

令和 3 年 6 月 2 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05223

研究課題名(和文) ウェーブレット解析による変数係数を持つ波動方程式への超局所解析的応用

研究課題名(英文) Applications of micro-local analysis and wavelet analysis to wave equations with variable coefficients

研究代表者

木下 保 (Kinoshita, Tamotsu)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：90301077

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、偏微分方程式とウェーブレットおよびラドン変換に関連する研究を行った。偏微分方程式については、変数係数を持つ波動タイプの方程式に対する初期値問題の解の表現公式と適切性に関する研究も行い、ウェーブレット理論も取り入れた新たな成果も得ることができた。ウェーブレットについては、独自の2次元のパーセヴァルフレームや双対フレームを考案した。特に、周波数空間においてより滑らかなフレームを構成することで、展開式の角度方向がより鮮明になり得ることを数値シミュレーションで確認した。また、ラドン変換と関係した新たな変換をいくつか考案し、その性質や応用に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

変数係数を持つ波動タイプの偏微分方程式に対する初期値問題の解の表現公式が得られれば、物理現象の法則となる解の性質等が引き出せ、数値実験もそのままの形で実行ができるため、理論的にも応用的にも非常に意義があり、波動現象の解明へと繋がることを期待できる。また、本研究で得られた2次元のパーセヴァルフレームや双対フレームは2次元の画像解析への応用が可能で、数値解析的な処理速度や画像の精度の向上が期待できる。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied partial differential equations, wavelet and Radon transform. We considered exact formulas and well-posedness of the Cauchy problem for wave equations with variable coefficients. As for the wavelet analysis, we designed some two-dimensional Parseval frames and dual frames. By numerical simulations we found that smooth frames in the frequency space give better reconstruction. Moreover, we also proposed some transforms concerned with the Radon transform and showed their properties and applications.

研究分野：関数解析

キーワード：関数方程式論 ウェーブレット 数値解析

1. 研究開始当初の背景

(1) 偏微分方程式 (双曲型方程式) に関する学術的背景:

変数係数を持つ波動方程式: 一般に波動方程式は“波の伝播”を記述する偏微分方程式である。定数係数を持つ場合は解の表現公式もよく知られているが、変数係数を持つ場合は解を具体的に求めることは非常に困難とされている。そのため、解に対して剰余項を含む漸近的な表現をして、近似解を構成することになる。初期値問題の解の適切性に関しては、変数係数の滑らかさや振動および退化の状況が、解の滑らかさに影響することが知られている。双曲型方程式の研究の場合、解の滑らかさを計る指標として、実解析的な関数の空間と無限回微分可能な関数の空間を補間する Gevrey クラスの関数空間を用いることが多い。

研究の動機:

時間発展する偏微分方程式に対する初期値問題を考察する際、係数にある時間変数と空間変数は解の性質に与える影響がまったく異なり、興味深い。また、2階の双曲型方程式で係数が退化する(特性根が重複する)場合としない場合で、解の滑らかさである Gevrey クラスのオーダーが大きく変化する。それぞれの場合に限定して詳しく研究することで、より精密な結果を得たい。

(2) ウェーブレットに関する学術的背景:

ウェーブレットは、関数を平行移動と拡大伸縮を操作して得られる正規直交基底のことである。従来のフーリエ級数展開は、三角関数による変調にもとづいた基底であるが、三角関数は無限に広がる波であるため、関数展開をしたときの位置情報を得ることはできない。そこでこの弱点を克服するために近年開発されたのが(局所的な狭い幅の波である)ウェーブレットの起源である。ウェーブレット解析は、1980年代初めに地球物理学の石油探査および地震波の研究の中で初めて登場し、その後多くの学問的な分野に劇的な変化を与えた。ウェーブレットはその理論の発展と共に、量子力学、計算生物学、信号処理まで盛んに応用されているため、非常に魅力的な研究分野である。1次元のウェーブレットに関しては数多くのウェーブレットが知られており、私自身もこれまで特徴的なウェーブレットを考案してきた(例えば、時間周波数窓の指標が限界に近いウェーブレットや Gevrey クラスのウェーブレット等)。

研究の動機:

2次元の時間周波数解析では、1次元のウェーブレットの直積タイプを用いた展開式だけでなく、Curvelet や Shearlet といったフレームを用いた展開式も利用されている。それらは角度方向をより詳細に検出するメリットをもっているため、画像解析に応用され興味深い。また、2次元のウェーブレットの理論も発展させ、偏微分方程式論と融合させた研究も行いたい。

2. 研究の目的

本研究では、同時に次の3つのテーマを研究することを目的とした。

- (1) 偏微分方程式 (双曲型方程式) (2) ウェーブレット (3) ラドン変換

なお、申請時当初の目的は(1)と(2)だけであったが、両者とも関連深い(3)のテーマも追加した。

(1) 偏微分方程式について: 変数係数を持つ波動タイプの偏微分方程式に対する初期値問題の解の表現公式が得られれば、物理現象の法則となる解の性質等が引き出せ、数値実験もそのままの形で実行ができるため、理論的にも応用的にも非常に意義があり、波動現象の解明へと繋がる事が期待できる。また、初期値問題の適切性を調べることで、大域的な解が存在するために必要な初期値の滑らかさを見いだすことも目的である。

(2) ウェーブレットについて: 正規直交基底は理想的であるが、その構成には強い条件が必要となる。一方、フレームは冗長性があるものの比較的構成しやすいメリットがある。特に平行移動と拡大伸縮を操作するウェーブレットタイプのフレームを考えることを目的とし、より冗長性の少ないフレームを開発すれば、数値解析的な処理速度や精度の向上が期待できる。

(3) ラドン変換について: 偏微分方程式の解の表現公式とラドン変換との関連を詳しく調べる。また、ラドン変換とウェーブレット変換を組み合わせた応用的に意義のあるリッジレット変換の研究も目的とする。

3. 研究の方法

3つの研究テーマに関して以下のような方法で研究を行った。

(1)偏微分方程式について：海外の外国人の共同研究者とは、主にメールや国内へ招聘することで研究を進めた。また研究分担者とも定期的に研究打ち合わせを行った。

(2)ウェーブレットについて：研究集会や談話会を開催し、その際に連携研究者と研究打ち合わせも行って効率良く研究を進めることができた。

(3)ラドン変換について：情報工学の専門家らと勉強会となるセミナー等もいくつか企画して、研究打ち合わせも行った。

4. 研究成果

3つの研究テーマに関して以下のような研究成果を得ることができた。

(1)偏微分方程式について：変数係数に持つ波動タイプの方程式に対する初期値問題の解の表現公式の研究を行った。これまでの自身の研究から時間変数または空間変数を持つ場合の結果を得ているのでそれらの一般化を試み、部分的な結果をいくつも積み重ねながら研究を続けた。今後は部分的な研究成果を順次発表したいと考えている。適切性に関しては、滑らかではなく振動するような変数係数を持つ2階の双曲型方程式に対する初期値問題を研究を行った。従来のGevreyクラスにおける適切性の結果を発展させて、条件にウェーブレット理論も取り入れた結果を得ることができた。

(2) ウェーブレットについて：1次元のウェーブレットでは、Stromberg ウェーブレットに関して特に4次のオーダーのときに注目し、対称性等の詳しい結果を得ることができた。2次元の時間周波数解析の場合、既存のCurveletやShearletより単純な形をしたパーセヴァルフレームや双対フレームを考案した。特に、周波数空間において滑らかなフレームを構成することで、展開式が角度方向により鮮明になることを数値シミュレーションで確認した。

(3)ラドン変換について：ラドン変換はスライス定理を通じてフーリエ変換にもとづいている。そこで、フラクショナルフーリエ変換にもとづくフラクショナルラドン変換というものを新たに導出し、波動方程式を用いて特徴づけることができた。また、リッジレット変換を発展させて、ウェーブレット変換の窓だけでなく、ラドン変換に関しても窓を導入して、2重窓を持つような新たな変換を考案し、その逆変換公式も導出することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Naohiro Fukuda, Tamotu Kinoshita, Toshio Suzuki	4. 巻 62
2. 論文標題 Haar and Shannon wavelet expansions with explicit coefficients of the Takagi function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Indian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 21-41
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fujii Katsuya, Kinoshita Tamotu	4. 巻 31
2. 論文標題 On the double windowed ridgelet transform and its inverse	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Integral Transforms and Special Functions	6. 最初と最後の頁 118 ~ 132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10652469.2019.1675059	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fukuda Naohiro, Kinoshita Tamotu, Yoshino Kazuhisa	4. 巻 2017
2. 論文標題 Wavelet transforms on Gelfand-Shilov spaces and concrete examples	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Inequal. Appl.	6. 最初と最後の頁 119
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1186/s13660-017-1393-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 福田 尚広, 木下 保	4. 巻 27
2. 論文標題 4次のStrombergウェーブレット	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 162 ~ 185
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujii Katsuya, Kinoshita Tamotu, Suzuki Toshio	4. 巻 29
2. 論文標題 On an n -th-order fractional Radon transform and a wave type of equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Integral Transforms And Special Functions,	6. 最初と最後の頁 1~17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10652469.2018.1434777	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Fukuda, T. Kinoshita, and T. Suzuki	4. 巻 14
2. 論文標題 On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Intl. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process.	6. 最初と最後の頁 1650007
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219691316500077	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kinoshita	4. 巻 26
2. 論文標題 On Second Order Hyperbolic Equations with Coefficients Degenerating at Infinity and the Loss of Derivatives and Decays	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 5441-5423
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2016.08.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Galstian and T. Kinoshita	4. 巻 130
2. 論文標題 Representation of solutions for 2nd order one-dimensional model hyperbolic equations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal D'Analyse Mathematique	6. 最初と最後の頁 355-374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11854-016-0040-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 Hardy空間上のウェーブレットについて
3. 学会等名 時間周波数フレームと画像解析への応用
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 On Directional Frames Having Lipschitz Continuous Fourier Transforms
3. 学会等名 つくば偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 On Directional Frames Having Lipschitz Continuous Fourier Transforms
3. 学会等名 多次元Stockwell変換と時間周波数解析,
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 On Parseval Frames for Multidirectional Expansions and a Semi-discretization Scheme of the Inversion of the Radon Transform
3. 学会等名 名古屋偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 On Parseval Frames for Multidirectional Expansions and a Semi-discretization Scheme of the Inversion of the Radon Transform
3. 学会等名 日本応用数理学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 On Parseval Frames for Multidirectional Expansions and a Semi-discretization Scheme of the Inversion of the Radon Transform
3. 学会等名 トモグラフィーと逆問題（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 Curvelets and Parseval frames for multidirectional expansions
3. 学会等名 日本応用数理学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 On an α th Order Fractional Radon Transform and a Wave Type of Equation
3. 学会等名 函館野偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 Gelfand-Shilov空間におけるウェーブレット変換について
3. 学会等名 彦根偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 木下保
2. 発表標題 Wavelet transforms on Gelfand-Shilov spaces
3. 学会等名 ウェーブレット解析の研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	梶谷 邦彦 (Kajitani Kunihiko) (00026262)	筑波大学・数理物質系(名誉教授)・名誉教授 (12102)	
研究分担者	石渡 聡 (Ishiwata Satoshi) (70375393)	山形大学・理学部・准教授 (11501)	
研究分担者	久保 隆徹 (Kubo Takayuki) (90424811)	お茶の水女子大学・基幹研究院・准教授 (12611)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Texas Rio Grande Valley			
イタリア	University of Bari			