $\mathbf{0}$ 、相関行列  $\Sigma_s$  の  $n$  変量標準正規分布を  $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{0}, \Sigma_s)$ 、歪度パラメータのベクトルを  $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  とする時、式 (4.9) のように定義する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_s &= \boldsymbol{\gamma} V^{-1} + \frac{\mathbf{Z}_s}{\sqrt{V}}, \\ V &\sim \mathcal{G}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \\ \mathbf{Z}_s &\sim \mathcal{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{0}, \Sigma_s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

この時、確率変数  $\boldsymbol{\xi}_s$  は、分布関数 (4.2)、密度関数 (4.3) に従う。また、 $\xi_{s,i}$  は自由度  $\nu$ 、歪度パラメータ  $\gamma_i$  の 1 変量一般双曲型非対称  $t$  分布に従う。以下では式 (4.8) が cDCC と整合的となることを確認する。

まず、Demarta and McNeil (2005) に従うと、式 (4.9) をもとに  $\boldsymbol{\xi}_s$  の平均および共分散

<sup>52)</sup>本項は夷藤・中村 (2019) を基にしているが、cDCC と整合的なダイナミック非対称  $t$  コピュラの変動過程は Fortin et al. (2022) でも記載されている。



はそれぞれ次式のとおり記述される。

$$E[\xi_s] = E[E[\xi_s|V]] = \frac{v}{v-2}\gamma, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\xi_s|Q_s] &= E[\text{var}[\xi_s|V, Q_s]] + \text{var}[E[\xi_s|V]] \\ &= \frac{v}{v-2}\Sigma_s + \frac{2v^2\gamma\gamma'}{(v-2)^2(v-4)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

次に式 (4.6), (4.8), (4.10), (4.11) から, (4.12) が成り立つ。

$$\begin{aligned} E[\Psi(\xi_{s-1}, Q_{s-1})|Q_{s-1}] &= \text{diag}(Q_{s-1})^{\frac{1}{2}} \left( \frac{v-2}{v} \left( \text{Cov}[\xi_{s-1}|Q_{s-1}] - \frac{2v^2\gamma\gamma'}{(v-2)^2(v-4)} \right) \right) \text{diag}(Q_{s-1})^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{diag}(Q_{s-1})^{\frac{1}{2}} \Sigma_{s-1} \text{diag}(Q_{s-1})^{\frac{1}{2}} \\ &= Q_{s-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

したがって式 (4.7), (4.12) から式 (4.13) が成り立つ。

$$E[Q_s|Q_{s-1}] = \tilde{Q}(1 - \alpha - \beta) + (\alpha + \beta)Q_{s-1}. \quad (4.13)$$

よって式 (4.13) の期待値をとると, 次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E[Q_s] &= E[E[Q_s|Q_{s-1}]] \\ &= \tilde{Q} + (\alpha + \beta)(E[Q_{s-1}] - \tilde{Q}). \end{aligned}$$

これより,  $Q_1 = \tilde{Q}$  とすれば  $s = 2, 3, \dots$  に対して  $E[Q_s] = \tilde{Q}$  が成り立つ。以上から, 相関行列の一致性が保たれることが示された。

なお, 時点  $s$  を初期時点  $s = 1$  から進めた場合の相関行列  $\Sigma_s$  の遷移を以下に記載する。

- 1 cDCC の仮定から  $Q_1 = \tilde{Q}$  であり, 式 (4.6) から  $\Sigma_1$  が定まる。この時,  $\xi_1$  は  $\Sigma_1, v, \gamma$  を用いた  $n$  変量一般化双曲型非対称  $t$  分布に従う確率変数である。
- 2 次に観測データ<sup>53)</sup>  $u_1 = (u_{1,1}, \dots, u_{1,n})$  が与えられれば,  $\xi_{1,i} = ST_1^{-1}(u_{1,i}; v, \gamma_i) (i = 1, \dots, n)$  から  $\xi_1$  が定まり, 式 (4.7), (4.8) から  $Q_2$  が定まる。
- 3 次に  $Q_2$  と式 (4.6) から  $\Sigma_2$  が定まる。ここで,  $\xi_1$  が確率変数であることから  $Q_2$  と  $\Sigma_2$  も確率的である。この時,  $\xi_2$  は  $\Sigma_2, v, \gamma$  を用いた  $n$  変量一般化双曲型非対称  $t$  分布に従う確率変数である。したがって,  $\xi_2$  の共分散は式 (4.11) のとおり  $Q_2$  の条件付き共分散となる。

<sup>53)</sup>各周辺モデルの標準化残差を同残差に仮定したパラメトリックな分布関数で変換した一様分布の多変量データである。

4 次に観測データ  $\mathbf{u}_2 = (u_{2,1}, \dots, u_{2,n})$  が与えられれば,  $\xi_{2,i} = ST_1^{-1}(u_{2,i}; \mathbf{v}, \gamma_i) (i = 1, \dots, n)$  から  $\xi_2$  が定まり, 式 (4.7), (4.8) から  $\mathbf{Q}_3$  が定まる.

5 次に  $\mathbf{Q}_3$  と式 (4.6) から  $\Sigma_3$  が定まる. 以降は同様の手順である.

## 4.2.2 パラメータの推定方法

ダイナミック非対称  $t$  コピュラのパラメータは IFM 法により最尤推定する<sup>54)</sup>. ダイナミック非対称  $t$  コピュラでは非対称  $t$  コピュラの相関行列が式 (4.6), (4.7), (4.8) によって変動する. 観測時点数を  $S$  個とした時, 対数尤度関数  $L^{dst}(\tilde{\mathbf{Q}}, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \gamma)$  は式 (4.14) で表される.

$$\begin{aligned}
& L^{dst}(\tilde{\mathbf{Q}}, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \gamma) \\
&= \sum_{s=1}^S l_s^{dst}(\tilde{\mathbf{Q}}, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \gamma) \\
&= S \frac{(\mathbf{v}-2)(n-1)}{2} \ln 2 - S(1-n) \ln \Gamma\left(\frac{\mathbf{v}}{2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \ln |\Sigma_s| \\
&+ \sum_{s=1}^S \left\{ \ln \Upsilon_{\frac{\mathbf{v}+n}{2}}(\eta(\xi_s; \Sigma_s, \mathbf{v}, \gamma)) + \xi_s' \Sigma_s^{-1} \gamma \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mathbf{v}+n}{2}\right) \left( \ln(\eta(\xi_s; \Sigma_s, \mathbf{v}, \gamma)) - \ln \left(1 + \frac{\xi_s' \Sigma_s^{-1} \xi_s}{\mathbf{v}}\right) \right) \right\} \\
&+ \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\mathbf{v}+n}{2}\right) \left( \left(1 + \frac{\xi_{s,i}^2}{\mathbf{v}}\right) - \sqrt{\gamma_i^2 (\mathbf{v} + \xi_{s,i}^2)} \right) - \Upsilon_{\frac{\mathbf{v}+1}{2}} \left( \sqrt{\gamma_i^2 (\mathbf{v} + \xi_{s,i}^2)} \right) - \gamma_i \xi_{s,i} \right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで,  $\xi_s = (\xi_{s,1}, \dots, \xi_{s,n})'$ ,  $\xi_{s,i} = ST_1^{-1}(u_{s,i}; \mathbf{v}, \gamma_i)$  であり, 式 (4.14) 中の  $\Sigma_s$  のダイナミクスは式 (4.6), (4.7), (4.8) を通じ, パラメータ  $\tilde{\mathbf{Q}}, \alpha, \beta$  を最尤法<sup>55)</sup> で求めることで定められる.

<sup>54)</sup> 比較対象とするダイナミック  $t$  コピュラ, ダイナミック正規コピュラも同様に IFM 法を適用する.

<sup>55)</sup> Aielli (2013) に従って  $\tilde{\mathbf{Q}}$  も求めている.

## 4.3 新興国国債の依存構造の特徴分析

本節では、分析対象データ、周辺モデルの推定結果、コピュラの推定結果の順に説明する。

### 4.3.1 分析対象データ

分析対象データの採用インデックスと統計値を表4.1、表4.2に示した<sup>56)</sup>。分析対象はメキシコ、マレーシア、トルコ、ポーランドの自国通貨建て国債のリターンデータである。観測期間は2011年4月4日から2017年3月31日、観測頻度は日次、観測時点数は1553個である。国債インデックスには表4.1、表4.2に示したシティグループの債券インデックスを採用した。上述した4か国の国債は、代表的な自国通貨建て新興国国債インデックス「JPモルガン・ガバメント・ボンド・インデックス-エマージング・マーケット」を構成する主要な国債である<sup>57)</sup>。

新興国国債は、新興国が先進国市場において米ドル等主要国通貨建てによって発行した国債と、新興国が自国市場において自国通貨建てによって発行した債券に分類される。1990年代までは主要国通貨建ての新興国国債が中心であった。しかしながら、2000年以降新興国のファンダメンタルズの改善等を背景に自国通貨建て国債の発行額が増加したため、現在は自国通貨建て新興国国債の残高が主要国通貨建ての新興国国債を上回る状況にある。本章では以上の点に鑑み自国通貨建ての新興国国債市場を分析対象とした。

また、自国通貨建て新興国国債への投資を念頭に置いた場合、為替変動リスクをヘッジするか否かについて意思決定する必要がある<sup>58)</sup>。この意思決定はパフォーマンスに影響を与えることから、為替変動リスクをヘッジ有無によって新興国国債間の依存構造に違いがあるか否かを把握することも重要である。したがって、本章では表4.1の米ドルベース（為替ヘッジ無）と表4.2の米ドルベース（為替ヘッジ有）の2通りで分析を行う<sup>59)</sup>。

<sup>56)</sup>表4.1、表4.2では本章でのデータの表記方法も記載した。本節以降はその表記方を用いて分析結果を考察する。

<sup>57)</sup>同インデックスは、中南米、欧州、アジア、中東・アフリカの4カテゴリから構成され、中南米カテゴリではメキシコ、欧州カテゴリではポーランド、アジアカテゴリではマレーシアが各々最も構成比率が高い。また、中東・アフリカカテゴリでは南アフリカに次いでトルコの構成比率が高い。このことから、採用する4か国の国債インデックスの新興国国債市場におけるプレゼンスを確認できる。

<sup>58)</sup>為替変動リスクのヘッジは為替予約を通じて行われることは3.1.1項に記した。ヘッジしない場合は債券のリターンに為替の変動率が含まれ、ヘッジした場合は投資対象国の金利と自国の金利の差分がヘッジのコストとして債券のリターンから控除される点が両者の違いである。

<sup>59)</sup>米ドルベース（為替ヘッジ無）は、米ドルと各新興国通貨の為替レートをを用いて米ドルベースに換算したものである。米ドルベース（為替ヘッジ有）は、自国通貨建て債券に1ヵ月の為替予約によるローリング・ヘッジを行うことで、為替変動リスクをヘッジした米ドルベースのものである。具体的な計算方法には「シティ債券インデックス（インデックス・カタログ）」を参照されたい。

表 4.1: 分析対象データ (米ドルベース (為替ヘッジ無))

対象国	採用インデックス	表記方法	平均	標準偏差	歪度	尖度
メキシコ	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ無) メキシコ国債インデックス	MX	0.00001	0.0093	-0.881	12.27
マレーシア	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ無) マレーシア国債インデックス	MY	-0.00009	0.0053	0.420	7.44
トルコ	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ無) トルコ国債インデックス	TR	-0.00022	0.0096	-0.185	6.04
ポーランド	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ無) ポーランド国債インデックス	PL	0.00004	0.0089	-0.155	5.65

表 4.2: 分析対象データ (米ドルベース (為替ヘッジ有))

対象国	採用インデックス	表記方法	平均	標準偏差	歪度	尖度
メキシコ	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ有) メキシコ国債インデックス	MX-CH	0.00016	0.0032	-0.355	8.49
マレーシア	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ有) マレーシア国債インデックス	MY-CH	0.00005	0.0010	-0.943	11.73
トルコ	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ有) トルコ国債インデックス	TR-CH	0.00002	0.0038	-0.376	7.64
ポーランド	Citi自国通貨建て (米ドルベース, ヘッジ有) ポーランド国債インデックス	PL-CH	0.00013	0.0019	-0.452	6.35

表4.1, 表4.2の統計値から標準偏差は米ドルベース（為替ヘッジ無）ではMY, 米ドルベース（為替ヘッジ有）ではMY-CHが低いことが分かる。また, MYを除くすべての資産の歪度がマイナスであること, 全ての資産の尖度が正規分布に比べて大きいことが読み取れる。

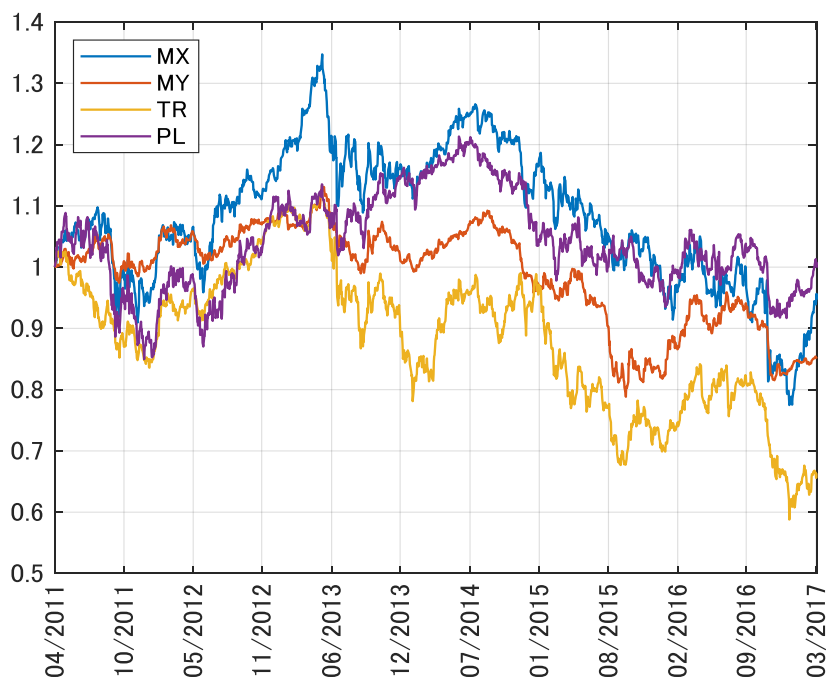


図 4.1: 分析対象データの累積リターン（米ドルベース（為替ヘッジ無））

Notes: 2011年4月1日を1（単位は日本円）とし, 分析対象期間である2017年3月31日までの累積リターンを示した。

分析対象データの累積リターンについて米ドルベース（為替ヘッジ無）を図4.1, 米ドルベース（為替ヘッジ有）を図4.2に示した。2011年以降の新興国国債市場は, 複数の主要先進国で金融緩和が行われたことに伴い投資家のリスク許容度が高まり, 高利回りを確保できる新興国国債市場に資金が流入した。その結果パフォーマンスは趨勢的な上昇を続けた。その後, 2013年5月に生じたバーナンキ・ショックにより新興国からの資金流出が懸念され, 新興国国債市場のパフォーマンスは総じて悪化した。しかしながら, その後はファンダメンタルズの改善等によりパフォーマンスが好転し, 再び上昇局面を迎えている時期に該当する。

このように, 新興国国債市場は一時的なりリスク回避局面を経験しつつも趨勢的に上昇してきた。一方, 新興国通貨は, 2014年以降米国が量的緩和の縮小や政策金利の引き上げを行う中で対米ドルで下落した。その結果, 米ドルベース（為替ヘッジ無）のパフォーマ

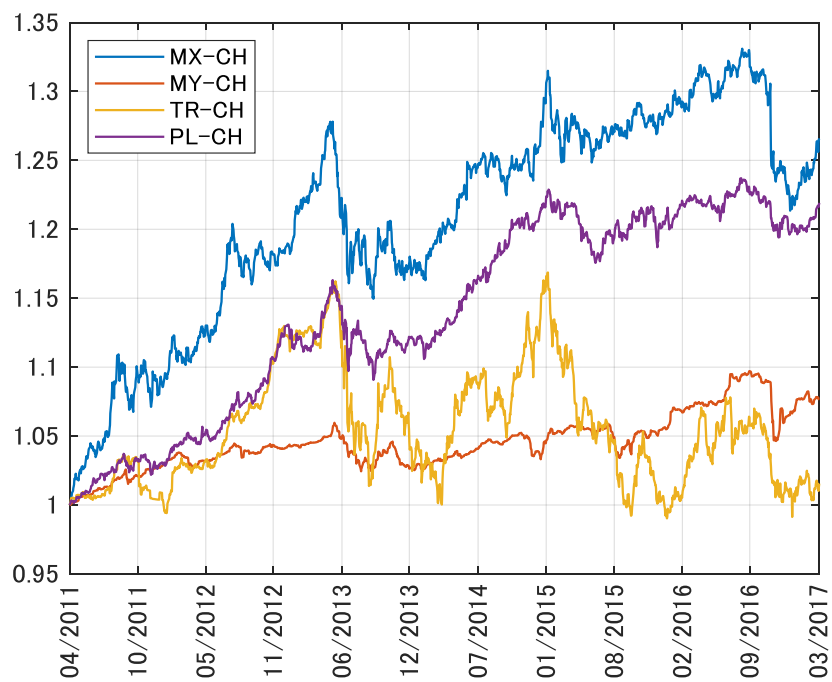


図 4.2: 分析対象データの累積リターン (米ドルベース (為替ヘッジ有))

Notes: 2011年4月1日を1 (単位は日本円) とし, 分析対象期間である2017年3月31日までの累積リターンを示した.

ンスは米ドルベース（為替ヘッジ有）に比して悪化している。

### 4.3.2 周辺モデルの推定結果

周辺モデルの推定手順は3章と同様である。各資産のリターンデータに対する時系列モデルは式(2.11)で与える。式(2.11)における条件付き期待収益率  $\mu_{s|s-1,i}$  の時系列構造はARMAモデルを、条件付き分散（標準偏差） $\sigma_{s|s-1,i}^2$  の時系列モデルはGARCHモデルを適用する。また、誤差項  $\varepsilon_{s,i}$  の分布には、正規分布、 $t$ 分布と、Jondeau and Rockinger (2006)等に倣いHansen (1994)の非対称 $t$ 分布を採用する。モデルのパラメータは最尤法によって推定し、AIC規準によりモデルを採択する。なお、推定に際しては、AR項の次数は1または2、MA項の次数は0から2まで、GARCH項の次数は(1,1)とする<sup>60)</sup>。また、非対称 $t$ 分布を誤差項分布に適用する場合、AR項の次数は1、MA項の次数は0または1とする<sup>61)</sup>。

表 4.3: 周辺モデルの推定結果

Notes: 表にはAIC規準によって選択されたモデルと、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」に対するコルモゴロフ-スミルノフ検定の結果(p値)を併記した。なお、全ての資産について有意水準5%で帰無仮説が棄却されなかった。

	MX	MY	TR	PL
AIC規準で選択されたモデル	AR(1) +MA(1) +GARCH(1,1) +Skewed-t ( $\nu=5.35, \lambda=-0.058$ )	AR(1) +MA(1,2) +GARCH(1,1) +t ( $\nu=5.03$ )	AR(1) +GARCH(1,1) +Skewed-t ( $\nu=6.78, \lambda=-0.096$ )	AR(1) +MA(1) +GARCH(1,1) +Skewed-t ( $\nu=6.38, \lambda=-0.045$ )
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果(P値)	0.9512	0.8711	0.9239	0.9200
	MX-CH	MY-CH	TR-CH	PL-CH
AIC規準で選択されたモデル	AR(1) +MA(1,2) +GARCH(1,1) +t ( $\nu=7.38$ )	AR(1) +GARCH(1,1) +t ( $\nu=2.36$ )	AR(1) +MA(1) +GARCH(1,1) +t ( $\nu=4.14$ )	AR(1,2) +MA(1) +GARCH(1,1) +t ( $\nu=6.03$ )
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果(P値)	0.9609	0.7655	0.6458	0.8711

<sup>60)</sup>GARCH項に関する次数を増加させても、モデルの精度が大きく向上しないことを事前に確認したこと、Hansen (1994)に記されているように、GARCHモデルに関しては、GARCH(1,1)が選択されることが多く、天下りのGARCH(1,1)を適用する先行研究が多数あることを勘案し、既述の取扱いとした。

<sup>61)</sup>同分布を適用する際、モデルのパラメータ数を増加させると、推定精度が安定しないため、既述の取扱いとする。

周辺モデルの推定結果を表4.3に示した。表4.3からは、誤差項分布について米ドルベース（為替ヘッジ無）ではMYを除く全ての資産で非対称 $t$ 分布が選択され、非対称 $t$ 分布の歪度はマイナスであることを確認できる。したがって、これらの資産の誤差項分布はファットテイルであり、全ての資産ではマイナス方向に裾の長い歪みを有することが分かる。一方、米ドルベース（為替ヘッジ有）では全ての資産で $t$ 分布が選択されることを確認できる。したがって、これらの資産の誤差項分布はファットテイルであるものの、歪みは生じていないことが分かる。また、残差についてコルモゴロフ-スミルノフ検定を行った結果からは、全てのデータが有意水準5%において、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」が棄却されないことを確認できる。

### 4.3.3 コピュラの推定結果

コピュラの推定結果について米ドルベース（為替ヘッジ無）を表4.4、米ドルベース（為替ヘッジ有）を表4.5に示した。コピュラの候補はダイナミック非対称 $t$ コピュラ、ダイナミック $t$ コピュラ、ダイナミック正規コピュラである。ダイナミック非対称 $t$ コピュラについては歪度 $\gamma_i (i=1, \dots, 4)$ が全て等しいと仮定した場合を「共通の歪度」、異なると仮定した場合を「個別の歪度」と表記した。

米ドルベース（為替ヘッジ無）についてAICが最も小さいコピュラはダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度）である。2番目にAICが低いコピュラはダイナミック非対称 $t$ コピュラ（個別の歪度）、3番目はダイナミック $t$ コピュラである。AICが最も大きいコピュラはダイナミック正規コピュラである。また、全てのパラメータについて有意水準5%で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された。一方、米ドルベース（為替ヘッジ有）についてAICが最も小さいコピュラはダイナミック $t$ コピュラである。2番目にAICが低いコピュラはダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度）、3番目はダイナミック非対称 $t$ コピュラ（個別の歪度）である。AICが最も大きいコピュラはダイナミック正規コピュラである。また、パラメータの有意性についてダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度、個別の歪度）、ダイナミック正規コピュラのcDCCの $\alpha$ ダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度、個別の歪度）の歪度は有意水準5%で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却されなかった。上述した結果を踏まえると、米ドルベース（為替ヘッジ無）は分布の裾での依存構造やその非対称性が有意であるため、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて依存構造を捉えることで、AIC規準の観点からデータへの適合度がダイナミック $t$ コピュラ、ダイナミック正規コピュラに比べて改善することが示唆される。一方、米ドルベース（為替ヘッジ有）は分布の裾での依存構造は有意であるが、その非対称性は



表 4.4: コピュラの推定結果 (米ドルベース (為替ヘッジ無))

Notes: AIC 規準で選択されたモデルについては、「AIC」部分を網掛け (灰色) とした。非対称  $t$  コピュラについては歪度が全て等しいと仮定した場合を「共通の歪度」、異なると仮定した場合を「個別の歪度」と表記した。なお、括弧内の数値は標準誤差であり、全てのパラメータについて有意水準 5% で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された。

	AIC	cDCC						$\alpha$	$\beta$	自由度 $\nu$	歪度 $\gamma$			
		$\rho$		MY TR	MY PL	TR PL	MX				MY	TR	PL	
		MX MY	MX TR											
ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ (共通の歪度)	-1,687.2	0.324 (0.032)	0.567 (0.032)	0.521 (0.037)	0.283 (0.064)	0.341 (0.034)	0.589 (0.036)	0.014 (0.004)	0.970 (0.012)	10.749 (0.138)	-	-	-0.189 (0.010)	-
ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ (個別の歪度)	-1,684.1	0.329 (0.024)	0.572 (0.025)	0.524 (0.025)	0.283 (0.028)	0.343 (0.026)	0.592 (0.022)	0.014 (0.003)	0.970 (0.010)	10.886 (0.187)	-0.077 (0.034)	-0.240 (0.061)	-0.312 (0.062)	-0.162 (0.040)
ダイナミック $t$ コピュラ	-1,681.2	0.326 (0.015)	0.569 (0.058)	0.524 (0.016)	0.288 (0.101)	0.344 (0.062)	0.591 (0.041)	0.011 (0.005)	0.971 (0.025)	10.706 (0.264)	-	-	-	-
ダイナミック 正規コピュラ	-1,595.3	0.325 (0.061)	0.557 (0.021)	0.520 (0.022)	0.285 (0.090)	0.337 (0.033)	0.566 (0.036)	0.015 (0.004)	0.970 (0.010)	-	-	-	-	-

表 4.5: コピュラの推定結果 (米ドルベース (為替ヘッジ有))

Notes: AIC 規準で選択されたモデルについては、「AIC」部分を網掛け (灰色) とした. 非対称  $t$  コピュラについては歪度が全て等しいと仮定した場合を「共通の歪度」、異なると仮定した場合を「個別の歪度」と表記した. なお、括弧内の数値は標準誤差であり、ダイナミック非対称  $t$  コピュラ (共通の歪度、個別の歪度)、ダイナミック正規コピュラの cDCC の  $\alpha$  とダイナミック非対称  $t$  コピュラ (共通の歪度、個別の歪度) の歪度を除く全てのパラメータについて有意水準 5% で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された.

	AIC	cDCC						$\alpha$	$\beta$	自由度 $\nu$	歪度 $\gamma$			
		MX-CH		MY-CH		TR-CH								
		MX-CH	MY-CH	MX-CH	MY-CH	MX-CH	MY-CH				MX-CH	MY-CH	TR-CH	PL-CH
		MY-CH	TR-CH	PL-CH	TR-CH	PL-CH	PL-CH							
ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ (共通の歪度)	-375.7	0.075 (0.030)	0.239 (0.032)	0.282 (0.028)	0.123 (0.027)	0.095 (0.035)	0.302 (0.054)	0.014 (0.015)	0.885 (0.160)	29.922 (0.336)				-0.004 (0.132)
ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ (個別の歪度)	-369.9	0.075 (0.035)	0.239 (0.038)	0.282 (0.028)	0.124 (0.029)	0.095 (0.039)	0.302 (0.057)	0.014 (0.007)	0.885 (0.215)	29.872 (0.462)	-0.066 (0.322)	0.054 (0.398)	-0.053 (0.781)	0.019 (0.785)
ダイナミック $t$ コピュラ	-377.7	0.075 (0.033)	0.239 (0.027)	0.282 (0.025)	0.123 (0.026)	0.095 (0.021)	0.302 (0.022)	0.013 (0.005)	0.885 (0.038)	29.917 (0.017)	-	-	-	-
ダイナミック 正規コピュラ	-369.7	0.074 (0.035)	0.237 (0.030)	0.286 (0.023)	0.125 (0.039)	0.095 (0.028)	0.301 (0.022)	0.013 (0.009)	0.895 (0.102)	-	-	-	-	-

有意ではないため、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いてもダイナミック $t$ コピュラ対比ではAIC規準の観点からデータへの適合度が改善しないと示唆される<sup>62)</sup>。なお、米ドルベース（為替ヘッジ無）と米ドルベース（為替ヘッジ有）のどちらの場合でも、ダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度）のAICがダイナミック非対称 $t$ コピュラ（個別の歪度）よりも低い。したがって、以下でダイナミック非対称 $t$ コピュラに言及する際はダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度）に限定する。

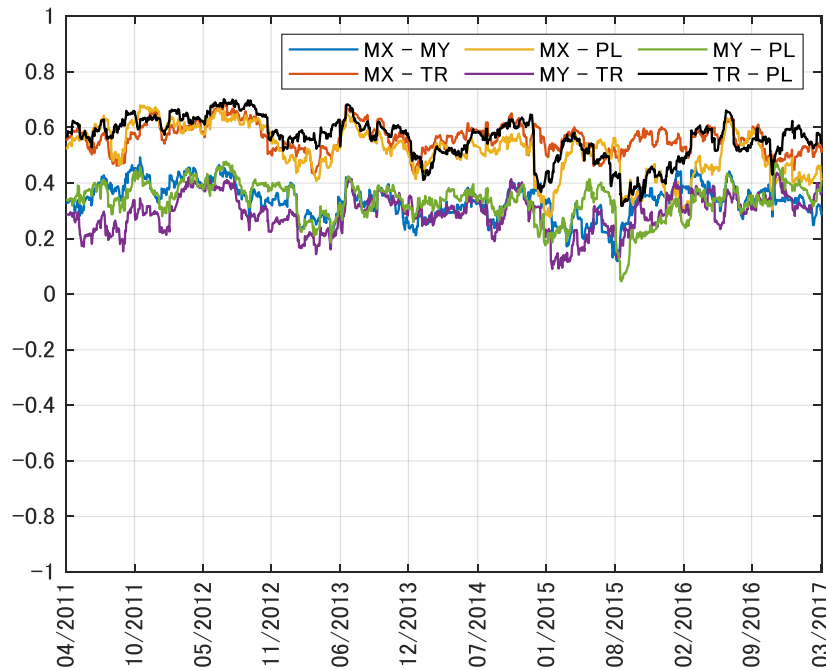


図 4.3: 相関の時系列推移（米ドルベース（為替ヘッジ無））

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度）の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの時系列推移との間に考察に影響を与えるような乖離はないことは確認している。

AIC 規準で選択されたダイナミックコピュラを用いた相関の時系列推移について米ドルベース（為替ヘッジ無）を図 4.3，米ドルベース（為替ヘッジ有）を図 4.4 に示した。表 4.4，表 4.5 と併せてパラメータの水準に着目すると，米ドルベース（為替ヘッジ無）では MY，米ドルベース（為替ヘッジ有）では MY-CH と他の資産の相関が他ペアに比べて低く推移する傾向にある。したがって，相関という観点からは MY，MY-CH が高い分散投資効果を有すると示唆される。また，米ドルベース（為替ヘッジ有）は米ドルベース（為替ヘッジ無）に比べて各ペアの相関が低く推移する傾向にある。したがって，為替ヘッジを行うことによって相関の観点から高い分散投資効果を楽しむことができると示唆される。ダイ

<sup>62)</sup>ダイナミック正規コピュラ対比では改善する。

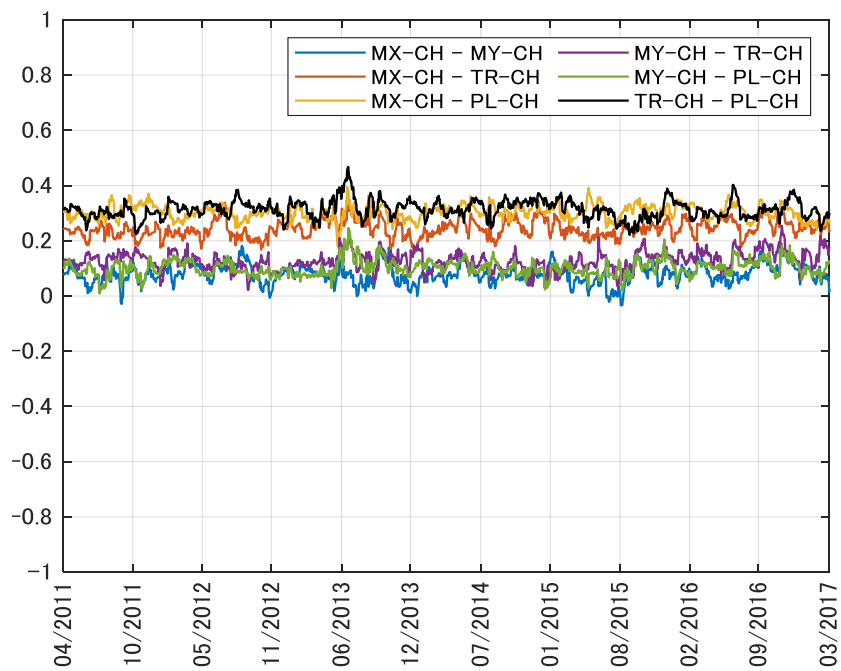


図 4.4: 相関の時系列推移 (米ドルベース (為替ヘッジ有))

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック  $t$  コピュラの相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの時系列推移との間に考察に影響を与えるような乖離はないことは確認している。

ナミック非対称 $t$ コピュラおよびダイナミック $t$ コピュラの自由度について、米ドルベース（為替ヘッジ無）は10程度である一方、米ドルベース（為替ヘッジ有）では30程度である。したがって、米ドルベース（為替ヘッジ無）は分布の裾での依存構造が強く、為替ヘッジを行うことによって分布の裾での依存構造を弱めることと示唆される。ダイナミック非対称 $t$ コピュラの歪度について、米ドルベース（為替ヘッジ無）は $-0.189$ である一方、米ドルベース（為替ヘッジ有）では $-0.004$ 程度である。そして、非対称 $t$ コピュラの歪度を表すパラメータは全てマイナスである。したがって、米ドルベース（為替ヘッジ無）は米ドルベース（為替ヘッジ有）に比べて上昇時よりも下落時に強まるといった非対称性が強いと示唆される。

## 4.4 高次モーメントを考慮した最適資産配分に関する実証分析

本章の目的の一つは、コピュラの違いとポートフォリオのパフォーマンスの関係性について為替ヘッジの有無の影響を考慮し明らかにすることである。そこで本節では、表4.4、表4.5のうちAICにより選択されたダイナミックコピュラ<sup>63)</sup>とダイナミック正規コピュラを用いて新興国国債ポートフォリオを構築し、パフォーマンスを比較分析する。また、高次モーメントを考慮した場合のパフォーマンスへの影響を明らかにすることも、本章の目的の一つである。そのため、ポートフォリオ最適化に際し高次モーメントを考慮する場合としない場合を想定し、パフォーマンスを比較分析する。

先述した新興国国債への期待が高まった背景や、機関投資家の投資目的を勘案すると、最小分散ポートフォリオやCVaR最小化ポートフォリオのようにダウンサイドリスクを一定程度抑制しつつも、アップサイドが継続する局面ではこれらのポートフォリオ戦略を上回るリターンを享受できることが望ましい。また、コピュラ間の比較を幅広く行う観点からは様々なポートフォリオ最適化手法に関して実証分析を積み重ねることも重要である。この点に鑑み本章では前章で扱ったCVaRのようなリスク尺度ではなく、Martellini and Ziemann (2010) が扱った高次モーメントを用いたポートフォリオによる実証分析を行うこととした。

本項では、まず分析方法として高次モーメントを考慮したポートフォリオ最適化の概要、バックテストの手順について記載したうえで、分析結果を述べる。

<sup>63)</sup>米ドルベース（為替ヘッジ無）はダイナミック非対称 $t$ コピュラ（共通の歪度）、米ドルベース（為替ヘッジ有）はダイナミック $t$ コピュラである。

#### 4.4.1 分析方法

本章では Martellini and Ziemann (2010) にならい、高次モーメントを用いたポートフォリオ最適化を活用する。高次モーメントを用いたポートフォリオ最適化を行う際には、まず各モーメントを計算する必要がある。リターンを  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)'$ 、その期待値を  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ 、 $\otimes$  をクロネッカー積とする時、 $\mathbf{r}$  の  $\boldsymbol{\mu}$  に関する 2 次モーメント  $M_2$ 、3 次モーメント  $M_3$ 、4 次モーメント  $M_4$  は以下のように表される。

$$\begin{aligned} M_2 &= E[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})'], \\ M_3 &= E[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})' \otimes (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})'], \\ M_4 &= E[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})' \otimes (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})' \otimes (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu})']. \end{aligned}$$

次に、効用関数を  $U(\cdot)$ 、ポートフォリオの価値を  $W$  とし、期待効用を 4 次まで Taylor 展開すると式 (4.15) となる。

$$\begin{aligned} E[U(W)] &\approx U(E[W]) + \frac{U^{(2)}(E[W])}{2} \boldsymbol{\mu}^{(2)} + \frac{U^{(3)}(E[W])}{6} \boldsymbol{\mu}^{(3)} + \frac{U^{(4)}(E[W])}{24} \boldsymbol{\mu}^{(4)}, \\ \boldsymbol{\mu}^{(k)} &= E[(W - E[W])^k], \quad k = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

ここで、各資産の投資比率ベクトルを  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)'$ 、 $\delta$  をリスク許容度とし、期待値  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$  について  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$  (または定数) として<sup>64</sup>、期待効用に CRRA 型効用関数、すなわち  $U(W) = W^{(1-\delta)}/(1-\delta)$  を仮定する。この時、式 (4.15) の近似期待効用を最大化する問題について 2 次から 4 次モーメントまでを考慮すると、式 (4.16) のように表される。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} &\left[ \frac{\delta}{2} \mathbf{w}' M_2 \mathbf{w} - \frac{\delta(\delta+1)}{6} \mathbf{w}' M_3 (\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) + \frac{\delta(\delta+1)(\delta+2)}{24} \mathbf{w}' M_4 (\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \right] \\ &s.t. \mathbf{w}' \mathbf{1}_n = 1, 0 \leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.16)$$

ただし、 $\mathbf{1}_n$  は  $n$  行 1 列、要素が全て 1 の行列である。バックテストでは、ポートフォリオのリバランス時点に到達する毎に最適化問題 (4.16) を解き最適投資比率を決定し、次のリバランス時点までポジションは維持する。なお、本章では投資対象を 4 か国の新興国国債とするため  $n = 4$  となる。

バックテストの手順は以下のとおりである。

<sup>64</sup>Martellini and Ziemann (2010) にならい当該仮定を設ける。期待収益率の平均は現実の有限標本の市場データを用いた分析では精度に問題があるため、期待収益率を使わない最小分散最適化に高次モーメント項を補正した問題を扱うことにする。

- 1 2011年4月4日から2013年3月29日までの2年分の実現リターンデータを用いて、式(2.11)の周辺モデルを推定する。周辺モデルはAICを用いて選択する。
- 2 AICで選択した周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、ダイナミックコピュラのパラメータを推定する。
- 3 上記2で推定した各ダイナミックコピュラを用いて、1日の乱数を10万組生成し、これを20日<sup>65)</sup>分蓄積する。
- 4 上記1の周辺モデルと2013年3月29日までの実現リターンデータを用いて、各資産について20日分の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を計算する。
- 5 手順4の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を適用した周辺モデルを用いて、手順3で生成した乱数を4資産のリターンデータのサンプルに変換する。
- 6 手順5で計算したリターンデータのサンプルから20日間の累積リターンデータのサンプルを計算し、式(4.16)を適用する。そのうえで、高次モーメントを考慮したポートフォリオ最適化問題の最適投資比率、3次以上の高次モーメントを考慮しないポートフォリオの分散最小化問題の最適投資比率<sup>66)</sup>を求める。
- 7 20日経過後、経過日数分の実現リターンデータの実績を観測データとして追加し、上記1の周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、手順2から6に倣い次期の最適投資比率を求める。
- 8 以下、上記の作業を2017年3月31日まで繰り返す。なお、周辺モデルは1年毎に推定する。

上述の手順でAIC規準で選択されたダイナミックコピュラとダイナミック正規コピュラを用いてポートフォリオを構築し、観測期間を通じてパフォーマンスを計測する。両者の違いは依存構造のみであるため、依存構造を捕捉するコピュラの違いが新興国国債ポートフォリオのパフォーマンスに与える影響について考察できる。さらに、高次モーメント

---

<sup>65)</sup>実務では、ベンチマークとなるインデックスの一般的なリバランス頻度が1か月であることを勘案し、1か月間隔でリバランスを行うことファンドも相応にある。また、新興国国債は先進国国債に比べて流動性が低く取引コストも高いため、高頻度でのリバランスは行わない傾向にある。これらの点を考慮し20日（休日考慮後）とした。

<sup>66)</sup>最小分散ポートフォリオである。なお、最小分散ポートフォリオは実務でも広く活用され運用商品にも反映されている。代表的な運用商品としては「iシェアーズMSCI日本株最小分散ETF」などが挙げられる。

を考慮しポートフォリオ最適化を行う場合と、2次モーメントのみ考慮した最小分散ポートフォリオを構築した場合の各々でバックテストする。これにより、高次モーメントを考慮した新興国国債ポートフォリオの構築によるパフォーマンスの改善可能性についても考察できる。

#### 4.4.2 分析結果

表4.6にはバックテストの主要な結果を示した。為替ヘッジ無と為替ヘッジ有、高次モーメントを考慮したポートフォリオと最小分散ポートフォリオ、AIC 規準で選択されたダイナミックコピュラと比較対象であるダイナミック正規コピュラ、の各々の組合せで8通りの結果である。また、図4.5、図4.6には、米ドルベース（為替ヘッジ無）、米ドルベース（為替ヘッジ有）の順にリスク許容度  $\delta$  が5の場合のポートフォリオに関する累積リターンの推移、図4.7、図4.8には、ポートフォリオに関する投資ウェイトの推移を示した。

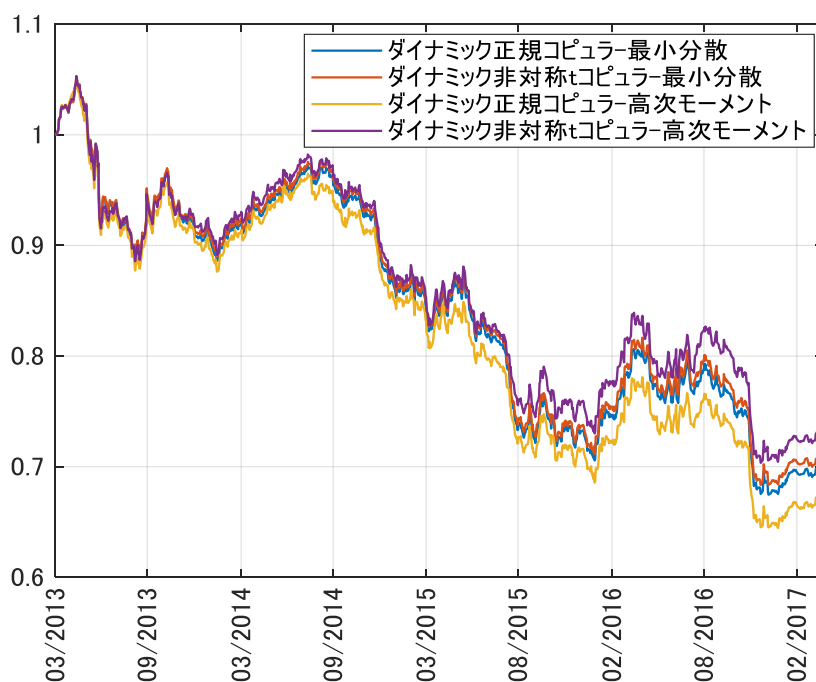


図 4.5: 米ドルベース（為替ヘッジ無）のポートフォリオの累積リターン（ $\delta = 5$ ）

Notes: 高次モーメントを考慮した場合としない場合について、AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）と比較対象であるダイナミック正規コピュラの結果を示した。

米ドルベース（為替ヘッジ無）について、AIC 規準で選択されたコピュラはダイナミック非対称  $t$  コピュラ（共通の歪度）であり、比較対象はダイナミック正規コピュラである。



表 4.6: バックテストの主要な結果

Notes: 2013年4月から2017年3月までのポートフォリオのパフォーマンスを示した。高次モーメントを考慮した場合としない場合について、米ドルベース（為替ヘッジ無）ではAIC規準で選択されたダイナミック非対称 $t$ コピュラと比較対象であるダイナミック正規コピュラ，米ドルベース（為替ヘッジ有）ではAIC規準で選択されたダイナミック $t$ コピュラとダイナミック正規コピュラの結果を示した。リターンおよび標準偏差は年率換算後の数値である。米ドルベース（為替ヘッジ無）はリターンがマイナスであるため，シャープレシオは非表示とした。

			為替ヘッジ無				為替ヘッジ有			
			高次モーメント		最小分散		高次モーメント		最小分散	
			ダイナミック 非対称 $t$	ダイナミック 正規	ダイナミック 非対称 $t$	ダイナミック 正規	ダイナミック $t$	ダイナミック 正規	ダイナミック $t$	ダイナミック 正規
$\delta = 2$	a	リターン	-0.0746	-0.0924	-0.0817	-0.0845	0.0144	0.0160	0.0069	0.0067
	b	標準偏差	0.0837	0.0840	0.0811	0.0812	0.0196	0.0216	0.0172	0.0172
	a/b	シャープレシオ	-	-	-	-	0.7389	0.7401	0.3990	0.3934
$\delta = 3$	a	リターン	-0.0742	-0.0925	-0.0817	-0.0845	0.0149	0.0160	0.0069	0.0067
	b	標準偏差	0.0840	0.0843	0.0811	0.0812	0.0202	0.0219	0.0172	0.0172
	a/b	シャープレシオ	-	-	-	-	0.7341	0.7321	0.3990	0.3934
$\delta = 5$	a	リターン	-0.0739	-0.0926	-0.0817	-0.0845	0.0151	0.0158	0.0069	0.0067
	b	標準偏差	0.0842	0.0846	0.0811	0.0812	0.0211	0.0223	0.0172	0.0172
	a/b	シャープレシオ	-	-	-	-	0.7185	0.7117	0.3990	0.3934
$\delta = 10$	a	リターン	-0.0738	-0.0927	-0.0817	-0.0845	0.0149	0.0154	0.0069	0.0067
	b	標準偏差	0.0844	0.0848	0.0811	0.0812	0.0221	0.0229	0.0172	0.0172
	a/b	シャープレシオ	-	-	-	-	0.6765	0.6736	0.3990	0.3934

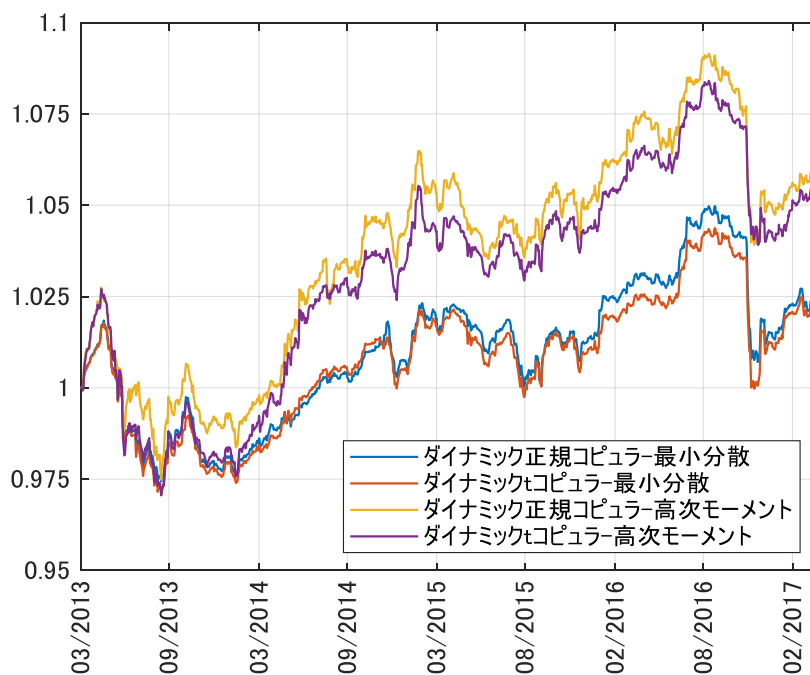


図 4.6: 米ドルベース（為替ヘッジ有）のポートフォリオの累積リターン（ $\delta=5$ ）

Notes: 高次モーメントを考慮した場合としない場合について、AIC 規準で選択されたダイナミック  $t$  コピュラと比較対象であるダイナミック正規コピュラの結果を示した。

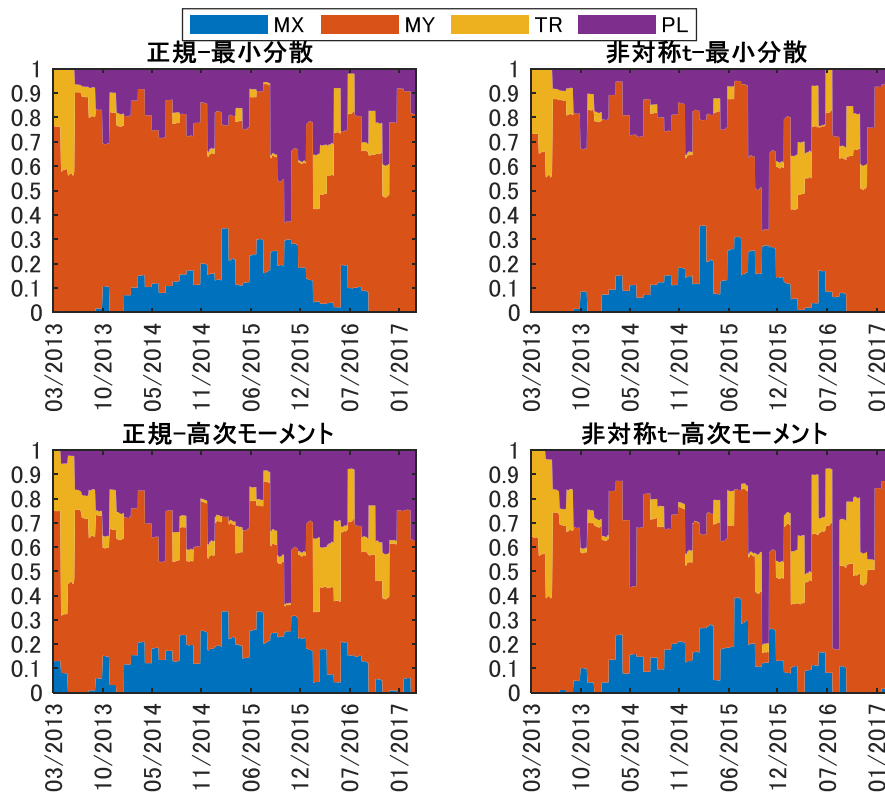


図 4.7: 米ドルベース (為替ヘッジ無) のポートフォリオ・ウェイト ( $\delta=5$ )

Notes: 左上はダイナミック正規コピュラを用いた最小分散ポートフォリオ、右上はダイナミック非対称  $t$  コピュラ (共通の歪度) を用いた最小分散ポートフォリオ、左下はダイナミック正規コピュラを用いた高次モーメントポートフォリオ、右下はダイナミック非対称  $t$  コピュラ (共通の歪度) を用いた高次モーメントポートフォリオの最適投資比率の推移である。

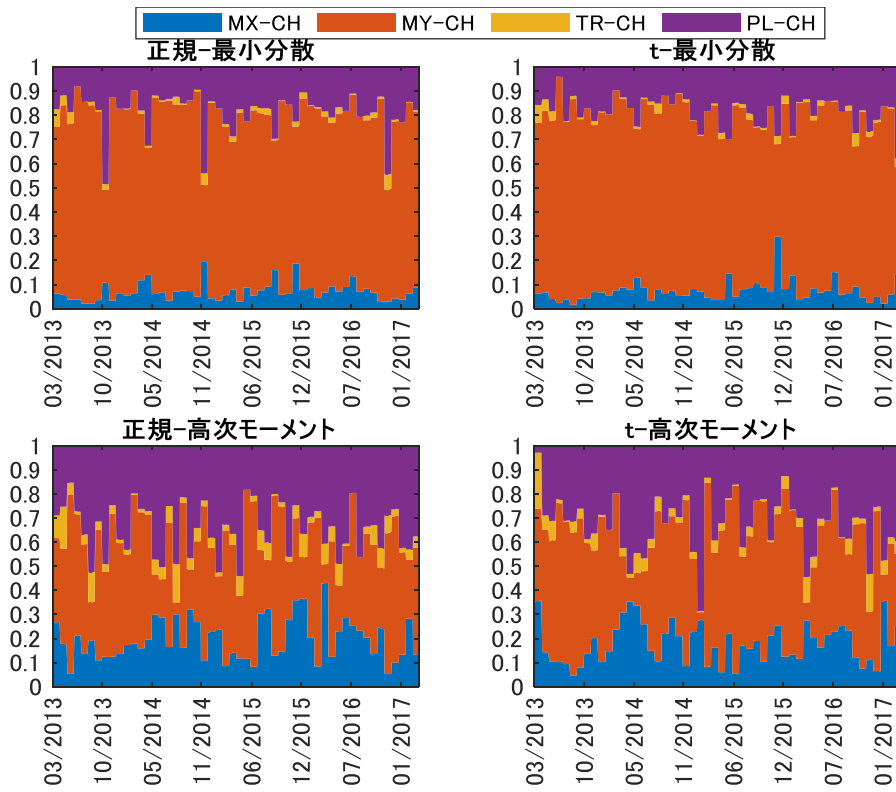


図 4.8: 米ドルベース (為替ヘッジ有) のポートフォリオ・ウェイト ( $\delta = 5$ )

Notes: 左上はダイナミック正規コピュラを用いた最小分散ポートフォリオ右上はダイナミック  $t$  コピュラ (共通の歪度) を用いた最小分散ポートフォリオ, 左下はダイナミック正規コピュラを用いた高次モーメントポートフォリオ, 右下はダイナミック  $t$  コピュラ (共通の歪度) を用いた高次モーメントポートフォリオの最適投資比率の推移である。

まず、高次モーメントを用いたポートフォリオの場合、最小分散ポートフォリオの場合の各々について、コピュラの違いがポートフォリオのパフォーマンスに影響を考察する。表4.6、図4.5、図4.7によると、高次モーメントを用いたポートフォリオの場合、最小分散ポートフォリオの場合のどちらにおいても、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることで、ダイナミック正規コピュラを用いるよりもパフォーマンスが改善している。この結果は全てのリスク許容度において共通である<sup>67)</sup>。このような結果が得られた要因は、米ドルベース（為替ヘッジ無）の場合、ダイナミック正規コピュラでは捕捉することができない分布の裾や上下非対称な依存構造が有意に存在しており、それらをダイナミック非対称 $t$ コピュラで捉えることで、現実の依存構造をよりの確に捉えたポートフォリオ構築を実現しているからだと考えられる。また、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることによるパフォーマンスの改善度合いは、最小分散ポートフォリオの場合よりも高次モーメントを用いたポートフォリオの場合において、より顕著である。図4.7からは、最小分散ポートフォリオの投資ウェイトは、コピュラの違いによって大きな差が生じていないのに対し、高次モーメントを用いたポートフォリオの投資ウェイトについては、コピュラの違いによって各投資対象、特にMY-US-NHおよびPL-US-NHの乖離が拡大する局面が見受けられる。このような結果が得られた要因は、投資ウェイトの決定に際し2次モーメントのみを用いる最小分散ポートフォリオに対し、高次モーメントを用いたポートフォリオでは、3次、4次モーメントが考慮されるため、その計測に際して、分布の裾や上下非対称な依存構造がより大きな影響を及ぼすからだと考えられる。

次に、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いた場合、ダイナミック正規コピュラを用いた場合の各々について、高次モーメントを用いたポートフォリオおよび最小分散ポートフォリオの違いがパフォーマンスに影響を及ぼすか否か、について確認する。表4.6、図4.5、図4.7によると、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いた場合、高次モーメントを用いたポートフォリオ運用のパフォーマンスは最小分散ポートフォリオに比して改善している。この結果は、全てのリスク許容度において共通である。このような結果が得られた要因は、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いた場合、分布の裾や上下非対称な依存構造を捕捉することができるため、3次、4次モーメントの精緻な計測することができ、結果として高次モーメントを用いたポートフォリオ運用のパフォーマンスに正の影響を及ぼすからだと考えられる。一方、ダイナミック正規コピュラを用いた場合、高次モーメントを用いたポートフォリオ運用のパフォーマンスは、最小分散ポートフォリオに比して悪化している。この結果は、全てのリスク許容度において共通である。このような結果が得られた

<sup>67)</sup>最小分散ポートフォリオはリスク許容度 $\delta$ の水準に影響を受けないことから、 $\delta$ の水準に拘わらず同様の結果となる。

要因は、ダイナミック正規コピュラを用いた場合、分布の裾や上下非対称な依存構造を捕捉することができないため、3次、4次モーメントの精緻な計測に繋がらず、結果として高次モーメントを用いたポートフォリオ運用のパフォーマンスに負の影響を及ぼすからだと考えられる。

米ドルベース（為替ヘッジ有）について、AIC 規準で選択されたコピュラは、ダイナミック $t$ コピュラであり、比較対象はダイナミック正規コピュラである。

まず、高次モーメントを用いたポートフォリオの場合、最小分散ポートフォリオの場合の各々について、ダイナミック $t$ コピュラおよびダイナミック正規コピュラの違いがポートフォリオのパフォーマンスに影響を及ぼすか否か、について確認する。表4.6, 図4.6によると、高次モーメントを用いたポートフォリオの場合、最小分散ポートフォリオの場合のどちらにおいても、コピュラの違いによってポートフォリオ運用のパフォーマンスに大きな差はない。また、図4.8からは、コピュラの違いによってポートフォリオの投資ウェイトに大きな乖離はないことが窺える。この結果は、全てのリスク許容度において共通である。このような結果が得られた要因は、米ドルベース（為替ヘッジ有）の場合、分布の裾での依存構造の影響は小さく、その上下非対称性も存在しないため、ダイナミック正規コピュラによっても依存構造を十分に捕捉できるからだと考えられる。

次に、ダイナミック $t$ コピュラを用いた場合、ダイナミック正規コピュラを用いた場合の各々について、高次モーメントを用いたポートフォリオ、最小分散ポートフォリオの違いがパフォーマンスに影響を及ぼすか否か、について確認する。表4.6, 図4.6, 図4.8によると、ダイナミック $t$ コピュラを用いた場合、ダイナミック正規コピュラを用いた場合のどちらにおいても、高次モーメントを用いたポートフォリオ運用のパフォーマンスは最小分散ポートフォリオに比して改善している。この結果は、全てのリスク許容度において共通である。このような結果が得られた要因は、米ドルベース（為替ヘッジ有）の場合、分布の裾や上下非対称な依存構造を考慮する必要性が低いため、コピュラの違いが3次、4次モーメントの計測に大きな影響を与えず、どちらの場合でも高次モーメントを用いたポートフォリオによって、超過的なりターンを享受できるからだと考えられる。

## 4.5 終わりに

本章では、新興国国債市場の米ドルベース（為替ヘッジ無）、米ドルベース（為替ヘッジ有）のリターンデータに対して、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを適用し依存構造の特徴を捕捉した。そのうえで、(1) 関連の時系列推移の特徴、(2) 分布の裾での依存構造有意性と特徴、(3) コピュラの違いが新興国国債ポートフォリオのパフォーマンスに与える影

響, (4) 高次モーメントを用いたポートフォリオと最小分散ポートフォリオのパフォーマンスの比較について考察した. 米ドルベース (為替ヘッジ無) に対しては, ダイナミック非対称  $t$  コピュラ (共通の歪度) の AIC は最も低く, 同コピュラを用いることで AIC 規準の観点からデータへの適合度が改善したと考えられる. また, (1) から (4) の研究課題については以下の主要結果を得た.

- (1) 相関の推移について, 米ドルベース (為替ヘッジ無) は米ドルベース (為替ヘッジ有) に比べて相関が低く推移する傾向にあり, 為替ヘッジを行うことによって相関の観点から高い分散投資効果を楽しむことができることを示した.
- (2) 米ドルベース (為替ヘッジ無) は米ドルベース (為替ヘッジ有) に比べて分布の裾での依存構造が強く, 為替ヘッジを行うことによって分布の裾での依存構造を弱める効果があることを示した. また, 米ドルベース (為替ヘッジ無) は米ドルベース (為替ヘッジ有) に比べて上昇時よりも下落時に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性が強いことを示した.
- (3) 依存構造を捕捉するコピュラの違いが新興国国債ポートフォリオのパフォーマンスに与える影響について, 米ドルベース (為替ヘッジ無) の場合には分布の裾や上下非対称な依存構造が有意に存在していることから, それらを捕捉できるダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いることで, ダイナミック正規コピュラに比して新興国国債ポートフォリオのパフォーマンスが改善することを示した. 一方, 米ドルベース (為替ヘッジ有) の場合には, 分布の裾での依存構造の影響は小さくその上下非対称性も存在しないため, コピュラの違いによって新興国国債ポートフォリオのパフォーマンスに差は生じないことを示した.
- (4) 高次モーメントを考慮した新興国国債ポートフォリオの構築によるパフォーマンスについて, 米ドルベース (為替ヘッジ無) の場合には, 分布の裾や上下非対称な依存構造が有意に存在していることから, それらを捕捉できるダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて高次モーメントを考慮した新興国国債ポートフォリオを構築することで, 最小分散ポートフォリオに比べてパフォーマンスが改善することを示した. 一方, 米ドルベース (為替ヘッジ有) の場合には, 分布の裾での依存構造の影響が極めて小さくその上下非対称性も存在しないことから, コピュラの違いに因らず, 高次モーメントを用いた新興国国債ポートフォリオのパフォーマンスは最小分散ポートフォリオに比べて改善することを示した.

これらの研究結果を勘案すると、新興国国債への投資に際して為替ヘッジを行う場合には、為替ヘッジを行わない場合に比べて相関の観点から分散投資効果を高め分布の裾での依存構造も弱まることが示唆される。また為替ヘッジを行わない場合には、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて依存構造を捕捉することで、相関の時変性と分布の裾での依存構造の影響を反映したポートフォリオが構築でき、パフォーマンスの改善にも繋がることを示唆される。



# 第5章 ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いた本邦株式市場のスタイル・ファクター間の依存構造の分析

## 5.1 はじめに

リーマン・ショック時に資産の分散投資効果が有効に機能せず想定以上のドローダウンが発生したという教訓から、リスクプレミアムの分散投資の効果が主張されるようになり (Bender et al. (2010), Blitz (2012, 2015), Ilmanen and Kizer (2012), Ang (2014)), ファクター投資が2010年代に普及した。ファクターは経済成長やインフレ等のマクロ経済ファクターと、バリュー、サイズ、モメンタム等のスタイル・ファクターに大別され、株式市場に対しては主に後者が活用される (以下、本章ではスタイル・ファクターを「ファクター」とする.)。

ファクター投資が普及した理由の一つに、ファクター間の相関は資産間よりも安定的に無相関といった傾向にあり、分散投資効果をより期待できることが挙げられる (Clarke et al. (2005), Bender et al. (2010), Ilmanen and Kizer (2012), Ang (2014))。一方、近年の研究では各ファクターのドローダウンが同時に発生し、ポートフォリオ全体としても想定以上のドローダウンが発生する傾向が示されるなど (Arnott et al. (2019), 田村・安藤 (2021)), ファクター投資の課題が指摘されている。

上述した課題の要因として、ファクター間の相関が短期的には変動し無相関から乖離していることが考えられる。この点はcDCCやダイナミック正規コピュラ等で捕捉可能である。もう一つの要因として、分布の裾で依存構造が強まるといった特徴を有することも考えられる。実際、Christoffersen and Langlois (2013), Zhao (2019)では、米国株式市場に関するファクターについて分布の裾での依存構造が有意であり、ダイナミック非対称 $t$ コピュラ<sup>68)</sup>の活用によりダイナミック正規コピュラに比べてデータへの適合度が改善する

---

<sup>68)</sup>非対称 $t$ コピュラの相関行列にDCCを適用したダイナミック非対称 $t$ コピュラを適用している。

ことを報告している<sup>69)</sup>。こうした依存構造の特徴を考慮しファクター・ポートフォリオを構築することは、ドローダウンの効率的な抑制に繋がり先行研究で指摘された課題への対応の一助となることが期待できる。

ファクター投資には、リスク・パリティ<sup>70)</sup> (Roncalli (2013)) を活用する機会が多い。本邦株式市場のファクター投資に対しても、リスク・パリティの活用による時価加重ポートフォリオに比したパフォーマンスの改善が実証されている (Shimizu and Shiohama (2019))。一方、近年はリスク尺度に CVaR を用いたテイルリスク・パリティが提案され、リスク・パリティに比した有効性が報告されている (Boudt et al. (2012), Alankar et al. (2013), Kato and Hibiki (2017), Jurczenko and Teiletche (2019), Gava et al. (2021))。テイルリスク・パリティがリスク・パリティよりもダウンサイドに焦点を当てた戦略である点に鑑みると、同戦略をファクター投資に応用することはドローダウンの効率的な抑制に繋がると期待できる<sup>71)</sup>。

以上の背景を踏まえ、本章では本邦株式市場の代表的なスタイル・ファクターであるバリュー、サイズ、高配当、クオリティ、低ボラティリティ、モメンタム間の依存構造を4章で扱ったダイナミック非対称 $t$ コピュラ、ダイナミック $t$ コピュラ、ダイナミック正規コピュラで捕捉する。そのうえで、(1) ファクター間の相関の時系列推移の特徴、(2) 分布の裾での依存構造の有意性と特徴、(3) コピュラの違いがテイルリスク・パリティのパフォーマンスに与える影響について考察する<sup>72)</sup>。

本章の構成は次のとおりである。5.2 節では本章で扱う本邦株式市場の6ファクターの統計的特徴を述べる。5.3 節では周辺モデルやコピュラの推定結果、5.4 節ではテイルリスク・パリティに関する分析結果を考察する。5.5 節では結論を述べる。

## 5.2 6ファクターの統計的特徴

分析対象の採用インデックスと統計値を表5.1、累積リターンを図5.1に示した。採用するファクターは伝統的なファクターであり実務でも活用もされているバリュー、サイズ、高配当、クオリティ、低ボラティリティ、モメンタムとした。また、Shimizu and Shiohama (2019) にならい、採用するインデックスはMSCIが提供するスタイルインデックスとし、

<sup>69)</sup>本邦株式市場に関するファクターの依存構造について、相関の変動と分布の裾での依存構造の統計的特徴を考察した研究は、筆者の知る限り見当たらない。

<sup>70)</sup>ポートフォリオ全体の分散に対する各資産のリスク寄与を均等にする戦略である。リスク・パリティをファクター投資に適用した際の有効性は Meucci (2009), Lohre et al. (2012, 2014), Roncalli and Weisang (2016) 等で報告されている。

<sup>71)</sup>テイルリスク・パリティをファクター投資に応用した研究は筆者の知る限り見当たらない。

<sup>72)</sup>併せて、テイルリスク・パリティとリスク・パリティのパフォーマンス比較も行う。

時価総額指数である MSCI Japan とのリターンの差分，すなわち超過リターンを本章における分析対象とした．観測期間は 2002 年 1 月 4 日から 2021 年 12 月 31 日，観測頻度は週次，観測時点数は 1043 個である．

表 5.1: 分析対象データ

Notes: 分析対象は MSCI が提供する 6 種類のスタイルインデックスと時価総額指数である MSCI Japan とのリターンの差分，すなわち超過リターンである．平均と標準偏差は，平均と標準偏差は観測期間の前半である 2002 年から 2011 年，後半である 2012 年から 2021 年も併記した．

ファクター	採用インデックス	平均	標準偏差		歪度	尖度			
			前半	後半					
バリュー	MSCI Japan Value	0.0048	0.0277	-0.0174	0.0384	0.0360	0.0404	0.143	4.47
サイズ	MSCI Japan Equal Weighted	0.0117	0.0307	-0.0069	0.0338	0.0400	0.0259	0.075	4.47
高配当	MSCI Japan High Dividend Yield	0.0141	0.0416	-0.0127	0.0653	0.0738	0.0553	0.066	5.27
クオリティ	MSCI Japan Quality	0.0040	-0.0024	0.0103	0.0685	0.0696	0.0675	0.135	8.48
低ボラティリティ	MSCI Japan Minimum Volatility	-0.0056	0.0152	-0.0259	0.0724	0.0754	0.0692	-0.051	4.80
モメンタム	MSCI Japan Momentum	-0.0028	-0.0101	0.0046	0.0895	0.0992	0.0785	-0.431	8.42

統計値について，平均と標準偏差は観測期間の前半である 2002 年から 2011 年，後半である 2012 年から 2021 年も併記した．リターンの平均について，観測期間全体ではバリュー，サイズ，高配当，クオリティ，がプラス，低ボラティリティとモメンタムはマイナスであることが分かる．また，観測期間の前半と後半では全てのファクターで符号が逆転していることが読み取れる．具体的には，バリュー，サイズ，高配当，低ボラティリティは前半でプラス，後半でマイナスであり，クオリティ，モメンタムは前半でマイナス，後半でプラスである．図 5.1 から，ファクターのリターンの傾向が時期によって異なることを確認できる．以上から，ファクターのリターンの平均やファクター間の優劣は時期によって左右されることが示唆される．標準偏差は，観測期間全体，前半，後半に共通してバリューとサイズが低いことが読み取れる．また，後半が前半に比べて高いファクターはバリューであり，他の 5 ファクターは前半が高いことが読み取れる．以上から，ファクターによって標準偏差が高まる時期に違いはある一方，ファクター間の標準偏差の高低は時期に左右されず安定する傾向にあることが示唆される．また，全てのファクターの尖度が正規分布に比べて大きいことが読み取れる．

表 5.2 に観測期間全体の相関係数，表 5.3 に観測期間の前半と後半の相関係数を示した．表 5.2 から観測期間全体で最も相関係数が高いペアはバリューと高配当，最も低いペアはバリューとモメンタムであることが分かる．これらに加えバリューとクオリティのペアを

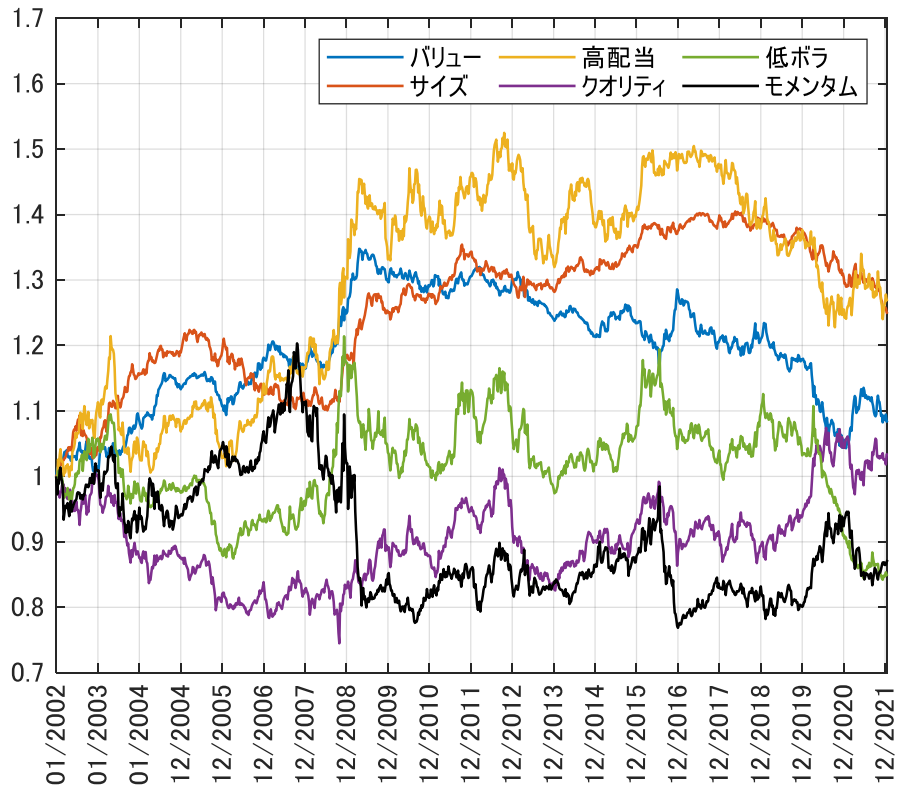


図 5.1: 分析対象データの累積リターン

Notes: 2002年1月4日を1(単位は日本円)とし、分析対象期間である2021年12月31日までの累積リターンを示した。

表 5.2: ファクター間の相関係数(観測期間全体)

	バリュー	サイズ	高配当	クオリティ	低ボラ	モメンタム
バリュー	1.000	0.110	0.396	-0.374	-0.047	-0.389
サイズ		1.000	0.146	0.113	0.238	0.025
高配当			1.000	0.114	0.289	-0.130
クオリティ				1.000	0.295	0.178
低ボラ					1.000	0.259
モメンタム						1.000

表 5.3: ファクター間の相関係数（観測期間の前半・後半）

Notes: 表の右上には観測期間の前半である 2002 年から 2011 年の相関係数，表の左下には後半である 2012 年から 2021 年の相関係数を示した。

	バリュー	サイズ	高配当	クオリティ	低ボラ	モメンタム
バリュー	1.000	0.109	0.392	-0.166	0.168	-0.192
サイズ	0.107	1.000	0.105	0.089	0.155	0.048
高配当	0.418	0.219	1.000	0.241	0.390	-0.058
クオリティ	-0.568	0.159	-0.055	1.000	0.117	-0.080
低ボラ	-0.262	0.382	0.144	0.496	1.000	0.182
モメンタム	-0.625	-0.017	-0.252	0.517	0.368	1.000

除く 12 ペアは相関係数が  $\pm 0.3$  に収まっていることも読み取れる。したがって，観測期間全体では大宗のペアは無相関に近いと示唆される。また，表 5.3 からは，観測期間の前半は相関係数が  $+0.3$  超もしくは  $-0.3$  未満となるペアはバリューと高配当，高配当と低ボラの 2 ペアであるのに対し，後半は 7 ペアと半数近くに増加していることが読み取れる。このことから，ファクター間の相関係数は時期によっては無相関から乖離し，特に観測期間の後半ではその傾向が強まっていることが示唆される。

## 5.3 6ファクター間の依存構造の特徴分析

本節では，周辺モデルの推定結果，コピュラの推定結果の順に説明する。

### 5.3.1 周辺モデルの推定結果

周辺モデルの推定手順は前章までと同様である。各資産のリターンデータに対する時系列モデルは式 (2.11) で与える。式 (2.11) における条件付き期待収益率  $\mu_{s|s-1,i}$  の時系列構造は ARMA モデルを，条件付き分散（標準偏差） $\sigma_{s|s-1,i}^2$  の時系列モデルは GARCH モデルおよび GJR モデルを適用する。また，誤差項  $\varepsilon_{s,i}$  の分布には，正規分布， $t$  分布と，Jondeau and Rockinger (2006) 等に倣い Hansen (1994) の非対称  $t$  分布を採用する。モデルのパラメータは最尤法によって推定し，AIC 規準によりモデルを採択する。なお，推定に際しては，AR 項の次数は 1 または 2，MA 項の次数は 0 から 2 まで，GARCH 項もし

くは GJR 項の次数は (1,1) とする<sup>73)</sup>。また、非対称  $t$  分布を誤差項分布に適用する場合、AR 項の次数は 1、MA 項の次数は 0 または 1 とする<sup>74)</sup>。

表 5.4: 周辺モデルの推定結果

Notes: 表には、AIC 規準によって選択されたモデルと、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」に対するコルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (p 値) を併記した。なお、全ての資産について有意水準 5% で帰無仮説が棄却されなかった。

	バリュー	サイズ	高配当	クオリティ	低ボラティリティ	モメンタム
AIC規準で選択されたモデル	AR(1)+MA(1) +GARCH(1,1) +t	AR(1) +GARCH(1,1) +t	AR(1) +GARCH(1,1) +t	AR(1) +GARCH(1,1) +t	AR(1) +GJR(1,1) +t	AR(1)+MA(1) +GJR(1,1) +Skewed-t
	( $v=6.89$ )	( $v=11.32$ )	( $v=10.34$ )	( $v=7.28$ )	( $v=9.48$ )	( $v=8.60, \lambda=-0.194$ )
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果(P値)	0.9427	0.8414	0.9222	0.8712	0.7752	0.8157

各ファクターのリターンデータに関する周辺モデルおよび誤差項分布の推定結果は表 5.4 のとおりである。表 5.4 からは、分散の構造モデルとしては、低ボラティリティとモメンタムで GJR モデルが採用されることを確認できる。したがって、これらのファクターではリターンのショックが分散に与える影響について非対称性を有することが分かる。また、誤差項分布についてはモメンタムが非対称  $t$  分布、その他の 5 ファクターは  $t$  分布が採用されることを確認できる。したがって、全ての資産の誤差項分布はファットテイルであることが分かる。さらに、残差についてコルモゴロフ-スミルノフ検定を行った結果からは、全てのデータが有意水準 5% において、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」が棄却されないことを確認できる。

### 5.3.2 コピュラの推定結果

コピュラの推定結果を表 5.5 に示した。コピュラの候補はダイナミック非対称  $t$  コピュラ、ダイナミック  $t$  コピュラ、ダイナミック正規コピュラとした。また、参考として非対称  $t$  コピュラ、 $t$  コピュラ、正規コピュラの結果も併記した。

<sup>73)</sup>GARCH 項、GJR 項に関する次数を増加させても、モデルの精度が大きく向上しないことを事前に確認したこと、Hansen (1994) に記されているように、GARCH モデルに関しては、GARCH (1,1) が選択されることが多く、天下り的に GARCH (1,1) を適用する先行研究が多数あることを勘案し、既述の取扱いとした。

<sup>74)</sup>同分布を適用する際、モデルのパラメータ数を増加させると、推定精度が安定しないため、既述の取扱いとする。

表 5.5: コピュラの推定結果

Notes: AIC 規準で選択されたモデルについては、「AIC」部分を網掛け（灰色）とした。ダイナミック非対称  $t$  コピュラ，非対称  $t$  コピュラについては歪度が全て等しいと仮定した場合である。また，無条件相関行列は全てのコピュラについて 5.2 節で示した相関係数と概ね一致するため，結果が煩雑にならないよう割愛した。なお，括弧内の数値は標準誤差であり，全てのパラメータについて有意水準 5% で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された。

	AIC	cDCC		自由度	歪度
		$\alpha$	$\beta$	$\nu$	$\gamma$
ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ	-2,898.9	0.073 (0.005)	0.911 (0.006)	7.393 (0.005)	-0.115 (0.001)
ダイナミック $t$ コピュラ	-2,893.3	0.053 (0.010)	0.911 (0.008)	7.457 (0.075)	- -
ダイナミック 正規コピュラ	-2,636.8	0.064 (0.019)	0.918 (0.016)	- -	- -
非対称 $t$ コピュラ	-1,921.4	- -	- -	4.406 (0.068)	-0.110 (0.002)
$t$ コピュラ	-1,912.4	- -	- -	4.785 (0.063)	- -
正規コピュラ	-1,479.9	- -	- -	- -	- -

AICが最も小さいコピュラはダイナミック非対称 $t$ コピュラである。2番目にAICが低いコピュラはダイナミック $t$ コピュラ、3番目がダイナミック正規コピュラである。また、全てのパラメータについて有意水準5%で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された。これらのダイナミックコピュラは、非対称 $t$ コピュラ、 $t$ コピュラ、正規コピュラに比べてAICが低いことから、相関の変動を捕捉することでAIC規準の観点からデータへの適合度が改善すると示唆される。さらに、ダイナミック非対称 $t$ コピュラがAIC規準で選択されることに鑑みると、相関の時変性に加え、分布の裾での依存構造やその非対称性も考慮することでデータへの適合度がより改善すると示唆される。

パラメータの水準に着目すると、ダイナミック非対称 $t$ コピュラおよびダイナミック $t$ コピュラの自由度は7程度である。3章や4章の実証分析結果に比べて自由度が低く、分布の裾での依存構造が相応に強いことが示唆される。また、非対称 $t$ コピュラ、 $t$ コピュラの自由度は4程度であり、これらのコピュラに比べるとダイナミックコピュラの自由度は3程度高いことが読み取れる。したがって、コピュラの相関行列にcDCCを導入し相関の短期的な変動を捕捉することで、分布の裾での依存構造の影響が弱まると示唆される<sup>75)</sup>。このような自由度の特徴はChristoffersen and Langlois (2013)等の先行研究と同様である。ダイナミック非対称 $t$ コピュラの歪度は-0.115である。歪度がマイナスである点はChristoffersen and Langlois (2013)等のファクター間の依存構造をダイナミック非対称 $t$ コピュラで捕捉した先行研究と同様であり、ファクター間の分布の裾での依存構造について、上昇時よりも下落時に強まるといった非対称性を有すると示唆される。

表 5.6: 相関の時系列推移に関する最大値と最小値

Notes: 表の右上にダイナミック非対称 $t$ コピュラの相関の推移に関する最大値、表の左下に最小値を示した。

	バリュー	サイズ	高配当	クオリティ	低ボラ	モメンタム
バリュー	1.000	0.728	0.880	0.414	0.679	0.363
サイズ	-0.510	1.000	0.715	0.656	0.735	0.560
高配当	-0.210	-0.404	1.000	0.733	0.899	0.748
クオリティ	-0.839	-0.622	-0.665	1.000	0.823	0.803
低ボラ	-0.749	-0.204	-0.492	-0.348	1.000	0.872
モメンタム	-0.899	-0.738	-0.797	-0.661	-0.555	1.000

<sup>75)</sup>したがって、相関の時系列構造をダイナミックコピュラで捉えた場合、正規コピュラに比べた $t$ コピュラや非対称 $t$ コピュラの有用性は低下する。一方、ダイナミックコピュラを活用後も自由度は前述の通り低いことから、相関の変動に加えて分布の裾での依存構造を捕捉する意義はある。



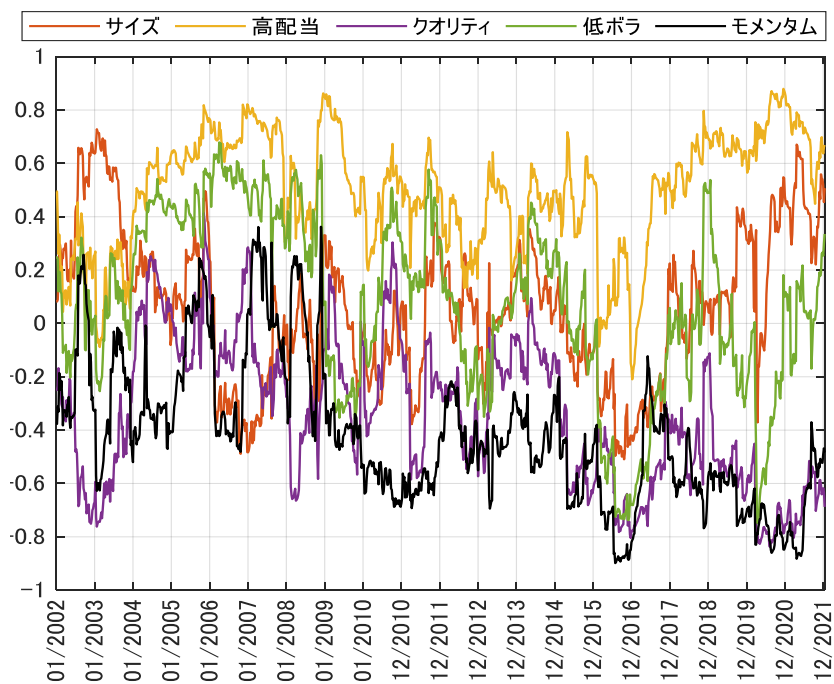


図 5.2: 相関の時系列推移 (バリューと他ファクター)

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて、バリューと他の 5 ファクター間の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの結果との間に考察に影響を与える乖離はないことは確認した。

表 5.7: 相関の時系列推移に関する最大値と最小値の差分 (変動幅)

Notes: 表 5.6 の右上に記載した最大値から左下に記載した最小値を引いた値を示した。

	バリュー	サイズ	高配当	クオリティ	低ボラ	モメンタム
バリュー	1.000	1.238	1.090	1.252	1.428	1.261
サイズ		1.000	1.119	1.278	0.939	1.298
高配当			1.000	1.399	1.391	1.544
クオリティ				1.000	1.171	1.464
低ボラ					1.000	1.427
モメンタム						1.000

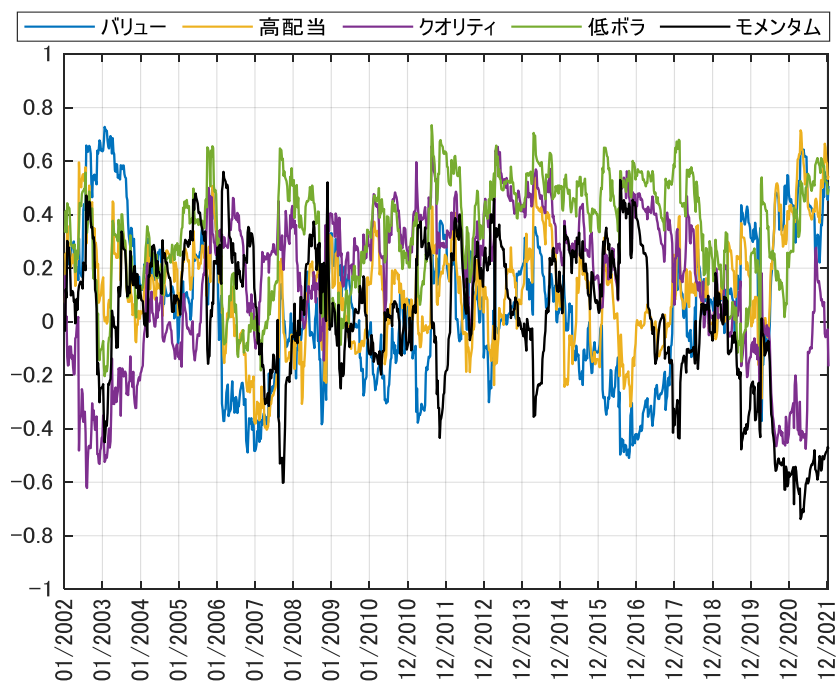


図 5.3: 相関の時系列推移 (サイズと他ファクター)

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて、サイズと他の 5 ファクター間の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの結果との間に考察に影響を与える乖離はないことは確認した。

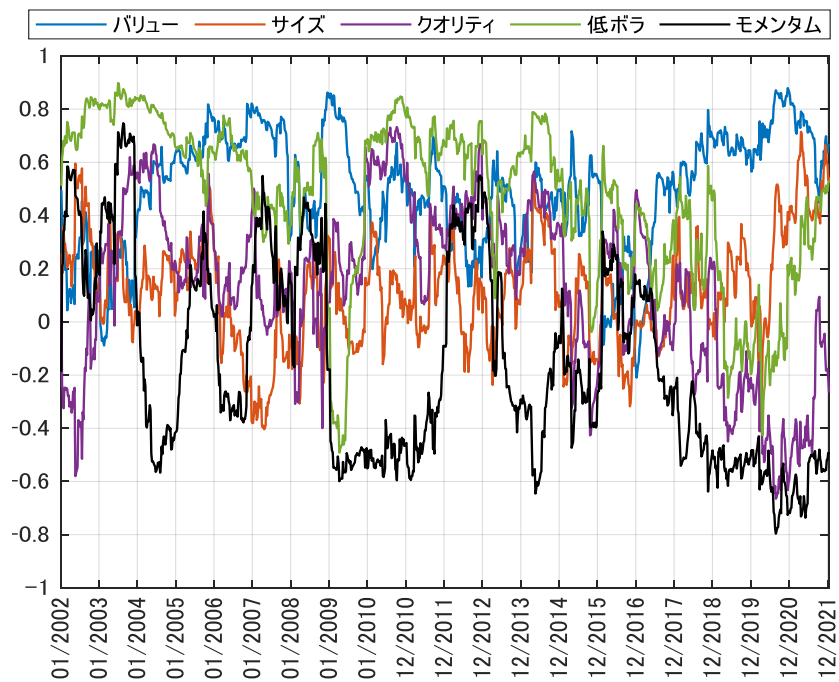


図 5.4: 相関の時系列推移 (高配当と他ファクター)

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて、高配当と他の 5 ファクター間の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの結果との間に考察に影響を与える乖離はないことは確認した。

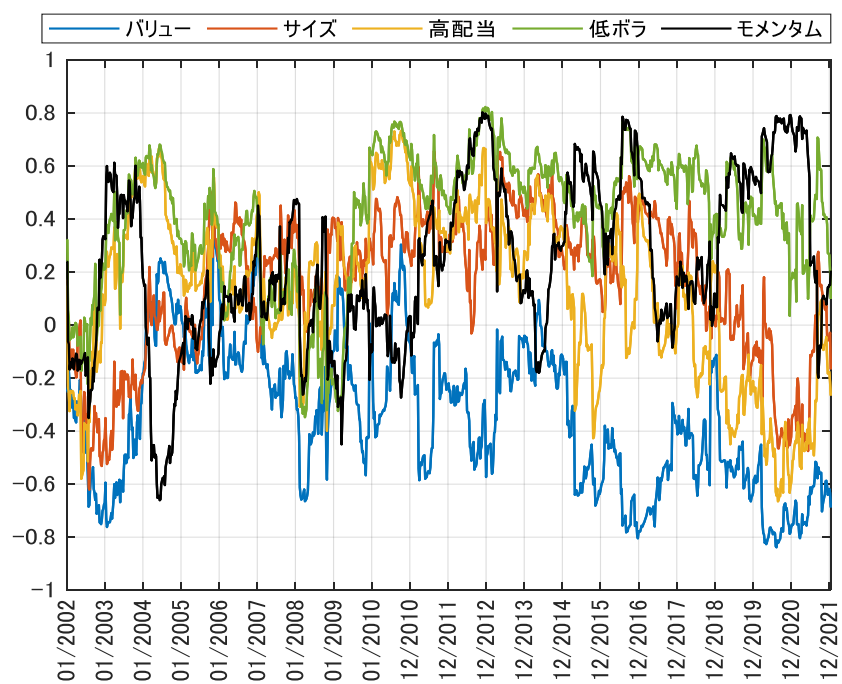


図 5.5: 相関の時系列推移 (クオリティと他ファクター)

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて、クオリティと他の 5 ファクター間の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの結果との間に考察に影響を与える乖離はないことは確認した。

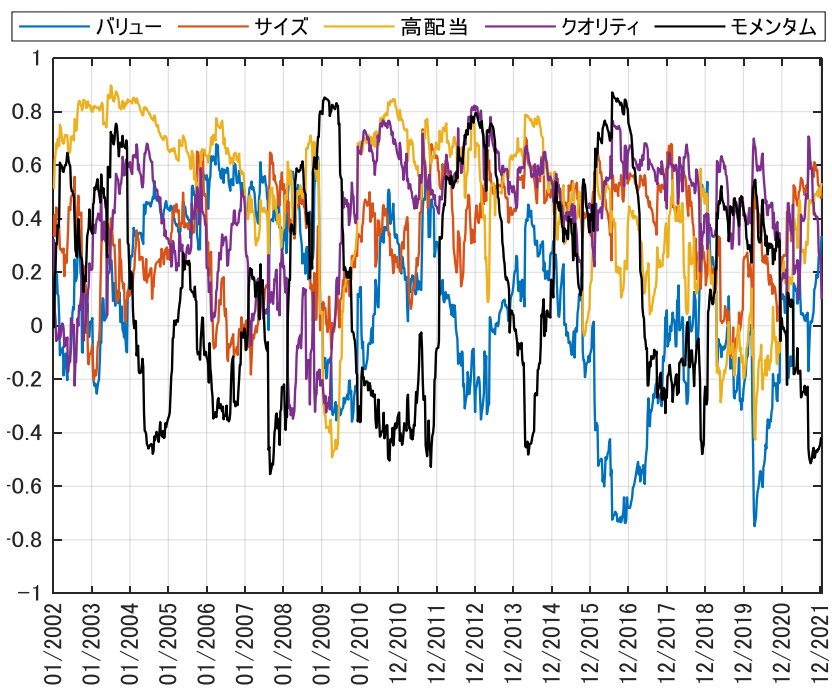


図 5.6: 相関の時系列推移 (低ボラティリティと他ファクター)

Notes: AIC 規準で選択された動的な非対称  $t$  コピュラを用いて、低ボラティリティと他の 5 ファクター間の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの結果との間に考察に影響を与える乖離はないことは確認した。

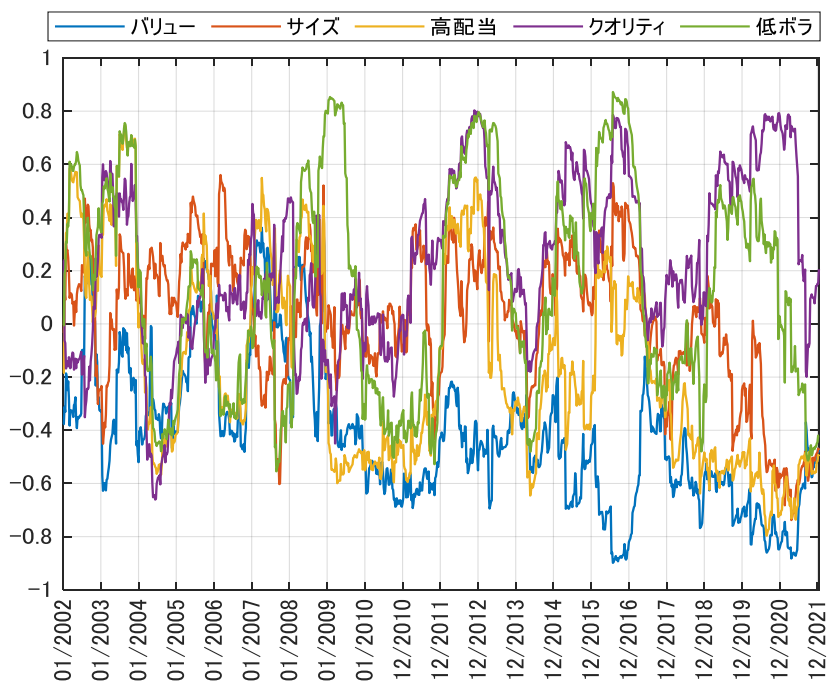


図 5.7: 相関の時系列推移 (モメンタムと他ファクター)

Notes: AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて、モメンタムと他の 5 ファクター間の相関の時系列推移を示した。なお、他のコピュラの結果との間に考察に影響を与える乖離はないことは確認した。

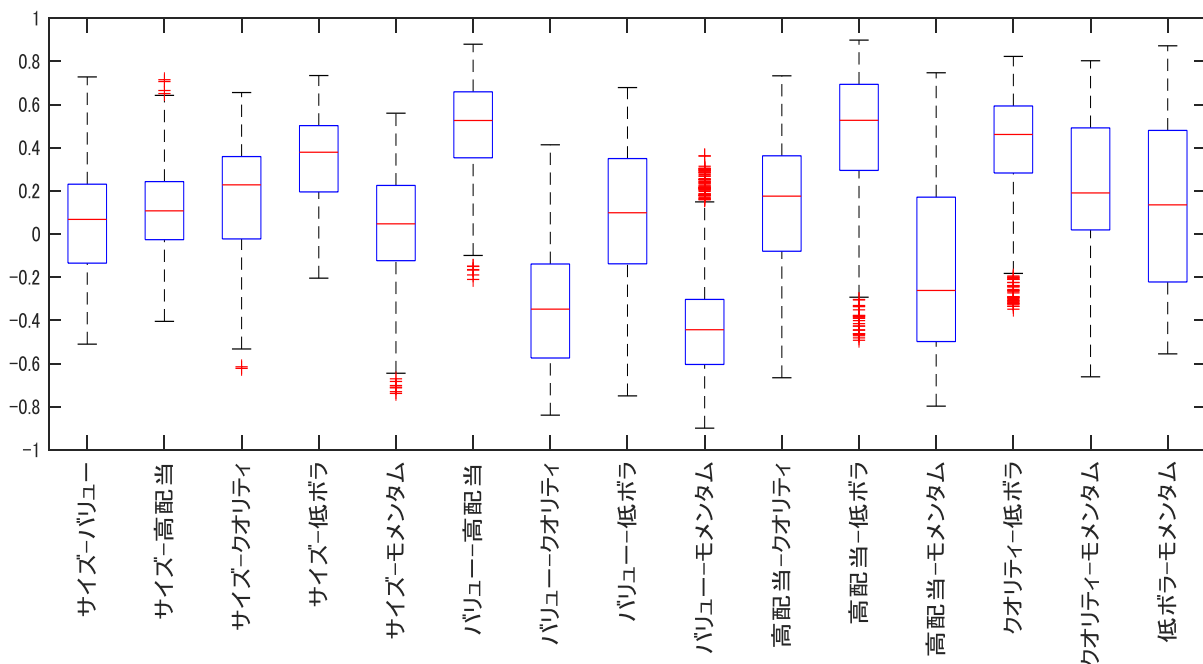


図 5.8: 相関の時系列推移に関する箱ひげ図 (バリューと他ファクター)

Notes: 図 5.2 から図 5.7 の相関の時系列推移に関する箱ひげ図を示した。

5.1 節に記載したファクター投資に関する実務的課題に鑑みると、ファクター間の相関が安定的に無相関であるのかについて、相関の時変性を許容したダイナミックコピュラを用いて検証することが重要である。そこで、AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラの相関に関する時系列推移を図 5.2 から図 5.7，その箱ひげ図を図 5.8 に示した。相関の時系列推移は 15 ペア全てを纏めて図示すると煩雑になるため、6 ファクターのうち一つを固定し他の 5 ファクターとの相関およびその箱ひげ図を表示した。また、相関の時系列推移に関する最大値と最小値を表 5.6，最大値と最小値の差分を表 5.7 に示した。

図 5.2 から図 5.8，表 5.6 から，全てのペアについて相関がプラスとマイナスの領域を跨いで変動していることが分かる。また表 5.7 からは，相関の変動幅は小さいペアでも 1 程度であり，大きいペアでは 1.5 程度であることも読み取れる。したがって，全てのファクター間の相関は安定的に無相関ではなく時系列に変動しており，時期によっては無相関から順相関もしくは逆相関に遷移することが示唆される。

個別のファクターに着目すると，特にサイズやバリューに特徴的な動きが観察される。まず図 5.8 からは，サイズと他のファクターの相関の中央値や四分位範囲が他のペアに比べてゼロ近辺に位置していることが読み取れる。一方，バリューと他のファクターの相関の中央値が低いことも分かる。次に実際の時系列推移を図 5.2 から図 5.7 で確認すると，

サイズと他のファクターとの相関が安定してゼロ近辺で推移していることが読み取れる。一方、バリューと他のファクターとの相関は観測期間の後半に低く推移する傾向にある。以上の結果を踏まえると、サイズは他のファクターに比べて安定的に無相関であることが示唆される。また、バリューは他のファクターに比べて逆相関であり、観測期間の後半にかけてその傾向が強まっていることが示唆される。

## 5.4 テイルリスク・パリティに関する実証分析

本節では、まず分析方法としてテイルリスク・パリティの概要、バックテストの手順について記載したうえで、分析結果を述べる。

### 5.4.1 分析方法

ポートフォリオの CVaR の推定値を  $\widehat{\text{CVaR}}$ 、資産  $i$  投資比率を  $w_i$  とするとき、資産  $i$  の CVaR に対するリスク寄与  $RC_i^{\text{CVaR}}$  を式 (5.1) で与える。

$$RC_i^{\text{CVaR}} = w_i \frac{\partial \widehat{\text{CVaR}}}{\partial w_i}. \quad (5.1)$$

テイルリスク・パリティは、各資産がポートフォリオの CVaR に与える影響を分散する投資戦略であり、式 (5.1) で与えられた各資産の CVaR に対するリスク寄与を等しくするようポートフォリオの投資比率を決定する。具体的には、各資産の投資比率ベクトルを  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)'$  とし、式 (5.2) の最適化問題を解き最適投資比率を決定する。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{RC_i^{\text{CVaR}}}{\widehat{\text{CVaR}}} - \frac{1}{n} \right)^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{w}' \mathbf{1}_n = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

ただし、 $\mathbf{1}_n$  は  $n$  行 1 列、要素が全て 1 の行列である。なお、CVaR の信頼水準は 99% とする。

バックテストの手順は以下のとおりである。

- 1 2002 年 1 月 4 日から 2004 年 12 月 30 日までの 3 年分の実現リターンデータを用いて、式 (2.11) の周辺モデルを推定する。周辺モデルは AIC を用いて選択する。
- 2 AIC で選択した周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、ダイナミック非対称  $t$  コピュラとダイナミック正規コピュラのパラメータを推定する。



- 3 上記2で推定したコピュラを用いて、2005年1月7日（翌期）までの1期間の乱数を10万組生成する。
- 4 上記1の周辺モデルと2004年12月30日までの実現リターンデータを用いて、各資産について2005年1月7日までの1期間の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を計算する。
- 5 手順4の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を適用した周辺モデルを用いて、手順3で生成した乱数を6ファクターのリターンデータのサンプルに変換する。
- 6 手順5のリターンデータを用いて、式(5.2)によりテイルリスク・パリティの最適投資比率を求める。
- 7 2005年1月7日までの1期間の各資産の実現リターンデータを取り込み、上記1の周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、手順2から6に倣い2005年1月14日までの1期間の最適投資比率を求める。
- 8 以下、上記の作業を2021年12月30日まで繰り返す。なお、周辺モデルは1年毎に推定する。

リスク・パリティはリーマンショック以降にポートフォリオ運用の実務で最も普及した戦略の一つと言える。その多くはポートフォリオの分散をリスク尺度としたものであるが、足許の金融引き締め局面ではパフォーマンスが悪化している傾向にある。このような状況下、CVaRなどのテイルリスク尺度を活用したテイルリスク・パリティやリスク・パリティ適用後のポートフォリオのリスクが投資家のリスク許容度に即したターゲット水準以内に収まるよう、ポジションを一部キャッシュに置き換える等の対応策も検討されている。以下の実証分析では、上述した背景も考慮し分析した結果を考察する。

#### 5.4.2 分析結果

図5.9には、バックテスト期間におけるテイルリスク・パリティの最適投資比率の時系列推移、図5.10にはコピュラ間の最適投資比率の差分を示した。なお、AIC規準で選択されたダイナミック非対称 $t$ コピュラとAICが最も大きいダイナミック正規コピュラについて示した。以下では、この2つのコピュラの結果を用いて考察する。

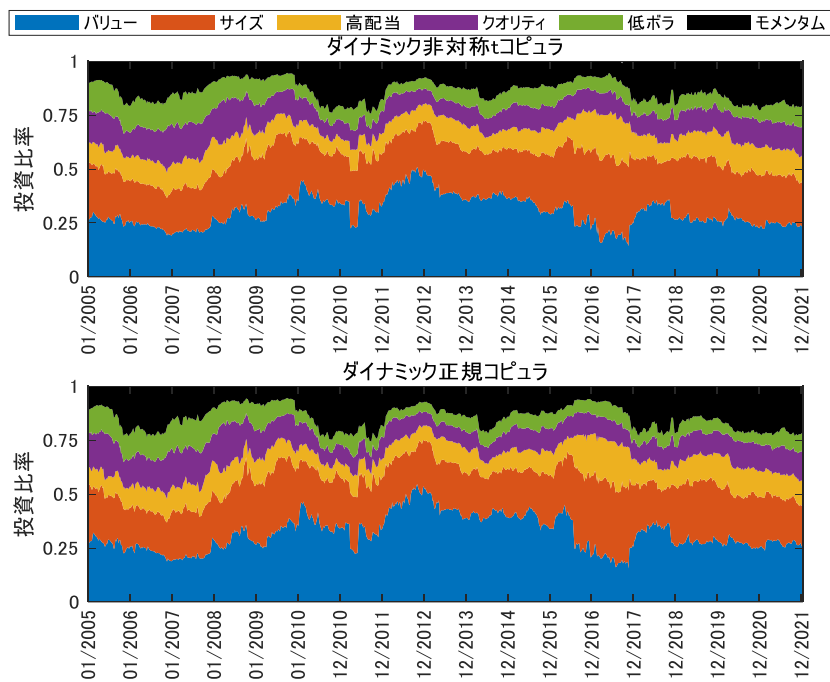


図 5.9: テイルリスク・パリティの最適投資比率の時系列推移

Notes: 2005年1月から2021年12月までのダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いたテイルリスク・パリティに関する最適投資比率を示した。なお、AIC 規準で選択されたダイナミック非対称 $t$ コピュラと AIC が最も大きいダイナミック正規コピュラについて示した。

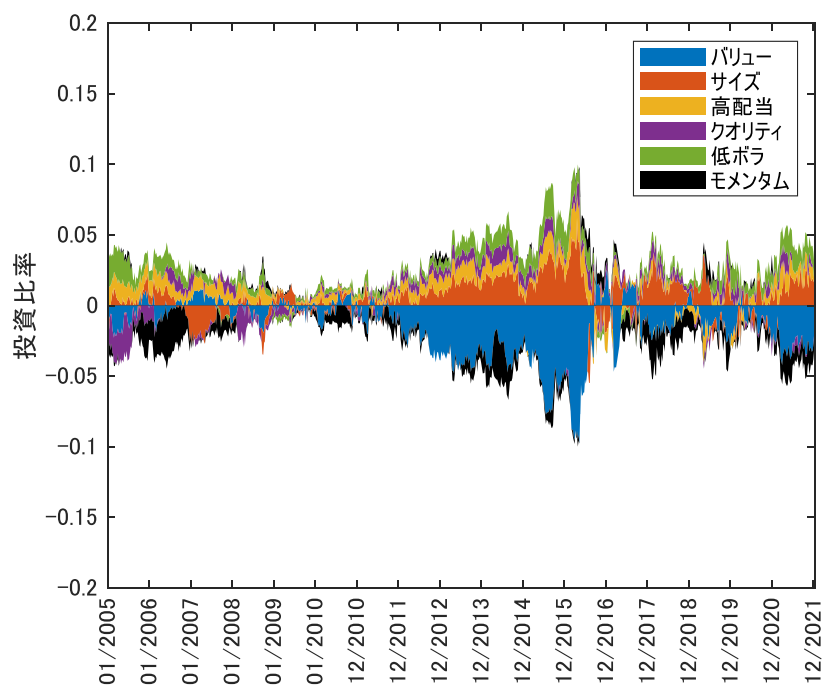


図 5.10: テイルリスク・パリティの最適投資比率に関するコピュラ間の乖離（非対称  $t$  コピュラー正規コピュラ）

Notes: ダイナミック非対称  $t$  コピュラからダイナミック正規コピュラの最適投資比率を引いた差分を 2005 年 1 月から 2021 年 12 月まで示した。

図 5.9 からは、どちらのダイナミックコピュラを用いた場合にもバリューとサイズの最適投資比率が高い傾向にあることが分かる。一方図 5.10 からは、バックテスト期間を通じてコピュラ間の最適投資比率に差分が生じていると読み取れる。差分の内容に着目すると、バックテスト期間の前半では時期によって差分の内容が異なる傾向にある。一方、バックテスト期間の後半はダイナミック非対称  $t$  コピュラがダイナミック正規コピュラに比べてバリューやモメンタムの最適投資比率が低く、その他のファクターの最適投資比率が高い傾向にある。差分の大きさに着目すると、大きい時期には 10% 程度、小さい時期では 1% から 3% 程度乖離している。最適投資比率の差分に関する時系列的な特徴に着目すると、2012 年から 2016 年に乖離幅が拡大している傾向にある。この時期は日本銀行による非伝統的金融政策やアベノミクス等の経済政策の効果を背景に株式が安定推移した期間に該当する。その中で割安株に焦点を当てるバリューの選好が低下し、5.3.2 項で示したとおりバリューと他のファクターとの相関は逆相関となる傾向が強まったと推察される。これに伴い、相関の観点からはバリューと他のファクターとの分散投資効果が高まり、図 5.9 のとおりテイルリスク・パリティにおけるバリューの最適投資比率は高位に維持される傾向にあった。一方、表 5.5 に示した自由度や歪度の水準からは、分布の裾での依存構造を考慮した場合、相関のみを考慮した場合と同等の分散投資効果は期待できないことが示唆される。したがって、ダイナミック非対称  $t$  コピュラではダイナミック正規コピュラに比べてバリューの最適投資比率が低下したと考えられる。以上を踏まえると、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いることで市場環境の変化に応じてファクターの相関の変化と分布の裾での依存構造の影響をともに考慮しテイルリスク・パリティを遂行できると示唆される。

テイルリスク・パリティを実務で遂行する場合、テイルリスク・パリティ適用後のポートフォリオの CVaR が投資家の定めるターゲット水準に一致する、あるいはターゲット水準以内に収まるよう、ポジションを一部キャッシュに置き換える場合が多い。CVaR のターゲット水準は投資家の各時点の財務状況やリスク許容度等によって定まるため、本章で実務に即したターゲットを設定することは難しい。一方、扱うコピュラによってテイルリスク・パリティの CVaR がどの程度乖離するかについては実務的にも重要な情報である。そこで図 5.11 には、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いてテイルリスク・パリティを適用したポートフォリオの CVaR を分子、ダイナミック正規コピュラの場合の CVaR を分母とした CVaR 比率の時系列推移を示した。

図 5.11 から、CVaR 比率は大宗の期間において 1.1 以上で推移しており、ダイナミック非対称  $t$  コピュラのテイルリスク・パリティの CVaR はダイナミック正規コピュラに比べて 10% 以上大きい傾向にあることが読み取れる。また、CVaR 比率は高い時期には 1.4 程度

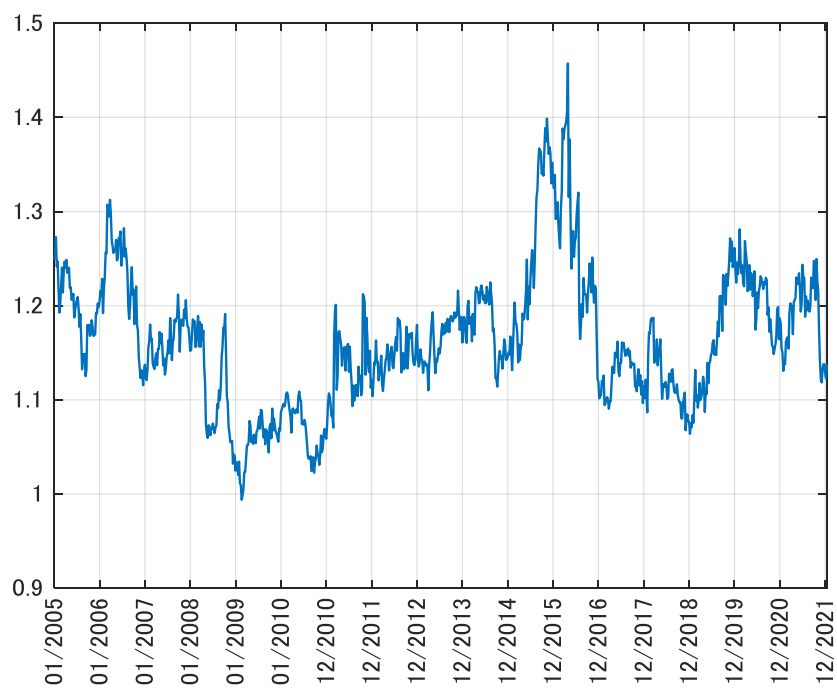


図 5.11: 各コピュラのテイルリスク・パリティのポートフォリオに関する CVaR 比率

Notes: ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いてテイルリスク・パリティを適用したポートフォリオの CVaR を分子, ダイナミック正規コピュラを用いてテイルリスク・パリティを適用したポートフォリオの CVaR を分母とした CVaR 比率を 2005 年 1 月から 2021 年 12 月まで示した。

まで上昇しており、ダイナミック非対称 $t$ コピュラの CVaR はダイナミック正規コピュラに比べて最大で 40% 程度大きいことが読み取れる。この時期は、図 5.10 で示した最適投資比率の乖離が拡大している時期に重なっており、バリューと他のファクターとの相関が逆相関となる傾向にあった時期に該当する。したがって、相関の観点からはバリューと他のファクターとの間で分散投資効果が高まり CVaR を低下させる作用が働いたと言える。一方、分布の裾での依存構造が相応に強い場合には、逆相関の場合の CVaR 比率は順相関の場合に比べて高まる傾向を 3 章で確認した<sup>76)</sup>。この点について、表 5.5 に示した自由度や歪度の水準からは、ファクターのリターンについて分布の裾での依存構造を考慮した場合、相関のみを考慮した場合と同等の分散投資効果は期待できず、逆相関性が高まる場合には CVaR 比率の上昇が示唆される。以上の背景から、バリューと他のファクターとの相関が逆相関となる傾向にあった時期に、ダイナミック非対称 $t$ コピュラとダイナミック正規コピュラの CVaR の乖離が高まり CVaR 比率が上昇したと考えられる。

表 5.8: コピュラ毎のテイルリスク・パリティ, リスクパリティのパフォーマンス

Notes: 2005 年 1 月から 2021 年 12 月におけるテイルリスク・パリティのパフォーマンスをコピュラ毎に示した。ダイナミック非対称 $t$ コピュラ (CVaR ターゲット) はダイナミック非対称 $t$ コピュラのテイルリスク・パリティ・ポートフォリオの CVaR がダイナミック正規コピュラのテイルリスク・パリティ・ポートフォリオの CVaR に一致するよう、ポジションを一部キャッシュに置き換えたケースである。なお、キャッシュレートには無担保コール翌日物レートを使用した。リスク・パリティの投資比率の特定にはダイナミック正規コピュラを用いた。リターンおよび下方偏差は年率換算後の数値である。

		テイルリスク・パリティ			リスク・パリティ ダイナミック 正規コピュラ
		ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ (CVaR制約)	ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ	ダイナミック 正規コピュラ	
リターン	a	0.005	0.005	0.004	0.004
下方偏差	b	0.020	0.022	0.022	0.022
最大ドローダウン	c	0.067	0.077	0.085	0.090
ソルティノレシオ	a/b	0.230	0.219	0.182	0.181
カルマーレシオ	a/c	0.068	0.064	0.048	0.045

最後に、表 5.8 にはバックテスト期間におけるテイルリスク・パリティのパフォーマンスをコピュラ毎に示した。ここでは、ポートフォリオの分散をリスク尺度としたリスク・パリティのパフォーマンスも併記した。なお、リスク・パリティの投資比率の特定にはダイナミック正規コピュラを用いた。ダイナミック非対称 $t$ コピュラ (CVaR ターゲット) は、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて構築したテイルリスク・パリティ・ポートフォリ

<sup>76)</sup>3 章では、非対称 $t$ コピュラの自由度、歪度が同じ水準の場合、相関がマイナスの場合の CVaR 比率はプラスの場合に比べて高くなることを示した。

オの CVaR がダイナミック正規コピュラを用いて構築したテイルリスク・パリティ・ポートフォリオの CVaR に一致するよう、ポジションを一部キャッシュに置き換えたケースである。また、テイルリスク対比のパフォーマンス論点であることに鑑み、パフォーマンス指標には下方偏差対比のリターンを評価するソルティノレシオ、最大ドローダウン対比のリターンを評価するカルマーレシオを採用した。なお、リターンおよび下方偏差は年率換算した数値である。

表 5.8 からは、最大ドローダウンが最も小さいのはダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いたテイルリスク・パリティ (CVaR ターゲット) であることが読み取れる。2 番目はダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いたテイルリスク・パリティ、3 番目はダイナミック正規コピュラを用いたテイルリスク・パリティであり、最大ドローダウンが最も大きいのはリスク・パリティであることが読み取れる。また、下方偏差についても最も小さいのはダイナミック非対称  $t$  コピュラ (CVaR ターゲット) であり、リターンには差は見受けられない。その結果として、ソルティノレシオやカルマーレシオはダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いたテイルリスク・パリティ (CVaR ターゲット)、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いたテイルリスク・パリティ、ダイナミック正規コピュラを用いたテイルリスク・パリティ、リスク・パリティの順に高いことが分かる。

テイルリスク・パリティが各ファクターのポートフォリオ全体の CVaR に対するリスク寄与を等しくしていることに鑑みると、テイルリスクが顕在化した際の各ファクターの寄与度に偏りが無いことが望ましい。そこで表 5.9 には、表 5.8 の最大ドローダウンに対する各ファクターのの寄与度をコピュラ毎に示した。

表 5.9: 各戦略の最大ドローダウンに対するファクターの寄与度

Notes: 表 5.8 の最大ドローダウンに対する各ファクターのの寄与度を戦略毎に示した。符号がマイナスのファクターはリターンがプラスであることを意味している。

	テイルリスク・パリティ			リスク・パリティ ダイナミック 正規コピュラ
	ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ (CVaR 制約)	ダイナミック 非対称 $t$ コピュラ	ダイナミック 正規コピュラ	
バリュー	0.043	0.053	0.056	0.057
サイズ	0.012	0.014	0.015	0.015
高配当	0.018	0.020	0.022	0.022
クオリティ	-0.011	-0.014	-0.012	-0.012
低ボラティリティ	0.010	0.012	0.012	0.016
モメンタム	-0.006	-0.008	-0.008	-0.008

表 5.9 から、全てのコピュラについてバリューの寄与度が 6 ファクターの中で最も大きいことが分かる。一方、コピュラ間の比較ではリスク・パリティ、ダイナミック正規コピュ

ラを用いたテイルリスク・パリティ, ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いたテイルリスク・パリティ, ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いたテイルリスク・パリティ (CVaR ターゲット) の順にバリューの寄与度が大きいことが読み取れる. また, 全てのコピュラについて高配当の寄与度が6ファクターの中で2番目に大きいことが分かる. 一方, コピュラ間の比較では上記と同様にリスク・パリティ, ダイナミック正規コピュラを用いたテイルリスク・パリティ, ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いたテイルリスク・パリティ, ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いたテイルリスク・パリティ (CVaR ターゲット) の順にバリューの寄与度が大きいことが読み取れる. これらの結果がコピュラ間の最大ドローダウンの乖離に繋がっている.

以上の結果を踏まえると, テイルリスク・パリティの活用したファクター投資により, リスク・パリティに比べて最大ドローダウン, 最大ドローダウン対比の投資効率性が改善すると示唆される. また, ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて分布の裾での依存構造の影響を考慮しテイルリスク・パリティを構築することで, テイルリスク顕在化時の各ファクターの寄与度の偏りを緩和し, 最大ドローダウン対比の投資効率性の改善に繋がること, さらにポートフォリオの CVaR の目標水準を定めテイルリスクをコントロールすることで, 既述の効率性の更なる改善に繋がることが示唆される.

## 5.5 終わりに

本章では, 本邦株式市場の代表的なスタイルファクター間の依存構造を4章で扱ったダイナミックコピュラで捕捉した. そのうえで, (1) ファクター間の相関の時系列推移の特徴, (2) 分布の裾での依存構造の有意性と特徴, (3) コピュラの違いがテイルリスク・パリティの CVaR, パフォーマンスに与える影響について考察した. ダイナミック非対称 $t$ コピュラの AIC は最も低く, 同コピュラを用いることで AIC 規準の観点からデータへの適合度が改善したと考えられる. また, (1) から (3) の研究課題については以下の主要結果を得た.

- (1) 相関の推移について, 全てのファクター間の相関は安定的に無相関ではなく時系列に変動しており, 順相関領域と逆相関領域を跨いで変動する特徴があることを示した. 加えて, 6ファクターの中ではサイズが安定して無相関であることを示した.
- (2) ダイナミックコピュラの自由度は, 観測期間を通じてパラメータが一定のコピュラよりも高く, コピュラの相関行列に cDCC を適用し相関の短期的な変動を捕捉することで, 分布の裾での依存構造の影響が弱まることを示した. 加えて, ファクター



間の分布の裾での依存構造について、上昇時よりも下落時に強まるといった非対称性を有することを示した。

- (3) テイルリスク・パリティの CVaR はコピュラによって異なり、AIC 規準で選択されたダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いた場合、ダイナミック正規コピュラに比べて最大 40% 程度 CVaR が大きくなることを示した。加えて、テイルリスク・パリティの活用により、リスク・パリティに比べて最大ドローダウン、最大ドローダウン対比の投資効率性が改善することを示した。さらには、ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いて分布の裾での依存構造を捕捉し、CVaR の目標水準を定めたテイルリスク・パリティを構築することで、最大ドローダウン、最大ドローダウン対比の投資効率性が改善することを示した。

これらの研究結果を勘案すると、ファクター間の相関の変動や分布の裾での依存構造を捕捉し、CVaR の目標水準を考慮したテイルリスク・パリティを構築することで、ドローダウンやドローダウン対比の投資効率性に配慮したファクター投資に繋がると示唆される。

# 第6章 MSダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いた本邦株式市場のセクター間の依存構造の分析

## 6.1 はじめに

3章ではパラメータが観測期間を通じて一定な非対称 $t$ コピュラ (Skewed  $t$  Copula, 以下, 本章では「StC」とする.) を扱った. 4章, 5章では StC に cDCC を適用したダイナミック非対称 $t$ コピュラ (Dynamic Skewed  $t$  Copula, 以下, 本章では「DStC」とする.) を活用し, 相関の短期的な変動に加え分布の裾での依存構造やその非対称性を捕捉することで, AIC 規準の観点からデータへの適合度が改善することを確認した<sup>77)</sup>. 一方, 自由度および歪度は観測期間を通じて一定として扱った<sup>78)</sup>.

依存構造は上述したように短期的に変化するだけでなく, 市場環境などと対応し中期的なサイクルで変化することも考えられる. 実際に, 2008年のリーマン・ショックや2020年の新型コロナ・ショックなど本邦株式市場のテイルリスク顕在化局面<sup>79)</sup>では, リスク・イベントなどを起点としてパフォーマンスが業種に関係なく一斉に悪化し, その後も一定期間同様の傾向が続いた. こうしたテイルリスク顕在化局面では, ポートフォリオのパフォーマンスが想定以上に悪化し, CVaR 等のテイルリスクの推定精度が低下する傾向にある.

上述した課題に対する一つの手段として, 分布の裾での依存構造や非対称性を捕捉できるコピュラに状態変化を導入しポートフォリオの CVaR を推定することが考えられる. テイルリスク顕在化局面では, 資産間の分布の裾での依存構造が下落方向に一斉に強まっていると想定され, この点を上述したコピュラの状態変化によって捕捉すると期待できるか

---

<sup>77)</sup>ダイナミック $t$ コピュラが $t$ コピュラに比べて, またダイナミック正規コピュラが正規コピュラに比べて AIC が改善することも同時に示した.

<sup>78)</sup>Christoffersen et al. (2012) 等の DStC を用いた先行研究においても, 自由度や歪度は観測期間を通じて一定である.

<sup>79)</sup>本邦株式市場のテイルリスク顕在化局面に繋がった主な出来事は表 6.2 に纏めている.

らである。代表的なコピュラの候補としては、クレイトンコピュラ等の下落時の分布の裾での依存構造を捕捉できるアルキメディアンコピュラや StC が挙げられる。アルキメディアンコピュラと正規コピュラをマルコフ転換する MS コピュラを用いた実証分析はこれまでも行われてきた (Rodriguez (2007), Okimoto (2008), Durand et al. (2010), Wang et al. (2013), Tachibana (2020), Tiwari et al. (2020))。これらの先行研究では変量数が 2 変量の分析が主である。その背景として、アルキメディアンコピュラは変量数の増加に対してパラメータが増加せず、比較的高次元の多変量データの依存構造の捕捉に対応し難いことが挙げられる (Clemente and Romano (2004))。

一方、StC の自由度、歪度は全ての変量間の裾依存性を表現する<sup>80)</sup>。したがって、StC の自由度や歪度がマルコフ転換する MS コピュラを活用すれば、相関行列にて多変量データに関する線形の依存構造を捉えつつ、分布の裾での依存構造やその非対称性に関する一斉的な変化を捉えることが期待できる。さらに、DStC の自由度と歪度がマルコフ転換する MS ダイナミック非対称  $t$  コピュラ (Markov Switching Dynamic Skewed  $t$  Copula, 以下、本章では「MSDStC」とする。) を活用すれば、相関の時変性によっても捕捉されない、分布の裾での依存構造やその非対称性に関する状態変化に着目することとなり、先述したテイルリスク顕在化局面の捕捉に繋がることが期待される。なお、本章では、データの観測頻度毎に生じる短期的な変化を「時変性」、中期的なサイクルでの遷移を「状態変化」と表現し、両者を区別する。

以上の背景を踏まえ本章ではダイナミック DStC の自由度、歪度の状態変化を MS モデルにより捕捉できる MSDStC を用いて、本邦株式市場の依存構造を研究する。具体的には、TOPIX-17 シリーズ<sup>81)</sup>業種を分析対象とし、(1) 自由度、歪度の状態変化が示唆する市場環境、(2) 資産間の下側裾依存性に関する動的特徴、(3) 自由度、歪度の状態変化の捕捉が VaR や CVaR の推定精度に与える影響について考察する<sup>82)</sup>。

本章の構成は、次のとおりである。6.2 節では本章で導入する MSDStC について述べる。6.3 節ではモデルの推定結果を考察する。6.4 節では VaR および CVaR に関する推定精度の検証について述べる。6.5 節では結論を述べる。

---

<sup>80)</sup> StC の歪度は各変量につき一つ割り当てることができる。本章では研究目的に鑑み共通の歪度を適用する。

<sup>81)</sup> TOPIX を構成する 17 業種の株価指数である。

<sup>82)</sup> 2 章で述べたように、MS ダイナミックコピュラは近年ファイナンスの実証分析に活用されている (Boubaker and Sghaier (2016), Fei et al. (2017), Ji et al. (2020), Tiwari et al. (2020), Maneejuk et al. (2021))。これらの先行研究では、MSDStC への拡張や MSDStC によるテイルリスク管理への応用は考察されていない。

## 6.2 MS ダイナミック非対称 $t$ コピュラ

本節では本章で導入する MSDStC, パラメータの推定方法の順に記載する.

### 6.2.1 モデルの概要

本項では, MSDStC のベースとなる DStC について再掲した後, MSDStC について記載する.

まず, 4.2 節で記載した DStC を再掲する. 非対称  $t$  コピュラの相関行列に cDCC を適用したコピュラである. 時点  $s$  における相関行列を  $\Sigma_s$ , cDCC のパラメータを  $\alpha$  および  $\beta$ , 無条件相関行列を  $\bar{Q}$ , 自由度を  $\nu$ , 歪度のベクトルを  $\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  とすると<sup>83)</sup>,  $n$  変量の DStC は次式のとおりである.

$$C^{dst}(\mathbf{u}; \Sigma_s, \nu, \gamma) = ST_n(ST_1^{-1}(u_1; \nu, \gamma_1), \dots, ST_1^{-1}(u_n; \nu, \gamma_n); \Sigma_s, \nu, \gamma). \quad (6.1)$$

ここで,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)'$  であり, 相関行列  $\Sigma_s$  の変動過程は以下のとおりである.

$$\Sigma_s = \text{diag}(\mathbf{Q}_s)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_s \text{diag}(\mathbf{Q}_s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.2)$$

$$\xi_{s,i} = ST_1^{-1}(u_{s,i}; \nu, \gamma_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{Q}_s = (1 - \alpha - \beta)\bar{\mathbf{Q}} + \alpha\Psi(\xi_{s-1}, \mathbf{Q}_{s-1}) + \beta\mathbf{Q}_{s-1}, \quad (6.4)$$

$$\Psi(\xi_s, \mathbf{Q}_s) = \text{diag}(\mathbf{Q}_s)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\nu-2}{\nu} \left( \left( \xi_s - \frac{\nu}{\nu-2}\gamma \right) \left( \xi_s - \frac{\nu}{\nu-2}\gamma \right)' - \frac{2\nu^2\gamma\gamma'}{(\nu-2)^2(\nu-4)} \right) \right) \text{diag}(\mathbf{Q}_s)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.5)$$

ここで,  $\xi_s = (\xi_{s,1}, \dots, \xi_{s,n})'$  である. 式 (6.1) の  $ST_n$  は,  $n$  変量一般化双曲非対称  $t$  分布の分布関数を示している. 式 (6.3) の  $ST_1^{-1}$  は, 1 変量一般化双曲非対称  $t$  分布に関する分布関数の逆関数 (分位点関数) を示している. DStC は時点  $s-1$  までの情報にもとづき, 時点  $s$  の相関行列  $\Sigma_s$  が式 (6.2), (6.4), (6.5) で表される cDCC によって変動する. 一方, 自由度  $\nu$  および歪度のベクトル  $\gamma$  は定数として扱われている.

次に MSDStC について説明する. MSDStC では, DStC のパラメータに MS モデルを組み込む. MS モデルを導入する際に検討すべき重要な点の一つは, どのパラメータに状態変化を取り入れるかを定めることである. 本章では, 本邦株式市場のテイルリスク顕在化局面と平常局面を依存構造の状態変化によって捕捉できるか検証することを目的の一つとしており, テイルリスク顕在化局面に関係する資産間の裾依存性に着目した. DStC の自

<sup>83)</sup>本章では全ての変量に共通する歪度を適用する. したがって,  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n$  となる.

自由度  $\mathbf{v}$ , 歪度のベクトル  $\boldsymbol{\gamma}$  は全変量の裾依存性を表現することに鑑み, これらに MS モデルを適用し MSDStC に拡張する. 具体的には, 式 (6.1) の  $\mathbf{v}$  および  $\boldsymbol{\gamma}$  が状態変数  $a_s$  に従って変化するモデルを構築する. ここで, 状態変数  $a_s$  は式 (6.6) で表されるマルコフ連鎖に従う.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p^{11} & \dots & p^{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{K1} & \dots & p^{KK} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

$p^{kk'} = P(a_s = k' | a_{s-1} = k)$  は, 時点  $s-1$  において状態  $k$  である場合に, 時点  $s$  に状態  $k'$  に遷移する確率を示しており, 状態数は  $K$  個としている. また, 式 (2.11) における誤差項  $\varepsilon_{s,i}$  は, 状態変数  $a_s$  が所与の条件のもとで  $a_w (w < s)$  と独立である. この時, 時点  $s$  における相関行列を  $\boldsymbol{\Sigma}_s$  とし,  $a_s = k (k = 1, \dots, K)$  における自由度を  $\mathbf{v}^k$ , 歪度のベクトルを  $\boldsymbol{\gamma}^k$  とすると, MSDStC は, 式 (6.1) から式 (6.5) を用いて次式のように表される.

$$C^{msdst}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\Sigma}_s, \mathbf{v}^{a_s}, \boldsymbol{\gamma}^{a_s}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{1}_{\{a_s=k\}} C^{dst}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\Sigma}_s, \mathbf{v}^k, \boldsymbol{\gamma}^k). \quad (6.7)$$

式 (6.7) は, 状態  $a_s$  に依存して自由度  $\mathbf{v}^k$ , 歪度のベクトル  $\boldsymbol{\gamma}^k$  が決定され, DStC を構築することを示している.

次に, パラメータの推定に必要な尤度について説明する. 時点  $s$  までの情報を  $\boldsymbol{\Omega}_s = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\}$  とする時, MSDStC の尤度関数は次式のように表される.

$$c^{msdst}(\boldsymbol{\Sigma}_s, (\mathbf{v}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)_{k \in \{1, \dots, K\}} | \boldsymbol{\Omega}_s) = \boldsymbol{\Xi}_s' \boldsymbol{\Phi}_{s|s-1}. \quad (6.8)$$

ただし,

$$\boldsymbol{\Xi}_s = \begin{pmatrix} c^{dst}(\boldsymbol{\Sigma}_s, \mathbf{v}^1, \boldsymbol{\gamma}^1 | \boldsymbol{\Omega}_s) \\ \vdots \\ c^{dst}(\boldsymbol{\Sigma}_s, \mathbf{v}^K, \boldsymbol{\gamma}^K | \boldsymbol{\Omega}_s) \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{s|s-1} = \begin{pmatrix} P(a_s = 1 | \boldsymbol{\Omega}_{s-1}) \\ \vdots \\ P(a_s = K | \boldsymbol{\Omega}_{s-1}) \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

と定めた. 式 (6.9) は,  $a_s = k (k = 1, \dots, K)$  における DStC の尤度関数を示しており, 式 (6.10) は  $a_s = k (k = 1, \dots, K)$  の状態確率の予測値を示している. 各時点において式 (6.8) を計算するためには, 式 (6.10) を更新し, 式 (6.9) の自由度  $\mathbf{v}^k$ , 歪度のベクトル  $\boldsymbol{\gamma}^k$  を決定す

る必要がある。ここでは、Hamilton (1989) にもとづき式 (6.11) によりフィルタ確率を計算し、式 (6.12) によって状態確率の予測値を更新する。

$$\Phi_{s|s} = \frac{\Xi_s \odot \Phi_{s|s-1}}{\mathbf{1}'(\Xi_s \odot \Phi_{s|s-1})}, \quad (6.11)$$

$$\Phi_{s+1|s} = \mathbf{P}' \Phi_{s|s}. \quad (6.12)$$

ここで、 $\odot$  はアマダール積、 $\mathbf{P}$  は式 (6.6) で示した  $a_s$  の遷移確率行列である。なお、初期状態  $a_0$  の分布には遷移確率行列  $\mathbf{P}$  のマルコフ連鎖の定常分布を採用する。また、スムーザ確率は、Kim (1994) にもとづき式 (6.13) により計算する。

$$\Phi_{s|S} = \Phi_{s|s} \odot (\mathbf{P}'(\Phi_{s+1|S} \otimes \Phi_{s+1|s})), \quad s = 1, \dots, S-1. \quad (6.13)$$

ここで、 $\otimes$  はアダマール除算である。

観測時点数を  $S$  個とした時、MSDStC の対数尤度関数  $L^{msdst}$  は、式 (6.8) を用いて式 (6.14) のように表される<sup>84)</sup>。

$$L^{msdst}(\alpha, \beta, (\mathbf{v}^k, \gamma^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}, \mathbf{P}) = \sum_{s=1}^S \log(c^{msdst}(\Sigma_s, (\mathbf{v}^k, \gamma^k)_{k \in \{1, \dots, K\}} | \Omega_s)). \quad (6.14)$$

## 6.2.2 パラメータの推定方法

本章ではMSDStCに加え、比較対象として、DStCおよびStCを採用しパラメータを推定する。MSDStCとDStCの比較によって、自由度および歪度に状態変化を考慮する効果を確認でき、またDStCとStCの比較によって相関行列に時変性を考慮する効果を確認できる。以上を踏まえ、比較対象としてDStCおよびStCを採用した。モデルのパラメータの推定に際しては、周辺モデルとコピュラのパラメータを別々に推定するIFM法を採用する。コピュラのパラメータの推定に際しては、MSDStCにはDempster et al. (1977) のEMアルゴリズムを、DStCおよびStCには最尤法を適用する。以下では、まず、MSDStCのパラメータに関する推定上の課題を述べ、その対応方法を先行研究をもとに記載する。次に、EMアルゴリズムを用いたMSDStCのパラメータの推定方法について記載する。

本章で扱うMSDStCの推定に際しては、cDCCを構成する無条件相関行列  $\bar{\mathbf{Q}}$  の推定に関する課題がある<sup>85)</sup>。無条件相関行列  $\bar{\mathbf{Q}}$  は、変量数の増加に伴いパラメータ数が変量数

<sup>84)</sup>cDCCの無条件相関行列  $\bar{\mathbf{Q}}$  については、後述するモーメント・マッチング法にもとづき計算するため、推定するパラメータに含んでいない。

<sup>85)</sup>DStCおよびStCについても同様の課題が当てはまるため、これらのコピュラにも後述する手法を採用する。

の二乗で増加し、推定時における計算負荷が増大する。本章の分析対象データは17変量、 $\overline{Q}$ を構成するパラメータ数は136個であり、相応に高次元の多変量時系列データである。Engle and Mezrich (1996)では、高次元の多変量時系列データに多変量 GARCH モデルを適用する際、無条件相関行列の推定にモーメント・マッチング法を用いている。また、Christoffersen et al. (2018)では、高次元の多変量時系列データに対して DStC を適用する際、Engle and Mezrich (1996)をもとにモーメント・マッチング法を用いて同コンピュータの無条件相関行列を推定している。以上の点を踏まえ、本章でもモーメント・マッチング法により無条件相関行列  $\overline{Q}$  を推定する。なお、MSDStC では、状態  $a_s$  に依存して自由度  $v^k$  や歪度のベクトル  $\gamma^k$  が決まるため、無条件相関行列の推定に使用する一般化双曲非対称  $t$  分布関数の逆関数（分位点関数） $\xi_s$  は、状態数である  $K$  個分だけ存在する。各状態の無条件相関行列をモーメント・マッチング法によって計算し、パラメータを推定することもできるが<sup>86)</sup>、その場合には cDCC のパラメータである  $\alpha$  および  $\beta$  は状態に依存しない一方、無条件相関行列は状態に依存することとなり、cDCC のパラメータに関する整合性がとれない。そこで本章では、まず DStC のパラメータを推定し、その際にモーメント・マッチング法により推定した無条件相関行列を MSDStC の無条件相関行列に適用する。

Dempster et al. (1977) によって提案された EM アルゴリズムは、不完全な状態で観測されたデータについて最尤推定値を求める手法である。Hamilton (1990) では、EM アルゴリズムを用いることで、初期値に対して頑健的な最尤推定値が求まることを確認している。また、MS コピュラを用いた多くの先行研究では、パラメータ推定方法に EM アルゴリズムを採用している。これらの点を勘案し、本章では MSDStC のパラメータの推定に EM アルゴリズムを用いる。

具体的な推定手順は、以下のとおりである<sup>87)</sup>。

- 1 パラメータの初期値  $\alpha_0, \beta_0, (v_0^k, \gamma_0^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}, P_0$  を設定する。
- 2 時点  $S$  までの情報を用いて、各時点のフィルタ確率 (6.11)、状態確率の予測値 (6.12)、スムーザ確率 (6.13) を計算する。
- 3 状態確率の予測値 (6.12) を所与として、対数尤度関数 (6.14) を最大化するようパラメータ  $\alpha_1, \beta_1, (v_1^k, \gamma_1^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}$  を求める。

<sup>86)</sup>  $v$  および  $\gamma$  を変化させた場合に、モーメント・マッチング法によって計算される無条件相関行列の変化が実証分析から得られる示唆に影響を及ぼさないことは、事前に確認している。

<sup>87)</sup> EM アルゴリズムによる MS モデルの推定手順に関する詳細については、Franses and Dijk (2000) などを参照されたい。

4 遷移確率  $P_0$  と手順2で計算したフィルタ確率, 状態確率の予測値, スムーザ確率を用いて,  $s = 1, \dots, S-1$  について  $(\tilde{p}_{s+1}^{ij})_{i,j \in \{1, \dots, K\}}$  を計算する.

$$\tilde{p}_{s+1}^{ij} := P(a_s = i, a_{s+1} = j | \Omega_S; \alpha_0, \beta_0, (\mathbf{v}_0^k, \gamma_0^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}, P_0) = \phi_{s|s}^i \frac{\phi_{s+1|S}^j}{\phi_{s+1|s}^j} p_0^{ij}.$$

ここで,  $\phi_{s|s}^i$  はフィルタ確率 (6.11) の  $a_s = i$  の要素,  $\phi_{s+1|s}^i$  は状態確率の予測値 (6.12) の  $a_{s+1} = j$  の要素,  $\phi_{s+1|S}^i$  はスムーザ確率 (6.13) の  $a_{s+1} = j$  の要素を示している. また,  $(p_0^{ij})_{i,j \in \{1, \dots, K\}}$  は  $P_0$  の構成要素である.

5 以下の式を用いて,  $P_1$  の構成要素である  $(p_1^{ij})_{i,j \in \{1, \dots, K\}}$  を計算する.

$$p_1^{ij} = \frac{\sum_{s=2}^S \tilde{p}_s^{ij}}{\sum_{s=2}^S \phi_{s-1|S}^i}.$$

6 手順1のパラメータの初期値  $\alpha_0, \beta_0, (\mathbf{v}_0^k, \gamma_0^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}, P_0$  を手順3から5で計算した  $\alpha_1, \beta_1, (\mathbf{v}_1^k, \gamma_1^k)_{k \in \{1, \dots, K\}}, P_1$  に置き換える.

7 手順2から6のプロセスを繰り返し行い, 尤度の上昇が止まった時点のパラメータを最終的な推定値とする.

なお, 上記の手順において, 手順2がEステップ, 手順3から5がMステップに該当する.

MSモデルでは, モデルの推定に際して状態数を決定する必要がある. 本章ではMSDStCの自由度, 歪度の状態変化が本邦株式市場のテイルリスク顕在化局面とそれ以外の平常局面に対応するののかについて検証することを目的の一つとしているため, 状態数  $K = 2$  とした. 特に実務では, 前者のような局面を異常局面として検知できることが望ましく, 様々な定量分析が行われている. こうした実務における市場環境の認識に状態数を対応させることで, 研究結果を実務的な議論と対応させ, 学術面および実務面の両面にとって有用な示唆を享受できると考えられる.

### 6.3 セクター間の依存構造の特徴分析

本節では, 分析対象データ, 周辺モデルの推定結果, コピュラの推定結果の順に説明する.



### 6.3.1 分析対象データ

分析対象データは、TOPIX-17シリーズのリターンデータである。観測期間は2005年1月4日から2020年4月30日、観測頻度は日次、観測時点数は3754時点である。

TOPIX-17シリーズは、TOPIX構成銘柄を業種別に分類した株価指数であり、東京証券取引所が従来から活用してきた33業種分類について、投資利便性を考慮し17業種に再編したものである。その利便性の高さから同シリーズの業種別株価指数に連動するETFが開発されており、資産運用実務においても、業種やセクターのリスクをコントロールする手段として活用されている。また、業種間の依存構造は、業種間の分散投資効果を勘案し、ポートフォリオの業種別投資比率の目安や上限を設定する際に活用される。したがって、TOPIX-17シリーズを用いた依存構造の研究は、本邦株式市場の依存構造の特徴を明らかにすることに繋がり、また、資産運用実務において有用かつ応用可能な示唆を齎すと考えられる。

表6.1には、分析対象データの基本統計量を示した。表6.1からは、分析対象の特徴として、リターンの平均は、電気・ガス、銀行を除く大宗の業種がプラスであること、リターンの歪度は、自動車・輸送機、鉄鋼・非鉄、銀行、不動産を除く業種がマイナスであること、リターンの尖度は、全ての業種が正規分布に比べて大きいことが読み取れる。

本邦株式市場に影響を与えた主な出来事を表6.2、業種毎の累積リターンを図6.1、分析対象データの均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターンを図6.2<sup>88)</sup>に示した。これらから、表6.2で示した出来事を起点として大宗の業種のパフォーマンスが一斉に悪化し、その後も一定期間は同様の傾向が続くことが読み取れる。

### 6.3.2 周辺モデルの推定結果

周辺モデルの推定手順は3章以降と同様である。各業種のリターンデータに対する時系列モデルは式(2.11)で与える。本節では、式(2.11)における条件付き期待収益率 $\mu_{s|s-1,i}$ の時系列構造はARMAモデルを、条件付き分散(標準偏差) $\sigma_{s|s-1,i}^2$ の時系列モデルはGARCHモデルおよびGJRモデルを適用する。また、誤差項 $\varepsilon_{s,i}$ の分布には、正規分布、 $t$ 分布と、Jondeau and Rockinger (2006)等に倣いHansen (1994)の非対称 $t$ 分布を採用する。モデルのパラメータは最尤法によって推定し、AIC規準によりモデルを採択する。なお、推定に際しては、AR項の次数は1または2、MA項の次数は0から2まで、GARCH

<sup>88)</sup>分析対象の趨勢的な変動を分かりやすく示すため、均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターンを示した。

表 6.1: 分析対象データ

No	名称	東証33業種分類	平均	標準偏差	歪度	尖度
1	TOPIX-17 食品	水産・農林業 食料品	0.00026	0.012	-0.247	8.148
2	TOPIX-17 エネルギー資源	鉱業 石油・石炭製品	0.00007	0.019	-0.083	3.744
3	TOPIX-17 建設・資材	建設業 金属製品 ガラス・土石製品	0.00018	0.015	-0.048	7.689
4	TOPIX-17 素材・化学	繊維製品 パルプ・紙 化学	0.00025	0.014	-0.169	7.912
5	TOPIX-17 医薬品	医薬品	0.00027	0.013	-0.319	7.506
6	TOPIX-17 自動車・輸送機	ゴム製品 輸送用機器	0.00021	0.017	0.249	6.940
7	TOPIX-17 鉄鋼・非鉄	鉄鋼 非鉄金属	0.00007	0.020	0.096	6.099
8	TOPIX-17 機械	機械	0.00034	0.018	-0.053	5.897
9	TOPIX-17 電機・精密	電気機器 精密機器	0.00024	0.016	-0.205	5.929
10	TOPIX-17 情報通信・サービスその他	その他製品 情報・通信業 サービス業	0.00026	0.012	-0.299	6.489
11	TOPIX-17 電気・ガス	電気・ガス業	-0.00005	0.015	-0.133	7.272
12	TOPIX-17 運輸・物流	陸運業 海運業 空運業 倉庫・運輸関連業	0.00014	0.012	-0.010	7.317
13	TOPIX-17 商社・卸売	卸売業	0.00029	0.017	-0.124	7.050
14	TOPIX-17 小売	小売業	0.00021	0.013	-0.267	7.208
15	TOPIX-17 銀行	銀行業	-0.00008	0.018	0.233	5.797
16	TOPIX-17 金融(除く銀行)	証券、商品先物取引業 保険業 その他金融業	0.00007	0.020	-0.007	5.557
17	TOPIX-17 不動産	不動産業	0.00031	0.021	0.200	5.144

表 6.2: 本邦株式市場に影響を与えた主な出来事

No	出来事	時期	概要
1	上海ショック	2007年2月	中国の上海株式市場の大幅下落が起点となり、世界同時株安が生じた。
2	BNPパリバ・ショック	2007年8月	BNPパリバが同行傘下のミューチュアル・ファンドの解約を凍結したことで、サブプライムローン関連商品への懸念が高まり、世界的な株価下落に繋がった。
3	リーマン・ショック	2008年9月	リーマン・ブラザーズ・ホールディングスが経営破綻したことに端を発し、連鎖的に世界規模の金融危機が生じ、世界同時株安へと繋がった。
4	欧州債務危機	2009年～2012年	ギリシャの信用不安を発端に、南欧諸国を中心に信用リスクが急速に高まった。信用リスクへの懸念は、断続的に顕在化し、2012年まで、たびたび世界的な株価下落を引き起こした。
5	東日本大震災	2011年3月	地震による災害、福島第一原子力発電所事故による災害によって、本邦株式市場の大幅下落が生じた。
6	バーナンキ・ショック	2013年5月	2013年5月FOMC後に、ベン・バーナンキFRB議長が量的緩和の縮小・引き締めを行う方針であるとの発言をしたことにより、世界的な株安へと繋がった。
7	チャイナ・ショック	2015年8月～9月 2016年1月	中国景気の減速から世界経済の減速懸念が高まり、世界的な株安に繋がった。
8	英国の欧州連合離脱	2016年6月	英国国民投票の結果、英国の欧州連合からの離脱が決定し、世界的な株安が生じた。特に、日本株式市場は円高の影響が大きく、下げ幅は大きかった。
9	VIXショック	2018年2月	米国株式のインプライド・ボラティリティに関する指数であるVIXの急上昇により、世界的同時株安が発生した。
10	米中貿易摩擦深刻化	2018年12月	米国の要請により、中国通信機器大手の副会長をカナダ当局が逮捕したことで、米中貿易摩擦への懸念が高まり、世界的な同時株安へと繋がった。
11	新型コロナ・ショック	2020年2月～	新型コロナウイルスの感染拡大およびこれに伴う世界的な経済活動の停止により、世界的同時株安が生じた。

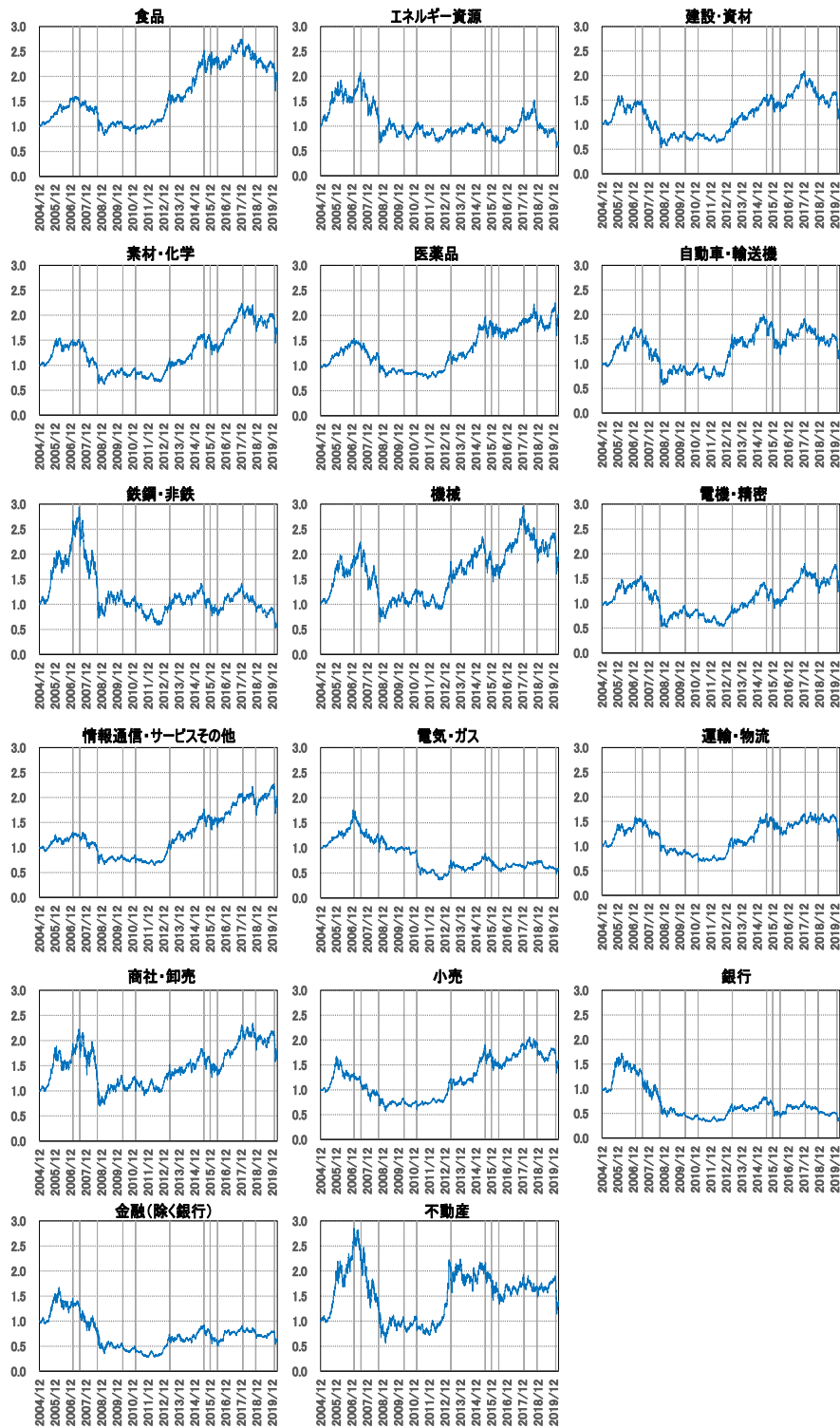


図 6.1: 分析対象データの累積リターン

Notes: 2004年12月30日を1(単位は日本円)としている。また、表6.2の本邦株式市場に影響を与えた主な出来事が生じた時点を縦線(灰色)で図示している。

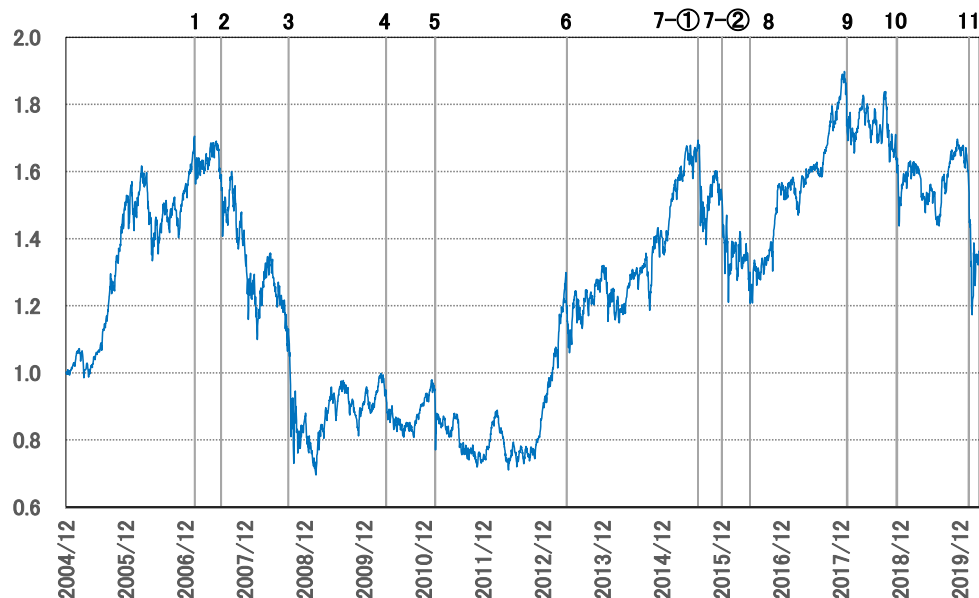


図 6.2: 分析対象データの均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターン

Notes : 2004 年 12 月 30 日を 1() としている。また、表 6.2 の本邦株式市場に影響を与えた主な出来事が生じた時点を縦線（灰色）で図示し、対応する番号を上部に示している。

項もしくは GJR 項の次数は (1,1) とする<sup>89)</sup>。また、非対称  $t$  分布を誤差項分布に適用する場合、AR 項の次数は 1, MA 項の次数は 0 または 1 とする<sup>90)</sup>。

各業種のリターンデータに関する周辺モデルおよび誤差項分布の推定結果は表 6.3 のとおりである。表 6.3 からは、分散の構造モデルとしては、全ての業種で GJR モデルが採用されることを確認できる。したがって、全ての業種において、リターンのショックが分散に与える影響について非対称性を有することが分かる。また、誤差項分布には  $t$  分布あるいは非対称  $t$  分布が選択され、非対称  $t$  分布が選択される場合の歪度は、銀行、不動産を除くすべての業種でマイナスであることを確認できる。したがって、全ての業種の誤差項分布はファットテイルであり、誤差項分布に非対称性が認められる業種では、その大宗がマイナス方向に裾の長い歪みを有することが分かる。さらに、全てのデータが有意水準 5% において、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」が棄却されないことを確認できる。

<sup>89)</sup>GARCH 項, GJR 項に関する次数を増加させても、モデルの精度が大きく向上しないことを事前に確認したこと、Hansen (1994) に記されているように、GARCH モデルに関しては、GARCH (1,1) が選択されることが多く、天下り的に GARCH (1,1) を適用する先行研究が多数あることを勘案し、既述の取扱いとした。

<sup>90)</sup>同分布を適用する際、モデルのパラメータ数を増加させると、推定精度が安定しないため、既述の取扱いとする。

表 6.3: 周辺モデルの推定結果

Notes: 表には、AIC 規準によって選択されたモデルと、帰無仮説「残差が推定された誤差分布からの標本である」に対するコルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (p 値) を併記している。なお、全ての業種について、有意水準 5% で帰無仮説が棄却されなかった。

	食品	エネルギー資源	建設・資材	素材・化学	医薬品	自動車・輸送機
AIC規準で選択されたモデル	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	AR(1) +GJR(1,1) +t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	ARMA(1,1) +GJR(1,1) +Skewed-t	AR(1) +GJR(1,1) +t
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (P値)	( $\nu=8.60, \lambda=-0.057$ ) 0.8741	( $\nu=8.69$ ) 0.8056	( $\nu=9.58, \lambda=-0.097$ ) 0.9347	( $\nu=9.62, \lambda=-0.124$ ) 0.4173	( $\nu=7.97, \lambda=-0.097$ ) 0.6912	( $\nu=9.48$ ) 0.9367
	鉄鋼・非鉄	機械	電機・精密	情報通信・サービス他	電力・ガス	運輸・物流
AIC規準で選択されたモデル	AR(2) +GJR(1,1) +t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	ARMA(1,2) +GJR(1,1) +t	ARMA(2,2) +GJR(1,1) +t
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (P値)	( $\nu=11.80$ ) 0.4161	( $\nu=12.16, \lambda=-0.078$ ) 0.7674	( $\nu=10.71, \lambda=-0.057$ ) 0.8549	( $\nu=10.03, \lambda=-0.126$ ) 0.5749	( $\nu=7.08$ ) 0.9353	( $\nu=8.46$ ) 0.9127
	商社・卸売	小売	銀行	金融(除く銀行)	不動産	
AIC規準で選択されたモデル	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	ARMA(2,2) +GJR(1,1) +t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	AR(1) +GJR(1,1) +t	AR(1) +GJR(1,1) +Skewed-t	
コルモゴロフ-スミルノフ検定の結果 (P値)	( $\nu=8.83, \lambda=-0.034$ ) 0.9405	( $\nu=10.66$ ) 0.8441	( $\nu=7.32, \lambda=0.096$ ) 0.6371	( $\nu=8.68$ ) 0.9510	( $\nu=8.05, \lambda=0.051$ ) 0.5479	

### 6.3.3 コピュラの推定結果

以下では、MSDStC と比較対象である DStC および StC の推定結果、MSDStC の推定結果を用いた考察の順に説明する。

#### 6.3.3.1 コピュラの推定結果

表 6.4 に推定結果を示した。AIC が最も低いコピュラは MSDStC であり、2 番目は DStC、3 番目は StC である。また、コピュラのパラメータは状態変化を考慮したモデル、考慮しないモデルともに全て有意である。この結果から、自由度、歪度の状態変化の有意性は認められ、MSDStC を用いることで AIC 規準の観点から DStC に比べて本邦株式市場のデータへの適合度が改善することが示唆される。また、DStC と StC の AIC の優劣を踏まえると、StC の相関行列に時変性を許容することによっても本邦株式市場のデータへの適合度が改善することが示唆される。この点は、Christoffersen et al. (2012) が先進国株式市場および新興国株式市場各々において実証した結果と整合的である。

パラメータの水準に着目すると、歪度は、MSDStC、DStC、StC 全てにおいて有意にマイナスであることが分かる。この結果から、本邦株式市場では、上昇時よりも下落時において依存構造が強まるといった非対称性が恒常的に存在していることが示唆される。図

表 6.4: コピュラのパラメータ推定結果

Notes: 表内の左側のモデルは MSDStC, 表内の右側の 2 種類のモデルは, DStC および StC である. AIC 規  
準で選択されたモデルについては, 「AIC」部分を網掛け(灰色)としている. なお, 括弧内の数値は標準誤  
差であり, 全てのパラメータについて, 有意水準 5% で帰無仮説「パラメータの値がゼロ」が棄却された.

MSDStC			DStC		StC	
自由度 (状態1)	$\nu^1$	7.167 (0.222)	自由度	$\nu$	13.668 (0.005)	13.405 (0.048)
自由度 (状態2)	$\nu^2$	20.200 (0.028)				
歪度 (状態2)	$\gamma^1$	-0.598 (0.112)	歪度	$\gamma$	-0.430 (0.009)	-0.382 (0.057)
歪度 (状態2)	$\gamma^2$	-0.136 (0.016)				
cDCC	$\alpha$	0.012 (0.001)	cDCC	$\alpha$	0.012 (0.001)	-
	$\beta$	0.972 (0.001)		$\beta$	0.971 (0.005)	-
状態 確率	$p^{11}$	0.951 (0.011)			-	-
	$p^{22}$	0.989 (0.004)			-	-
AIC		-76,693	AIC		-75,339	-72,769

6.3には、式(4.6)によって計算されるMSDStCの相関行列 $\Sigma_t$ について全ペアの相関係数に関する中央値および四分位範囲を示した。図6.3から、相関行列は、観測期間を通じてダイナミックに変動しており、各ペアの中央値は0.6から0.8程度、低いペアは0.4から0.6程度、相対的に高いペアは0.7から0.8程度で推移していることが読み取れる。この結果から、相関行列について時変性を考慮したうえで、各時点において業種間の相関係数の水準を捕捉することの重要性が示唆される。

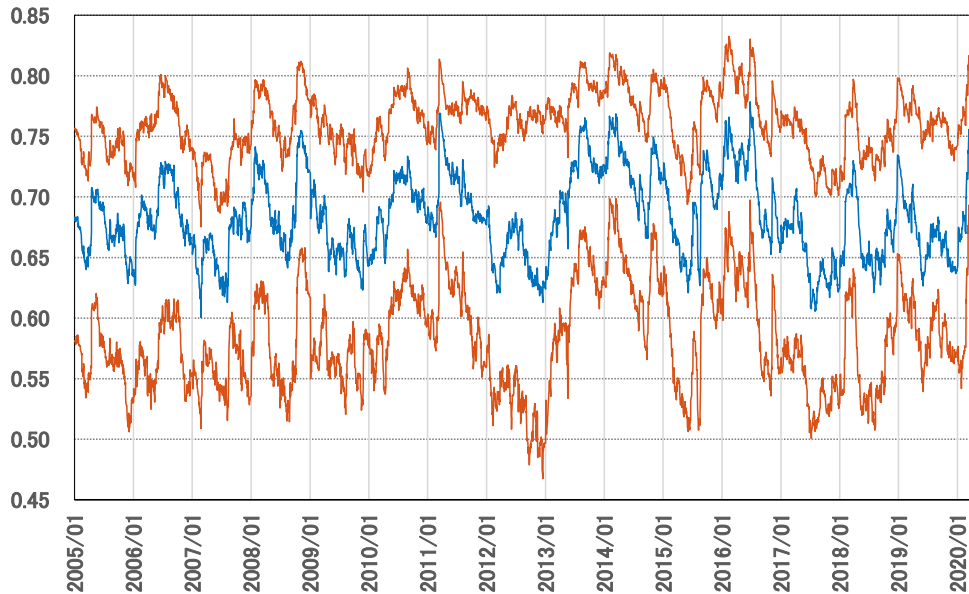


図 6.3: 相関の時系列推移

Notes: MSDStC の相関行列  $\Sigma_t$  について全ペア（136 ペア）の相関係数に関する中央値を青線，四分位範囲を橙線で示している。

### 6.3.3.2 MS ダイナミック非対称 $t$ コピュラの推定結果に対する考察

以下では、AIC が最小のMSDStCについて詳しく確認する。表6.4に示した、MSDStCの推定結果によると、自由度は状態1が7.167、状態2が20.200である。このことから、状態1では分布の裾での依存構造が強まることが分かる。歪度は状態1が-0.598、状態2が-0.136である。このことから、状態1では依存構造の非対称性が強まることが分かる。図6.4には、状態1のスムーザ確率と表6.2に記載した本邦株式市場に影響を与えた主な出来事の時点を示した。図6.4からは、表6.2に記載した出来事が生じるタイミングで、状態1のスムーザ確率が状態2を上回り、その後も一定期間閾値である0.5を上回る



傾向にあることが分かる<sup>91)</sup>。表 6.5 には、状態遷移確率、期待滞留期間、各状態の観測時点数を示した。表 6.5 からは、状態 1 と認識された観測時点数は全体の 17.1% と少なく、期待滞留期間についても 20.5 日と状態 2 の 92.1 日に比べて短いことが分かる。表 6.6 には、分析対象である 17 業種の均等ウェイト・ポートフォリオに関する CVaR について、状態 1、状態 2 毎に平均および四分位範囲を示した。CVaR は MSDStC と選択された周辺モデルを用いて、各時点において 1 期先のリターンのサンプルデータを各資産につき 10 万個生成し推定した<sup>92)</sup>。表 6.6 から、CVaR は状態 1 において悪化することが分かる。以上の結果を総合的に勘案すると、状態 1 は本邦株式市場における「テイルリスク顕在化局面」、状態 2 は「平常局面」を表現していると解釈できる。

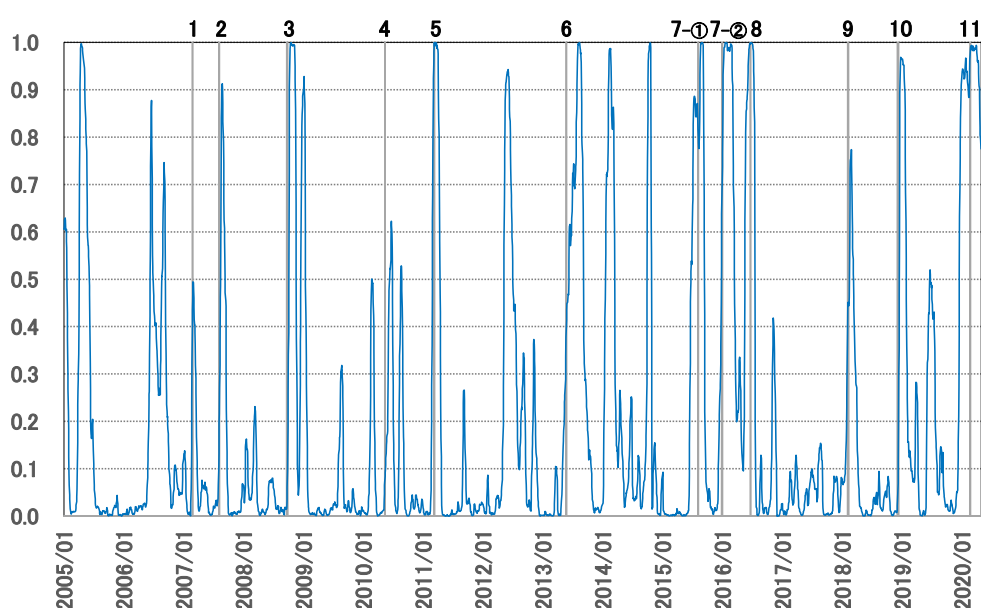


図 6.4: 状態 1 のスムーザ確率および本邦株式市場に影響を与えた主な出来事

Notes : MSDStC の状態 1 のスムーザ確率を青線で示している。また、表 6.2 の本邦株式市場に影響を与えた主な出来事が生じた時点を縦線（灰色）で図示し、対応する番号を上部に示している。

次に、MSDStC、DStC 各々から計算した下側裾依存性を比較する。ここで、下側裾依存性は、Christoffersen et al. (2018) にならい、下側裾依存係数の近似値を数値積分によって求めており、分位点には 0.01 を採用した。図 6.5 には、MSDStC および DStC 各々を用

<sup>91)</sup>表 6.2 の主な出来事に該当しない時期において、状態 1 のスムーザ確率が状態 2 を上回っている期間についても、米国の量的緩和政策の縮小に対する懸念、IMF の世界経済見通しに関する下方修正、新興国の経済成長に対する懸念、地政学リスクの発現などといったテイルリスクの顕在化を背景に、大宗の業種やセクターのパフォーマンスが一斉に悪化した局面を捉えていることは確認している。

<sup>92)</sup>モデルのパラメータは全期間を通じて推定したものであり、イン・サンプルの分析である。なお、後述する VaR および CVaR の推定精度に関する検証では、アウト・オブ・サンプルでの検証を行っている。

表 6.5: 状態遷移確率と期待滞留期間

Notes: 括弧内の数値は、全ての観測時点数に占める各状態の観測時点数の割合を示している。状態の判定には MSDStC を用いており、スムーザ確率が 0.5 を上回る状態を選択している。

		s	
		状態1	状態2
s+1	状態1	0.951	0.011
	状態2	0.049	0.989
期待滞留期間(日)		20.5	92.1
サンプル数		641	3113
		(0.171)	(0.829)

表 6.6: 状態別 CVaR の推定結果

Notes: 上段の数値は各状態における CVaR の中央値、下段、括弧内の数値は四分位範囲を示している。状態の判定には MSDStC を用いており、スムーザ確率が 0.5 を上回る状態を選択している。

	状態1		状態2	
CVaR (信頼水準: 99%)	0.043 (0.033	0.060)	0.030 (0.024	0.042)
CVaR (信頼水準: 95%)	0.032 (0.027	0.039)	0.022 (0.019	0.027)

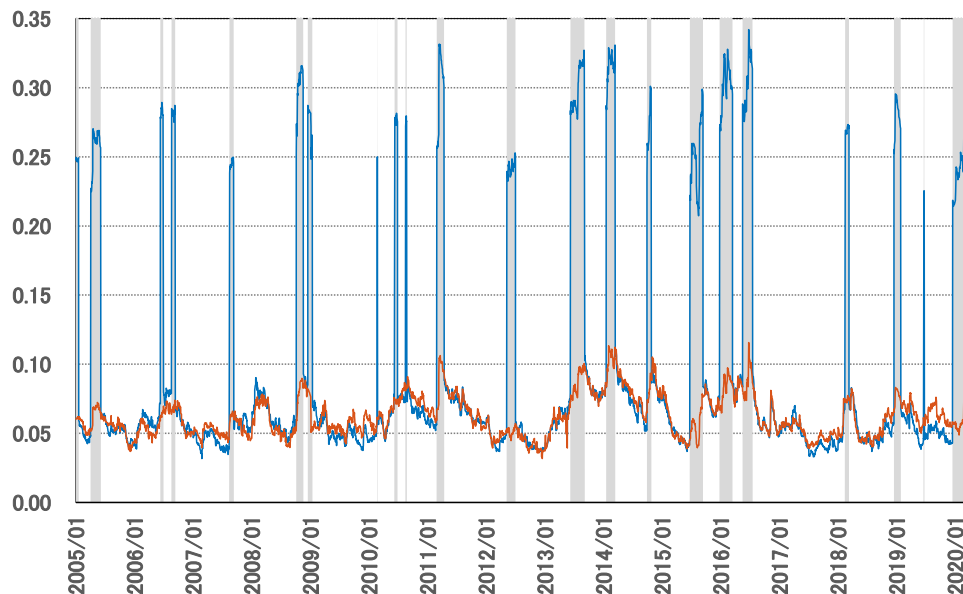


図 6.5: MSDStC と DStC の下側裾依存性に関する時系列推移の比較 (全ペア)

Notes: MSDStC を用いて計測した, 各ペアの下側裾依存性に関する中央値を青線, DStC を用いて計測した, 各ペアの下側裾依存性に関する中央値を橙線で示している. また, MSDStC のスムーザ確率にもとづき, 状態 1 の確率が 0.5 を上回る期間を網掛け (灰色) で示している.

いて計測した 2 変量間の下側裾依存性に関する時系列推移を示した. また, 状態 1, すなわちテイルリスク顕在化局面を灰色で示し, 平常局面からテイルリスク顕在化局面への遷移とともに下側裾依存性が如何に変化したのかを確認している. 図 6.5 からは, 平常局面からテイルリスク顕在化局面に状態遷移するタイミングにおいて, MSDStC の下側裾依存性に関する中央値は DStC の下側裾依存性に関する中央値に比べて大きく上昇していることが読み取れる. また, 平常局面では両者は概ね同水準で推移している. 上述したテイルリスク顕在化局面における差は, MSDStC が自由度, 歪度の状態変化を勘案し下側裾依存性の変化を捉えていることに起因する. DStC では平常局面およびテイルリスク顕在化局面で共通の自由度, 歪度が付与されるため, 両局面の状態変化が認められる場合には, テイルリスク顕在化局面の下側裾依存性を過小評価することとなる. MSDStC の AIC が DStC から改善していること, MSDStC のパラメータが有意であることから, 両局面の状態変化が生じていると考えられ, MSDStC によって上述した DStC のデメリットを緩和できたと示唆される.

次に, MSDStC から計測された下側裾依存性をセクター別に分析する. 図 6.6 には, シクリカル・セクター内, ディフェンシブ・セクター内, シクリカル・セクターおよびディフェンシブ・セクター間における 2 変量間の下側裾依存性に関する時系列推移を示した.

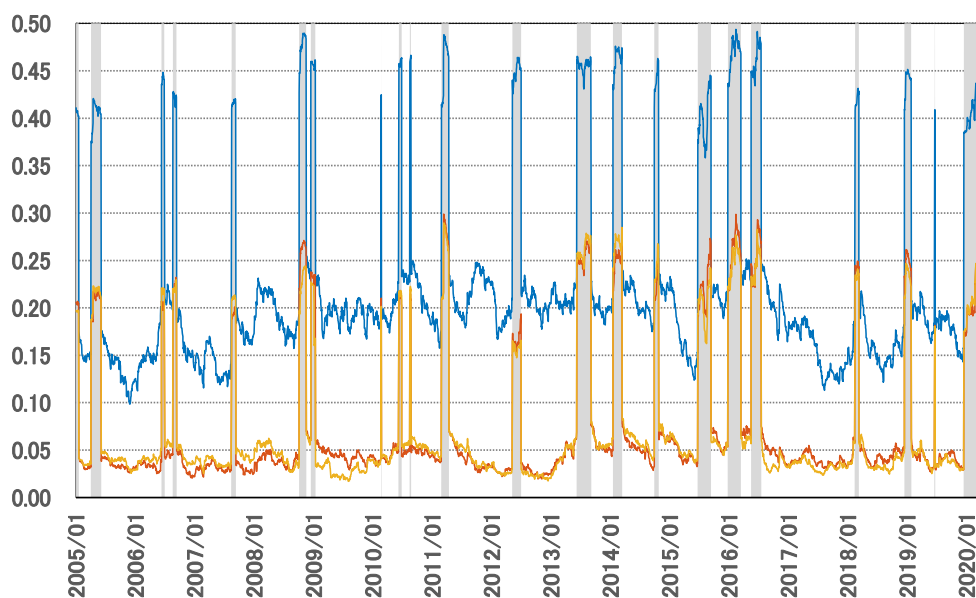


図 6.6: 下側裾依存性の時系列推移 (セクター別)

Notes: MSDStC を用いて計測した, シクリカル・セクター間の下側裾依存性の中央値を青線, ディフェンシブ・セクター間の下側裾依存性の中央値を橙線, シクリカル・セクターおよびディフェンシブ・セクター間の各ペアの下側裾依存性の中央値を黄線で示している. また, MSDStC のスムーザ確率にもとづき, 状態 1 の確率が 0.5 を上回る期間を網掛け (灰色) で示している.

シクリカル・セクターには、素材・化学，自動車・輸送機，鉄鋼・非鉄，機械，電機・精密を採用し，ディフェンシブ・セクターには，食品，医薬品，情報通信・サービスその他，電気・ガスを採用した。図 6.6 からは，シクリカル・セクター内の各ペアの下側裾依存性に関する中央値は，平常局面においては 0.15 から 0.25 程度，テイルリスク顕在化局面においては 0.40 から 0.50 程度で推移していることが分かる<sup>93)</sup>。一方，ディフェンシブ・セクター内の各ペアの下側裾依存性に関する中央値は，平常局面においては 0.05 程度，テイルリスク顕在化局面においては 0.20 から 0.30 程度で推移していることが分かる。また，シクリカル・セクターおよびディフェンシブ・セクター間の各ペアの下側裾依存性に関する中央値は，平常局面においては 0.05 程度，テイルリスク顕在化局面においては 0.20 から 0.30 程度で推移していることが読み取れる。この結果から，シクリカル・セクターおよびディフェンシブ・セクターへの分散投資を行うことで，下側裾依存性を低下させ，市場下落時の耐性を平常局面，テイルリスク顕在化局面ともに高めることが示唆される。

本節の最後に，MSDS<sub>StC</sub> について，自由度および歪度の状態変化による捕捉が容易な市場環境の変化と，捕捉が難しい市場環境の変化を考察する。MSDS<sub>StC</sub> の自由度および歪度は裾依存性に影響を与えるものであり，本章では全業種に共通のパラメータとして付与している。したがって，大宗の業種間の裾依存性が変化する局面で状態変化が生じることとなる。本邦株式市場では，このような事象がテイルリスク顕在化局面の初期と対応する傾向にあり，表 6.4 および図 6.4 で示したように，表 6.2 の出来事の発生とともに自由度および歪度が低い状態に遷移し，その後も一定期間同様の状態に留まるという結果が得られた。ここで，リスク・イベントの性質という観点からは，東日本大震災などに象徴される「突発的な」イベントと，サブプライムローン問題を発端として生じたリーマン・ショックなどに象徴される，「漸次的な」イベント<sup>94)</sup>に大別できる。前者については，突発的なイベントの発生とともに市場環境が変化する。MSDS<sub>StC</sub> についても突発的なイベントの発生とともにテイルリスク顕在化局面と解釈できる状態へと遷移することから，突発的なイベントを伴う市場環境の変化は MSDS<sub>StC</sub> による捕捉が容易だと考えられる<sup>95)</sup>。一方，後者については，仮に漸次的にテイルリスクが顕在化する可能性が高まっていたとしても，実際に大宗の業種間の裾依存性が変化するまでは，MSDS<sub>StC</sub> においてテイルリスク顕在化局面と解釈できる状態へと遷移しない。例えば，リーマン・ショックを例に挙げると，

<sup>93)</sup> 参考として，Okimoto (2008) では，パラメータが定数である正規コピュラおよびアルキメディアン・コピュラ間を状態変化するモデルを構築し，米国株式と英国株式との依存構造を捕捉したうえで，ペア市場の依存構造として選択されるアルキメディアン・コピュラから計測される下側裾依存性が 0.6 から 0.7 程度であることを示している。

<sup>94)</sup> リーマン・ブラザーズ・ホールディングスの破綻前から，サブプライムローンの信用リスクに対する懸念が趨勢的に高まっていたという点で漸次的である。

<sup>95)</sup> ただし，先見的に突発的なイベントを予測できるという意味ではない。

2007年8月に生じたBNPパリバ・ショック以降、2008年9月にリーマン・ブラザーズ・ホールディングスが経営破綻するまで1年程度の期間がある。この間にも2008年3月に米国大手投資銀行のベア・スターンズがサブプライムローンを背景として実質経営破綻に陥るなど、当該債務の信用リスクに対する懸念が醸成され市場環境は徐々に悪化していたと考えられる。一方、図6.4を確認すると、BNPパリバ・ショックとリーマン・ショックとの間の期間は<sup>96)</sup>、MSDStCにおいてテイルリスク顕在化局面と解釈できる状態へと遷移していないことが分かる。これは、漸次的なイベントに対しても大宗の業種間の裾依存性が変化するような事象が生じるまではMSDStCがテイルリスク顕在化局面を検知できないことを示唆している。したがって、漸次的なイベントを伴う市場環境の変化はMSDStCによる捕捉が難しいと考えられる。

## 6.4 VaRおよびCVaRの推定精度に関する検証

本章の目的の一つは、自由度、歪度の状態変化の捕捉がテイルリスクの推定精度に与える影響を明らかにすることである。この目的に鑑み、本節では、6.3節においてモデルの推定を行った3種類のコピュラと周辺モデルを用いて、VaRおよびCVaRの推定精度を比較分析する。信頼水準については99%および95%とし、対象となるポートフォリオは分析対象に関する均等ウェイト・ポートフォリオとする。主要な論点は、自由度、歪度の状態変化をMSDStCを用いて捕捉した場合に、VaRおよびCVaRの推定精度が改善するか否かである。

### 6.4.1 検証方法

以下では、検証に活用する期間およびモデルのパラメータの推定に用いる期間について述べたうえで、VaRおよびCVaRの推定精度に関する具体的な検証手順について説明する。

検証期間は、2008年1月から2020年4月を通した全期間に加え、2008年度、2015年度、2019年度の4期間とする。年度での3期間分の評価について、リスク管理の実務においてはリスクの推定精度に関する評価を年度で行うことが一般的であることに鑑み<sup>97)</sup>、暦年ではなく年度での検証とした。その中で2008年度にはリーマン・ショック、2015年度には2度のチャイナ・ショック、2019年度には新型コロナ・ショックといった実務的に重

<sup>96)</sup>BNPパリバ・ショックは図6.4上部のイベントNo2、リーマン・ショックはNo3に対応する。

<sup>97)</sup>年度ベースの決算に対応して発行されるディスクロージャー誌への記載事項としてVaRが含まれるなどの理由から、年度でのリスク推定の評価が一般的となっている。

要度が高いイベントが含まれている。また、6.3節のイン・サンプルの分析ではMSDStCがこれらのイベントを起点として状態1，すなわちテイルリスク顕在化局面と解釈できる状態が継続した。したがって、アウト・オブ・サンプルでもMSDStCによる検出が期待され、当該モデルの導入効果の検証に適していると考えられる。これらの点を踏まえ、2008年度，2015年度，2019年度を抽出した。

パラメータの推定に用いる期間は各検証年度の直近の3年間とする。リスク管理の実務では将来的なリスク量の推定に際して、直近数年間のデータを用いることが多い。これは、市場の期待収益率や分散、さらには依存構造の前提となる経済環境が長期的には変化するためである。この観点からは、アウト・オブ・サンプルの分析を行う周辺モデルおよびコピュラのパラメータの推定に長期間のデータを用いることは望ましくない。一方、MSDStCのパラメータの収束という観点から自由度および歪度の状態変化が生じると期待される期間が複数回含まれることが望ましい。そこで図6.4を確認すると、各検証期間の直近3年間をパラメータの推定期間に含むことで、MSDStCの状態変化が複数回生じることが期待でき、パラメータも収束すると考えられる<sup>98)</sup>。また、比較対象のコピュラの推定期間はMSDStCと同様にすることが望ましい。これらの点に鑑み、コピュラのパラメータの推定期間は各検証年度の直近3年間とした。さらに、本章ではIFM法により周辺モデルの推定結果に基づいてコピュラのパラメータを段階的に推定するため、周辺モデルおよびコピュラのパラメータの推定期間は同一にすることが自然である。この点に鑑み、周辺モデルについても各検証年度の直近3年間とした。

VaR および CVaR の推定精度に関する検証手順については以下のとおりである。なお、2008年度を検証期間とした場合を念頭に置き具体的な日付を示す。

- 1 2005年4月1日から2008年3月31日までの実現リターンデータを用いて、周辺モデルとコピュラのパラメータを推定する。周辺モデルはAICを用いて選択する。
- 2 式(2.11)の周辺モデルと2005年4月1日から2008年3月31日までの実現リターンデータを用いて、2008年4月1日の各業種の条件付き期待収益率および条件付き分散を計算する。
- 3 式(6.2)，(6.4)，(6.5)のcDCCに関する変動過程と2008年3月31日のコピュラの観測データを用いて、2008年4月1日の相関行列 $\Sigma_t$ を計算する。また、式(6.12)の状態確率の予測値を用いて、2008年4月1日の状態変数 $a_t$ を決定する。具体的には、状態確率の予測値(6.12)が0.5を上回る状態を選択する。

<sup>98)</sup>各検証年度の直近3年間のデータを用いることで、MSDStCが状態変化を捉えパラメータも収束することは確認している。

- 4 手順3で決定したパラメータを上記1で推定したコンピュータに適用し、2008年4月1日の17業種のサンプルデータを10万組生成する。
- 5 手順2の条件付き期待収益率および条件付き分散（標準偏差）を適用した周辺モデルを用いて、手順4で生成したサンプルデータをリターンデータのサンプルに変換する。
- 6 手順5で生成したリターンデータを用いて、2008年4月1日の均等ウェイト・ポートフォリオのVaRおよびCVaRを推定する。
- 7 2008年4月1日の各資産の実現リターンデータを取り込み、式(2.11)の周辺モデルを用いて誤差項を抽出し、手順2から6と同様に2008年4月2日のVaRおよびCVaRを推定する。
- 8 以下、同様の作業を2009年3月31日まで繰り返す。
- 9 手順1から8によって計算された各時点のVaRおよびCVaRと均等ウェイト・ポートフォリオの実現リターンを比較し、VaRの推定精度は、Kupiec（1995）の尤度比検定、CVaRの推定精度は、Danielsson（2011）の指標により評価する。

VaRおよびCVaRの推定精度に関する評価指標については多くの手法が先行研究で提案されている。本章ではリスク管理の実務に鑑み、評価指標としてKupiec（1995）の尤度比検定およびDanielsson（2011）の指標を採用した。以下では式(2.21), (2.22), (2.23)に記載したこれらの手法を再掲する。

Kupiec（1995）の尤度比検定を行う際には、まずVaR超過率を計算する。バックテスト期間を $S'$ 、時点 $s$ のポートフォリオの実現リターンを $r_s^{port}$ 、時点 $s$ のVaRの推定値を $\widehat{VaR}_s$ とする時、VaR超過率 $HR$ は式(6.15)によって計測される。

$$HR = \frac{\sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{VaR}_s\}}}{S'} \quad (6.15)$$

式(6.15)は、バックテスト期間においてポートフォリオの実現リターンが $\widehat{VaR}_s$ を下回った割合を示している。したがって、ポートフォリオのリターンに関する信頼水準を $l$ とすると、式(6.15)が「 $1-l$ 」に近いほどモデルのVaRの推定精度が高いことを示唆する。また、式(6.15)が「 $1-l$ 」より大きければモデルのVaRが過小に推定されていることを、式(6.15)が「 $1-l$ 」より小さければモデルのVaRが過大に推定されていることを示唆する。Kupiec（1995）の尤度比検定は、信頼水準 $l$ に対応したVaR超過率を $\tau = 1-l$ とし、式



(6.15) で計算された  $HR$  について、帰無仮説「 $\tau = HR$ 」を対立仮説「 $\tau \neq HR$ 」のもとで検定する。VaR を超過する確率が各時点において独立であると仮定し、バックテスト期間においてポートフォリオの実現リターンが VaR を下回った回数を  $N = \sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{VaR}_s\}}$  とする時、尤度比検定量  $\chi^{Kupiec}$  は式 (6.16) で表される。

$$\chi^{Kupiec} = -2 \log \frac{\tau^N (1 - \tau)^{S' - N}}{HR^N (1 - HR)^{S' - N}}. \quad (6.16)$$

帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が正しい時、式 (6.16) は、漸近的に自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う。したがって、式 (6.16) を自由度 1 のカイ 2 乗分布で評価した際の p 値が高いほど、帰無仮説を支持する確率が高く、モデルの VaR の推定精度が高いことを示唆する。

Danielsson (2011) では、時点  $s$  の CVaR の推定値を  $\widehat{CVaR}_s$  とする時、評価指標  $\chi^{Danielsson}$  を式 (6.17) により計算する。

$$\chi^{Danielsson} = \frac{\sum_{s=1}^{S'} \frac{\widehat{CVaR}_s}{r_s^{port}} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{VaR}_s\}}}{\sum_{s=1}^{S'} \mathbf{1}_{\{r_s^{port} < \widehat{VaR}_s\}}}. \quad (6.17)$$

式 (6.17) は、 $\widehat{VaR}_s$  を下回った各時点における、 $\widehat{CVaR}_s$  とポートフォリオの実現リターンとの比率に関する平均値を CVaR の推定精度として評価している。したがって、式 (6.17) が 1 に近いほど、モデルの CVaR の推定精度が高いことを示唆する。また、式 (6.17) が 1 より大きければモデルの CVaR が過大に推定されていることを、式 (6.17) が 1 より小さければモデルの CVaR が過小に推定されていることを示唆する。

## 6.4.2 検証結果

以下では、MSDStC のアウト・オブ・サンプルのフィルタ確率と均等ウェイト・ポートフォリオの推移を確認したうえで、VaR および CVaR の推定精度に関する検証結果を記載する。

図 6.7 には、検証年度別に MSDStC のアウト・オブ・サンプルのフィルタ確率と均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターンを表 6.2 に記載した本邦株式市場に影響を与えた出来事とともに示した。なお、全ての検証年度において MSDStC の推定結果として、自由度および歪度の両パラメータが低い状態と高い状態に分かれたことを確認している。図 6.7 からは、各検証年度とも表 6.2 の出来事を起点として、6.3 節でテイルリスク顕在化局面と解釈した状態のフィルタ確率が上昇し、その後一定期間 0.5 を上回る傾向にあることが分かる。また、均等ウェイト・ポートフォリオは、上述した状態のフィルタ確率が 0.5 を上回る期間においてドローダウンが発生する傾向にあることが分かる。

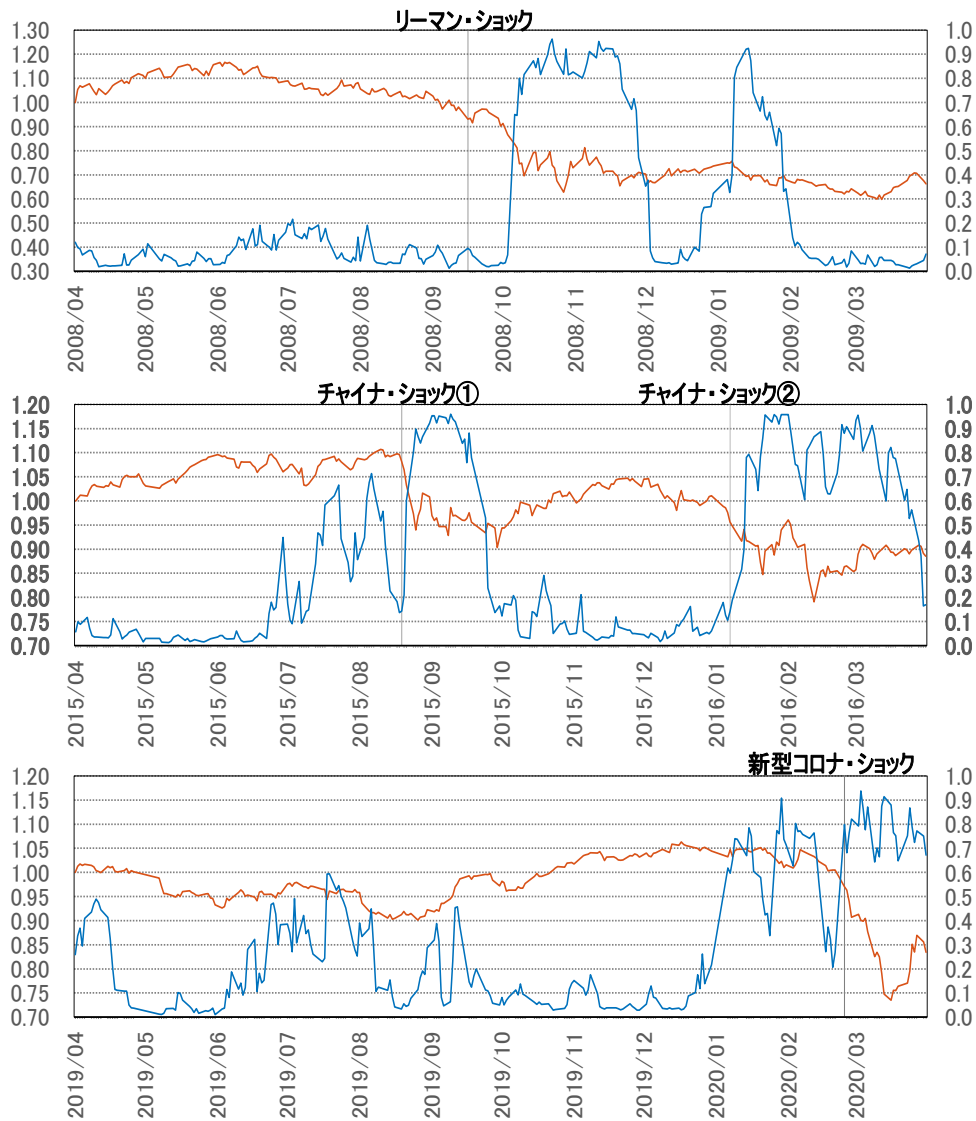


図 6.7: アウト・オブ・サンプルのフィルタ確率と均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターン  
 Notes : MSDStC の自由度および歪度が低い状態に関するフィルタ確率を青線 (右軸), 均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターンを橙線 (左軸), 表 6.2 に記載した本邦株式市場に影響を与えた出来事を縦線 (灰色) で示している. なお, 均等ウェイト・ポートフォリオの累積リターンは開始時点をもとに 1 (単位は日本円) としている.

表 6.7: コピュラを用いた VaR のバックテスト結果

Notes: Kupiec (1995) の尤度比検定, VaR 超過率について, 最も推定精度が高い部分を太字としている. また, Kupiec (1995) の尤度比検定については, p 値が 5% を超える部分を網掛けとしている.

バックテスト期間	信頼水準	項目	MSDStC	DStC	StC	
全期間 (2008年1月～2020年4月)	99%	VaR超過率	<b>1.393%</b>	1.592%	1.757%	
		Kupeicの尤度比検定量	<b>4.184</b> <b>(0.041)</b>	9.037 (0.003)	14.255 (0.000)	
	95%	VaR超過率	<b>5.736%</b>	5.968%	6.034%	
		Kupeicの尤度比検定量	<b>3.291</b> <b>(0.070)</b>	5.619 (0.018)	6.392 (0.011)	
	2008年度 (2008年4月～2009年3月)	99%	VaR超過率	<b>0.816%</b>	1.224%	1.224%
			Kupeicの尤度比検定量	<b>0.089</b> <b>(0.765)</b>	0.116 (0.733)	0.116 (0.733)
95%		VaR超過率	<b>7.347%</b>	<b>7.347%</b>	8.163%	
		Kupeicの尤度比検定量	<b>2.498</b> <b>(0.114)</b>	<b>2.498</b> <b>(0.114)</b>	4.369 (0.037)	
2015年度 (2015年4月～2016年3月)		99%	VaR超過率	<b>2.449%</b>	2.857%	2.857%
			Kupeicの尤度比検定量	<b>3.700</b> <b>(0.054)</b>	5.683 (0.017)	5.683 (0.017)
	95%	VaR超過率	<b>8.163%</b>	<b>8.163%</b>	<b>8.163%</b>	
		Kupeicの尤度比検定量	<b>4.369</b> <b>(0.037)</b>	<b>4.369</b> <b>(0.037)</b>	<b>4.369</b> <b>(0.037)</b>	
	2019年度 (2019年4月～2020年3月)	99%	VaR超過率	<b>2.075%</b>	<b>2.075%</b>	2.490%
			Kupeicの尤度比検定量	<b>2.146</b> <b>(0.143)</b>	<b>2.146</b> <b>(0.143)</b>	3.820 (0.051)
95%		VaR超過率	<b>7.054%</b>	7.469%	7.469%	
		Kupeicの尤度比検定量	<b>1.909</b> <b>(0.167)</b>	2.706 (0.099)	2.706 (0.099)	

表 6.8: コピュラを用いた CVaR のバックテスト結果

Notes: 最も推定精度が高い部分を太字としている。

バックテスト期間	信頼水準	MSDStC	DStC	StC
全体(2008年1月～2020年4月)	99%	<b>0.987</b>	0.978	0.959
	95%	<b>1.018</b>	1.025	1.037
2008年度(2008年4月～2009年3月)	99%	<b>1.023</b>	1.083	1.107
	95%	1.111	<b>1.110</b>	1.143
2015年度(2015年4月～2016年3月)	99%	<b>1.005</b>	1.015	1.020
	95%	<b>0.989</b>	0.980	0.948
2019年度(2019年4月～2020年3月)	99%	<b>0.987</b>	0.966	0.954
	95%	<b>1.021</b>	1.036	1.048

次に、表 6.7 の VaR のバックテスト、表 6.8 の CVaR のバックテストの順に検証結果を記載する。表 6.7 には、検証期間別に VaR 超過率および Kupiec の尤度比検定の結果を示した。全期間の結果について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC であり、2 番目は DStC、3 番目は StC である。MSDStC の VaR 超過率は DStC に比して 0.199 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 3.8 改善した。一方、全てのモデルについて有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が棄却された。信頼水準 95% においても推定精度が最も高いモデルは MSDStC であり、2 番目は DStC、3 番目は StC である。MSDStC の VaR 超過率は DStC に比して 0.232 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 2.3 改善した。また、MSDStC についてのみ有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が採択された。2008 年度について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC であり、2 番目は DStC と StC である。MSDStC の VaR 超過率は DStC と StC に比して 0.041 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 3.2 改善した。また、全てのモデルについて有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が採択された。信頼水準 95% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC と DStC であり、3 番目は StC である。MSDStC と DStC の VaR 超過率は StC に比して 0.816 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 7.7 改善した。また、MSDStC と DStC についてのみ有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が採択された。2015 年度について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC であり、2 番目は DStC と StC である。MSDStC の VaR 超過率は DStC および StC に比して 0.408 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 3.7 改善した。また、MSDStC についてのみ有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が採択された。信頼水準 95% においては全てのモデルが同一

の結果となった。また、全てのモデルについて有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が棄却された。2019 年度について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC と DStC であり、3 番目は StC である。MSDStC と DStC の VaR 超過率は StC に比して 0.415 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 9.2 改善した。また、全てのモデルについて有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が採択された。信頼水準 95% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC であり、3 番目は DStC と StC である。MSDStC の VaR 超過率は StC に比して 0.415 改善し、Kupiec の尤度比検定の p 値は 6.8 改善した。また、全てのモデルについて有意水準 5% において帰無仮説「 $\tau = HR$ 」が採択された。

表 6.8 には Danielsson (2011) の指標による CVaR の推定精度の検証結果を示した。全期間の結果について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 0.987 であり、2 番目の DStC から 0.009 改善した。また、3 番目は StC である。信頼水準 95% においても推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 1.018 であり、2 番目の DStC から 0.007 改善した。また、3 番目は StC である。2008 年度について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 1.023 であり、2 番目の DStC から 0.06 改善した。また、3 番目は StC である。信頼水準 95% において推定精度が最も高いモデルは DStC であり、2 番目は MSDStC、3 番目は StC である。MSDStC は 1.111 であり DStC の 1.110 に比べて 0.001 劣後する結果となった。2015 年度について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 1.005 であり、2 番目の DStC から 0.01 改善した。また、3 番目は StC である。信頼水準 95% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 0.989 であり、2 番目の DStC から 0.009 改善した。また、3 番目は StC である。2019 年度について、信頼水準 99% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 0.987 であり、2 番目の DStC から 0.021 改善した。また、3 番目は StC である。信頼水準 95% において推定精度が最も高いモデルは MSDStC の 1.021 であり、2 番目の DStC から 0.015 改善した。また、3 番目は StC である。

総じてみると、VaR については<sup>99)</sup> MSDStC を用いることで DStC に比べて Kupiec の尤度比検定の p 値が改善しており、VaR を精度高く推定していることが分かる<sup>100)</sup>。また CVaR については、2008 年度の信頼水準 95% における推定精度は DStC が MSDStC を上回っているが、それ以外では MSDStC が DStC よりも CVaR を精度高く推定していることが分かる<sup>101)</sup>。このような結果が得られた背景としては、次のことが考えられる。DStC では、分布の裾での依存構造やその非対称性が変化しないことを前提としている。しかしな

<sup>99)</sup>2008 年度における MSDStC の信頼水準 99% の VaR 超過率を除く。

<sup>100)</sup>DStC と StC の比較でも、DStC を用いることで StC に比べて Kupiec の尤度比検定の p 値が改善している。

<sup>101)</sup>DStC と StC との比較では、全てのケースにおいて DStC が StC よりも精度高く CVaR を推定している。

がら、表 6.4 のコピュラの推定結果において示されたとおり、本邦株式市場では自由度、歪度の状態変化は認められ、テイルリスク顕在化局面と解釈される時期については、図 6.5 や図 6.6 に示したとおり、下側裾依存性が高まっている。MSDStC では、このような下側裾依存性の変化を自由度、歪度の状態変化を考慮することによって捕捉できるため、VaR および CVaR の推定精度が DStC に比べて改善する傾向となったと考えられる<sup>102)</sup>。

上述の点を踏まえると、テイルリスクの推定に際して、市場の平常局面、テイルリスク顕在化局面に対応した自由度、歪度の状態変化を考慮することの有用性が示唆される。

## 6.5 終わりに

本章では、TOPIX-17 シリーズのリターンデータに MSDStC を適用し、本邦株式市場の依存構造を捕捉した。その上で、(1) 自由度、歪度の状態変化が示唆する市場環境、(2) 市場下落時における資産間の裾依存性に関する特徴、(3) テイルリスクの推定精度について考察した。MSDStC の AIC は DStC に比して改善しており、同コピュラを適用することで、AIC 規準の観点から本邦株式市場のデータへの適合度が改善したと考えられる。この結果は、本邦株式市場のように、相関の時変性および自由度、歪度の状態変化が有意に認められる多変量時系列データに対しては、MSDStC の適用が DStC や StC よりも有用であることを示している。また、(1) から (3) の主要な研究課題については、以下の結果および示唆を得た。

- (1) MSDStC を用いて判別された各状態は、本邦株式市場におけるテイルリスク顕在化局面と平常局面を各々表現していると解釈できることを示した。
- (2) シクリカル・セクターおよびディフェンシブ・セクター間の下側裾依存性は、分析対象期間を通じて低位で推移しており、両セクターへの分散投資が市場下落時の耐性を平常局面、テイルリスク顕在化局面ともに高めることを示した。
- (3) VaR および CVaR の推定精度は MSDStC が DStC よりも改善する傾向にあり、テイルリスクの推定に際して、自由度、歪度の状態変化を考慮することの有用性を示した。

これらの研究結果を踏まえると、MSDStC を用いて本邦株式市場の依存構造を捕捉することで、平常局面やテイルリスク顕在化局面といった市場環境の変化を捉えつつ、市場下落時の分散投資効果を勘案したアセット・アロケーションやテイルリスクの管理を遂行できる、と示唆される。

<sup>102)</sup>本章の主要な論点ではないものの、DStC の推定精度は StC に比べて改善する傾向にある。この点については、業種間の相関の時変性を考慮したことが推定精度の改善の背景だと考えられる。

## 第7章 総括と今後の研究展望

本稿では、金融市場の依存構造に焦点をあて近年ファイナンス分野で注目される非対称性 $t$ コピュラを活用し統計的特徴を捕捉した。分析対象には、債券、株式といった伝統的な資産クラスに加え、新興国国債や株式のスタイルファクター等新たな投資先としての期待が高い市場を含む広範囲なデータを扱った。また分析に際しては、非対称性 $t$ コピュラに時系列モデルを適用しダイナミック非対称 $t$ コピュラやMSダイナミック非対称 $t$ コピュラを扱った。そのうえで、実証分析ではこれらの資産間の依存構造の統計的特徴を明らかにしつつ、最適資産配分やポートフォリオのパフォーマンス、テイルリスクの推定精度への影響等を考察した。

3章では、コピュラの選択がCVaR制約付き期待収益率最大化問題、CVaR最小化問題の最適投資比率に与える影響を考察した。分析対象には伝統的資産クラスである債券、クレジット、株式、不動産(REIT)を採用し、CVaR最小化等が実務で応用されているアセットアロケーションへの影響を考察した。分析の結果、両問題ともに、正規コピュラや $t$ コピュラはAIC規準で選択された非対称 $t$ コピュラに比べてCVaRを小さく評価し、株式等のハイリスク・ハイリターンの資産の最適投資比率が高まることを示した。CVaR制約付き期待収益率最大化問題では、CVaRの上限制約が緩い保守的な投資家ほど上述した影響が大きくなること、CVaR最小化問題では、非対称 $t$ コピュラを用いることでソルティノレシオやカルマーレシオが改善することも併せて示した。応用性の高いCVaR最小化問題、CVaR制約付き期待収益率最大化問題について、周辺モデルを統一しコピュラにのみ異なるモデルを適用し、非対称 $t$ コピュラの活用によるパフォーマンスの改善を示したこと、コピュラの違いが最適投資比率やパフォーマンスに与える影響について、その背景とともに詳細に考察し明らかにしたことが3章の貢献である。

4章では、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて新興国国債市場の依存構造について為替変動リスクをヘッジの有無の影響を軸に考察した。分析の結果、為替変動リスクをヘッジしない場合には、ヘッジする場合に比べて相関が高位で推移する傾向にあり分散投資効果を期待し難いこと、また分布の裾での依存構造や、上昇時よりも下落時に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性が有意であることを明らかにした。さらに高次

モーメントを考慮したポートフォリオ最適化による実証分析では、為替変動リスクをヘッジしない場合にダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることでポートフォリオのパフォーマンスが改善することを示した。cDCCと整合的なダイナミック非対称 $t$ コピュラを明示したこと、新興国国債の投資に際して重要な為替変動リスクのヘッジの有無を勘案したうえで実証分析を行い、ダイナミック非対称 $t$ コピュラの活用によるポートフォリオのパフォーマンスの改善を示したことが4章の貢献である。

5章では、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて本邦株式市場のスタイル・ファクター間の依存構造を考察した。分析の結果、ファクター間の相関は安定的に無相関ではなく時系列に変動していること、また分布の裾での依存構造や、上昇時よりも下落時に分布の裾での依存構造が強まるといった非対称性が有意であることを明らかにした。さらに、ダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いてCVaRの目標水準を定めたテイルリスク・パリティを構築することで、最大ドロダウンやカルマーレシオが改善することを示した。安定的な無相関性が期待されてきたスタイル・ファクターの依存構造について、相関の変化と分布の裾での依存構造の観点から統計的特徴を明らかにしたこと、ファクター投資に活用される機会が多いリスク・パリティ戦略について、リスク尺度にCVaRを適用しその推定にダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることで、パフォーマンスが改善することを示した点が5章の貢献である。

6章では、MSダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いて本邦株式市場のセクター間の依存構造を考察した。分析の結果、ダイナミック非対称 $t$ コピュラの自由度と歪度に状態変化を許容することで、テイルリスク顕在化局面と平常局面を表現できること、シクリカルセクターとディフェンシブセクターへの分散投資によりテイルリスク顕在化局面での耐性が向上することを示した。さらに、MSダイナミック非対称 $t$ コピュラを用いることで、新型コロナ・ショック等を含む局面でのテイルリスクの推定精度が改善することを示した。MSダイナミック非対称 $t$ コピュラを構築し状態変化の解釈を与えたこと、自由度や歪度の状態変化の捕捉によりテイルリスクの推定精度の改善を示したことが6章の貢献である。

総じて、金融市場の依存構造の特徴は相関のみによって捕捉できるものではなく、分布の裾での依存構造の特徴を併せて捉えることの重要性が示された。また、相関や分布の裾での依存構造の変化に目を配ることも必要である。こうした統計的特徴を定量的に捕捉し投資の意思決定やテイルリスクの推定、管理を遂行することで、現実の金融市場の振舞いに対応した資産運用実務の遂行に繋がることと期待される。

今後の研究課題としては次の3点が挙げられる。

1点目は、ヴァインコピュラを含んだ実証分析の拡充である。本稿では、実務で相関行



列が一般的に活用されていることに鑑み、パラメータに相関行列を内包するコピュラを用いて研究を行った。一方、ヴァインコピュラの有用性もこれまで示されており、本稿で一定の優位性が示された非対称  $t$  コピュラとの比較により新たな示唆が得られる可能性がある。

2点目は、変量数の増加に対するコピュラの拡張である。本稿で扱った非対称  $t$  コピュラ、ダイナミック非対称  $t$  コピュラ、MS ダイナミック非対称  $t$  コピュラは自由度パラメータが一つであることを仮定している。一方、変量数が増加した場合には、例えば各資産クラスや経済情勢が異なる複数の国や地域毎に個別の自由度を割り当てられることが望ましい。Banachewicz and Vaart (2008) の Grouped- $t$  コピュラを念頭に自由度を複数保持可能な非対称  $t$  コピュラへの拡張が課題である。

3点目は、パラメータの推定方法の改善である。本稿では3章から5章は最尤推定、6章はEM アルゴリズムを適用しコピュラのパラメータを推定した。一方、上述したような非対称  $t$  コピュラの拡張を行う場合パラメータ数も相応に増加する。こうした場合には、ベイズ推定等も含めたパラメータの推定方法の工夫が課題である。また、本稿ではIFMを適用し周辺モデルとコピュラを別々に推定しAICでモデル選択を行った。一方、EMLを適用し同時推定を行った場合には、AICで選択された個々の周辺モデルやコピュラが必ずしも選択されるとは限らない。こうした課題に対しても推定方法の工夫が重要となる。

これらの研究課題については今後取り組みたい。

最後に、本稿では正規コピュラや  $t$  コピュラに対して、非対称  $t$  コピュラの活用効果を様々な投資対象、投資戦略で実証してきた。一方、非対称  $t$  コピュラはパラメータの推定コストが正規コピュラや  $t$  コピュラに比べて高いため、どのような場合に活用効果が出やすいのか把握できることが実務的には望ましい。その観点では、相関が高い投資対象から成るポートフォリオを扱う場合には、分布の裾での依存構造と線形の依存構造に違いが生まれにくく、非対称  $t$  コピュラの効果に限定的となることが想定される。逆に、3章等で示したように低相関あるいは逆相関である一方で分布の裾での依存構造が強く、特に下落時に強まりやすい場合には活用効果が高いと考えられる。また投資戦略という観点では、テイルリスクが考慮され、特に CVaR のような分位点未満の影響全体を考慮するリスク尺度を扱う場合に効果的であると考えられる。本稿がこうした非対称  $t$  コピュラの活用効果と計算負荷のバランスを検討する際の一助になれば幸いである。

# 謝辞

本稿は、筆者が筑波大学大学院ビジネス科学研究群に在籍中の研究成果をまとめたものである。同大学ビジネスサイエンス系教授の牧本直樹先生には指導教員として本研究の実施の機会を与えていただき、終始丁寧にご指導をいただいた。研究過程では、学術的な新規性と応用上のメリットのバランスを意識し研究することの重要性を教えていただいた。ジャーナル等への投稿過程では、読者に簡潔かつ正確に伝わる論文構成、学術的価値と実務的価値の両面から結果を示すことの重要性など、多岐にわたりご指導をいただいた。今後研究を続けるうえでの土台を築けたと感じている。ここに感謝の意を表する。

同じくビジネスサイエンス系教授の山田雄二先生、佐藤忠彦先生には副指導教員として多くのご助言をいただくとともに本稿の細部にわたりご指導をいただいた。山田先生からは、論文における筆者の貢献部分、新規性が正確かつ明確に伝わるようご指導いただくとともに、その新規性が必要とされる理由の学術的な論じ方についてもご指導いただいた。佐藤先生からは、より実践的なモデルを考える際は推定方法の高度化も検討すべき点について、事例等にもとづき丁寧にご助言をいただいた。ここに感謝の意を表する。

東京都立大学大学院経営学研究科教授の吉羽要直先生には非対称 $t$ コピュラに関する実証研究を進める中で、多くのアドバイスをいただいた。本稿は、吉羽先生の先行研究があったからこそ書き上げることができた。ここに感謝の意を表する。

本稿の4章は、一橋大学国際企業戦略研究科教授の中村信弘先生との論文をもとにした部分である。中村信弘先生には筆者が同研究科に在籍した時から長きにわたりご指導をいただいた。ここに感謝の意を表する。

筆者が勤務先であるニッセイアセットマネジメント株式会社戦略運用部の上司、同僚には研究活動をあたたかく見守っていただいた。ここに感謝の意を表する。

5人の先生方と出会いご指導いただけたことで、実務家としてだけでなく、研究者としてもより成長し学術と実務を繋げるような人間になりたいと強く思うようになった。この気持ちを忘れることなく、今後も日々精進したい。

最後に、筆者の研究活動をこれまであたたかく応援してくれた妻の陽子、息子の柊に心から感謝する。

## 参考文献

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., and Bakken, H. (2009), “Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198.
- Aas, K., and Haff, I. H. (2006), “The Generalized Hyperbolic Skew Student’s  $t$ -Distribution,” *Journal of Financial Econometrics*, 4(2), 275–309.
- Aielli, G. P. (2013), “Dynamic Conditional Correlations: on Properties and Estimation,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 31(3), 282–299.
- Alankar, A., DePalma, M., and Scholes, M. (2013), “An Introduction to Tail Risk Parity: Balancing Risk to Achieve Downside Protection,” *Working Paper*, Alliance Bernstein.
- Alcock, J., and Hatherley, A. (2009), “Asymmetric Dependence between Domestic Equity Indices and its Effect on Portfolio Construction,” *Australian Actuarial Journal*, 15(1), 143–180.
- Allen, D., Lizieri, C., and Satchell, S. (2020), “A Comparison of Non-Gaussian VaR Estimation and Portfolio Construction Techniques,” *Journal of Empirical Finance*, 58(6), 356–368.
- Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., and Uryasev, S. (2001), “Credit Risk Optimization with Conditional Value-at-Risk Criterion,” *Mathematical Programming*, 89(2), 273–291.
- Ang, A. (2014), *Asset Management: A Systematic Approach to Factor Investing*, Oxford University Press.
- Ang, A., Bekaert, G., and Liu, J. (2005), “Why Stocks May Disappoint,” *Journal of Financial Economics*, 76(3), 471–508.
- Ang, A., and Chen, J. (2002), “Asymmetric Correlations of Equity Portfolios,” *Journal of Financial Economics*, 63(3), 443–494.

- Arnott, R. D., Harvey, C. R., Kalesnik, V., and Linnainmaa, J. T. (2019), “Alice ’ s Adventures in Factorland: Three Blunders That Plague Factor Investing,” *Journal of Portfolio Management*, 45(4), 18–36.
- Artzner, P. (1997), “Thinking Coherently,” *Risk*, 10, 68–71.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., and Heath, D. (1999), “Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance,” *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Autchariyapanitkul, K., Chanaim, S., and Sriboonchitta, S. (2014), “Portfolio Optimization of Stock Returns in High-Dimensions: A Copula-Based Approach,” *Thai Journal of Mathematics*, Special Issue: Copula Mathematics and Econometrics, 11–23.
- Avouyi-Dovi, S., Morin, S., and Neto, D. (2004), “Optimal Asset Allocation with Omega Function,” *Technical Paper*, Banque de France.
- Azzalini, A., and A. Capitanio (2003), “Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew  $t$  Distribution,” *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 65(2), 367–389.
- Baba, Y., Engle, R. F., Kraft, D. F., and Kroner, K. F. (1990), “Multivariate Simultaneous Generalized ARCH,” *Working Paper*, University of California, San Diego, Department of Economics.
- Bai, M., and Sun, L. (2007), “Application of Copula and Copula-CVaR in the Multivariate Portfolio Optimization,” *International Symposium on Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies*, Springer Science & Business Media, 231–242.
- Barndorff-Nielsen, O. (1977), “Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size,” *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 353(1674), 401–419.
- Basak, S., and Shapiro, A. (2001), “Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices,” *The Review of Financial Studies*, 14(2), 371–405.
- Bauwens, L., Laurent, S., and Rombouts, J. V. (2006), “Multivariate GARCH Models: A Survey,” *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 79–109.
- Bender, J., Briand, R., Nielsen, F., and Stefek, D. (2010), “Portfolio of Risk Premia: A New Approach to Diversification,” *Journal of Portfolio Management*, 36(2), 17–25.

- Berger, T. H. E. O., and Misson, M. (2014), “ Financial Crisis, Value-at-Risk Forecasts and the Puzzle of Dependency Modeling, ” *International Review of Financial Analysis*, 33(1), 33–38.
- Blitz, D. (2012), “ Strategic Allocation to Premiums in the Equity Market, ” *Journal of Index Investing*, 2(4), 42–49.
- Blitz, D. (2015), “ Factor Investing Revisited, ” *Journal of Index Investing*, 6(2), 7–17.
- Bollerslev, T. (1986), “ Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, ” *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T. (1990), “ Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalized ARCH Model, ” *The Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498–505.
- Bollerslev, T., and Engle, R. F. (1993), “ Common Persistence in Conditional Variances, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 61(1), 167–186.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., and Wooldridge, J. M. (1988), “ A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances, ” *Journal of Political Economy*, 96(1), 116–131.
- Boubaker, H., and Sghaier, N. (2013), “ Portfolio Optimization in the Presence of Dependent Financial Returns with Long Memory: A Copula Based Approach, ” *Journal of Banking and Finance*, 37(2), 361–377.
- Boubaker, H., and Sghaier, N. (2016), “ Markov-Switching Time-Varying Copula Modeling of Dependence Structure between Oil and GCC Stock Markets, ” *Open Journal of Statistics*, 6(4), 565–589.
- Boudt, K., Carl, P., and Peterson, B. G. (2012), “ Asset Allocation with Conditional Value-at-Risk Budgets, ” *Journal of Risk*, 15(3), 39–68.
- Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G., and Roncalli, T. (2000), “ Copulas for Finance-A Reading Guide and Some Applications, ” *Working Paper*, SSRN.
- Breymann, W., Dias, A., and Embrechts, P. (2003), “ Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance, ” *Quantitative Finance*, 3(1), 1–14.

Bunda, I., Hamann, A. J., and Lall, S. (2009), “Correlations in Emerging Market Bonds: The Role of Local and Global Factors,” *Emerging Markets Review*, 10(2), 67–96.

Campbell, R., Huisman, R., and Koedijk, K. (2001), “Optimal Portfolio Selection in a Value-at-Risk Framework,” *Journal of Banking and Finance*, 25(9), 1789–1804.

Cerrato, M., Crosby, J., Kim, M., and Zhao, Y. (2017a), “The Joint Credit Risk of UK Global - Systemically Important Banks,” *Journal of Futures Markets*, 37(10), 964–988.

Cerrato, M., Crosby, J., Kim, M., and Zhao, Y. (2017b), “Relation between Higher Order Comoments and Dependence Structure of Equity Portfolio,” *Journal of Empirical Finance*, 40, 101–120.

Chekhlov, A., Uryasev, S., and Zabarankin, M. (2005), “Drawdown Measure in Portfolio Optimization,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(1), 13–58.

Cherubini, U., Gobbi, F., Mulinacci, S., and Romagnoli, S. (2011), *Dynamic Copula Methods in Finance*, The Wiley Finance Series.

Clarke R. G., de Silva, H., and Murdock, R. (2005), “A Factor Approach to Asset Allocation,” *Journal of Portfolio Management*, 32(1), 10–21.

Chollete, L., Heinen, A., and Valdesogo, A. (2009), “Modeling International Financial Returns with a Multivariate Regime-Switching Copula,” *Journal of Financial Econometrics*, 7(4), 437–480.

Christoffersen, P. F. (1998), “Evaluating Interval Forecasts,” *International Economic Review*, 39(4), 841–862.

Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K., and Langlois, H. (2012), “Is the Potential for International Diversification Disappearing? A Dynamic Copula Approach,” *Review of Financial Studies*, 25(12), 3711–3751.

Christoffersen, P., Jacobs, K., Jin, X., and Langlois, H. (2018), “Dynamic Dependence and Diversification in Corporate Credit,” *Review of Finance*, 22(2), 521–560.

Christoffersen, P., and Langlois, H. (2013), “The Joint Dynamics of Equity Market Factors,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 48(5), 1371–1404.

- Clayton, D. G. (1978), “ A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence, ” *Biometrika*, 65(1), 141–151.
- Creal, D., Koopman, S. J., and Lucas, A. (2013), “ Generalized Autoregressive Score Models with Applications, ” *Journal of Applied Econometrics*, 28(5), 777–795.
- Danielsson, J. (2002), “ The Emperor Has No Clothes: Limits to Risk Modelling, ” *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1273–1296.
- Danielsson, J. (2011), *Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab*, The Wiley Finance Series.
- da Silva Filho, O. C., Ziegelmann, F. A., and Dueker, M. J. (2012), “ Modeling Dependence Dynamics through Copulas with Regime Switching, ” *Insurance: Mathematics and Economics*, 50(3), 346–356.
- De Luca, G., and Riviuccio, G. (2009), “ Archimedean Copulae for Risk Measurement, ” *Journal of Applied Statistics*, 36(8), 907–924.
- Demarta, S., and McNeil, A. J. (2005), “ The  $t$  Copula and Related Copulas, ” *International Statistical Review*, 73(1), 111–129.
- Dempster, A., Laird, N., and Rubin, D. (1977), “ Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, ” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(1), 1–38.
- Denkowska, A., and Wanat, S. (2019), “ Dependencies and Systemic Risk in the European Insurance Sector: Some New Evidence Based on Copula-DCC-GARCH Model and Selected Clustering Methods, ” *Entrepreneurial Business and Economics Review*, 8(4), 7–27.
- Di Clemente, A., and Romano, C. (2004), “ Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-Based Approach, ” *Economic Notes*, 33(3), 325–357.
- Dijk, D. V., Teräsvirta, T., and Franses, P. H. (2002), “ Smooth Transition Autoregressive Models - A Survey of Recent Developments, ” *Econometric Reviews*, 21(1), 1–47.
- Durand, R. B., Junker, M., and Szimayer, A. (2010), “ The Flight- to- Quality Effect: A Copula- based Analysis, ” *Accounting and Finance*, 50(2), 281–299.

- Embrechts, P., Kaufmann, R., and Patie, P. (2005), “ Strategic Long-Term Financial Risks: Single Risk Factors, ” *Computational Optimization and Applications*, 32(1), 61–90.
- Embrechts, P., McNeil, A., and Straumann, D. (2002), “ Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, ” *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, 176–223.
- Engle, R. (1982), “ Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 50(4), 987–1007.
- Engle, R. (2002), “ Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models, ” *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3), 339–350.
- Engle, R. F., and Kroner, K. F. (1995), “ Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, ” *Econometric Theory*, 11(1), 122–150.
- Engle, R. F., Lilien, D. M., and Robins, R. P. (1987), “ Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 55(2), 391–407.
- Engle, R., and Mezrich, J. (1996), “ GARCH for Groups, ” *Risk*, 9(8), 36–40.
- Erb, C. B., Harvey, C. R., and Viskanta, T. E. (1994), “ Forecasting International Equity Correlations, ” *Financial Analysts Journal*, 50(6), 32–45.
- Fan, Y., and Patton, A. J. (2014), “ Copulas in Econometrics, ” *Annual Review of Economics*, 6(1), 179–200.
- Fei, F., Fuertes, A. M., and Kalotychou, E. (2017), “ Dependence in Credit Default Swap and Equity Markets: Dynamic Copula with Markov-Switching, ” *International Journal of Forecasting*, 33(3), 662–678.
- Fermanian, J. D., and Wegkamp, M. H. (2012), “ Time-Dependent Copulas, ” *Journal of Multivariate Analysis*, 110(3), 19–29.
- Fink, H., Klimova, Y., Czado, C. and Stober, J. (2017), “ Regime Switching Vine Copula Models for Global Equity and Volatility Indices, ” *Econometrics*, 5(1), 3.



- Fortin, I., and Kuzmics, C. (2002), “ Tail-Dependence in Stock Return-Pairs, ” *International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 11(2), 89–107.
- Fortin, A. P., Simonato, J. G., and Dionne, G. (2022), “Forecasting Expected Shortfall: Should We Use a Multivariate Model for Stock Market Factors?, ” *International Journal of Forecasting*.
- Frank, M. J. (1979), “ On the Simultaneous Associativity of  $F(x, y)$  and  $x + y - F(x, y)$ , ” *Aequationes Mathematicae*, 19(1), 194–226.
- Frank, J., and Massey, JR. (1951), “ The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit, ” *Journal of the American Statistical Association*, 46(253), 68–78.
- Franses, P. H., and van Dijk, D. (2000), *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press.
- Garcia, R., and Tsafack, G. (2011), “ Dependence Structure and Extreme Comovements in International Equity and Bond markets, ” *Journal of Banking & Finance*, 35(8), 1954–1970.
- Gava, J., Guevara, F., and Turc, J. (2021), “ Turning Tail Risks into Tailwinds, ” *Journal of Portfolio Management*, 47(4), 41–70.
- Genest, C., Ghoudi, K., and Rivest, L. P. (1995), “ A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions, ” *Biometrika*, 82(3), 543–552.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., and Runkle, D. E. (1993), “ On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, ” *Journal of Finance*, 48(5), 1779–1801.
- González-Pedraz, C., Moreno, M., and Peña, J. I. (2015), “ Portfolio Selection with Commodities under Conditional Copulas and Skew Preferences, ” *Quantitative Finance*, 15(1), 151–170.
- Gul, F. (1991), “ A theory of disappointment aversion, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 59(3), 667–686.
- Gumbel, E. J. (1960), “ Bivariate Exponential Distributions, ” *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698–707.

- Hamilton, J. D. (1989), “ A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 57(2), 357–384.
- Hamilton, J. D. (1990), “ Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime, ” *Journal of Econometrics*, 45(1–2), 39–70.
- Hamilton, J. D. (2020), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hansen, B. E. (1994), “ Autoregressive Conditional Density Estimation, ” *International Economic Review*, 35(3), 339–350.
- Hong, Y., Tu, J., and Zhou, G. (2007), “ Asymmetries in Stock Returns: Statistical Tests and Economic Evaluation, ” *Review of Financial Studies*, 20(5), 1547–1581.
- Hsu, C. P., Huang, C. W., and Chiou, W. J. P. (2012), “ Effectiveness of Copula-Extreme Value Theory in Estimating Value-at-Risk: Empirical Evidence from Asian Emerging Markets, ” *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 39(4), 447–468.
- Hu, J. (2010), “Dependence Structures in Chinese and US Financial Markets: A Time-Varying Conditional Copula Approach, ” *Applied Financial Economics*, 20(7), 561–583.
- Huang, C. W., and Hsu, C. P. (2015), “ Portfolio Optimization with GARCH-EVT-Copula-CVaR Models, ” *Banking and Finance Review*, 7(1), 19–32.
- Huang, J. J., Lee, K. J., Liang, H., and Lin, W. F. (2009), “Estimating Value at Risk of Portfolio by Conditional Copula-GARCH Method, ” *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3), 315–324.
- Ilmanen, A., and Kizer, J. (2012), “ The Death of Diversification Has Been Greatly Exaggerated, ” *Journal of Portfolio Management*, 38(3), 15–27.
- Ji, Q., Liu, B., Cunado, J., and Gupta, R. (2020), “ Risk Spillover between the US and the Remaining G7 Stock Markets Using Time-Varying Copulas with Markov Switching: Evidence from Over a Century of Data, ” *The North American Journal of Economics and Finance*, 51(C), 100846.
- Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*, CRC Press.

Joe, H. (2006), “Discussion of ‘Copulas: Tales and Facts,’ by Thomas Mikosch,” *Extremes*, 9(1), 51–53.

Joe, H. (2014), *Dependence Modeling with Copula*, Chapman & Hall.

Joe, H., and Xu, J.J. (1996), “The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models,” *Technical Report*, 166, University of British Columbia, Department of Statistics.

Jondeau, E., and M. Rockinger (2002), “Conditional Dependency of Financial Series: The Copula-GARCH Model,” *FAME Research Paper*, 69, International Center for Financial Asset Management and Engineering.

Jondeau, E., and M. Rockinger (2006), “The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application,” *Journal of International Money and Finance*, 25(5), 827–853.

Jones, M. C., and Faddy, M. J. (2003), “A Skew Extension of the  $t$ -Distribution, with Applications,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 65(1), 159–174.

Jurczenko, E., and Teiletche, J. (2003), “Expected Shortfall Asset Allocation: A Multi-Dimensional Risk-Budgeting Framework,” *Journal of Alternative Investments*, 22(2), 7–22.

Karmakar, M., and Paul, S. (2019), “Intraday Portfolio Risk Management Using VaR and CVaR: A CGARCH-EVT-Copula Approach,” *International Journal of Forecasting*, 35(2), 699–709.

Kasahara, H., Okimoto, T., and Shimotsu, K. (2014), “Modified Likelihood Ratio Test for Regime Switching,” *The Japanese Economic Review*, 65(1), 25–41.

Kato, H., and Hibiki, N. (2017), “Asset Allocation Model with Tail Risk Parity,” *18th Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference*, Dec., 2017.

Kim, C. J. (1994), “Dynamic Linear Models with Markov-Switching,” *Journal of Econometrics*, 60(1–2), 1–22.

Kim, S. J., Lucey, B. M., and Wu, E. (2006), “Dynamics of Bond Market Integration between Established and Accession European Union Countries,” *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 16(1), 41–56.

- Kupiec, P. (1995), “ Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, ” *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.
- Longin, F., and Solnik, B. (2001), “ Extreme Correlation of International Equity Markets, ” *Journal of Finance*, 56(2), 649–676.
- Lu, X. F., Lai, K. K., and Liang, L. (2014), “ Portfolio Value-at-Risk Estimation in Energy Futures Markets with Time-Varying Copula-GARCH Model, ” *Annals of Operations Research*, 219(1), 333–357.
- Lucas, A., Schwaab, B., and Zhang, X. (2017), “ Modeling Financial Sector Joint Tail Risk in the Euro Area, ” *Journal of Applied Econometrics*, 32(1), 171–191.
- Maneejuk, P., Thongkairat, S., and Srichaikul, W. (2021), “ Time-Varying Co-Movement Analysis between COVID-19 Shocks and the Energy Markets Using the Markov Switching Dynamic Copula Approach, ” *Energy Reports*, 7(3), 81–88.
- Manner, H., and Reznikova, O. (2012), “ A Survey on Time-Varying Copulas: Specification, Simulations, and Application, ” *Econometric Reviews*, 31(6), 654–687.
- Markowitz, H. (1952), “ Portfolio Selection, ” *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Martellini, L., and Meyfredi, J. C. (2007), “ A Copula Approach to Value-at-Risk Estimation for Fixed-Income Portfolios, ” *Journal of Fixed Income*, 17(1), 5–15.
- Martellini, L., and V. Ziemann (2010), “ Improved Estimates of Higher-Order Comoments and Implications for Portfolio Selection, ” *The Review of Financial Studies*, 23, 1467–1502.
- Mashal, R., and Naldi, M. (2002), “ Pricing Multiname Credit Derivatives: Heavy Tailed Hybrid Approach, ” *Working Paper*, SSRN.
- McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press.
- Meucci, A. (2009), “ Managing Diversification, ” *Risk*, 22(5), 74–79.
- Miyajima, K., Mohanty, M. S., and Chan, T. (2015), “ Emerging Market Local Currency Bonds: Diversification and Stability, ” *Emerging Markets Review*, 22, 126–139.

- Li, D. X. (2000), “ On Default Correlation: A Copula Function Approach, ” *Journal of Fixed Income*, 9(4), 43–54.
- Lohre, H., Neugebauer, U., and Zimmer, C. (2012), “ Diversified Risk Parity Strategies for Equity Portfolio Selection, ” *Journal of Investing*, 21(3), 111–128.
- Lohre, H., Opfer, H., and Ország, G. (2014), “ Diversifying Risk Parity, ” *Journal of Risk*, 16(5), 53–79.
- Longin, F., and Solnik, B. (2001), “ Extreme Correlation of International Equity Markets, ” *Journal of Finance*, 56(2), 649–676.
- Lucas, A., and Klaassen, P. (1998), “ Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation, ” *Journal of Portfolio Management*, 25(1), 71–79.
- Nelson, D. B. (1991), “ Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 59(2), 347–370.
- Nelsen, R. B. (2007), *An Introduction to Copulas*, Springer Science & Business Media.
- Okimoto, T. (2008), “ New Evidence of Asymmetric Dependence Structures in International Equity Markets, ” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43(3), 787–815.
- Okimoto, T. (2014), “ Asymmetric Increasing Trends in Dependence in International Equity Markets, ” *Journal of Banking and Finance*, 46(C), 219–232.
- Ortiz, E., López-Herrera, F., Santillán-Salgado, R. J., and Fonseca-Ramírez, A. (2016), “ The Integration of Latin American Bond Markets: A Copula Analysis Approach (1999-2015), ” *International Journal of Bonds and Derivatives*, 2(3), 267–283.
- Otani, Y., and Imai, J. (2018), “ An Empirical Analysis of the Dependence Structure of International Equity and Bond Markets Using Regime-switching Copula Model, ” *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 48(2), 191–205.
- Ozun, A., and Cifter, A. (2007), “ Portfolio Value-at-Risk with Time-Varying Copula: Evidence from the Americas, ” *Journal of Applied Sciences*, 7(14), 1916–1923.
- Palaro, H. P., and Hotta, L. K. (2006), “ Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk, ” *Journal of Data Science*, 4(1), 93–115.

- Panagiotelis, A., Czado, C., and Joe, H. (2012), “ Pair Copula Constructions for Multivariate Discrete Data, ” *Journal of the American Statistical Association*, 107(499), 1063–1072.
- Patton, A. J. (2001), “ Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula, ” *Working Paper*, University of California, San Diego, Department of Economics.
- Patton, A. J. (2004), “ On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation, ” *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 130–168.
- Patton, A. J. (2006a), “ Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence, ” *International Economic Review*, 47(2), 527–556.
- Patton, A. J. (2006b), “ Estimation of Multivariate Models for Time Series of Possibly Different Lengths, ” *Journal of Applied Econometrics*, 2(1), 130–168.
- Patton, A. J. (2009), “ Copula-Based Models for Financial Time Series, ” *Handbook of Financial Time Series*, Springer Science & Business Media, 767–785.
- Patton, A. J. (2012), “ A Review of Copula Models for Economic Time Series, ” *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 4–18.
- Patton, A. J. (2013), “ Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series, ” *Handbook of Economic Forecasting*, North Holland, 2(B), 899–960.
- Piljak, V. (2013), “ Bond Markets Co-movement Dynamics and Macroeconomic Factors: Evidence from Emerging and Frontier Markets, ” *Emerging Markets Review*, 17, 29–43.
- Piljak, V., and Swinkels, L. (2017), “ Frontier and Emerging Government Bond Markets, ” *Emerging Markets Review*, 30, 232–255.
- Poon, S. H., Rockinger, M., and Tawn, J. (2004), “ Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications, ” *The Review of Financial Studies*, 17(2), 581–610.
- Righi, M. B., and Ceretta, P. S. (2012), “ Global Risk Evolution and Diversification: A Copula-DCC-GARCH Model Approach, ” *Revista Brasileira de Finanças*, 10(4), 529–550.

- Rivers, D., and Vuong, Q. (2002), “ Model Selection Tests for Nonlinear Dynamic Models, ” *The Econometrics Journal*, 5(1), 1–39.
- Rockafellar, R. T., and Uryasev, S. (2000), “ Optimization of Conditional Value-at-Risk, ” *Journal of Risk*, 2(3), 21–42.
- Rockafellar, R. T., and Uryasev, S. (2002), “ Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, ” *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1443–1471.
- Rodriguez, J. C. (2007), “ Measuring Financial Contagion: A Copula Approach, ” *Journal of Empirical Finance*, 14(3), 401–423.
- Romano, C. (2002), “ Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market, ” *Risk Management Function, Capitalia, Viale U. Tupini*, 180.
- Roncalli, T. (2013), *Introduction to Risk Parity and Budgeting*, CRC Press.
- Roncalli, T., and Weisang, G. (2016), “ Risk Parity Portfolios with Risk Factors, ” *Quantitative Finance*, 16(3), 377–388.
- Sahu, S. K., Dey, D. K., and Branco, M. D. (2003), “ A New Class of Multivariate Skew Distributions with Applications to Bayesian Regression Models, ” *Canadian Journal of Statistics*, 31(2), 129–150.
- Şerban, M., Brockwell, A., Lehoczky, J., and Srivastava, S. (2007), “ Modelling the Dynamic Dependence Structure in Multivariate Financial Time Series, ” *Journal of Time Series Analysis*, 28(5), 763–782.
- Shimizu, H., and Shiohama, T. (2019), “ Multifactor Portfolio Construction by Factor Risk Parity Strategies: An Empirical Comparison of Global Stock Markets, ” *Asia-Pacific Financial Markets*, 26(4), 453–477.
- Sims, C. A. (1980), “ Macroeconomics and Reality, ” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 48(1), 1–48.
- Sklar, A. (1959), “ Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges, ” *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229–231.

- Smith, A., Naik, P. A., and Tsai, C. L. (2006), “ Markov-Switching Model Selection Using Kullback–Leibler Divergence, ” *Journal of Econometrics*, 134(2), 553-577.
- Smith, M. S., Gan, Q., and Kohn, R. J. (2012), “Modelling Dependence Using Skew  $t$  Copulas: Bayesian Inference and Applications, ” *Journal of Applied Econometrics*, 27(3), 500–522.
- Sortino, F. A., Van Der Meer, R., and Plantinga, A. (1999), “ The Dutch Triangle, ” *Journal of Portfolio Management*, 26(1), 50–57.
- Sriboonchitta, S., Liu, J., and Wiboonpongse, A. (2014), “ Vine Copula-Cross Entropy Evaluation of Dependence Structure and Financial Risk in Agricultural Commodity Index Yields, ” *Modeling Dependence in Econometrics*, Springer Science & Business Media, 275–287.
- Stulajter, F. (2009), “ Comparison of Different Copula Assumptions and Their Application in Portfolio Construction, ” *Ekonomická Revue-Central European Review of Economic Issues*, 12(4), 191–204.
- Tachibana, M. (2020), “ Flight-to-Quality in the Stock–Bond Return Relation: A Regime-Switching Copula Approach, ” *Financial Markets and Portfolio Management*, 34(4), 429-470.
- Tang, J., Zhou, C., Yuan, X., and Sriboonchitta, S. (2015), “ Estimating Risk of Natural Gas Portfolios by Using GARCH-EVT-Copula Model, ” *The Scientific World Journal*, 33, 948–955.
- Teräsvirta, T. (1994), “ Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models, ” *Journal of the American Statistical Association*, 89(425), 208–218.
- Tiwari, A. K., Aye, G. C., Gupta, R., and Gkillas, K. (2020), “Gold-Oil Dependence Dynamics and the Role of Geopolitical Risks: Evidence from a Markov-Switching Time-Varying Copula Model, ” *Energy Economics*, 88, 104748.
- Tiwari, A. K., Nasreen, S., Hammoudeh, S., and Selmi, R. (2021), “ Dynamic Dependence of Oil, Clean Energy and the Role of Technology Companies: New Evidence from Copulas with Regime Switching, ” *Energy*, 220, 119590.
- Tong, H. and Lim, K.S. (1980), “ Threshold Autoregression, Limit Cycles and Data, ” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 42(3), 245–292.



- Tsafack, G. (2009), “ Asymmetric Dependence Implications for Extreme Risk Management,” *Journal of Derivatives*, 17(1), 7–20.
- Tsay, R. S. (2005), *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons.
- Tse, Y. K. (2000), “ A Test for Constant Correlations in a Multivariate GARCH Model,” *Journal of Econometrics*, 98(1), 107–127.
- Tse, Y. K., and Tsui, A. K. C. (2002), “ A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3), 351–362.
- Vuong, Q. H. (1989), “ Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 57(2), 307–333.
- Yamaka, W., and Maneejuk, P. (2020), “ Analyzing the Causality and Dependence between Gold Shocks and Asian Emerging Stock Markets: A Smooth Transition Copula Approach,” *Mathematics*, 8(1), 1–27.
- Yang, L., and Hamori, S. (2013), “ Dependence Structure among International Stock Markets: A GARCH–Copula Analysis,” *Applied Financial Economics*, 23(23), 1805–1817.
- Yang, L., and Hamori, S. (2014), “ Gold Prices and Exchange Rates: A Time-Varying Copula Analysis,” *Applied Financial Economics*, 24(1), 41–50.
- Yoshihara, T. (2018), “ Maximum Likelihood Estimation of Skew- $t$  Copulas with Its Applications to Stock Returns,” *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(13), 2489–2506.
- Yoshihara, T. (2019), “ Value-at-Risk and Expected Shortfall of Stock Portfolio Using Skew- $t$  Copulas,” *1st Nippon Finance Association Fall Conference*, Nov. 30, 2019.
- Young, T. W. (1991), “ Calmar Ratio: A Smoother Tool,” *Futures*, 20(1), 40.
- Wang, K., Chen, Y. H., and Huang, S. W. (2011), “ The Dynamic Dependence between the Chinese Market and Other International Stock Markets: A Time-Varying Copula Approach,” *International Review of Economics & Finance*, 20(4), 654–664.

Wang, Y. C., Wu, J. L., and Lai, Y. H. (2013), “A Revisit to the Dependence Structure between the Stock and Foreign Exchange Markets: A Dependence-Switching Copula Approach,” *Journal of Banking & Finance*, 37(5), 1706–1719.

Weiβ, G. N. (2013), “Copula-GARCH versus Dynamic Conditional Correlation: An Empirical Study on VaR and ES Forecasting Accuracy,” *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 41(2), 179–202.

Zakoian, J. M. (1994), “Threshold Heteroskedastic Models,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 931–955.

Zhang, B., Wei, Y., Yu, J., Lai, X., and Peng, Z. (2014), “Forecasting VaR and ES of Stock Index Portfolio: A Vine Copula Method,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 416, 112–124.

Zhao, Y., Stasinakis, C., Sermpinis, G., and Fernandes, F. D. S. (2019), “Revisiting Fama–French Factors’ Predictability with Bayesian Modelling and Copula-Based Portfolio Optimization,” *International Journal of Finance and Economics*, 24(4), 1443–1463.

Zhou, C., and Qin, X. (2021), “Time-Varying Asymmetric Tail Dependence of International Equities Markets,” *Pacific-Basin Finance Journal*, 68, 101589.

夷藤翔, 中村信弘 (2019), 「ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いた新興国国債市場の相互依存構造に関する研究」『ジャフィー・ジャーナル』17, 45–66.

夷藤翔, 牧本直樹 (2021), 「マルコフ・スイッチング・ダイナミック非対称  $t$  コピュラを用いた本邦株式市場の依存構造に関する研究」『ジャフィー・ジャーナル』19, 27–56.

夷藤翔, 牧本直樹 (2022), 「コピュラの違いが最適資産配分に与える影響の研究—非対称  $t$  コピュラと正規コピュラ,  $t$  コピュラの比較—」『現代ファイナンス』, 45, 1–29.

沖本竜義 (2010), 『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』, 朝倉書店.

沖本竜義 (2012), 「国際金融市場の依存関係における非対称性と長期トレンド—時系列モデルアプローチの観望と新潮流—」『現代ファイナンス』, 31, 19–40.

新谷幸平, 山田哲也, 吉羽要直 (2010), 「金融危機時における資産価格変動の相互依存関係: コピュラに基づく評価」『金融研究』, 29(3), 89–122.

田村徳崇, 安藤航平 (2021), 「バリュウファクターとの正しい向き合い方」『証券アナリストジャーナル』, 59(3), 41–50.

戸坂凡展, 吉羽要直 (2005), 「コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説」『金融研究』, 24(2), 115–162.

増田弘毅 (2002), 「GIG 分布と GH 分布に関する解析」『統計数理』, 50(2), 165–199.

山井康浩, 吉羽要直 (2001), 「バリュウ・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について—理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析—」『金融研究』, 20(2), 33–68.

吉羽要直 (2010), 「金融リスクにおける確率分布の裾および変量間の依存関係の影響と定量化」, 総合研究大学院大学複合科学研究科博士論文.

吉羽要直 (2020), 「非対称  $t$  接合関数の性質と統計的推定方法」『統計数理』, 68(1), 45–63.