

## 普通科高校における「線形計画法」に関する学習指導の可能性 Ⅱ

—数学科と公民科の教科横断的な指導に焦点を当てて—

数学科 三輪 直也

公民科 熊田 亘

### 1. はじめに（この部分は本校紀要第 63 巻に掲載したものと同一）

学校教育の役割の 1 つとして、児童・生徒の社会生活で役立つ資質・能力を身につけることが挙げられ、各教科の学習内容もその役割を果たし得る内容が扱われている。ただ、児童・生徒が学校を卒業して社会人となってから役立つよりも、毎日の日常生活で即時的に活用できるような、必要性の高い学習内容を授業で取り扱うことが望まれる。

「線形計画法」は、ある制約条件下で目的を達成するための最適解を導き出す優れた方法で、文化祭でのシフト決めなど高校生の日常生活でも生徒が自主的に活用する可能性を大いに秘めている。現行の高等学校学習指導要領では商業科や数学科の中で扱われる内容であるが、商業を履修する生徒数は多いとはいえず、数学の教科書に記載されている問題も高校生の日常生活とは掛け離れた場面が提示されていることが多い。例えば井上（2014）の実践報告などを踏襲しつつも、普通科高校の生徒が日常生活で自主的に「線形計画法」を活用できるような、数学科と公民科の教科横断的な学習指導の在り方を考察した。

### 2. 「線形計画法」について（この部分は本校紀要第 63 巻に掲載したものと同一）

「線形計画法」とは、様々な制約条件のもとで目的関数を最大または最小にする変数の値、および最大値または最小値を求める数理計画法の一種で、制約条件も目的関数もすべて一次式で表されるものを意味する。例えば、制約条件が 2 つの一次不等式  $x + 2y \leq 12$ 、 $2x + y \leq 12$  で与えられ、目的関数が一次式  $x + y$  で表される。このとき、制約条件を満たす正の実数  $x$  と  $y$  の組の中で、目的関数を最大にする変数の値は  $(x, y) = (4, 4)$  であり、目的関数は最大値 8 をとる。

もし制約条件と目的関数が 2 変数で与えられたならば、制約条件を満たす値が含まれる領域を図 1 のように平面上で図示することができ、問題場면을図形的に考えることもできる。2 変数でない場合もシンプレックス法（単体法）を利用して解くことができるが、操作方法さえ覚えれば Excel でも簡潔に解くことができる。線形計画法のうち、求めたい変数の値を整数に限定したものを整数計画法といい、制約条件や目的関数に一次式ではないものを含む手法は非線形計画法という。

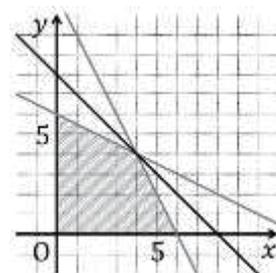


図1

「線形計画法」の身近な実用例で言えば、輸送コストを最小化や人員の配置方法など多岐にわたり、経済や工業の分野などで幅広く利用されている。

### 3. 教科横断的な指導について

「線形計画法」を生徒が実際に日常生活で活用するためには、なぜ最適解が求められるかの理論的な内容と、日常生活の問題を多変数で捉えて Excel で実際に解く実用的な内容を授業で扱う必要がある。数学科では理論的な内容に、公民科では実用的な内容を扱いながら、教科横断的な指導を通して相互に補完し合う指導系列を計画した。また、両方の授業に関連性をもたせるため、文化祭を話題にすることも留意した。

### 4. 「線形計画法」を題材とした数学科の授業

#### (1) 数学科での実践授業の計画

授業を実施する学校の文化祭（桐陰祭）では、模擬店で手作りの食べ物を販売するクラス団体のことを食販団体と呼び、基本的には第3学年のクラスで企画することが多い。そこで、食販で利益を最大にするための作戦会議を、第2学年で履修する「数学Ⅱ」の授業で扱うことにした。

#### ●● Lecture. 03-07 「桐陰祭」の食販で売り上げ額を最大にするには？ ●●

今年も待ちに待った「桐陰祭」の時期になりました。あるクラスは食販団体として、ハンバーガーとオムライス販売します。前日にひき肉、タマネギ、ケチャップなどの食材を、表の分量だけ購入しました。食材を無駄なく使い切って、売り上げ額をできるだけ多くするための作戦を考えましょう！



食材表（1個あたり）			食材量	値段（1個あたり）
	ハンバーガー	オムライス	・ひき肉 3800 g	・ハンバーガー 400 円
ひき肉	60 g	40 g	・タマネギ 2100 g	・オムライス 300 円
タマネギ	20 g	30 g	・ケチャップ 1200 g	
ケチャップ	20 g	10 g		

ハンバーガーとオムライスを作る最適な個数を調べるために、線形計画法を利用します。

図 2

ハンバーグの個数を  $x$  個、オムライスの個数を  $y$  個とすると、3つの一次不等式  $60x + 40y \leq 3800$ 、 $20x + 30y \leq 2100$ 、 $20x + 10y \leq 1200$  が表す領域を図示することができ、 $400x + 300y$  の最大値を図形的に考えることができる。その結果、利益を最大にする正の整数  $x$  と  $y$  の組は  $(x, y) = (30, 50)$  であり、最大の利益は 27000 円であると求めることができる。3つの一次不等式による制約条件を満たす  $x$  と  $y$  の組をすべて導き出し、すべての組について利益を計算しても最適解が求められるが煩雑である。制約条件や目的関数を図形的に表現することで最大値を視覚的に解釈することができ、問題解決の手掛かりを得られることを実践授業の中では強調していきたい。

最大の利益を求めた後も、ケチャップをすべて使い切った上での最大の利益を考えたり、

ハンバーグとオムライスで 100 個売するために食材をどれだけ買い足せばよいかを考えたりするなど、問いを広げながら一連の活動を連続的に展開していく。これらの活動を通して、「線形計画法」によって最適解が求められる根拠の理解を促す。

## (2) 数学科での実践授業の概要

実践授業の計画をもとに、下記の概要で実践授業を実施した。

日 時：令和 4 年 11 月 2 日 第 1・2 校時 8 時 40 分～10 時 20 分（2 コマ）

対 象：国立大学附属高等学校第 2 学年の生徒 39 名（男子 21 人，女子 18 人）

ねらい：線形計画法によって、身近で単純な状況の最大の売り上げ額を求められることを理解し、複雑な状況下でも線形計画法を活用しようとする。

対象クラスの数学の授業は、週 3 時間の「数学Ⅱ」と週 2 時間の「数学 B」に分けられ、2 名の教諭で担当している。「図形と方程式」の単元の学習を一通り終えた後に、本時の授業を行った。クラス全体としては、落ち着いた雰囲気の中で課題に取り組めるものの、数学に対する苦手意識をもつ生徒も多い。そのため、教師からの問いかけに対して、積極的に発言したり、つぶやいたりする姿に偏りが見られる。数学の得意な生徒が苦手な生徒を援助できるように、グループ活動を取り入れるなどして授業展開を工夫した。

## (3) 数学科での実践授業の実際

まずは最初に、「図形と方程式」の単元の中で扱った問題とその解法の想起から始まった。

### 【問題】

実数  $x$ ， $y$  が  $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $2x + 3y \leq 12$ ， $2x + y \leq 8$  を満たすとき、 $x + y$  の最大値を求めよ。

図 3

図 3 の問題を解いた後すぐに実践授業を行いたかったが、授業時数の都合上、実施が難しかったため、まずは問題とその解法を想起することから始めている。 $x + y = k$  において、制約条件を満たす範囲を領域として図示することで、 $k$  の値が最大となる  $x$ ， $y$  の値を特定する。制約条件を満たす整数  $x$ ， $y$  をすべて導き出し、 $x + y$  の値を逐一計算することもできるが、とても煩雑になる。そういった活動を通して、図形的に考えることのよさを再確認した。

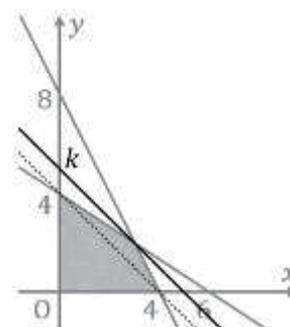


図 4

次に、9 月に行われた桐陰祭の写真をスライドで投影しながら、新型コロナウイルス感染症（COVID-19）が流行する前に食販が行われていたときの写真も投影した。生徒からは自然と「昔の桐陰祭の写真だ」、「出店楽しそう」というような声が聞こえ、来年度、第 3 学年に進級したときに食販団体として企画・運営したいという意欲が感

じられた。

次に、ワークシートとグラフ用紙を配布し、「線形計画法」の説明を行った。ただ一方的に説明するのではなく、「線形計画法は身のまわりで何に使われているかを知っている人？」と問いかけながら、クイズ形式で説明を進めていった。輸送用トラックやシフトの写真のスライドで投影しつつも、輸送コストの最小化やシフトの作成にも使われていること、Excelのソルバー機能でも「線形計画法」を容易に使うことができることも説明した。

「線形計画法」の説明を終えたところで、「桐陰祭に「線形計画法」を活用できないかな？」と問いかけながら、図2の問題場面を提示した。学校の文化祭という生徒の日常生活の出来事を題材にしているため、生徒も問題場面をイメージしやすく、問題を解くモチベーションも高いように感じられた。その中で、「ケチャップは、オムライスよりハンバーガーの方が多いんですね」と発言する生徒が現れ、問題場面の現実性に対して疑問を持つ生徒が少なからずいたようである。食材もひき肉、タマネギ、ケチャップの3種類しか考えてないものの、より現実的な問題場面になれば条件が複雑になる。実用的な内容を扱う公民科の授業への接続を考慮するとき、数学で学習する内容の限界を理解することは重要であると考え、そういったつづやきを取り上げながら授業を進めていった。

ここで、「現実的な問題を解くときに、大切な考え方を覚えてますか？」と問いかけて、「みなす」という考え方を想起させた。過去、他の単元で扱った考え方で、本授業においても図5のようにみなして考えることにした。

★ 以下のように「みなす」ことにします ★

- ・ひき肉、タマネギ、ケチャップ以外の食材については、考えないものとする。
- ・作ったハンバーガーとオムライスは完売するものとする。

図5

ハンバーガーとオムライスの個数をそれぞれ  $x$  個、 $y$  個とにおいて、売り上げ額を最大にする  $x$ 、 $y$  の値とそのときの売り上げ額を求めていった。制約条件を満たす  $x$ 、 $y$  の範囲を領域で表し、 $400x + 300y = k$  とにおいて、 $k$  の値が最大となる  $x$ 、 $y$  の値を特定する。図3の問題とその解法を想起したこと、途中、不等式の立式まではクラス全体で共有しながら丁寧に進めていったことで、ほぼ全員の生徒がハンバーガー30個、オムライス50個、最大の売り上げ額27000円を求めることができた。間違っただ領域をグラフ用紙に図示している生徒も中には見受けられたので、間違えずに図示している生徒のグラフ用紙をクラス全体で共有することもした。図6のような領域を、iPadで写真を撮

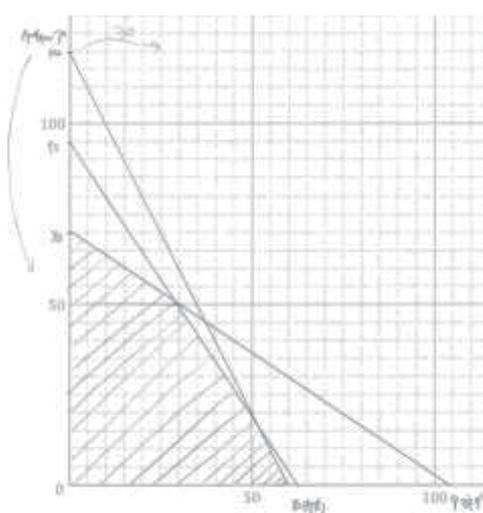


図6

ってプロジェクターに投影することで、生徒1人1人が各自で確認する時間をとった。

次に、「来年食販をやるときに、この数字で売りますか？」と問いかけたところ、隣同士で相談する姿が見られたので、クラス全体でその時間を少し設けた。再び問いかけたところ、「売らないと思う」、「売らない」という意見が大半で、「ハンバーガーとオムライス以外のものを売りたい」、「27000円では売り上げとして少ない」という意見が出てきた。そこで、図7のようなツクバくんとツクバちゃんの疑問を解決するように促した。問題を解いたら終わるのではなく、このように問いを広げていくことで活動が連続的につながっていく。そういった一連の活動の中で、数学で学習する内容の限界を知り、公民科で実用的な内容を扱う契機を誘発していくことがねらいである。

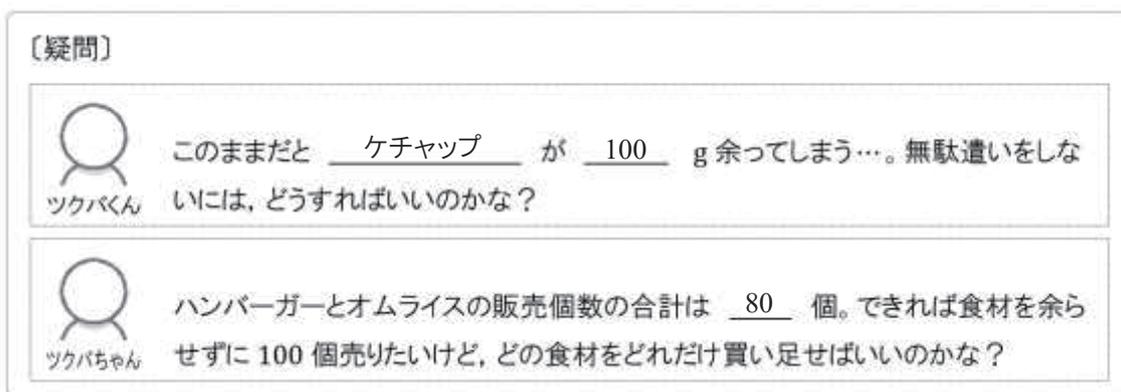


図7

ツクバくんとツクバちゃんの疑問に対する解決策について、それぞれiPadで写真を撮り、生徒の考えを共有しながら活動を進めていった。どちらの疑問に対しても解決策を1つずつ考え出す生徒もいれば、片方の解決策だけしか考え出せない生徒がいた。ただ、どちらかに対しては考えを見出すことができていたので、グループ活動に進んでいった。ツクバくんとツクバちゃんのどちらでグループ活動を行いたいかを各生徒に決めさせ、ツクバくんで意見交換したい生徒のみで3、4人のグループをつくった。各グループで意見交換をした後、ホワイトボードに解決策とその数学的な根拠を記述させ、最後にクラス全体で共有した。図8は、そのときに使われた実際のホワイトボードの写真である。

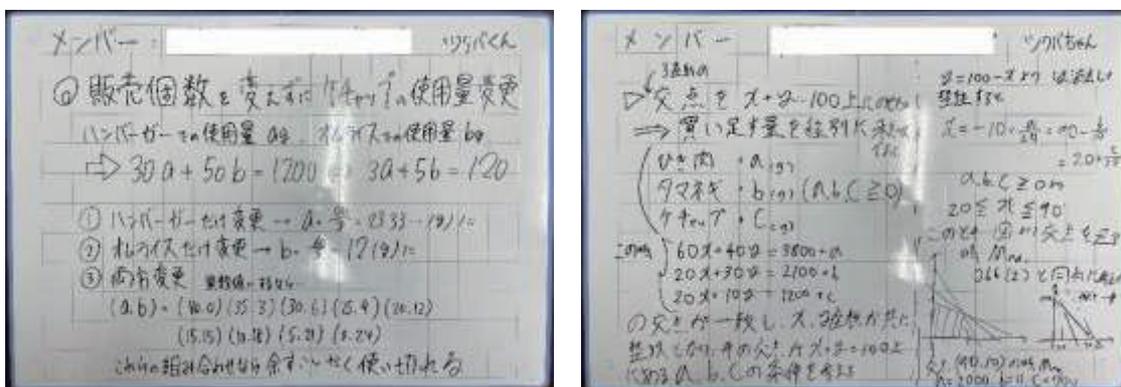


図8

## 5. 「線形計画法」を題材とした公民科の授業の計画（この部分は本校紀要第 63 巻に掲載したものと同一）

第 2 学年の「数学Ⅱ」で、1 次式とグラフによる解法を学んだことを前提に、第 3 学年の「政治・経済」で「線形計画法」を扱う。ここでは、種類の異なる問題を扱い、実践的な解法と、「線形計画法」が企業活動や政府の施策（例えば新型コロナ・ワクチンの輸送）に用いられていること、また、生徒の身近な問題にも利用できることを紹介する。

授業のおおまかな流れは次の通りである。

- ア 下の【問題 1】を用いて「数学Ⅱ」で学んだ「線形計画法」を復習する。
- イ 変数が増えると、1 次式とグラフによる解法では解けなくなることを示す。
- ウ 表計算ソフトのソルバーを使った解法を紹介し、【問題 1】を解いてみせる（ソルバーで用いられているシンプレックス法については口頭で簡単に説明する）。
- エ 【問題 2】【問題 3】【問題 4】について、制約条件と目的関数の式を立てさせ、ソルバーで解いてみせる（あるいは、ダイアログボックスに入力し、解くところまで生徒にやらせる）。

### 【問題 1】

2 種類の栄養ドリンクがあり、それぞれ 1 本あたりに含まれる 3 種類の栄養素の含有量、価格、また「頭を良くする」ために必要なそれぞれの栄養素の量が決まっている。なるべく安あがりに「頭を良くする」には、それぞれどれだけ飲めばいいだろうか。

### 【問題 2】（輸送問題）

ある企業は、生産工場 2 箇所と、販売所 3 箇所を持っており、それぞれの工場での 1 日あたりの生産個数、それぞれの販売店での 1 日あたりの販売個数、そして、それぞれの工場から販売店へ商品 1 個を輸送するためにかかる費用が決まっている。なるべく輸送費用を抑えるためにはどうすればいいだろうか。

### 【問題 3】（シフト決め）

アイドル 6 人が 4 つの CD ショップの店頭でサイン会をする。CD ショップではそれぞれ、来てもらうメンバーの人数枠が決まっている。それぞれのメンバーには行きたい CD ショップの希望順がある。メンバーの希望をなるべく満たすようにするにはどうすればよいか。

### 【問題 4】（シフト決め）

文化祭で食販を行うクラス（生徒数 40 人）がある。4 つの時間帯があり、それぞれ 10 人ずつスタッフが必要である。生徒はそれぞれ、4 つの時間帯について希望順がある。なるべく全員の満足度が高まるようにシフトを組むにはどうしたらよいか。

## 引用・参考文献

井上秀一（2014）. 線形計画法による数学の有用性の認識. 日本科学教育学会年会論文集. Vol.38. pp.325-326.