非凸錐線形最適化問題の凸化

２０２２年　３月

有馬　直彦

非凸錐線形最適化問題の凸化

有馬　直彦

理工情報生命学術院

システム情報工学研究群

筑波大学

２０２２年　３月

概 要

本論文では、非凸 2 次最適化問題とその緩和問題である完全正値最適化問題の分析を行い、それを非凸錐上での線形最適化問題の凸化という観点に拡張する。

非凸 2 次最適化問題は連続最適化理論の中の非凸最適化問題の一つであり、NP 困難であることが証明されている。その後 2 次最適化問題、特に 2 次制約 2 次最適化問題の緩和問題が半正定値計画問題として定式化できることが示された。半正定値計画問題は内点法により多項式時間で効率的に解けるが、あくまで緩和問題なので元の問題の厳密な最適値は必ずしも求まらない。1990 年以降になって対称行列空間の凸錐集合である完全正値錐を最適化理論に適用する研究が行われるようになった。それは完全正値錐上での線形最適化問題である。いくつかの非凸最適化問題が、完全正値最適化問題の表現を用いることで最適値が一致する凸最適化緩和問題が得られることが示された。これら先行研究の非凸最適化問題は 2 次制約 2 次最適化問題に定式化できる。

本論文では、まず先行研究が対象とする非凸最適化問題を一般化した 2 次制約 2 次最適化問題と、その緩和問題である完全正値最適化問題について分析する。2 次制約 2 次最適化問題の制約領域の凸包と、その緩和問題である完全正値最適化問題の制約領域の関係について考察し、元の問題と緩和問題の最適値が一致する条件を提示する。この分析から、先行研究の結果は対称行列空間での完全正値錐という特定の錐の性格によるものではなく、一般ベクトル空間での任意の非凸錐上の線形最適化問題の最適値と、その非凸錐を凸化した緩和問題である凸錐線形最適化問題の最適値の関係に帰着できることを示した。それは、ある条件下で、元の非凸錐線形最適化問題と、その問題を凸化した緩和問題の最適値が一致する必要十分条件を示したと言い換えることができる。そしてその結果を多項式最適化問題にも適用できることを示した。

本論文のもう一つの成果は、前記の結果を 2 次制約 2 次最適化問題の一つの具体例である 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題に適用し、この問題の非常に簡潔な形の緩和問題を提供したことである。制約式が 2 本の完全正値最適化問題に定式化できることを示し、その双対問題も含め元の問題と最適値が一致することを示した。さらにこの主双対問題にラグランジュ緩和問題を導入し、この問題のラグランジュ定数を大きくしていくことによって緩和問題の最適値が元の問題の最適値に限りなく近づくことを理論的に保証した。これによって、完全正値錐の代わりに非負半正定値錐を用いて緩和することも考えられ、これら非常に簡潔な緩和問題の構造を利用した効率的な緩和問題の解法が期待できる。

目 次

図 目 次

1　はじめに

1.1　本論文の背景

本論文では、非凸 2 次最適化問題とその緩和問題である完全正値最適化問題の分析を行い、その結果が特別な錐の特性によるものではなく、任意の非凸錐上での線形最適化問題の凸化という観点に拡張する。

線形計画問題の目的関数を非凸 2 次関数に置き換えた非凸 2 次計画問題は、連続最適化理論の中の非凸最適化問題の一つである。この問題を解く最初のアルゴリズムとして 1966 年に Ritter [50] が切除平面法を提案した。このアルゴリズムに対しては Zwart [62] が最適解には収束しない例題を示した。1974 年に Sahni [51] が目的関数が凹関数の場合にこの問題が NP 困難であることを証明し、その後 Pardalos and Vavasis [43] が一般の非凸 2 次計画問題についても NP 困難であることを証明している。

凸 2 次計画問題の場合は、1950 年代にいくつか解法が提案されている。例えば、1956 年にはポートフォリオの最適化のために提案された Markowitz [40] の C.L.A. アルゴリズムがある。2 次計画問題の局所解を求める Beale [10] の方法では、凸最適化問題に対しては大域解を求めることができる。凸最適化問題では Karush-Kuhn-Tucker 条件が最適性の必要十分条件であることを利用した Wolf [58] の方法は、シンプレックス法を改訂したものである。また、凸 2 次最適化問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件は線形相補性問題に帰着できる。Lemke and Howson [38] はゲーム理論におけるナッシュ均衡点を求める問題を線形相補性問題として定式化し、その問題の解法を与えた。その後、Cottle and Dantzig [17] によって、凸 2 次計画問題の最適性から帰着される線形相補性問題は、Lemke and Howson [38] の解法が有効に働くことが示された。凸 2 次計画問題に関するその他の研究に関しては文献 [25] において網羅的に述べられている。

それに対して非凸 2 次計画問題においては、Karush-Kuhn-Tucker 条件は最適解の必要条件ではあるが十分条件ではない。非凸 2 次計画問題における Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす点は大域的最適解だけとは限らず、それらの点の中で目的関数を最も小さくする点を見つける必要がある。Karush-Kuhn-Tucker 条件である線形相補性を満たす点の中から目的関数の最適な点を見つける問題に対しては、茨木の分岐限定法 [26] や、Giannessi and Tomasin の切除平面法 [23] がある。線形制約だけではなく 2 次制約も含めた非凸 2 次最適化問題の研究については文献 [56] において網羅的に述べられている。

1980 年頃から数理最適化理論の分野で対称行列を変数とした半正定値計画問題（文献 [59] 参照）の研究が盛んに行われている。その応用の一つとして、非凸 2 次最適化問題の緩和問題が半正定値計画問題として定式化できることが Shor [52, 53] によって示された。

半正定値計画問題を解くアルゴリズムはいくつかあるがその一つに内点法がある。内点法は、非線型計画問題の解法として Fiacco and Mcormic [22] によって研究され、Dikin [18] が 1967 年にアフィンスケーリング法と呼ばれる内点法を提案した。その後 1984 年に Karmarkar [27] が線型計画問題に対して、変数の数と問題を記述するのに必要な総ビット数の多項式オーダーで解く内点法のアルゴリズムを発表した。その他内点法として、Barnes [9]、Vanderbei and Meketon and Freedman [57] によるアフィンスケーリング法や、Reneger [49] による解析的中心追跡法等が開発された。特に小島, 水野, 吉瀬 [33, 35] と Tanabe [55] によって独立に提案された主双対内点法は、Bixby [12] の数値実験によって大規模問題の場合はシンプレックス法よりも効率の高い解法であることが示された。これらの線形計画問題に対する内点法の成果を拡張して、Nesterov and Nemirovskii [41] が線形計画問題や半正定値計画問題を含むより広いクラスである対称錐上の線形最適化問題に対する内点法を発表した。それにより半正定値計画問題にも内点法のアルゴリズムの適用が拡張された。現在広く使われている半正定値計画問題に対する多項式時間のアルゴリズムである主双対内点法は小島, 新藤, 原 [36] と Alizadeh, Haebery and Overton [1] と Nesterov and Todd [42] の 3 つのグループによりほぼ同時期に独立して発表されている。半正定値計画問題に関するその他の研究に関しては文献 [59, 2] において網羅的に述べられている。この内点法によって 2 次制約 2 次最適化問題の緩和問題は効率的に解けるが、あくまでも下限値が求まるだけで厳密な最適値が求まるとは限らない。

1990 年以降になって、対称行列の凸錐部分集合である完全正値・共正値錐を最適化理論に適用する研究が行われるようになった。それは半正定値計画問題の半正定値条件を完全正値条件に置き換えることによって得られる完全正値最適化問題である。いくつかの非凸最適化問題に対して、完全正値最適化問題の表現を用いることで最適値が一致する凸最適化緩和問題が得られることが示されている。例えば、Bomze and de Klerk [13, 14] は、単体の制約上で、目的関数が 2 次形式の関数である問題（標準 2 次計画問題）を、目的関数が非凸の場合でも最適値が一致する完全正値最適化緩和問題に帰着できることを示した。de Klerk and Pasechnik [32] は最大独立集合問題について、Povh and Rendl [46] はグラフ分割問題について、そして同じく Povh and Rendl [47] は 2 次割当問題について、最適値が一致する完全正値最適化型の緩和問題が得られることを示した。Burrer [16] は、0-1 変数条件のある線形制約下での非凸 2 次関数の最適化問題について、最適値が無限に発散する場合も含めて最適値が一致する完全正値最適化型の緩和問題が得られることを示した。その他、Preisig [48] によってシンプレックス上での 2 次分数関数最適化問題や、組合せ問題としては最大クリーク問題や、Dukanovic and Rendl [19] によってグラフ彩色問題等が完全正値最適化問題に定式化できることが示されている。これらの先行研究は全て 2 次制約 2 次最適化問題に定式化できるので、一般的な 2 次制約 2 次最適化問題に対しても、完全正値最適化型の緩和問題を考えた場合に、その最適値が元の問題の最適値と常に一致することを保

証できるだろうかという問いが生じる。この問いが本研究の原点となっている。

1.2　本論文の要旨

本研究は、2 次制約 2 次最適化問題と、その緩和問題である完全正値最適化問題の最適値が一致する条件を、より一般的な最適化問題に拡張することにより、非凸錐上での最適化問題に対する凸化という、非凸最適化問題を考える上で有用となる新しい概念を導出する。

本研究での主な成果は以下の 2 点である。

本論文の一つ目の成果は、2 次制約 2 次最適化問題とその緩和問題である完全正値最適化問題の、制約領域と最適値について考察し、その結果を一般のベクトル空間 $\mathbb{V}$ での任意の非凸錐上での線形最適化問題に拡張したことである。即ち非凸錐上での線形最適化問題と、その非凸錐を凸化した凸錐線形最適化問題の、制約領域と最適値の関係について分析した。この非凸錐線形最適化問題は、2 次制約 2 次最適化問題を対称行列空間で扱ったものや、多項式最適化問題を非凸錐上の線型最適化問題に変換したものを一般化したものなので、この結果をそれ等に適用できることになる。具体的には、次の錐 $\mathbb{K} \subset \mathbb{V}$ 上での錐線形最適化問題を考える。ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積とする。

$$\zeta(\mathbb{K}) \quad := \quad \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}. \qquad (1.1)$$

ここで $\mathbb{R}^n_+$ を実数ベクトル空間の非負象限とすると、$\mathbb{K} = \mathbb{R}^n_+$ のとき問題 (1.1) は線形計画問題であり、また $\mathbb{S}^n_+$ を $n \times n$ 実数対称行列空間の半正定値行列とすると、$\mathbb{K} = \mathbb{S}^n_+$ のとき問題 (1.1) は半正定値計画問題である。この最適化問題の制約領域 $F(\mathbb{K})$ とそれに関連する集合 $F_0(\mathbb{K})$ を定義する。

$$\begin{aligned} F(\mathbb{K}) \quad &:= \quad \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}, \\ F_0(\mathbb{K}) \quad &:= \quad \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

$F_0(\mathbb{K})$ は制約領域 $F(\mathbb{K})$ の非同時制約式 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ を $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ に置き換えたものである。そしてこの集合を使って次の最適化問題を定義する。

$$\zeta_0(\mathbb{K}) \quad := \quad \inf \{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \mid \boldsymbol{X} \in F_0(\mathbb{K}) \}.$$

また 3 章で詳述するように、集合 $F(\mathbb{K})$ と $F_0(\mathbb{K})$ に階層的共正値条件と呼ばれる条件を導入する。

問題 (1.1) の目的関数は線型なので制約領域 $F(\mathbb{K})$ を conv $F(\mathbb{K})$ で置き換えても問題 (1.1) の最適値の値は同じである。定義から非凸錐 $\mathbb{K}$ 上の線形最適化問題の最適値は $\zeta(\mathbb{K})$ で、その錐 $\mathbb{K}$ を凸化した緩和問題の最適値は $\zeta(\text{conv } \mathbb{K})$ である。今錐 $\mathbb{K}$ の双対錐を $\mathbb{K}^*$ で表し、その内点を int $\mathbb{K}^*$ と表す。

本論文での主張は以下のように要約される。問題 (1.1) の制約領域が階層的共正値条件を満たしているとすると、制約領域と最適値について次のことが成り立つことを示した。

1. $\boldsymbol{H}^0 \in \text{int } \mathbb{K}^*$ の時は、
   (a) $F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K})$
   (b) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。
2. $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の時は、
   (a) $F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + \text{conv } F_0(\mathbb{K})$
   (b) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件は、
   全ての $\boldsymbol{X} \in F_0(\mathbb{K})$ に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ である。
3. $\boldsymbol{H}^0 \notin \mathbb{K}^*$ の時は、
   (a) $F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + F_0(\text{conv } \mathbb{K})$
   (b) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件は、
   全ての $\boldsymbol{X} \in F_0(\text{conv } \mathbb{K})$ に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ である。

先行研究では、いくつかの非凸最適化問題を最適値が一致する完全正値緩和問題に定式化できることを示した。本論文のこの結果 1〜3 は、先行研究の結果が対称行列空間での完全正値錐という特定の錐の性格によるものではなく、一般ベクトル空間での任意の非凸錐 $\mathbb{K}$ 上での線型最適化問題の最適値 $\zeta(\mathbb{K})$ と、それを凸化した凸緩和問題の最適値 $\zeta(\text{conv } \mathbb{K})$ との関係に帰着できることを示している。例えば、もしある非凸最適化問題が非凸錐上の線形最適化問題に定式化できたとする。元の問題とこの非凸錐上の最適化問題を凸化した凸緩和問題にこの結果 1〜3 が適用できることになる。後述するように、この結果は 2 次最適化問題だけではなく、多項式最適化問題にも適用できるなど、応用可能性の大きな結果である。さらに、最適値が一致する凸最適化問題に変換できれば、凸最適化問題では局所解が大域解になっているので、局所解を求めることに集中すれば良いことになる。

上記 1〜3 の結果はまず下記の一般的な 2 次制約 2 次最適化問題に適用できる。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{u} + \gamma_0 \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{u} + \gamma_k = 0, \\ & (k = 1, 2, \ldots, m),\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^{n-1}. \end{array} \tag{1.2}$$

上記問題 (1.2) は、1.1 節で説明した先行研究の標準 2 次計画問題 [13, 14] を含んでいる。また 0-1 条件は 2 次制約式で表せるので、先行研究の最大独立集合問題 [32]、グラフ分割問題 [46]、2 次割当問題 [47] 等の組合せ問題も含んでいることになる。

問題 (1.2) は変数 u_0 を 1 つ増やし、$\boldsymbol{x} = (u_0, \boldsymbol{u})$ として、$u_0^2 = 1$ を制約式に追加することで、同値な次の問題に変換できる。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^0\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{x} = 0\ (k = 1, 2, ., m), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n. \end{array} \tag{1.3}$$

この問題 (1.3) を行列の内積表現で表すと、結局対称行列空間での錐最適化問題として下記のように問題 (1.1) の形式で表される。

$$\zeta(\mathbb{K}) \;\; := \;\; \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \subset \mathbb{S}^n,\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}.$$

ここで、錐 $\mathbb{K}$ は非凸錐で $\mathbb{K} = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n\}$ である。この $\mathbb{K}$ に対する $\text{conv}\ \mathbb{K} = \mathbb{C}$ は完全正値錐と呼ばれ、$\zeta(\text{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{C})$ は完全正値錐緩和問題である。このとき $\mathbb{K}^* = \mathbb{C}^*$ は共正値錐である。前述の一般ベクトル空間での結果 1〜3 全てが一般の 2 次制約 2 次最適化問題 (1.3) とその完全正値緩和問題に適用できることになる。

制約領域が階層的共正値条件を満たしていれば、まず $\boldsymbol{H}^0 \in \text{int}\ \mathbb{K}^* = \text{int}\ \mathbb{C}^*$ の場合は制約領域 $F(\text{conv}\ \mathbb{K} = \mathbb{C})$ も有界になり、常に最適値が一致することがわかる。

$\boldsymbol{H}^0 \notin \text{int}\ \mathbb{K}^* = \text{int}\ \mathbb{C}^*$ の場合、前述の結果 2 と 3 から、最適値が一致するための必要十分条件は、集合 $F_0(\mathbb{K})$ または $F_0(\text{conv}\ \mathbb{K})$ の全ての $\boldsymbol{X}$ に対して、$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成立つことなので、目的関数の $\boldsymbol{Q}$ に依存する。そこで 3 章で目的関数に依存しないより強い十分条件を与える。そして本論文では、より具体的な問題である下記 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題がこの十分条件を満たすことを証明した。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^{n-1},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \\ & u_i \in \{0, 1\}\ (i = 1, 2, \ldots, r),\ r \leq n. \end{array} \tag{1.4}$$

即ち、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (1.4) は、目的関数に依らず最適値が常に一致する完全正値最適化問題に定式化できるという Burrer [16] の結果を、より一般的な

枠組みを用いた定式化で証明した。(Burer の定式化については 4 章参照。) 特に問題 (1.1) の制約式の数を 2 本に集約できることは、この問題の求解における計算効率の向上に寄与する結果である。

また、一般ベクトル空間での結果 1〜3 は、多項式最適化問題とそのモーメント錐緩和問題へ適用できることも示した。多項式最適化問題については、Lasserre [37] や Parrilo [44] によって提案された、半正定値計画問題による緩和問題の階層を上げることによって元の問題の最適値に収束する解法がある。また、Pena, Vera, Zuluaga [45] は完全正値錐の考え方をテンソルに拡張して最適値が一致する緩和問題に定式化できることを示した。多項式最適化問題と半正定値計画問題に関するその他の研究に関しては文献 [2] において網羅的に述べられている。本論文では多項式最適化問題を非凸錐線形最適化問題に変換できることを示し、その問題を凸化した問題に対して、一般ベクトル空間での結果 1〜3 の結果を適用できることを示した。

まず一般の多項式最適化問題を、変数を 1 つ増やすことで多項式最適化問題に出てくる単項式の最高次数に合わせた下記の同次多項式最適化問題に変換する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \psi(\boldsymbol{x}) \\ \text{sub. to} & h_0(\boldsymbol{x}) = 1,\ h_i(\boldsymbol{x}) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+. \end{array} \tag{1.5}$$

この問題 (1.5) に登場する同次単項式の種類を q 種類とすると、結局この問題は q 次元実数空間での、ある非凸錐上での線形最適化問題に変換できることを示す。この非凸錐を凸化した錐はモーメント錐と呼ばれ、このモーメント錐上での凸緩和問題としての線形最適化問題を考えると、前述した一般のベクトル空間に対する結果 1〜3 の結果を全て適用できることになる。

本論文のもう一つの主な成果は、前述した 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (1.4) についてである。この問題を下記のように非凸錐上の制約式が 2 本の線形最適化問題の主問題 $\eta^p(\mathbb{K})$ に変換できることを示した。この主問題の双対問題 $\eta^d(\mathbb{K})$ は下記のように与えられる。

$$\eta^p(\mathbb{K}) \ := \ \inf \{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle = 0,\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K}\}, \tag{1.6}$$

$$\eta^d(\mathbb{K}) \ := \ \sup \left\{ y_0 \mid \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^1 y_1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{K}^* \right\}. \tag{1.7}$$

ここで、$\mathbb{K} = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+\}$ である。そしてこの錐 $\mathbb{K}$ を凸化した完全正値錐 $\mathbb{C} = \text{conv}\ \mathbb{K}$ による緩和問題を考える。即ち主問題 (1.6) の錐 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ に、双対問題 (1.7) の錐 $\mathbb{K}^*$ を $\mathbb{C}^*$ に置き換えた完全正値緩和問題をそれぞれ、$\eta^p(\mathbb{C}), \eta^d(\mathbb{C})$ とする。

さらに、これらの主双対問題 $\eta^p(\mathbb{C}), \eta^d(\mathbb{C})$ のラグランジュ緩和問題として次の主双

対問題を考える。

$$\eta^p(\lambda,\mathbb{C}) \;:=\; \inf\ \left\{\langle \boldsymbol{Q}+\lambda\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{X}\rangle \mid \langle \boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{X}\rangle = 1,\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{C}\right\}, \tag{1.8}$$

$$\eta^d(\lambda,\mathbb{C}) \;:=\; \sup\ \left\{y_0 \mid \boldsymbol{Q}+\lambda\boldsymbol{H}^1-\boldsymbol{H}^0 y_0 \in,\mathbb{C}^*\right\}. \tag{1.9}$$

これらのラグランジュ緩和問題の主問題 (1.8) は制約式が $\langle \boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{X}\rangle = 1$ だけの問題である。また双対問題 (1.9) は $\boldsymbol{H}^0$ の係数変数 y_0 が 1 つだけという非常に単純な最適化問題になっている。さらにこの $\boldsymbol{H}^0$ は左上の隅だけが 1 であとは全て 0 の単純な行列である。

本論文では、完全正値緩和問題 $\eta^p(\mathbb{C}),\eta^d(\mathbb{C})$ については元の問題 (1.4) の最適値と一致すること、またラグランジュ緩和問題 $\eta^p(\lambda,\mathbb{C}),\eta^d(\lambda,\mathbb{C})$ については、そのラグランジュ定数を大きくしていくことによってラグランジュ緩和問題の最適値が元の問題の最適値に限りなく近づくことを理論的に保証した。

そこで、問題 $\eta^p(\mathbb{C}),\eta^d(\mathbb{C}),\eta^p(\lambda,\mathbb{C}),\eta^d(\lambda,\mathbb{C})$ の単純さを利用した少しでも効率の良い解法の開発が期待できる。さらにこれらの 4 つの問題について、完全正値錐 $\mathbb{C}$ を非負半正定値錐 $\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}$ に置き換えることで新たに緩和問題を定式化することも考えられる。ラグランジュ緩和問題の主双対問題 (1.8)、(1.9) が非常に単純ことと、半正定値行列、非負行列の扱い易さから、非負半正定値によるラグランジュ緩和問題に対して新しい解法の開発が期待できる。実際に Arima, Kim, Kojima and Toh [6, 8] の問題 (1.9) を解く数値実験から始まり、Kim, Kojima and Toh [29, 30] による内点法とは異なるラグランジュ関数の 1 次微分の情報によるアルゴリズムの継続的な改善によって、大規模な 0-1 線型制約 2 次最適化問題の非常にタイトな最適解の下限値が求められている。組合せ最適化問題など、実存する問題の実行可能解を求める際に、分枝限定法は確実な解法として広く用いられている。分枝限定法において、子問題のタイトな下限を効率よく求めることは，分枝限定法の有効性を左右する大きな要素であり、こうした手法の実装に貢献するものと期待できる。

以上の 2 つの点が本論文がもたらす主な成果である。

1.3　本論文の構成

2 章では、本論文で使われる表記法・記号・名称、及び議論する最適化問題について定義する。また本論文の証明等で使われる性質について説明し補題として証明も与える。

3 章では、本論文の一つ目の成果である、一般ベクトル空間での非凸錐上での線型最適化問題の凸化への拡張の基礎となった、2 次制約 2 次最適化問題と完全正値最適化問

題との関係について議論する。初めに、ある形式の 2 次制約 2 次最適化問題 (1.3) を提示して、その緩和問題である完全正値最適化問題との制約領域と最適値の関係について考察する。単純なケースとして、全ての同次式制約式 $\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ の $\boldsymbol{H}^k$ が共正値の場合は同次式制約を 1 本に集約できることを示す。そのとき $\boldsymbol{H}^0$ が強共正値条件を満たす場合には完全正値錐緩和問題の最適値が元の問題の最適値に一致することを証明する。次に問題の制約領域に階層構造を導入してそれに対して階層的共正値条件を定義する。この条件は全ての同次式制約式が共正値である条件よりも弱い条件である。そして階層的共正値条件を満たす時も、同じく $\boldsymbol{H}^0$ が強共正値条件を満たす場合は完全正値錐緩和問題の最適値が元の問題の最適値に一致することを証明する。5 章では、この性質が、1.2 節で説明した結果 1 として拡張される。

次に、一般の 2 次制約 2 次最適化問題 (1.2) が、最初に提示した特殊な形式の問題 (1.3) に帰着できることを示す。帰着された問題の $\boldsymbol{H}^0$ は強共正値行列ではなく、より弱い条件しか満たさない共正値行列である。そこで $\boldsymbol{H}^0$ が共正値条件の場合について、2 次制約 2 次最適化問題 (1.3) と完全正値錐緩和問題の制約領域の関係を分析する。5 章ではこの結果を 1.2 節で説明した結果 2 に拡張される。$\boldsymbol{H}^0$ が共正値の場合、1.2 節の結果 2 が示す元の問題と緩和問題の制約領域の関係より、この緩和問題の最適値は元の問題の最適値に一致するとは限らない。そこでこの章では元の問題 (1.3) と完全正値緩和問題の最適値が必ず一致するための十分条件を示す。この十分条件導出のため、問題 (1.3) の制約領域の無限方向の集合である漸近的無限方向集合を定義する。この集合が緩和問題の無限方向にあたる集合に等しければ、最適値が一致することを証明する。

Arima, Kim and Kojima の論文 [3] での議論では、任意の閉錐で定義された完全正値錐を拡張した錐で議論しているが、本論文では 5 章で任意の錐について議論するので、この章では非負象限に対して定義される完全正値錐に限定して議論する。

4 章では、本論文の 2 つ目の成果である、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (1.4) を簡潔化された緩和問題に変換するための議論を行う。

まず 3 章の結果の具体的な応用として、元の問題 (1.4) を 2 つの階層からなる階層構造で表した 3 本の制約式の問題に変換し、その緩和問題としての完全正値最適化問題を定式化する。そしてこの問題が、階層的共正値条件と漸近的無限方向の条件を満たしていることを示し、この緩和問題の最適値が元の問題の最適値と一致することを証明する。

次に、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (1.4) を相補性条件を使った 1 つの階層からなる階層構造で表した 2 本の制約式の問題に変換し、その主双対問題とさらにそれらから導出されるラグランジュ緩和問題について議論する。1.2 節で記述したように、このラグランジュ緩和問題の主問題は制約式 1 本、双対問題は変数 1 つの非常に単純な形をしている。そして、これらの緩和問題のラグランジュ定数を大きくしていくこ

とによって緩和問題の最適値が元の問題の最適値に限りなく近づくことを証明する。

3 章での、2 次制約 2 次最適化問題とその完全正値錐最適化緩和問題の最適値に関する考察は以下に基づいている。まず元の問題を非凸錐上の目的関数も制約式も線形な等価な最適化問題に変換する。この変換された問題の制約領域は非凸集合であるが、目的関数が線形なので制約領域全体の凸包をとっても最適値は変わらない。そこでこの非凸錐を凸化してできた完全正値錐最適化緩和問題の制約領域と、元の問題の制約領域全体の凸包をとった集合の関係を考察している。もしこの 2 つの集合が等しければ目的関数が同じなので最適値が一致することになる。

5 章では、以上の議論を内積が導入された一般のベクトル空間での任意の非凸錐上の議論に拡張する。即ち、非凸錐上での線形最適化問題に対してこの錐を凸化したとき、元の問題とこの凸化後の緩和問題の制約領域と最適値の関係について分析する。Arima, Kim and Kojima の論文 [6] では、$\boldsymbol{H}^0$ と $\boldsymbol{H}^k$ $(k = 1, \ldots, m)$ の全てが双対錐に含まれることを仮定しているが、ここでは $\boldsymbol{H}^k$ について、より弱い条件である階層的共正値条件下で議論する。そしてこの章では、加えて 1.2 節で説明した結果 3 として、Kojima, Kim and Toh [31] による任意の $\boldsymbol{H}^0$ でも議論できるという事実も含めて分析する。

まず錐線形最適化問題とその制約領域に関連する集合を定義する。制約領域の階層構造のレベル ℓ が 0 の場合は、任意の $\boldsymbol{H}^0$ について、凸化後の緩和問題の制約領域は、凸化前の制約領域の凸包と $F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ の和になることを証明する。最終的に，1.2 節で一つ目の成果として紹介した、最適値が一致する必要条件を与える結果 1〜3 の証明を与える．

6 章では、5 章での一般のベクトル空間での任意の非凸錐上の線形最適化問題の凸化の議論のもう一つの具体例として、多項式最適化問題に適用することを議論する。まず一般の多項式最適化問題は変数を 1 つ増やすことで同値な n 変数同次多項式最適化問題に変換できることを示す。その同次多項式最適化問題に登場する同時単項式の種類を q 個とした時、q 種類の単項式を並べた q 次元ベクトルの集合は q 次元空間で一般には非凸錐になる。多項式は単項式の線型結合で表すことができるので、結局同時多項式最適化問題は、この非凸錐上での線形最適化問題に変換できる。この非凸錐を凸化したものはモーメント錐と呼ばれ、このモーメント錐上の凸線形最適化緩和問題と元の多項式最適化問題に対して，5 章での議論をそのまま適用することができることを示す。

7 章では、今までの理論を検証するいくつかの簡単な数値実験について説明する。ここでは非常に小さいサイズの、しかし元の問題と緩和問題の最適値の間にギャップが生じるケースを扱っている。数値例として、階層的共正値条件を満たさない場合、

階層的共正値条件は満たすが半正定値緩和の場合、非負半正定値緩和の場合等の数値実験結果とその理論的解釈を説明する。

最後に、8 章で、本論文のまとめと今後の課題について述べる。

2　本論文で使われる定義とその性質のまとめ

本章の内容は、文献 [11, 34, 39, 60, 61] 等に示されているよく知られた結果であるが、論文内での自己完結性を重視してここにまとめたものである。

2.1　本論文で使われる表記法・記号とその性質のまとめ

2.1.1　基本的な表記法・記号

$\mathbb{R}$ を実数の集合とした時、$\mathbb{V}$ を以下の条件を満たす内積 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ が導入された有限次元ベクトル空間とする。内積は $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{V},\ \lambda \in \mathbb{R}$ とした時に、

(i) $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \rangle$

(ii) $\langle \lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \rangle$

(iii) $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle \geq 0$

の 3 つの条件を満たすものとする。

本論文ではこのベクトル空間 $\mathbb{V}$ の具体例として、n 次元実数列ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$、及び $n \times n$ 実数対称行列のベクトル空間 $\mathbb{S}^n$（$n(n+1)/2$ 次元のベクトル空間) について議論する。本論文中通常はベクトル空間上の点を太文字で表し、特にその点が $\mathbb{R}^n$ の時は小文字、$\mathbb{S}^n$ または一般の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{V}^n$ の時は大文字で表す。（注：一般のベクトル空間 $\mathbb{V}^n$ の点を小文字で表すのが一般的であるが、本論文では対称行列上での議論が主なので大文字にした。）スカラーの変数、定数には細字を使用する。また n 次元実数列ベクトル空間の点を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と表し、i 番目の要素を添字を下につけて表す。$\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$ で全ての要素 x_i が非負なベクトルの集合を表す。特に $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ と略す。太文字 $\boldsymbol{0}$ で要素が全て 0 のベクトル、また $\boldsymbol{O}$ で要素が全て 0 の行列を表す。$\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ で要素が全て 1 の $\mathbb{R}^n$ 空間ベクトル、$\boldsymbol{E} \in \mathbb{S}^n$ で要素が全て 1 の行列を表す。サイズが文脈で推測できる場合は明示的に表さない場合もある。

全ての要素が整数である n 次元ベクトル空間を $\mathbb{Z}^n$ で表す。上記と同様に全ての要素が非負の整数のベクトルの集合を $\mathbb{Z}^n_+$ で表し、$\mathbb{Z}^1 = \mathbb{Z}$ とする。

m 行 n 列の実数 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の集合を $\mathbb{R}^{m \times n}$ と表す。特にその要素が全て非負の場合は $\mathbb{R}^{m \times n}_+$ と表す。$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の要素は、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

と表される。$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$、$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のそれぞれの転置を右肩に T を付けて $\boldsymbol{x}^T$、$\boldsymbol{A}^T$ で表す。

n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^k$ に対して (i, j) 要素が $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j$ である $\mathbb{S}^n$ 上の行列

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2^T \boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n^T \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のグラム行列と呼び、$\mathrm{Gram}(\boldsymbol{a}_a, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と表す。

$\mathbb{S}_+^n \subset \mathbb{S}^n$ で半正定値行列の集合

$$\mathbb{S}_+^n := \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n \mid \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

を表す。また $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n$ で全ての A_{ij} が非負 $A_{ij} \geq 0$ の行列の集合を $\mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{S}^n$ で表す。

本論文ではベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ 及び $\mathbb{S}^n$ に特定した時、それぞれの内積について以下の定義を用いる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の時の内積と、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^n$ の時の内積はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &:= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle &:= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij} \end{aligned}$$

とする。この定義から $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ が成り立つ。また、$\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n$ の時、$\boldsymbol{A}$ のトレースを $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ と定義すると、$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$ が成り立つ。 実際、対称行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の積の i 番目の対角成分は $\sum_{j=1}^n \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{B}_{ji}$ なので、結局 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^n A_{ij} B_{ji} = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ である。また、$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ として、$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r$ を行列 $\boldsymbol{C}$ の列ベクトルとした時、$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}) = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{c}_i$ である。

次に前述の内積を使って $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 及び $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n$ のノルムをそれぞれ $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ 及び $\|\boldsymbol{X}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle}$ とする。

$\boldsymbol{A} \in D$ の $\delta-$ 近傍 $B_\delta(\boldsymbol{A})$ を下記のように定義する。

$$B_\delta(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{X} \in D \mid \|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}\| < \delta\}.$$

これを使って、ある集合 $D \in \mathbb{V}$ が開集合であるとは、

$$\text{全ての } \boldsymbol{A} \in D \text{ について、} B_\delta(\boldsymbol{A}) \subseteq D \text{ となる} \delta > 0 \text{ が存在する}$$

ことを意味するので、集合 D の閉包 $\mathrm{cl}\ D$ を、

$$\mathrm{cl}\ D := \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{V} \mid \text{全ての} \delta > 0 \text{ に対して } B_\delta(\boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{D} \neq \emptyset\right\}$$

と定義する。D を閉集合とすれば $D = \mathrm{cl}\ D$ である。

2.1.2　凸集合と凸包

集合 $D \subseteq \mathbb{V}$ が下記条件を満たすとき、D は凸集合であると定義する。

$$\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2 \in D,\ \lambda \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow (1-\lambda)\boldsymbol{X}^1 + \lambda \boldsymbol{X}^2 \in D.$$

また、$\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2, \ldots, \boldsymbol{X}^m \in \mathbb{V}$ で $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ の時、もし $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{X}^i$ と表せる場合は、$\boldsymbol{Y}$ は $\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2, \ldots, \boldsymbol{X}^m$ の凸結合であると呼ぶ。

補題 2.1. 今 $i \in I \subseteq \mathbb{Z}_+$ として、i（有限または無限）個の $D_i \subseteq \mathbb{V}$ が全て凸集合とすると、$\cap_{i \in I} D_i$ は凸集合である。

証明. 今 $\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2 \in \cap_{i \in I} D_i,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ とする。全ての $i \in I$ について、$\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2 \in D_i$ で、 D_i は凸集合なので $(1-\lambda)\boldsymbol{X}^1 + \lambda \boldsymbol{X}^2 \in D_i$ である。よって $(1-\lambda)\boldsymbol{X}^1 + \lambda \boldsymbol{X}^2 \in \cap_{i \in I} D_i$ となる。 □

補題 2.2. 集合 $D \in \mathbb{V}$ が凸集合である必要十分条件は、全ての整数 $m \geq 1$ に対して、D の任意の m 個の凸結合が D に含まれることである。即ち全ての m に対して、

$$\boldsymbol{X}^1, \ldots, \boldsymbol{X}^m \in D,\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ \ m \geq 1,\ \ m \in \mathbb{Z}_+\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{X}_i \in D \quad (2.1)$$

である。

証明. まず、条件 (2.1) で $m = 2$ の時は、凸集合の定義から集合 D は凸集合である。

逆に、集合 D が凸集合であるとする。$m = 1$ ならば明らかに条件 (2.1) は成り立つ。$m = 2$ の場合も、凸集合の定義から条件 (2.1) が成り立つ。そこで数学的帰納法を適用するために条件 (2.1) が m で成り立つとして $m+1$ でも成立することを示す。今

$$\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2, \ldots, \boldsymbol{X}^{m+1} \in D,\ \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, m+1)$$

とする。$\lambda_{m+1} = 0$ なら、$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \boldsymbol{X}_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{X}_i$ なので m では数学的帰納法から条件 (2.1) が成り立つ。また $\lambda_{m+1} = 1$ の場合は、$\lambda_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ なので $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_{m+1} \in D$ となり条件 (2.1) を満たす。

そこで、$0 < \lambda_{m+1} < 1$ とする。$\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0$ なので $\mu_i = \lambda_i / \sum_{j=1}^m \lambda_j\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ とすると、

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{i=1}^m (\lambda_i / \sum_{j=1}^m \lambda_j) = (\sum_{i=1}^m \lambda_i)/(\sum_{j=1}^m \lambda_j) = 1$$

であり、$\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$、また $\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2, \ldots, \boldsymbol{X}^m \in \boldsymbol{D}$ なので、数学的帰納法の仮定から、$\widehat{\boldsymbol{X}} = \sum_{i=1}^m \mu_i \boldsymbol{X}_i$ と置くと $\widehat{\boldsymbol{X}} \in D$ である。よって、$(\sum_{i=1}^m \lambda_i) + \lambda_{m+1} = 1$ で

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \boldsymbol{X}_i = (\sum_{i=1}^m \lambda_i)(\sum_{i=1}^m \mu_i \boldsymbol{X}_i) + \lambda_{m+1} \boldsymbol{X}^{m+1} = (\sum_{i=1}^m \lambda_i)\widehat{\boldsymbol{X}} + \lambda_{m+1} \boldsymbol{X}^{m+1}$$

であるが、$m = 2$ で条件 (2.1) が成り立つので $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \boldsymbol{X}_i \in D$ が示された。 □

$D \subseteq \mathbb{V}$ とした時、D の凸包 conv D とは、D を含む $\mathbb{V}$ の凸集合の全ての共通集合であると定義する。補題 2.1 より、任意の $D \subseteq \mathbb{V}$ の凸包 conv D は凸集合である。

補題 2.3. 集合 $D \subseteq \mathbb{V}$ の凸包 conv D は D の点の全ての凸結合からなる集合である。

証明. 今集合 E を D の点の凸結合の全てからなる集合とすると、

$$E = \left\{ \boldsymbol{X} \;\middle|\; \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{X}^i,\ \boldsymbol{X}^i \in D,\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+,\ m \geq 1,\ \ m \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

と表せる。今 $\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2 \in E$ とすると、$m \geq 1,\ \ m \in \mathbb{Z}_+$ について、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^1 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{A}^i,\ \sum_{i=1}^m \lambda^i = 1,\ \lambda^i \in \mathbb{R}_+,\ \boldsymbol{A}^i \in D \\ \boldsymbol{X}^2 &= \sum_{i=1}^m \mu_i \boldsymbol{B}^i,\ \sum_{i=1}^m \mu^i = 1,\ \mu^i \in \mathbb{R}_+,\ \boldsymbol{B}^i \in D \end{aligned}$$

である。よって、$0 \leq \nu \leq 1$ とした時、

$$\nu \boldsymbol{X}^1 + (1-\nu)\boldsymbol{X}^2 = \sum_{i=1}^m \nu \lambda_i \boldsymbol{A}^i + \sum_{i=1}^m (1-\nu)\mu_i \boldsymbol{B}^i$$

であるが、$\nu\lambda^i \in \mathbb{R}_+,\ (1-\nu)\mu^i \in \mathbb{R}_+$ で

$$\sum_{i=1}^m \nu\lambda^i + \sum_{i=1}^m (1-\nu)\mu^i = \nu \sum_{i=1}^m \lambda^i + (1-\nu) \sum_{i=1}^m \mu^i = \nu + (1-\nu) = 1$$

であるので、$\nu \boldsymbol{X}^1 + (1-\nu)\boldsymbol{X}^2 \in E$ である。明らかに $D \subseteq E$ なので集合 E は D を含む凸集合となり、conv $D \subseteq E$ である。一方補題 2.2 から、集合 D を含む凸集合 conv D は D の点の凸結合全てを含むので $E \subseteq$ conv D である。以上より $E =$ conv D であることがわかる。 □

次に Caratheorory の定理の主張と証明の一例を示す.

定理 2.1. $\boldsymbol{X} \in \mathbb{V}^n$ が集合 $D \subseteq \mathbb{V}^n$ の凸結合の時、$\boldsymbol{X}$ は D の高々 $n+1$ 個の点の凸結合である。

証明.

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{X}^i,\ \boldsymbol{X}^i \in D,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ m \geq 1,\ m \in \mathbb{Z}_+$$

とする。まず $m \geq n+1$ なら、$\boldsymbol{X}$ は D の $m-1$ 個の凸結合として表わされることを示す。もしどれかの λ_i が $\lambda_i = 0$ であるならば、$\boldsymbol{X}$ は D の $m-1$ 個以下の点の凸集合である。そこで、全ての λ_i が $\lambda_i > 0$ とする。$\boldsymbol{X} \in \mathbb{V}^n$ で $m > n+1$ なので、

$$\mu_1(\boldsymbol{X}^1 - \boldsymbol{X}^m) + \mu_2(\boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{X}^m) + \cdots + \mu_{m-1}(\boldsymbol{X}^{m-1} - \boldsymbol{X}^m) = \boldsymbol{0}$$

となる、すべて 0 でない、$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1} \in \mathbb{R}$ が存在する。そして、

$$\mu_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \quad \text{とすると、} \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0,\quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{X}^i = \boldsymbol{0}$$

である。今 $\gamma_i = \lambda_i - \alpha\mu_i$ とする。ここで $\alpha > 0$ を、全ての $i = 1, 2, \ldots, m$ について $\gamma_i \geq 0$ となって、少なくとも一つの γ_k が $\gamma_k = 0$ となるように選ぶ。特に α を、

$$\frac{1}{\alpha} = \max_i \{\frac{\gamma_i}{\lambda_i}\} = \frac{\gamma_k}{\lambda_k}$$

とすれば、

$$\begin{aligned}
&\gamma_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \gamma_k = 0 \\
&\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \gamma_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \\
&\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{X}^i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \boldsymbol{X}^i + \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{X}^i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \boldsymbol{X}^i
\end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{X}$ は D の $m-1$ 個の点の凸結合である。この作業は $m = n-1$ になるまで行うことができるので、$\boldsymbol{X}$ は D の高々 $n+1$ 個の点の凸結合で表すことができる。 □

集合 $D, E \in \mathbb{V}$ とした時、2 つの集合の和 $D + E$ を

$$D + E := \{\boldsymbol{Z} \in \mathbb{V} \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X} \in D,\ \boldsymbol{Y} \in E\}$$

と定義する。

補題 2.4. 凸集合 $D, E \in \mathbb{V}$ の和集合 $D + E$ は凸集合である。

証明. $\boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{Z}^2 \in D+E$ とした時、$\boldsymbol{Z}^1 = \boldsymbol{X}^1 + \boldsymbol{Y}^1,\ \boldsymbol{Z}^2 = \boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{Y}^2,\ \boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2 \in D,\ \boldsymbol{Y}^1, \boldsymbol{Y}^2 \in E$ と表せる。ここで、$0 \leq \lambda \leq 1$ とすると、

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\boldsymbol{Z}^1 + \lambda\boldsymbol{Z}^2 &= (1-\lambda)\boldsymbol{X}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{Y}^1 + \lambda\boldsymbol{X}^2 + \lambda\boldsymbol{Y}^2 \\ &= (1-\lambda)\boldsymbol{X}^1 + \lambda\boldsymbol{X}^2 + (1-\lambda)\boldsymbol{Y}^1 + \lambda\boldsymbol{Y}^2\end{aligned}$$

であるが、集合 D は凸集合なので $(1-\lambda)\boldsymbol{X}^1 + \lambda\boldsymbol{X}^2 \in D$ で、また集合 E は凸集合なので $(1-\lambda)\boldsymbol{Y}^1 + \lambda\boldsymbol{Y}^2 \in E$ である。よって $(1-\lambda)\boldsymbol{Z}^1 + \lambda\boldsymbol{Z}^2 \in D+E$ となるので、$D+E$ は凸集合である。 □

補題 2.5. 集合 $A, B \subseteq \mathbb{V}$ とした時、

$$\text{conv } (A \cap B) \ \subseteq \ \text{conv } A \cap \text{conv } B$$

が成り立つ。

証明. 補題 2.3 から、$\boldsymbol{X} \in \text{conv } (A \cap B)$ とすると、

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{X}^i,\ \boldsymbol{X}^i \in A \cap B,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+,\ m \geq 1,\ \ m \in \mathbb{Z}_+$$

と表すことが出来る。$\boldsymbol{X}^i \in A$ かつ $\boldsymbol{X}^i \in B$ なので

$$\boldsymbol{X} \in \text{conv } A \text{ かつ } \boldsymbol{X} \in \text{conv } B$$

となり $\boldsymbol{X} \in \text{conv } A \cap \text{conv } B$ である。よって、

$$\text{conv } (A \cap B) \ \subseteq \ \text{conv } A \cap \text{conv } B$$

が成り立つ。 □

本論文では、この補題 2.5 において、集合 A, B がどんな条件の時に逆の包含関係 $\text{conv } (A \cap B) \supseteq \text{conv } A \cap \text{conv } B$ が成り立つか、即ち $\text{conv } (A \cap B) = \text{conv } A \cap \text{conv } B$ が成り立つ条件について議論する。

また本論文では次の単純な事実が議論の中で大きな役割を果たす。

$$a^1 = 0, a^2 = 0, \ldots, a^m = 0 \iff a^1 + a^2 + \cdots + a^m = 0,\ \ a^1, a^2, \ldots, a^m \geq 0.$$

2.1.3 錐

ある集合 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}$ が錐である定義は

$$\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \ \Rightarrow \ \lambda\boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathbb{R}_+$$

が成り立つことであることから、$\mathbb{R}^n_+$、$\mathbb{S}^n_+$、$\mathbb{N}^n$ は明らかに錐である。

補題 2.6. 今 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}$ が錐で、$\boldsymbol{Q}^i \in \mathbb{V}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ とすると、集合

$$D = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid \langle \boldsymbol{Q}^i, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

も錐である。

証明. $\boldsymbol{X} \in D$ として、$\rho \in \mathbb{R}_+$ とする。

$$\langle \boldsymbol{Q}^i, \rho \boldsymbol{X} \rangle = \rho \langle \boldsymbol{Q}^i, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

で、$\boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ なので、$\rho \boldsymbol{X} \in D$ となり、D は錐である。 □

集合 $D \in \mathbb{V}$ とした時、集合 D が生成する錐 cone D を、

$$\text{cone } D := \{\mu \boldsymbol{X} : \boldsymbol{X} \in D, \ \mu \geq 0\}$$

と定義する。

集合 $D \in \mathbb{V}$ とした時、その集合 D の双対錐 D^* を

$$D^* := \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{Y} \in D\}$$

と定義する。ある錐 $\mathbb{K} \in \mathbb{V}$ が $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}$ を満たす時、錐 $\mathbb{K}$ は自己双対錐であると呼ぶ。

この双対錐の性質として次の補題が成り立つ。

補題 2.7. $D, D_1, D_2 \in \mathbb{V}$ をそれぞれ錐とすると、

(a) D^* は $\mathbb{V}$ の閉凸錐である。

(b) $D_1 \subseteq D_2$ ならば $D_1^* \supseteq D_2^*$ である。

(c) $D^* = (\text{cl } D)^* = (\text{conv } D)^* = (\text{cone } D)^*$

(d) $D \subseteq (D^*)^*$

(e) D が凸錐なら cl $D = (D^*)^*$

(f) $D_1^* \cap D_2^* \subseteq (D_1 + D_2)^*$

(g) $\mathbf{0} \in D_1 \cap D_2$ なら、$D_1^* \cap D_2^* = (D_1 + D_2)^*$

証明.
(a) 双対錐の定義から、D は

$$D^* = \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{Y} \in D\} = \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in D} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\}$$

であるので、閉半空間即ち閉凸錐の共通集合である。よって、閉凸錐である。
(b) 双対錐の定義から明らか。
(c) $\mathrm{cl}\ D,\ \mathrm{conv}\ D,\ \mathrm{cone}\ D$ の定義から、(a) と同様に、

$$\begin{aligned} D^* &= \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in D} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} &&= \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in \mathrm{cl}\ D} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} \\ &= \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in \mathrm{conv}\ D} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} &&= \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in \mathrm{cone}\ D} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} \end{aligned}$$

である。
(d) $\boldsymbol{X} \in D$ とすると、集合 D の双対錐の定義から全ての $\boldsymbol{Y} \in D^*$ について $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0$ でなくてはならない。このことは $\boldsymbol{X}$ が D^* の双対錐 $(D^*)^*$ の点であることになる。よって $D \subseteq (D^*)^*$ である。
(e) (d) から $D \subseteq (D^*)^*$ なので $\mathrm{cl}\ D \subseteq \mathrm{cl}\ (D^*)^*$ である。(a) より $(D^*)^*$ は閉凸錐なので、$\mathrm{cl}\ D \subseteq (D^*)^*$ である。逆に、今 $\boldsymbol{X} \in (D^*)^*$ で $\boldsymbol{X} \notin \mathrm{cl}\ D$ と仮定すると、$\mathrm{cl}\ D$ は閉凸集合なので分離定理より、$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle < 0$ でかつ全ての $\boldsymbol{Y} \in \mathrm{cl}\ D$ について $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0$ となる $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{A} \in \mathbb{V}$ が存在する。$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0$ であることから、$\boldsymbol{A} \in (\mathrm{cl}\ D)^* = D^*$ である。ところが $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle < 0$ なので $\boldsymbol{X} \notin (D^*)^*$ となり、仮定に矛盾する。よって $\mathrm{cl}\ D \supseteq (D^*)^*$ が示された。以上より $\mathrm{cl}\ D = (D^*)^*$ が成り立つ。
(f) $D_1 \cap D_2 \subseteq D_1 + D_2$ なので (a) と同様に、

$$\begin{aligned} D_1^* \cap D_2^* &= \left\{ \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in D_1} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in D_2} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} \right\} \\ &= \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in D_1 \cap D_2} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} \\ &\subseteq \bigcap_{\boldsymbol{Y} \in D_1 + D_2} \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0\} = (D_1 + D_2)^* \end{aligned}$$

が成り立つ。
(g) $\boldsymbol{0} \in D_1 \cap D_2$ ならば,、$D_1 = D_1 + \boldsymbol{0} \subseteq D_1 + D_2$ で、同様に $D_2 \subseteq D_1 + D_2$ である。よって (b) より $D_1^* \supseteq (D_1 + D_2)^*$ かつ $D_2^* \supseteq (D_1 + D_2)^*$ である。そこで $\boldsymbol{A} \in (D_1 + D_2)^*$ ならば $\boldsymbol{A} \in D_1^*$ かつ $\boldsymbol{A} \in D_2^*$ となり、$D_1^* \cap D_2^* \supseteq (D_1 + D_2)^*$ なので、(f) より $D_1^* \cap D_2^* = (D_1 + D_2)^*$ が成り立つ。 □

今 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ を閉錐 (必ずしも凸である必要はない）とした時、次の二つの錐を定義する。

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{\mathbb{K}} &:= \text{conv}\ \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}\right\} \\
&= \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j^T,\ \boldsymbol{x}_j \in \mathbb{K}\ (j = 1, 2, \ldots, r) \text{ for some } r \geq 1\right\}, \\
\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}} &:= \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0,\ \text{for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}\right\}.
\end{aligned}$$

この 2 つの錐 $\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ と $\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ について、いくつか補題を説明する。

補題 2.8. 行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n$ が $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ である必要十分条件は、

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{K}$ が存在して、$\boldsymbol{A} = \text{Gram}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$

である。

証明. 今行列 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ の列を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{K}$ として、行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n$ は対称行列なので $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ と表せて、

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \boldsymbol{u}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_k^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^T$$

であるので、$\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ の定義から $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ である。一方、グラム行列の定義より、

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T \\ \boldsymbol{u}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_k^T \end{bmatrix} [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k] = \text{Gram}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

であるので、補題が成り立つことがわかる。 □

補題 2.9. $\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ は閉凸錐である。

証明. $\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ の定義から凸錐であるのは明らかである。そこで $\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ が閉集合であることを証明する。そのために点列 $\{\boldsymbol{A}^i \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ が $\boldsymbol{A}$ に収束すると仮定する。それぞれの $\boldsymbol{A}^i \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ は $\boldsymbol{u}_1^i, \boldsymbol{u}_2^i, \ldots, \boldsymbol{u}_n^i \in \mathbb{K}$ のグラム行列 $\text{Gram}(\boldsymbol{u}_1^i, \boldsymbol{u}_2^i, \ldots, \boldsymbol{u}_n^i)$ である。A_{jj}^i を j 番目の $\boldsymbol{A}^i$ の対角成分とすると、各 j について、

$$\lim_{i\to\infty} \|\boldsymbol{v}_j^i\|^2 = \lim_{i\to\infty} A_{jj}^i = A_{jj}$$

であるので、点列 $\{\|\boldsymbol{v}_j^i\| \mid i=1,2,\dots\}$ は有界である。よって有界な点列 $\{\boldsymbol{v}_j^i \mid i=1,2,\dots\}$ は、$\mathbb{K}$ は閉集合なので $\boldsymbol{v}_j \in \mathbb{K}$ に収束する部分点列を持つ。よってこの部分点列 $\{s\}$ を取ることによって、$\lim \boldsymbol{v}_1^{(s)} = \boldsymbol{v}_1,\ \lim \boldsymbol{v}_2^{(s)} = \boldsymbol{v}_2,\ \dots,\ \lim \boldsymbol{v}_n^{(s)} = \boldsymbol{v}_n$ となる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{K}$ を得る。以上より $\boldsymbol{A} = \mathrm{Gram}(\boldsymbol{u}_1^i, \boldsymbol{u}_2^i, \dots, \boldsymbol{u}_n^i)$ は $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ となり、$\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ は閉集合であることが示された。 □

補題 2.10. $\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ と $\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ は相互に双対錐である。即ち、

$$(\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^* = \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}} \ \text{ かつ } \ (\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}})^* = \mathbb{C}_{\mathbb{K}}$$

である。

証明. 今 $\boldsymbol{A} \in (\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^*$ とすると、全ての $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ について $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A} \rangle \geq 0$ である。即ち、全ての $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{K}$ とある $1 \leq r \in \mathbb{Z}_+$ について $\langle \sum_{i=1}^r \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T, \boldsymbol{A} \rangle \geq 0$ となる。このことから、全ての $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{K}$ について $\langle \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T, \boldsymbol{A} \rangle = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_i \geq 0$ なので、$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ となり $(\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^* \subseteq \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ である。

逆に、今 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ として、またある r について任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}$ を取る。$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ なので $\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_i \geq 0$ である。よって $\langle \sum_{i=1}^r \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T, \boldsymbol{A} \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T, \boldsymbol{A} \rangle \geq 0$ となり $\boldsymbol{A} \in (\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^*$ であるので $(\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^* \supseteq \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ である。以上より $(\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^* = \mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ が成り立つ。

次に、補題 2.9 より $\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ は閉凸錐なので、補題 2.7 の (e) から $\mathbb{C}_{\mathbb{K}} = ((\mathbb{C}_{\mathbb{K}})^*)^*$ である。よって上記の結果から $\mathbb{C}_{\mathbb{K}} = (\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}})^*$ が成り立つ。 □

補題 2.9 と補題 2.10 の証明を見ると分かるように、この 2 つの補題が成り立つために錐 $\mathbb{K}$ が閉集合であることが必要になる。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}^n_+$ の時、$\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ は完全正値錐と呼ばれ $\mathbb{C}$ で表し、$\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ は共正値錐と呼ばれ $\mathbb{C}^*$ で表すことにする。そのことから、$\mathbb{C}_{\mathbb{K}}$ を拡張完全正値錐（行列)、$\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}}$ を拡張共正値錐（行列）と呼ぶことにする。また、$\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$ の時はよく知られているように $\mathbb{C}^*_{\mathbb{K}} = \mathbb{S}^n_+$ で半正定値錐である。

本論文で使用する $\mathbb{S}^n$ 空間での錐の定義を列挙する。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C} &= \operatorname{conv}\left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{A}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+\right\},\\
\mathbb{S}^n_{++} &= \left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\ \text{for all } \boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right\},\\
\mathbb{S}^n_{+} &= \left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0,\ \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right\},\\
&= \operatorname{conv}\left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{A}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right\},\\
\mathbb{C}^*_{++} &= \left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\ \text{for all } \boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+\right\},\\
\mathbb{C}^* &= \left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0,\ \text{for all } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+\right\},\\
\mathbb{N}^n &= \left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{S}^n \mid A_{ij}\geq 0\ \ i,j=1,2,\ldots,n\right\}.
\end{aligned}
$$

これらの定義から、明らかに下記の包含関係が成り立つ。

$$\mathbb{C}\ \subseteq\ \mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n\ \subseteq\ \mathbb{S}^n_+\ \subseteq\ \mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n\ \subseteq \mathbb{C}^*.$$

補題 2.11. $n\leq 4$ の場合 $\mathbb{C}\ =\ \mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n$、$\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n\ = \mathbb{C}^*$ が成り立ち、$n\geq 5$ の場合は常に $\mathbb{C}\ \subset\ \mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n$、$\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n\ \subset \mathbb{C}^*$ でそれぞれ真部分集合である。

1×1 対称行列の場合は特別で、明らかに $\mathbb{R}_+ = \mathbb{C} = \mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n\ \subset \mathbb{S}^n_+ = \mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n\ = \mathbb{C}^* = \mathbb{R}$ である。

補題 2.12. $\mathbb{S}^n$ 空間での錐について以下の双対錐の関係が成り立つ。

(a) $(\mathbb{S}^n_+)^* = \mathbb{S}^n_+$

(b) $(\mathbb{N}^n)^* = \mathbb{N}^n$

(c) $(\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n)^* = \mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n$ かつ $(\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n)^* = \mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n$

(d) $(\mathbb{C})^* = \mathbb{C}^*$ かつ $(\mathbb{C}^*)^* = \mathbb{C}$

証明.
(a) 補題 2.10 と、その後で述べたように、$(\mathbb{S}^n_+)^*$ は $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$ のケースに当たるので $(\mathbb{S}^n_+)^* = \mathbb{S}^n_+$ が成り立つ。
(b) $\boldsymbol{A}\in(\mathbb{N}^n)^*$ とすると、全ての $\boldsymbol{B}\in\mathbb{N}^n$ について $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle\geq 0$ である。そのためには $\boldsymbol{A}$ の要素 A_{ij} に負の値があってはいけないので、$\boldsymbol{A}\in\mathbb{N}^n$ でなくてはならない。よって $(\mathbb{N}^n)^* = \mathbb{N}^n$ である。
(c) $\boldsymbol{0}\in\mathbb{C}^n_+\cap\mathbb{N}^n$ なので補題 2.7 の (g) より $(\mathbb{S}^n_+)^*\cap(\mathbb{N}^n)^* = (\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n)^*$ であるが、この補題 2.12 の (a) と (b) より $\mathbb{S}^n_+$ と $\mathbb{N}^n$ は共に自己双対錐なので、$\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n = (\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n)^*$ である。

また、$\mathbb{S}^n_+$ と $\mathbb{N}^n$ は共に自己双対錐なので、

$$(\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}^n)^* = (((\mathbb{S}^n_+)^*)^*\cap((\mathbb{N}^n)^*)^*)^*$$

であるが、$\mathbb{S}^n_+$ と $\mathbb{N}^n$ は共に閉凸錐であることと、補題 2.7 の (g) と (e) より、

$$\begin{aligned}(\mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{N}^n)^* &= (((\mathbb{S}^n_+)^*)^* \cap ((\mathbb{N}^n)^*)^*)^* \\ &= (((\mathbb{S}^n_+)^* + (\mathbb{N}^n)^*)^*)^* = \mathrm{cl}\ ((\mathbb{S}^n_+)^* + (\mathbb{N}^n)^*) \\ &= \mathrm{cl}\ (\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n) = \mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n\end{aligned}$$

が成り立つ。

(d) 補題 2.10 と、その後で述べたように $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n_+$ のケースに当たるので成り立つのは明らかである。 □

2.2 本論文で議論する最適化問題の定義とその性質のまとめ

2.2.1 本論文で議論する最適化問題

非凸 2 次計画問題

線形計画問題の目的関数だけを 2 次関数にしたものを 2 次計画問題と呼ぶことにする。即ち、$\boldsymbol{O} \neq \boldsymbol{Q} \in \mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とした時、

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+\end{array}$$

と表せる。ここで $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{S}^n_+$ のときは目的関数は凸関数となり、問題は凸最適化問題になる。$\boldsymbol{Q} \notin \mathbb{S}^n_+$ の場合この問題を非凸 2 次計画問題と呼ぶ。

2 次制約 2 次最適化問題

本論文では、ベクトル空間 $\mathbb{V}$ の一つである $\mathbb{R}^n$ 上での一般の 2 次制約 2 次最適化問題を扱う。その問題を集合 $D \in \mathbb{R}^n$ 上での 2 次関数の等式制約を満たし 2 次関数の目的関数の最適値を求める問題とする。即ち、$\gamma_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{Q}_i \in \mathbb{S}^n\ (i = 0, 1, \ldots, m)$ とした時、

$$\inf\left\{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{u} + \gamma_0 \;\middle|\; \begin{array}{l}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \gamma_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, m),\ \boldsymbol{x} \in D\end{array}\right\}$$

と表さられる。ここで、$\boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{O},\ (i = 0, 1, \ldots, m)$ の場合はいわゆる線形計画問題になる。また制約条件に 2 次関数の不等式条件、例えば

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \gamma_i \leq 0$$

があったとしてもスラック変数 s_i を追加することで

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \gamma_i + s_i = 0,\ s_i \geq 0$$

または

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \gamma_i + s_i^2 = 0,\ s_i \geq 0$$

と変換することで全ての制約条件が等式な同値な問題に変換できる。

この問題の制約領域が空集合の時は最適解、最適値も存在しないので本論文では制約領域は空集合ではないと仮定する。一般にはこの問題は、たとえ制約領域は空集合ではなく、また最適値が有界でも、最適解が存在するとは限らない。例えば、次の問題

$$\xi = \inf\left\{x_1 \;\middle|\; x_1x_2 - 1 = 0,\ (x_1, x_2) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+\right\}$$

の最適値は明らかに $\xi = 0$ であるが最適解は存在しない。

0-1 混合２次最適化問題

次に、0-1 混合２次最適化問題について説明する。この問題は、目的関数が任意の２次関数で、線形制約に一部の変数に 0-1 条件が加わった問題である。
すなわち、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{Q} \in \mathbb{S}^n, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m,\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ で、$r \leq n$ とした時、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},\ x_i \in \{0,1\}\ \ (i = 1, 2, \ldots, r),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

と書き表される。0-1 条件は連続変数 $x_i \in \mathbb{R}$ に対して $x_i(1 - x_i) = 0$ と書けるので、この問題は前述の２次制約２次最適化問題の一つの応用と考えられる。

錐線形最適化問題

本論文では、ある錐 $\mathbb{K} \in \mathbb{V}^n$ の制約上でかつ線形制約条件を満たす制約領域での線形目的関数の最適化問題を錐線形最適化問題と呼ぶ。即ち、$\boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{Q}^1, \ldots, \boldsymbol{Q}^m \in \mathbb{V}^n,\ b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ とした時、

$$\inf\left\{\langle\boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{X}\rangle \;\middle|\; \langle\boldsymbol{Q}^i, \boldsymbol{X}\rangle = b_i\ (i = 1, 2\ldots, m),\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}\right\} \tag{2.2}$$

と表される。

ここで、$\mathbb{V}^n = \mathbb{R}^n$ で $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n_+$ の場合は線形計画問題である。また、$\mathbb{V}^n = \mathbb{S}^n$ で $\mathbb{K} = \mathbb{S}^n_+$ の場合はよく知られた半正定値計画問題である。これらの 2 つの問題については内点法により多項式時間で近似解を求められることが知られている。$\mathbb{K} = \mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{N}^n$ の場合は、非負半正定値計画問題になり、半正定値行列の対角成分は非負であるという

性格を用いて半正定値計画問題に変換できる。具体的には、まず非対角成分 $\boldsymbol{X}_{ij}$ $i \neq j$ について $n(n-1)/2$ 個の制約式 $\boldsymbol{X}_{ij} \geq 0$ を追加することを考える。これは $\mathbb{S}^n$ の空間の問題を非対角成分の数 $n(n-1)/2$ 分だけ増やし、各非対角成分にサイズを広げた対角成分を対応させて、それらが等しいという制約条件を追加することによって等価な半正定値計画問題に変換できる。この非負半正定値計画問題も多項式のオーダーで近似解を求められることになるが、問題のサイズは $\mathbb{S}^{n(n+1)/2}$ 上の問題になる。

今問題 (2.2) の線形制約について、もし全て b_i が $b_i = 0$ だとすると、制約領域は部分空間と錐の共通部分となるので補題 2.6 より錐となる。そのため明らかにこの問題の最適値は $\boldsymbol{Q}^0 \in \mathbb{K}^*$ の時は 0、そうでない場合は $-\infty$ になる。そこで少なくとも 1 つの b_i は $b_i \neq 0$ と仮定して、一般性を失わないで $i = 1$ とできる。まずこの $\langle \boldsymbol{Q}^1, \boldsymbol{X} \rangle = b_1$ の両辺を b_1 で割ることで新たに $\boldsymbol{H}^0 = 1/b_1 \boldsymbol{Q}^1$ として等価な $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ に変換する。次に、$b_j \neq 0$ である全ての $2 \leq j \leq m$ について、$\boldsymbol{H}^{j-1} = \boldsymbol{Q}^j - b_j \boldsymbol{H}^0$ とすると、$\langle \boldsymbol{Q}^j, \boldsymbol{X} \rangle = b_j$ は $\langle \boldsymbol{H}^{j-1}, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ と等価である。また、$b_j = 0$ である全ての $2 \leq j \leq m$ については $\boldsymbol{H}^{j-1} = \boldsymbol{Q}^j$ とすると、問題 (2.2) と等価な問題、

$$\inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^i, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m-1),\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \right\}$$

に変換できる。

錐線形最適化問題 (2.2) の双対問題は次のように表される。

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \;\middle|\; \boldsymbol{Q}^0 - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Q}^i y_i = \boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{Z} \in \mathbb{K}^* \right\}. \tag{2.3}$$

多項式最適化問題

本論文では、目的関数も制約式も一般の多項式である最適化問題を考える。今 $f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を多項式とすると、多項式は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の単項式の線型結合で表される。ここで単項式とは $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のとき、$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}$ のことで $1 \leq r_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ である。そこで、$f(\boldsymbol{x})$ 及び $g_i(\boldsymbol{x})(i = 1, 2, \ldots, m)$ を $\mathbb{R}^n$ 上での多項式として、$D \subseteq \mathbb{R}^n$ とした時、多項式最適化問題を

$$\inf \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \boldsymbol{x} \in D \end{array} \right\}$$

とする。ここでも同様に、不等式の制約条件が含まれる場合も、スラック変数を追加することでこの問題に帰着することができる。

2.2.2 最適化問題の基本的な性質

本論文で使われる最適化問題に関する基本的な性質についての補題をいくつか説明する。

補題 2.13. 次のような線形制約式で表される制約領域を考える。ここで $\widehat{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ である。

$$\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u} \geq 0\}. \tag{2.4}$$

この集合が有界な場合は、$\boldsymbol{e}^T = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ として、$\rho >$ を十分大きな数とした時、次のような形で表すことができる。

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = \rho,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{x} \geq 0\right\}.$$

証明. 集合 (2.4) は有界なので、$\hat{\mathbf{e}}^T = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$ とした時、集合 (2.4) と等しい集合、

$$\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \hat{\mathbf{e}}^T\boldsymbol{u} \leq \rho,\ \widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u} \geq 0\} \tag{2.5}$$

となる十分大きな $\rho > 0$ が存在する。そこでこの不等式制約のためにスラック変数を 1 つ追加する。新たに $\boldsymbol{e}^T = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$、また $\overline{\boldsymbol{A}} = [\widehat{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{0}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ とすると、集合 (2.5) は、

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = \rho,\ \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$$

と表せる。今 $\overline{\boldsymbol{A}}$ の i 行目を $\overline{\boldsymbol{A}}_{i.}$ として、新たに $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ の $\boldsymbol{A}_{i.}$ を $\boldsymbol{A}$ の i 行目とする。$\boldsymbol{A}_{i.} = b_i\boldsymbol{e} - \rho\overline{\boldsymbol{A}}_{i.}$ とすると、$\boldsymbol{A}_{i.}\boldsymbol{x} = b_i\rho - \rho b_i = 0$ となる。よって結局集合 (2.5) は、

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = \rho,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geq 0\}$$

と表すことができる。 □

補題 2.14. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}^n$ を閉錐（凸集合である必要はない）とする。$H^0 \in \mathbb{V}^n$ を、全ての $0 \neq \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ について、$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}\rangle > 0$ とすると、制約領域

$$\{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}\rangle = 1,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}\}$$

は有界である。

証明. 任意の $\boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ について、$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \rho > 0$ とすると、$1/\rho \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ はこの制約領域の制約条件を満たしている。即ち全ての $\boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ について対応する有界な制約領域の点があるのでこの制約領域は有界である。 □

補題 2.15. $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ とすると制約領域

$$F = \{\boldsymbol{X} \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}\}$$

は $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ 上に相対内点を持つ。

証明. 錐 $\mathbb{C}$ は内点を持つ ([20] 参照) ので、今 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の内点とすると、

$$B_\delta(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{C} \text{ となる } \delta > 0 \text{ が存在する。}$$

また $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ で、全ての $\boldsymbol{X} \in B_\delta(\boldsymbol{A})$ は内点なので、

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle > 0$$

が成立つ。特に $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$ の時 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{A} \rangle = \rho > 0$ として $\boldsymbol{B} = 1/\rho \boldsymbol{A}$ とすると $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{B} \rangle = 1$ を満たす。また同様にそれぞれの $\boldsymbol{X} \in B_\delta(\boldsymbol{A})$ について $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \hat{\rho} > 0$ のとき、それぞれ $\boldsymbol{Y} = 1/\hat{\rho} \boldsymbol{X}$ とする。全ての $\boldsymbol{X} \in B_\delta(\boldsymbol{A})$ に対応する $\boldsymbol{Y}$ は $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle = 1$ を満たすので $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ 上の相対内点集合となる。 □

補題 2.16. 今 $D \subseteq \mathbb{V}^n$ として、連続関数 $f(\boldsymbol{x})$ を $D \to \mathbb{R}$ としたとき、

$$\inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\} = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\ D\}$$

が成立つ。

証明. $\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\ D$ とする。$\mathrm{cl}\ D$ は閉集合であることから、$\boldsymbol{x}$ に収束する点列 $\{\boldsymbol{x}_i \in D : (i = 1, 2, \dots\}$ が存在する。$\boldsymbol{x}_i \in D$ であるので $f(\boldsymbol{x}_n) \geq \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}$ である。一方、$f(\boldsymbol{x})$ が連続関数であることから、

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x})$$

である。よって、全ての $\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\ D$ について

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{n \to \infty} f(\boldsymbol{x}_n) \geq \lim_{n \to \infty} \left(\inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}\right) = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}$$

となるので、

$$\inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\ D\} \geq \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}$$

であることがわかる。また $D \subseteq \mathrm{cl}\ D$ なので、明らかに

$$\inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\} \geq \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\ D\}$$

である。以上より、

$$\inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\} = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\ D\}$$

が示された。 □

補題 2.17. 集合 $D \subseteq \mathbb{V}^n$ が空集合でないとして、$\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}^n$ とした時、

$$\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in D\} = \inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ D\} \tag{2.6}$$

が成立つ。

証明. 今 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ として、

$$\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in D\} = \alpha, \quad \inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ D\} = \beta$$

とすると、

$$\lim_{i\to\infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i\rangle = \beta \text{ となる点列 } \boldsymbol{X}^i \in \mathrm{conv}\ D\ (i = 1, 2, \dots)$$

が存在する。$\boldsymbol{X}^i \in \mathrm{conv}\ D\ (i = 1, 2, \dots)$ なので、各 $\boldsymbol{X}^i$ について、

$$\boldsymbol{X}^i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\boldsymbol{Y}^i)^j,\ (\boldsymbol{Y}^i)^j \in D,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \in \mathbb{R}_+,\ m \geq 1,\ \ m \in \mathbb{Z}_+$$

となる $\left\{(\boldsymbol{Y}^i)^1, (\boldsymbol{Y}^i)^2, \dots, (\boldsymbol{Y}^i)^m\right\}\ (i = 1, 2, \dots)$ が存在する。そこで、

$$\beta \geq \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i\rangle = \langle \boldsymbol{Q}, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\boldsymbol{Y}^i)^j\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle \boldsymbol{Q}, (\boldsymbol{Y}^i)^j\rangle$$

であるが、$(\boldsymbol{Y}^i)^j \in D$ で α は制約領域 D 上での最適値なので、$\langle \boldsymbol{Q}, (\boldsymbol{Y}^i)^j\rangle \geq \alpha$ である。よって、

$$\beta \geq \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle \boldsymbol{Q}, (\boldsymbol{Y}^i)^j\rangle \ \geq\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \alpha = \alpha.$$

ところが $D \subseteq \mathrm{conv}\ D$ なので明らかに $\alpha \geq \beta$ となり、結局 $\alpha = \beta$ である。 □

この補題の意味は、目的関数が線形であるならば制約領域の凸包をとっても最適値は変わらないということである。

補題 2.18. $D, E \subseteq \mathbb{V}$ として、$Q \in \mathbb{V}^n$ とした時

$$\begin{aligned} & \inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}\rangle \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X} \in D,\ \boldsymbol{Y} \in E\} \\ = \ & \inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in D\} + \inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}\rangle : \boldsymbol{Y} \in E\} \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明. もし $\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in D\}$ か $\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}\rangle : \boldsymbol{Y} \in E$ のどちらかが $-\infty$ だとすると明らかに $D, E \subseteq D + E$ なので $\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}\rangle \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X} \in D,\ \boldsymbol{Y} \in E\}$ は $-\infty$ である。

そこで、$\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in D\} = \alpha$、また $\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}\rangle \mid \boldsymbol{Y} \in E\} = \beta$ で共に有界とする。$\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}\rangle \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X} \in D,\ \boldsymbol{Y} \in E\} = \gamma$ とすると、$\boldsymbol{Z}^i = \boldsymbol{X}^i + \boldsymbol{Y}^i$ となる点列 $\{\boldsymbol{X}^i \in D \mid i = 1, 2, \ldots\}$、$\{\boldsymbol{Y}^i \in E \mid i = 1, 2, \ldots\}$ が存在して

$$\gamma = \lim_{i \to \infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}^i\rangle = \lim_{i \to \infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i + \boldsymbol{Y}^i\rangle = \lim_{i \to \infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i\rangle + \lim_{i \to \infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}^i\rangle$$

であるが、$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i\rangle \geq \alpha,\ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}^i\rangle \geq \beta$ なので、$\gamma \geq \alpha + \beta$ である。

逆に、$\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle \mid \boldsymbol{X} \in D\} = \alpha$、$\inf\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}\rangle : \boldsymbol{Y} \in E\} = \beta$ なので、それぞれ点列 $\{\boldsymbol{X}^j \in D \mid j = 1, 2, \ldots\}$、$\{\boldsymbol{Y}^j \in E \mid j = 1, 2, \ldots\}$ が存在して、

$$\lim_{j \to \infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^j\rangle = \alpha,\ \lim_{j \to \infty} \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}^j\rangle = \beta$$

である。$\boldsymbol{Z}^j = \boldsymbol{X}^j + \boldsymbol{Y}^j$ とすると、

$$\gamma \leq \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}^j\rangle = \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^j + \boldsymbol{Y}^j\rangle = \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^j\rangle + \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y}^j\rangle$$

であるので, $\gamma \leq \alpha + \beta$ となり、以上より $\gamma = \alpha + \beta$ が成り立つ。 □

補題 2.19. 錐線形最適化問題の主問題 (2.2) とその双対問題 (2.3) の間で弱双対定理が成り立つ。即ち、$\boldsymbol{X}$ を主問題の実行可能解、y_i $(i = 1, \ldots, m)$ を双対問題の実行可能解とすると、

$$\langle \boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{X}\rangle \ \geq\ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

が成り立つ。

証明. 今主問題 (2.2) の実行可能解 $\boldsymbol{X}$ を、双対問題 (2.3) の制約式の両辺にかけると、

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{X}\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \boldsymbol{Q}^i, \boldsymbol{X}\rangle y_i &= \langle \boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{X}\rangle - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ &= \langle \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}\rangle \end{aligned}$$

である。$\boldsymbol{Z} \in \mathbb{K}^*,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ なので $\langle \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}\rangle \geq 0$ となり、

$$\langle \boldsymbol{Q}^0, \boldsymbol{X}\rangle \ \geq\ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

が成り立つ。 □

3　2次制約2次最適化問題と完全正値最適化問題

この章では、変数に非負条件が付いた制約も目的関数も2次関数の最適化問題と、その緩和問題である完全正値錐上での制約も目的関数も線形な最適化問題の関係について議論する。

初めにこの章で扱う2次制約2次最適化問題の形式である、目的関数も制約式も2次形式だけの問題 (3.1) と、その緩和問題としての完全正値最適化問題 (3.4) を提示する。それ等の $\boldsymbol{H}^0$ が強共正値条件を満たし、かつ全ての $k = 1, \ldots, m$ について $\boldsymbol{H}^k \in \mathbb{C}^*$ の場合にこの緩和問題の最適値は元の問題に一致することを証明する。次に $\boldsymbol{H}^k \in \mathbb{C}^*$ という条件よりも弱い条件である階層的共正値条件という概念を導入し、この弱い条件を満たす場合でも、もし $\boldsymbol{H}^0$ が強共正値条件を満たしていればこの緩和問題の最適値は元の問題に一致することを証明する。

次に、この章で扱う2次制約2次最適化問題 (3.1) は2次形式だけの2次関数による特殊な形式の問題であるが、2次項、1次項、定数項を持った一般の2次関数による2次制約2次最適化問題を同値な問題 (3.1) の形式に変換できることを示す。この場合は $\boldsymbol{H}^0$ が強共正値条件を満たさない。そこで制約領域 G の非同次制約も同次制約に置き換えた集合 G_0 を導入する。もし制約領域が階層的共正値条件を満たし、$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ の場合は、緩和問題の制約領域は元の問題の制約領域の凸包と新たに導入した集合 G_0 の凸包の和であること示す。このことからこの場合は元の問題と緩和問題の最適値が一致するとは限らない。

そこで集合（特に非有界な集合）に対して、漸近的無限方向という集合を定義する。そして元の問題の漸近的無限方向の集合と集合 G_0 が等しいとき、漸近的無限方向の条件を満たすという。この条件を使い、$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ である時、もし制約領域が階層的共正値条件を満たし、かつ漸近的無限方向の条件を満たすならば、緩和問題の制約領域は元の問題の閉凸包と一致することを証明する。元の問題と緩和問題の目的関数は同じ線形関数なので、結局両方の最適値は一致することがわかる。最後に非負象限制約を閉錐に置き換えてできる拡張完全正値錐についてと、いくつかの議論について図によって説明する。

3.1　2次制約2次最適化問題と完全正値錐最適化問題

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 及び $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^k \in \mathbb{S}^n$ としたとき、次の2次制約2次最適化問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^0\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{x} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+. \end{array} \tag{3.1}$$

この最適化問題 (3.1) は行列の内積の定義 (2.1) を使うと、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \\ \text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1, \\ & \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \tag{3.2}$$

と表すことができる。この章ではこの問題 (3.2) の形式を 2 次制約 2 次最適化問題のモデルとして扱う。この形式の重要な特徴は (i) 目的関数も制約式も全て 2 次の同次式（2 次形式）であること、(ii) 制約式の 1 本は 2 次形式が 1 に等しく、残りの制約式は全て 2 次形式が 0 に等しい等式になっていることである。この 2 つの特徴が以降の議論で重要な役割を果たしている。

さらに、この問題は、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ と置くことによって

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\ \text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ & \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m), \\ & \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \tag{3.3}$$

に変換することができる。ここで

$$\mathbb{K} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$$

とすると $\mathbb{K}$ は錐になる。また、完全正値錐の定義から conv $\mathbb{K}$ は完全正値錐 $\mathbb{C}$ である。そこで、問題 (3.2) の緩和問題としての完全正値最適化問題を下記の様に定義する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\ \text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ & \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m), \\ & \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}. \end{array} \tag{3.4}$$

問題 (3.2) と問題 (3.4) の制約領域をそれぞれ、

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0 \ (k = 1, 2, ., m),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \right\}, \\ F &= \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, ., m),\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

と表すことにする。これ以降、G は空集合ではないことを仮定する。即ち少なくとも $\boldsymbol{H}^0 \neq \boldsymbol{O}$ である。またこの場合、$G \subset F$ なので明らかに F も空集合ではない。

ここで問題 (3.2) の目的関数は $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ に関して線形なので、補題 (2.16) と (2.17) より問題 (3.2) は下記問題と同値である。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{X} \in \text{cl conv } G. \end{array}$$

より厳密に書くと $\inf\left\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \mid \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G\right\} = \inf\left\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \mid \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \text{cl conv } G\right\}$ である。一般には $F \supseteq \text{cl conv } G$ であるが、もし $F = \text{cl conv } G$ となれば問題 (3.2) と問題 (3.4) の最適値が一致する事になる。そこで $F = \text{cl conv } G$ となる $\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^k$ $(1, 2, \ldots, m)$ 等の条件について議論する。

初めに、完全正値錐による緩和問題の制約領域が有界な場合について議論し、次に有界ではない場合も含むより一般的な場合について議論する。

3.2 単純なケース

$\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^k$ $(k = 1, \ldots, m)$ が次の 2 つの条件を満たす単純な場合について考える。

(A) $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{x} \ > \ 0$ for all $\boldsymbol{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n_+$：強共正値条件（$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*_{++}$）

(B) $\boldsymbol{H}^k \in \mathbb{C}^*$ $(k = 1, \ldots, m)$：共正値条件

条件 (A) を満たす時、問題 (3.2) の制約式には $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ が含まれるので問題 (3.4) の制約領域 F は補題 2.14 から有界であることがわかる。よって $G \subseteq F$ であることから問題 (3.2) の制約領域 G も有界である。

補題 3.1 (参照：Lemma 2.1 of [6])**.** 条件 (B) を仮定する。$\boldsymbol{H} = \sum_{k=1}^m \boldsymbol{H}^k$ とすると、問題 (3.2) の制約領域 G について

$$G = \widehat{G} = \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ \ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K}\right\} \tag{3.5}$$

が成り立つ。

証明. まず $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G$ とすると、$\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$ $(k = 1, 2, ., m)$ なので
$\langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$ は自明である。よって $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \widehat{G}$ となり、$\subset$ 側の包含関係が示された。

逆の包含関係を示すために、$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \widehat{G}$ とすると、

$$0 = \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle$$

であるが、条件 (B) と $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K}$ より $\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \geq 0$ $(k = 1, 2, ., m)$ である。このことから $\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ が成り立ち、$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G$ となるので式 (3.5) が成立する。 □

そこで条件 (B) を満たす問題 (3.2) は下記のように単純化することができる。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \\ \text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+. \end{array} \tag{3.6}$$

この後 (A) と (B) の条件下での問題 (3.6) と、その緩和問題の完全正値最適化問題の最適値が一致することを証明するが、その前にこの単純なケースの条件を満たす具体例の一つについて説明する。

3.2.1 単純なケースの具体例

問題 (3.2) の形をした問題で、条件 (A) と (B) を満たす具体的な 2 次最適化問題として、制約領域が有界な多面体で目的関数が非凸 2 次関数の問題である非凸 2 次計画問題がある。この問題は補題 2.13 より

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \bar{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{x} + 2\bar{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = \rho,\ \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \tag{3.7}$$

と表される。ここで $\rho > 0,\ \boldsymbol{x},\ \bar{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{R}^n,\ \bar{\boldsymbol{Q}} \in \mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ で $\bar{\boldsymbol{A}}$ は m 行 n 列の行列、また $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ とする。そこで $\boldsymbol{Q} = \bar{\boldsymbol{Q}} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{c}\boldsymbol{e}^T + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}\boldsymbol{c}^T$ とすると問題 (3.7) は次の様に書き換えられる。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = \rho,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+. \end{array}$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$ なので 2 つの制約式をそれぞれ $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = \rho^2,\ \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = 0$ としても制約領域は変わらない。今 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T,\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ としてこの問題を行列の内積を使って表すと、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\ \text{sub. to} & \langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{X} \rangle = \rho^2,\ \langle \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\ & \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

となるが、行列 $\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{E}$ は明らかに強共正値なので条件 (A) を満たしている。また $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n_+ \subseteq \mathbb{C}^*$ なので条件 (B) を満たしている。よって問題 (3.7) は問題 (3.1) の形をした 2 次最適化問題で、 条件 (A) と (B) を満たす問題に帰着できることがわかる。

3.2.2 単純ケースの最適値一致

ここで、問題 (3.6) の緩和問題としての完全正値最適化問題を

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\
\text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\
& \boldsymbol{X} \in\ \mathbb{C} = \text{conv}\ \left\{ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \ \middle|\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \right\}
\end{array}
\tag{3.8}
$$

とする。

定理 3.1 (参照：Lemma 2.1 of [3])**.** 問題 (3.6) が条件 (A) と (B) を満たせば、その最適値と問題 (3.8) の最適値は一致する。

証明. 問題 (3.6) と問題 (3.8) の制約領域をそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
\widehat{G} &= \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{S}^n \ \middle|\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \right\} \\
\widehat{F} &= \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \ \middle|\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \quad \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \right\}
\end{aligned}
$$

とする。問題 (3.6) と問題 (3.8) の目的関数は同じでかつ線形なので 、conv $\widehat{G} = \widehat{F}$ が証明できればそれぞれの最適値は一致する。

まず conv $\widehat{G} \subseteq \widehat{F}$ を示すために $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in$ conv $\widehat{G}$ とする。いま $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ とすると、$\boldsymbol{X}$ は制約式 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ を満たし、かつ完全正値錐の定義から $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}$ となり $\boldsymbol{X} \in \widehat{F}$ なので $\widehat{G} \subseteq \widehat{F}$ である。ところが $\widehat{F}$ は凸集合なので、2.1.2 節の凸包の定義から、結局 conv $\widehat{G} \subseteq \widehat{F}$ が成り立つ。

逆に、conv $\widehat{G} \supseteq \widehat{F}$ を示すために、$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{X} \in \widehat{F}$ とすると、$\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}$ なので次のような $\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が存在する。

$$
\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T, \quad \langle \boldsymbol{H}^0, \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T \rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{H}, \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T \rangle = 0.
$$

ここで、$\lambda_i = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T \rangle$ とすると、条件 (A) から $\lambda_i > 0$ である。さらにこれを使って、

$$
\boldsymbol{y}_i = \frac{\boldsymbol{x}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\ (i = 1, \ldots, r), \quad \boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T \quad (i = 1, 2, \ldots, r)
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\boldsymbol{x}_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{\boldsymbol{x}_i^T}{\sqrt{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{Y}_i, \\
\sum_{i=1}^{r} \lambda_i &= \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\
\lambda_i &> 0\ (i = 1, 2, \ldots, r)
\end{aligned}
$$

であり、また

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}_i\rangle &= \langle \boldsymbol{H}^0, \frac{\boldsymbol{x}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{\boldsymbol{x}_i^T}{\sqrt{\lambda_i}}\rangle = \frac{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle}{\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \\ 0 &= \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{X}\rangle = \langle \boldsymbol{H}, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{Y}_i\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Y}_i\rangle\end{aligned}$$

である。条件 (B) より $\langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Y}_i\rangle \geq 0$ なので $\langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Y}_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ となる。以上より、$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{Y}_i \in \widehat{G}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ の凸結合になっていることがわかるので $\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ \widehat{G}$ である。よって $\mathrm{conv}\ \widehat{G} = \widehat{F}$ が示されたので問題 (3.6) の最適値と問題 (3.8) の最適値は一致することがわかる。 □

(B) の条件について、階層的共正値という概念を導入することで緩めることができるので、次にそれについて説明する。

3.2.3 階層的共正値条件

階層的共正値条件を説明するために、いくつかの集合を定義する。

定義 3.1. 元の問題 (3.1) の内積表現である問題 (3.2) の制約領域 G と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (3.4) の制約領域 F に関して次の集合を定義する。ここでまた錐 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{K} = \left\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+\right\}$ とする。

$$\begin{aligned} G^0 &:= \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle = 1\right\}, \\ G^\ell &:= \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{\ell-1} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle = 0\right\} \ (\ell = 1, 2, \ldots, m), \\ F^0 &:= \left\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}\rangle = 1\right\}, \\ F^\ell &:= \left\{\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}\rangle = 0\right\} \ (\ell = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

この定義から、$G = G^m,\ F = F^m$ である。

上記の定義を使って階層的共正値条件について次の様に定義する。

定義 3.2. 次の条件 (C) を満たす時、問題 (3.2) の制約領域 G は階層的共正値集合であると呼ぶ。

(C) 全ての $\ell = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{\ell-1} \text{ ならば } \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle \geq 0.$$

この条件は、双対錐の定義から $\boldsymbol{H}^\ell \in (G^{\ell-1})^*$ と明らかに同値である。

もし $\boldsymbol{H}^\ell \in \mathbb{S}^n_{++}$（フルランク）の場合は明らかに条件 (C) を満たすが、この場合は、$\mathbf{0} \notin G^0$ なので $G^\ell = \emptyset$ ($\ell = 1, 2, \ldots, m$) である。よって $G^m = G \neq \emptyset$ なので $\boldsymbol{H}^\ell$ ($\ell = 1, 2, \ldots, m$) は低いランクの行列でなくてはならない。

また、$G^\ell \subseteq G$ なので G^l は空集合ではないが、この時 $\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = 0\}$ は全ての $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^\ell$ での $G^{\ell-1}$ の支持超平面になっている。

この問題 (3.2) での G^ℓ の階層構造では各階層で一つの制約式が追加されている。しかしある階層に複数個の制約式があっても一つにまとめることができる。今ある階層のレベルが ℓ において、$\boldsymbol{H}^{\ell_i} \in \mathbb{S}^n (i = 1, 2, \ldots, i_l)$ とした時、

$$G^\ell \;=\; \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{\ell-1} \;\middle|\; \langle H^{\ell_i}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, i_\ell) \right\}$$

となっているとする。この場合条件 (C) より、$\langle \boldsymbol{H}^{\ell_i}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \geq 0$ for all $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{\ell-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, i_\ell$) となる。このことから、$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{\ell-1}$ かつ $\langle H^{\ell_i}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, i_\ell$) と、$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{\ell-1}$ かつ $\sum_{i=1}^{i_\ell} \langle H^{\ell_i}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$ は同値であるので、結局新たに $\boldsymbol{H}^\ell = \sum_{i=1}^{i_\ell} H^{i_\ell}$ とすれば各階層が 1 本の制約式で問題 (3.2) の制約領域を表すことが出来ることがわかる。このやり方で問題 (3.2) や問題 (3.4) の制約条件の式の数を減らすことが出来る。実際、次の節で説明する、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題では結局制約式は 2 本にまとめられることが示される。

この、条件 (B) よりも緩い新たな条件 (C) のもとでも以下の系が成り立つ。

系 3.1 (参照：Lemma 2.1 of [3]). 問題 (3.2) が条件 (A) と (C) を満たせば、その最適値と問題 (3.4) の最適値は一致する。

証明. 定理 3.1 と同様に、問題 (3.2) と問題 (3.4) の目的関数は同じで、かつ線形なので conv $G = F$ を証明する。今 $\ell \in \{0, 1, \ldots, m\}$ とする。$G^\ell \subset F^\ell$ で F^ℓ は凸なので、conv $G^\ell \subset F^\ell$ である。そこで $\ell = 0, 1, \ldots, m$ について数学的帰納法で conv $G^\ell \supset F^\ell$ を証明する。$\ell = 0$ については、定理 3.1 の証明で $\langle H, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$ の制約式が無い場合と考えればよいので、証明済である。そこで $\ell \geq 1$ について、conv $G^{\ell-1} \supset F^{\ell-1}$ であることを仮定して conv $G^\ell \supset F^\ell$ を証明する。今 $\boldsymbol{X} \in F^\ell$ とする。$F^\ell \subset F^{\ell-1} \subset$ conv $F^{\ell-1}$ なので $\boldsymbol{X} \in$ conv $F^{\ell-1}$ である。よって

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T, \ \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$$

となる $\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \in G^{\ell-1}, \ \lambda_i > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r)$ が存在する。また条件 (B) より $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \rangle \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r)$ である。一方、$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \in G^\ell$ である

ので $0 = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \rangle$ が成り立つが、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \rangle \geq 0$ で $\lambda_i > 0$ なので、全ての $i = 1, 2, \ldots, r$ について $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \rangle = 0$ が成り立つ。このことと $\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \in G^{\ell-1}$ であることから $\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \in G^\ell$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ であることがわかるので、結局 $\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \in G^\ell$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ の凸結合であるので、$\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ G^\ell$ が示された。よって conv $G = F$ が証明されたことになる。以上より、問題 (3.6) と問題 (3.8) の制約領域が一致し目的関数が同じなので最適解も一致する。 □

この系の証明から conv $G^\ell = F^\ell$ $(\ell = 1, 2, \ldots, m)$ であることがわかる。F^ℓ は補題 2.9 より錐 $\mathbb{C}$ が閉集合なので明らかに閉集合である。よって系 3.1 は conv G^ℓ $(\ell = 1, 2, \ldots, m)$ が閉集合であることも示している。

また条件 (A) が成り立っている時、系 3.1 の条件である (C) は下記の条件 (C)' に置き換えることができる。

(C)' 全ての $\ell = 1, 2, \ldots, m$ に対して、$\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}$ ならば $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0.$

実際、$G^{\ell-1} \subset F^{\ell-1}$ なので、条件 (C)' が成り立てば条件 (C) 成り立つ。また逆に、もし条件 (C) が成り立てば系 3.1 から conv $G^{\ell-1} = F^{\ell-1}$ なので条件 (C)' 成り立つ。よって条件 (C) と条件 (C)' は同値であることがわかる。今までと同様にこの条件 (C)' は、双対錐の定義から $\boldsymbol{H}^\ell \in (F^{\ell-1})^*$ と同値である。

3.2.4 階層的共正値条件の例

本論文では、具体的な問題で階層的共正値条件の形で表される例を 2 つ紹介する。2 つとも 0-1 条件に関連する問題であるが 1 つ目は 4 章で紹介する 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題である。4 章ではこの元の問題を 2 つの同値な問題に変換している。4.2.1 節が階層が 1 つの階層的共正値条件で表現した問題で、4.1.1 節が階層が 2 つの階層的共正値条件で表現した問題である。

もう 1 つの例は、いくつかの決定変数から 1 つだけを選ぶ下記のような制約領域の例である。

$$\left\{ \boldsymbol{u} \in \{0,1\}^{n-1} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} u_i = 1 \right\}.$$

この条件を連続関数で表す方法はいくつかあるが次のような同値な表現を考える。

$$\left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^{n-1} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} u_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 = 1 \right\}.$$

ここで全て 2 次形式で表すために、次の節で紹介するように、新たに変数 u_0 を追加して次のように同値な表現に変換する。ここで $\boldsymbol{x} = (u_0, \boldsymbol{u})$ とすると、

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid x_0^2 = 1,\ (x_0 - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i)^2 = 0,\ x_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \right\}$$

と表すことができるので、$\boldsymbol{a} = (1, -1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{I} \in \mathbb{S}^{n-1}$ として、

$$\boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{H}^1 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T \in \mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{H}^2 = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^n$$

と定義すると、次のような同値な制約領域として表すことができる。

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^0\boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^1\boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{x} = 0\right\}.$$

ここで明らかに、$\boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{C}^*$ であるが $\boldsymbol{H}^2 \notin \mathbb{C}^*$ である。しかし、

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{x} \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^0\boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^1\boldsymbol{x} = 0\right\}$$

を満たすので、階層的共正値条件を満たしていることがわかる。

3.3 一般のケース

次に条件 (A) よりも条件を弱くした、より一般の場合について分析する。問題 (3.2) は特殊な形式の 2 次最適化問題であるが、次に示すように、一般的な 2 次制約 2 次最適化問題を問題 (3.2) の形式に変換することができる。このとき $\boldsymbol{H}^0$ は条件 (A) の強共正値条件ではなく、より弱い条件の共正値条件なので条件 (A) を緩める必要がある。このことが次の分析の動機になっている。

3.3.1 一般 2 次制約 2 次最適化問題

今 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{c}_k \in \mathbb{R}^{n-1},\ \boldsymbol{Q}_k \in \mathbb{S}^{n-1},\ \gamma_k \in \mathbb{R}\ (k = 0, 1, \ldots, m)$ として、下記の一般的な 2 次制約 2 次最適化問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{u} + \gamma_0 \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{u} + \gamma_k = 0 \\ & (k = 1, 2, \ldots, m),\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}_+. \end{array} \tag{3.9}$$

元の 2 次最適化問題が変数の非負条件以外に不等式制約を含んでいたとしてもスラック変数を追加することで等式制約に変換できるので、問題 (3.9) は殆どの 2 次最適化問題を含むと考えられる。ここで一つ変数 u_0 を追加して、問題 (3.9) を

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{u} + 2u_0\boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{u} + \gamma_0 u_0^2 \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{u} + 2u_0\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{u} + \gamma_k u_0^2 = 0 \\ & (k = 1, 2, \ldots, m),\ u_0^2 = 1,\ (u_0, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

と書き換えても同値な問題である。ここで、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \begin{bmatrix} \gamma_0 & \boldsymbol{c}_0^T \\ \boldsymbol{c}_0 & \boldsymbol{Q}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^n, \\
\boldsymbol{H}^k &= \begin{bmatrix} \gamma_k & \boldsymbol{c}_k^T \\ \boldsymbol{c}_k & \boldsymbol{Q}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^n\ (k = 1, 2, \ldots, m),\ \boldsymbol{x} = (u_0, \boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

と定義すると、問題 (3.9) は

$$\begin{array}{ll}
\text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \\
\text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1, \\
& \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m), \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+
\end{array}$$

のように問題 (3.2) の形式に変換できる。ただし $\boldsymbol{H}^0$ は、明らかに共正値行列ではあるが強共正値行列ではないので、条件 (A) を緩める必要がある。

3.3.2 制約領域

与えられた 2 次最適化問題の制約領域を階層構造に構築し、問題 (3.9) で示したように変換した場合、たとえ元の問題が有界であっても条件 (A) を満たすとは限らない。そこで次に一般のケース、即ち単純なケースの条件 (A) を弱めた下記の条件 (A)' の場合について、元の問題 (3.1) と等価な問題 (3.2) の最適値が緩和問題 (3.4) の最適値と一致する条件について議論する。前述したように、$\boldsymbol{H}^0 \neq \boldsymbol{O}$ を仮定する。

(A)' $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$：共正値条件

(A) よりも弱い (A)' 条件を扱うために、制約領域に対して次の集合を導入し、この集合についても階層的構造を導入する。まず、

$$G_0 = \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0, \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \right\}, \tag{3.11}$$

$$F_0 = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \right\} \tag{3.12}$$

とする。ここで $\mathbb{K} = \{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n : \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \}$ である。

定義 3.3. 上記集合 G_0 と F_0 に関して次の集合を定義する。

$$\begin{aligned}
G_0^0 &:= \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K} \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0 \right\}, \\
G_0^\ell &:= \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G_0^{\ell-1} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0 \right\}\ (\ell = 1, 2, \ldots, m), \\
F_0^0 &:= \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \right\}, \\
F_0^\ell &:= \left\{ \boldsymbol{X} \in F_0^{\ell-1} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \right\}\ (\ell = 1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}$$

この定義から、$G_0 = G_0^m,\ F_0 = F_0^m$ である。また、

$$\text{conv } G_0^\ell = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j^T \;\middle|\; \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{x}_j^T \in G_0^l \ (j = 1, 2, \ldots, p) \text{ for some } p \geq 0 \right\}$$

と表せる。

この制約領域に関する階層構造の定義を使って新たな階層的共正値条件について次の様に追加する。

定義 3.4. 条件 (C) と次の条件 (D) を満たす時、問題 (3.2) の制約領域 G は階層的共正値集合である呼ぶ。

(D) 全ての $\ell = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G_0^{\ell-1} \ \text{ ならば } \ \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \geq 0.$$

この条件は、双対錐の定義から $\boldsymbol{H}^\ell \in (G_0^{\ell-1})^*$ と明らかに同値である。これらの階層構造について以下の補題が成り立つ。

補題 3.2 (参照：Lemma 3.3 of [3])**.** 以下の 3 つの条件は同値である。

(i) 条件 (C) と条件 (D) が成り立つ。

(ii) $\boldsymbol{X} \in \text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ ならば、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成り立つ。

(iii) $\boldsymbol{X} \in \text{cone conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ ならば、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成り立つ。

証明. $\text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1} \subseteq \text{cone conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ なので、明らかに (iii) が成り立てば (ii) が成り立つ。

また、今 $\boldsymbol{Y} \in G^{\ell-1} \subseteq \text{conv } G^{\ell-1}$ で、$\boldsymbol{Z} \in G_0^{\ell-1} \subseteq \text{conv } G_0^{\ell-1}$ とすると、$\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ である。よって、(ii) が成り立っているとすると $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0$ かつ $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$ となり、(i) が成り立つ。

そこで最後に (i) が成り立つときに (iii) が成り立つことを示す。今 $0 < \mu \in \mathbb{R}_+$, $\mu \boldsymbol{Y} \in \text{conv } G^{\ell-1}$ とすると、$\mu \boldsymbol{Y} \in \text{cone conv } G^{\ell-1}$ である。また $\boldsymbol{Z} \in \text{conv } G_0^{\ell-1}$ として $\boldsymbol{X} = \mu \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ とすると、

$$\boldsymbol{X} \in \text{cone conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$$

である。まず $\boldsymbol{Y}$ について、$\boldsymbol{Y} \in \text{conv } G^{\ell-1}$ なので、

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda^i = 1, \quad \lambda^i \in \mathbb{R}_+ \ (i = 1, 2, \ldots, r)$$

となるような $\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T \in G^{\ell-1}$ が存在する。条件 (i) が成り立っているので、
全ての $i = 1, 2, \ldots, r$ について $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T \rangle \geq 0$ が成り立っている。よって、

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \mu\boldsymbol{Y} \rangle = \mu \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \lambda^i \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T \rangle \geq 0$$

が成り立つ。次に $\boldsymbol{Z}$ について、$\boldsymbol{Z} \in$ 錐 conv $G_0^{\ell-1}$ なので、$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T$ となるような $\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T \in G_0^{\ell-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ が存在する。条件 (i) が成り立っているので同様に $i = 1, 2, \ldots, r$ について $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T \rangle \geq 0$ が成り立つ。よって

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_i^T \rangle \geq 0$$

が成り立つ。以上より、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \mu\boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$ なので条件 (iii) が成り立つことが示された。よって 3 つの条件が同値であることが証明された。 $\square$

この補題3.2の (iii) の条件から、条件 (C) と (D) のもとでは、$\boldsymbol{H}^\ell$ は錐cone conv $G^{\ell-1}+$ conv $G_0^{\ell-1}$ の双対錐の中から選ばれなくてはいけないことが分かる。即ち、

$$\boldsymbol{H}^\ell \in (\text{cone conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1})^*$$

でなくてはいけない。特に、条件 (A)' 即ち $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ の時は $\boldsymbol{H}^1$ について次の系が成立つ。

系 3.2 (参照：Lemma 3.3 of [3])**.** 条件 (A)' 即ち $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ が成り立っているとすると、$\boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{K}^* = \mathbb{C}^*$ が成り立つ。

証明. 初めに cone conv G^0 + conv $G_0^0 = \mathbb{C}$ であることを示す。明らかに
cone conv G^0+conv $G_0^0 \subseteq \mathbb{C}$ であるので、逆の包含関係 cone conv G^0+conv $G_0^0 \supseteq \mathbb{C}$ が成り立つことを証明する。そこで今 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}$ とすると、この $\boldsymbol{X}$ について条件 (A)' より $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ なので、$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \rho \geq 0$ とする。もし $\rho = 0$ である時は $\boldsymbol{X} \in G_0^0 \subset$ conv G_0^0 なのでこの包含関係が成り立つ。

そこで次に $\rho > 0$ とする。まず $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}$ なので $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T$ となる $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が存在する。今 $\lambda_i = (\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T \rangle)/\rho$ とすると、条件 (A) から $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ なので、

$$I_+ = \{i : \lambda_i > 0\},\ I_0 = \{i : \lambda_i = 0\},\ \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i/\sqrt{\rho\lambda_i} \in \mathbb{K}\ (i \in I_+).$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \sum_{i\in I_+}\lambda_i\rho\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T+\sum_{j\in I_0}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T,\ \lambda_i>0\ (i\in\boldsymbol{I}_+),\\
\sum_{i\in I_+}\lambda_i &= \sum_{i\in I_+}\langle\boldsymbol{H}_0,\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle/\rho=\sum_{i=1}^{r}\langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle/\rho=\langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{X}\rangle/\rho=1,\\
\langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T\rangle &= \langle\boldsymbol{H}^0,(\boldsymbol{x}^i/\sqrt{\rho\lambda_i})(\boldsymbol{x}^i/\sqrt{\rho\lambda_i})^T\rangle=\langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle/\rho\lambda_i=1\ (i\in I_+),\\
\langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle &= 0\ \ (j\in I_0)
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、$\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T\in\text{conv}\ G^0$ なので $\rho\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T\in\text{cone conv}\ G^0$ であることがわかり、結局 $\sum_{i\in I_+}\lambda_i\rho\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i^T\in\text{cone conv}\ G^0$ である。また $\langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle=0\ \ (j\in I_0)$ なので $\sum_{j\in I_0}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\in\text{conv}\ G_0^0$ である。以上より、cone conv G^0+ conv $G_0^0=\mathbb{C}$ が証明された。

このことと補題 3.2 の (iii) の結果から, $\boldsymbol{X}\in\text{cone conv}\ G^0+\text{conv}\ G_0^0=\mathbb{C}$ ならば、$\langle\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{X}\rangle\geq 0$ なので、$\boldsymbol{H}^1\in\mathbb{K}^*=\mathbb{C}^*$ が示された。 □

次に、今 $\ell\geq 2$ とする。明らかに、

$$\text{cone conv}\ G^{\ell-1}+\text{conv}\ G_0^{\ell-1}\ \supseteq\ \text{cone conv}\ G^{\ell}+\text{conv}\ G_0^{\ell} \tag{3.13}$$

が成り立つが、もしこの包含関係の右辺が真部分集合でないとする。即ち、

$$\text{cone conv}\ G^{\ell-1}+\text{conv}\ G_0^{\ell-1}\ =\ \text{cone conv}\ G^{\ell}+\text{conv}\ G_0^{\ell}$$

とすると、全ての $\boldsymbol{X}\in\text{cone conv}\ G^{\ell-1}+\text{conv}\ G_0^{\ell-1}$ について、

$$\langle\boldsymbol{H}^{\ell},\boldsymbol{X}\rangle\geq 0\ \text{かつ}\ \langle\boldsymbol{H}^{\ell-1},\boldsymbol{X}\rangle\geq 0$$

が成り立つことになる。このことから

$$\begin{aligned}
G^{\ell+1} &= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^{\ell}\mid\langle\boldsymbol{H}^{\ell+1},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\}\\
&= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^{\ell-1}\mid\langle\boldsymbol{H}^{\ell},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0,\ \langle\boldsymbol{H}^{\ell+1},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\}\\
&= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^{\ell-1}\mid\langle(\boldsymbol{H}^{\ell}+\boldsymbol{H}^{\ell+1}),\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\},
\end{aligned}$$

同様に、

$$G_0^{\ell+1} = \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G_0^{\ell-1}\mid\langle(\boldsymbol{H}^{\ell}+\boldsymbol{H}^{\ell+1}),\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\}$$

を得る。そこで新たに次のように階層構造を再構築することが出来る。

$$\begin{aligned}
G^{\ell} &= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^{\ell-1}\mid\langle(\boldsymbol{H}^{\ell}+\boldsymbol{H}^{\ell+1}),\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\},\\
G^{\ell+2} &= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^{\ell}\mid\langle\boldsymbol{H}^{\ell+2},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\},\\
G_0^{\ell} &= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G_0^{\ell-1}\mid\langle(\boldsymbol{H}^{\ell}+\boldsymbol{H}^{\ell+1}),\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\}.\\
G_0^{\ell+2} &= \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G_0^{\ell}\mid\langle\boldsymbol{H}^{\ell+2},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\}.
\end{aligned}$$

よって階層のレベルが $\ell+1$ をスキップすることで、結局条件 (C) と (D) の元で式 (3.13) の包含関係が真部分集合になっていると仮定できる。即ち、$\ell = 2, 3, \ldots, m$ について、

$$\text{cone conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1} \supset \text{cone conv } G^{\ell} + \text{conv } G_0^{\ell}$$

であるが、補題 2.7 の (b) より、

$$(\text{cone conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1})^* \subset (\text{cone conv } G^{\ell} + \text{conv } G_0^{\ell})^*$$

なので、$\boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{C}^*$ から始まり、$\ell = 2$ 以降、各 $\boldsymbol{H}^\ell$ は $\boldsymbol{H}^{\ell-1}$ よりもより大きな範囲から選べることになる。

3.3.3 制約領域の関係

ここから一般の場合での制約領域の関係について議論する。制約条件が非同次式１本の場合について次の補題が成立する。

補題 3.3 (参照：Lemma 3.3, 3.4 of [3])**.** もし問題 (3.2) が条件 (A)' を満たしているとすると、

$$F^0 = \text{conv } G^0 + \text{conv } G_0^0$$

が成り立つ。

証明. 初めに、$F^0 \subseteq \text{conv } G^0 + \text{conv } G_0^0$ の包含関係を示すために、$\boldsymbol{X} \in F^0$ とすると、次のような $\boldsymbol{X}^i = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, r)$ と $r \in \mathbb{Z}$ が存在する。

$$\boldsymbol{X} = \sum_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{X}^\ell, \quad 1 = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{\ell=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^\ell \rangle$$

ここで、条件 (A) より

$$I_+ = \left\{ i : \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle > 0 \ \right\}, \ I_0 = \left\{ j : \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0 \ \right\},$$

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i \in I_+} \boldsymbol{X}^i, \ \lambda_i = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle, \ \boldsymbol{Y}^i = (1/\lambda_i) \boldsymbol{X}^i \in \mathbb{K} \ (i \in I_+),$$
$$\boldsymbol{Z} = \sum_{j \in I_0} \boldsymbol{X}^j, \ \mu_j = 1/|I_0|, \ \boldsymbol{Z}^j = (1/\mu_j) \boldsymbol{X}^j \in \mathbb{K} \ (j \in I_0),$$

と定義する。ここで $|I_0|$ は I_0 の要素の数とする。また証明の一般性を失わずに $\boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{0}$ と仮定できるので、I_0 は空ではないことを仮定できる。以上の定義より、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ であり、

$$\begin{aligned}
\lambda_i > 0 \quad (i \in I_+), \;\; 1 = \sum_{i \in I_+} \lambda_i, \;\; \boldsymbol{Y} = \sum_{i \in I_+} \lambda_i \boldsymbol{Y}^i, \\
\mu_j > 0 \quad (j \in I_0), \;\; 1 = \sum_{j \in I_0} \mu_j, \;\; \boldsymbol{Z} = \sum_{j \in I_0} \mu_j \boldsymbol{Z}^j,
\end{aligned}$$

なので、$\boldsymbol{Y}$ と $\boldsymbol{Z}$ はそれぞれ $\boldsymbol{Y}^i \in \mathbb{K}$ $(i \in I_+)$ と $\boldsymbol{Z}^j \in \mathbb{K}$ $(j \in I_0)$ の凸結合になっていることがわかる。 $\boldsymbol{Y}^i,\ \boldsymbol{Z}^i \in \mathbb{K}$ なので $\boldsymbol{Y}^i = \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T,\ \boldsymbol{Z}^j = \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T$ とおく。ここで $\boldsymbol{y}_i, \in \mathbb{R}^n_+$ $(i \in I_+)$、また $\boldsymbol{z}_j \in \mathbb{R}^n_+$ $(j \in I_0)$ である。次に、

$$\begin{aligned}
1 = \langle \boldsymbol{H}^0, (1/\lambda_i)\boldsymbol{X}^i \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle \;\; (i \in I_+), \\
0 = \langle \boldsymbol{H}^0, (1/\mu_j)\boldsymbol{X}^j \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}^j \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle \;\; (j \in I_0)
\end{aligned}$$

であることがわかるので、結局 $\boldsymbol{Y}^i \in G^0$ $(i \in I_+)$ と $\boldsymbol{Z}^j \in G^0_0$ $(j \in I_0)$ が示された。よって、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} = \sum_{i \in I_+} \lambda_i \boldsymbol{Y}^i + \sum_{j \in I_0} \mu_j \boldsymbol{Z}^j \in \text{conv } G^0 + \text{conv } G^0_0$ となり、$F^0 \subseteq \text{conv } G^0 + \text{conv } G^0_0$ がわかる。

次に、逆の包含関係を示すために、$\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T \in \text{conv } G^0$、及び $\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T \in \text{conv } G^0_0$ として $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T$ とする。$\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T \in \text{conv } G^0$ なので、

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T \;=\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \; \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T, \;\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \; \lambda_i > 0, \; \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \in \mathbb{K}, \; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 1$$

と表すことができ、同様に $\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T$ は $\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T \in \text{conv } G^0_0$ なので、

$$\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T \;=\; \sum_{j=1}^{q} \mu_i \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T, \;\; \sum_{j=1}^{q} \mu_j = 1, \; \mu_j > 0, \; \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \in \mathbb{K}, \; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = 0$$

と表される。完全正値錐 $\mathbb{C}$ の定義から $\text{conv } \mathbb{K} = \mathbb{C}$ は錐で、$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \; \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \in \text{conv } \mathbb{K} = \mathbb{C}$、また $\sum_{j=1}^{q} \mu_i \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \in \text{conv } \mathbb{K} = \mathbb{C}$ なので、結局 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \; \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T + \sum_{j=1}^{q} \mu_i \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \in \text{conv}\mathbb{K} = \mathbb{C}$ が言える。また、

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}^j \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + 0 = 1$$

となるので、以上より $\boldsymbol{X} \in F^0$ であることが示せた。よって $F^0 = \text{conv } G^0 + \text{conv } G^0_0$ が成り立つ。 $\square$

次に問題 (3.2) の制約領域が階層的共正値条件 (C) 及び (D) を満たす場合について議論する。

補題 3.4 (参照：Lemma 3.3, 3.4 of [3])**.** 問題 (3.2) が条件 (A)'、(C) 及び (D) を満たしているとすると、

$$F^\ell = \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell \ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$$

が成り立つ。

証明. $\ell = 0, 1, \ldots, m$ に関する数学的帰納法を適用して証明する。まず補題 3.3 によって $\ell = 0$ の場合は証明されている。そこで次に、$F^{\ell-1} = \text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ が成り立っていると仮定して、$F^\ell = \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell$ を証明する。まず、$F^\ell \subseteq \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell$ を示すために、$\boldsymbol{X} \in F^\ell$ とする。帰納法の仮定から、$F^\ell \subseteq F^{\ell-1} = \text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ なので、$\boldsymbol{X} \in \text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ である。そこで、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ とした時、次のような $\boldsymbol{Y} \in \text{conv } G^{\ell-1} \subset \mathbb{S}^n$ と $p \in \mathbb{Z}$ 存在する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y} &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T, \ \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \ \ \lambda_i > 0, \ \ \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \in \mathbb{K}, \\ & \quad \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, \ell - 1).\end{aligned}$$

また同様に、次のような $\boldsymbol{Z} \in \text{conv } G_0^{\ell-1} \subset \mathbb{S}^n$ と $q \in \mathbb{Z}$ 存在する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T, \ \ \sum_{ij=1}^{q} \lambda_j = 1, \ \ \lambda_j > 0, \ \ \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \in \mathbb{K}, \\ & \quad \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, \ell - 1).\end{aligned}$$

条件 (C) と (D) が満たされていることから、

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle &\geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle &\geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, q)\end{aligned}$$

が成り立っているが、一方、$\boldsymbol{X} \in F^\ell$ なので

$$0 = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle$$

が成り立っている。$\lambda_i > 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, p)$ なので結局、

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle &= 0 \ (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle &= 0 \ (j = 1, 2, \ldots, q)\end{aligned}$$

が成立つ。このことから $\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T = \boldsymbol{Y} \in \text{conv } G^\ell$ と $\sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T = \boldsymbol{Z} \in \text{conv } G_0^\ell$ であるので $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \in \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell$ となる。以上から $F^\ell \subseteq \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell$ が示された。

次に、逆の包含関係 $F^\ell \supseteq \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell$ を示すために、今 $\boldsymbol{Y} \in \text{conv } G^\ell,\ \boldsymbol{Z} \in \text{conv } G_0^\ell$ とした時 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ とする。この時、$\boldsymbol{Y}$ と $\boldsymbol{Z}$ はそれぞれ、ある $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \in \mathbb{K}, \\
&\quad \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, \ell), \\
\boldsymbol{Z} &= \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T,\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1,\ \lambda_j > 0,\ \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \in \mathbb{K}, \\
&\quad \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, \ell)
\end{aligned}
$$

と表すことが出来る。$\mathbb{K}$ は錐なので $\lambda_i \boldsymbol{Y}^i,\ \mu_j \boldsymbol{Z}^j \in \mathbb{K}\ (i = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, q)$ である。よって $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T + \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \in \text{conv } \mathbb{K}$ である。また、

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + 0 = 1, \\
\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{z}_j \boldsymbol{z}_j^T \rangle = 0\quad (k = 1, 2, \ldots, \ell)
\end{aligned}
$$

が成り立つので $\boldsymbol{X} \in F^\ell$ である。よって数学的帰納法を $\ell = 0, 1, \ldots, m$ に適用することで、$F^\ell = \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell\ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$ が成り立つ。 □

補題 3.4 と補題 3.2 から次の補題が成り立つ。

補題 3.5 (参照：Lemma 3.3, 3.4 of [3])**.** 条件 (C) かつ (D) と、条件 (C)' は同値である。

証明. まず補題 3.2 の (ii) より条件 (C) かつ (D) を満たせば、$\boldsymbol{X} \in \text{conv } G^{\ell-1} + \text{conv } G_0^{\ell-1}$ について、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成り立つ。また補題 3.4 より条件 (C) かつ (D) を満たせば、$F^\ell = \text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell\ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$ なので、結局 $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}$ について、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成り立つ。よって条件 (C) かつ (D) を満たせば (C)' を満たしている。

逆に、条件 (C)' が成り立っているとする。補題 3.4 証明の後半部分から、$\text{conv } G^\ell + \text{conv } G_0^\ell \subseteq F^\ell\ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$ であるので、補題 3.2 の (ii) が成り立っていることが

わかる。補題 3.2 から (ii) と (i) は同値なので、結局条件 (C)' ならば条件 (C) と条件 (D) が成り立っている。よって、条件 (C) かつ (D) と、条件 (C)' は同値である。 □

この補題から、条件 (C) と条件 (D) の 2 つの条件は、条件 (C)' の一つにまとめることができることがわかる。

また次の補題が成り立つ。

補題 3.6 (参照：Lemma 3.3 of [3])**.** 問題 (3.2) の制約領域について、

$$\text{cl conv } G \subseteq \text{conv } G + \text{conv } G_0$$

が成り立つ。

証明. 今 $\boldsymbol{X} \in \text{cl conv } G$ とすると cl conv G は閉集合なので $\boldsymbol{X}$ に収束する点列 $\{\boldsymbol{X}^s \in \text{conv } G \mid s = 1, 2, \dots\}$ が存在する。このことから

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}^s = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^s \boldsymbol{X}_i^s,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^s = 1,\ \lambda_i^s \geq 0\ (i = 1, 2, \dots, r), \boldsymbol{X}_i^s \in G\ (i = 1, 2, \dots, r), \\
&\boldsymbol{X}_i^s = \boldsymbol{x}_i^s (\boldsymbol{x}_i^s)^T,\ \boldsymbol{x}_i^s \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, X_i^s \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, X_i^s \rangle = 0 \\
&(k = 1, 2, \dots, m)\ \ (i = 1, 2, \dots, r)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる $\boldsymbol{X}_i^s \in G$、$\boldsymbol{x}_i^s \in \mathbb{K}$、$\lambda_i^s \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ が存在する。ここで、$(i = 1, 2, \dots, r, s = 1, 2, \dots)$ について、$\sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s(\sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s)^T$ も $\boldsymbol{X}^s - \sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s(\sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s)^T$ も共に半正定値であり $s \to \infty$ で $\boldsymbol{X}^s \to \boldsymbol{X}$ なので、点列

$$\left\{ \left(\sqrt{\lambda_1^s}\boldsymbol{x}_1^s, \sqrt{\lambda_2^s}\boldsymbol{x}_2^s, \dots, \sqrt{\lambda_r^s}\boldsymbol{x}_r^s \right) \mid s = 1, 2, \dots \right\}$$

は有界である。また $\{(\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_r^s) \mid s = 1, 2, \dots\}$ も有界になる。よって一般性を失わずに、$s \to \infty$ の時、ある $(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \dots, \boldsymbol{d}_r)$ と $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ が

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\lambda_1^s}\boldsymbol{x}_1^s, \sqrt{\lambda_2^s}\boldsymbol{x}_2^s, \dots, \sqrt{\lambda_r^s}\boldsymbol{x}_r^s \right) &\to (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \dots, \boldsymbol{d}_r) \\
(\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_r^s) &\to (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)
\end{aligned}$$

を満たすと仮定できる。そこで

$$I_{\text{bd}} = \left\{ i \;\middle|\; \sup_s \|\boldsymbol{x}_i^s\| < \infty \right\} \text{ また } I_\infty = \left\{ j \;\middle|\; \sup_s \|\boldsymbol{x}_j^s\| = \infty \right\}$$

とすると、

$$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{K}\ (i \in I_{\text{bd}}) \text{ について、 } \boldsymbol{x}_i^s \to \boldsymbol{x}_i \text{ かつ } \|\boldsymbol{x}_j^s\| \to \infty,\ \lambda_j^s \to 0\ (j \in I_\infty)$$

となる点列 $\{(\boldsymbol{x}_1^s, \boldsymbol{x}_2^s, \dots, \boldsymbol{x}_r^s)\}$ を取ることができる。ここで、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^s &= \sum_{i\in I_{\rm bd}} \lambda_i^s \boldsymbol{x}_i^s (\boldsymbol{x}_i^s)^T + \sum_{j\in I_\infty} (\sqrt{\lambda_j^s}\boldsymbol{x}_j^s)(\sqrt{\lambda_j^s}\boldsymbol{x}_j^s)^T, \\
1 &= \sum_{i\in I_{\rm bd}} \lambda_i^s + \sum_{j\in I_\infty} \lambda_j^s,\ \lambda_i^s \geq 0\ (i \in I_{\rm bd}),\ \boldsymbol{x}_i^s \in \mathbb{K}\ (i\in I_{\rm bd}),\ \sqrt{\lambda_j^s}\boldsymbol{x}_j^s \in \mathbb{K}\ (j \in I_\infty), \\
1 &= \langle \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{X}_i^s\rangle = \langle \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{x}_i^s(\boldsymbol{x}_i^s)^T\rangle\ (i \in I_{\rm bd}), \\
\lambda_i^s &= \lambda_i^s \langle \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{x}_i^s(\boldsymbol{x}_i^s)^T\rangle = \langle \boldsymbol{H}_0, \sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s \left(\sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s\right)^T\rangle\ (i \in I_\infty), \\
0 &= \langle \boldsymbol{H}_k, \boldsymbol{X}_i^s\rangle = \langle \boldsymbol{H}_k, \boldsymbol{x}_i^s(\boldsymbol{x}_i^s)^T\rangle\ (k = 1,2,\dots,\ell)\ (i\in I_{\rm bd}), \\
0 &= \lambda_i^s\langle \boldsymbol{H}_k, \boldsymbol{X}_i^s\rangle = \langle \boldsymbol{H}_k, \sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s \left(\sqrt{\lambda_i^s}\boldsymbol{x}_i^s\right)^T\rangle\ (k = 1,2,\dots,\ell)\ (i \in I_\infty)
\end{aligned}$$

なので、結局この点列の収束先に対して、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \sum_{i\in I_{\rm bd}} \lambda_i \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{x}_i)^T + \sum_{j\in I_\infty} \boldsymbol{d}_j\boldsymbol{d}_j^T, \\
1 &= \sum_{i\in I_{\rm bd}} \lambda_i,\ \lambda_i \geq 0\ (i\in I_{\rm bd}),\ \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{K}\ (i \in I_{\rm bd}),\ \boldsymbol{d}_j \in \mathbb{K}\ (j\in I_\infty), \\
1 &= \langle \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle\ (i\in I_{\rm bd}),\ 0 = \langle \boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{d}_j\boldsymbol{d}_j^T\rangle\ (j\in I_\infty), \\
0 &= \langle \boldsymbol{H}_k, \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\rangle\ (i\in I_{\rm bd}),\ 0 = \langle \boldsymbol{H}_k, \boldsymbol{d}_j\boldsymbol{d}_j^T\rangle\ (j \in I_\infty),\ (k=1,2,\dots,\ell)
\end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{X} \in \text{conv } G + \text{conv } G_0$ なので、$\text{cl conv } G \subseteq \text{conv } G + \text{conv } G_0$ が示された。 □

3.3.4 漸近的無限方向

次にこの一般的なケースで最終的に問題 (3.2) と問題 (3.4) の最適値が一致する条件を示すために、追加の条件について説明する。このケースでは制約領域が有界ではない場合があり得る。今、集合 G に対して、もし点列

$$\left\{(\mu^s, \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{u}^s)^T) \in \mathbb{R}_+ \times \boldsymbol{G} \mid s = 1,2,\dots\right\}$$

が存在して、$s \to \infty$ の時に $\|\boldsymbol{u}^s\| \to \infty$ かつ $(\sqrt{\mu^s}, \sqrt{\mu^s}\boldsymbol{u}^s) \to (0, \boldsymbol{d})$ (または同値であるが $(\mu^s, \mu^s\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{u}^s)^T) \to (0, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T)$) が成り立つ時、この $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T$ を G の漸近的無限方向と呼ぶ。

最終的に 2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (3.4) の最適値が一致する条件として、次の条件 (E) を追加する。

(E) 全ての $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \neq 0 \in G_0$ が G の漸近的無限方向である。

もし $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in \mathbb{C}$ が G の漸近的無限方向ならば $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G_0$ であるが、一般的には逆は真であるとは限らない。

3.3.5 漸近的無限方向の具体例

次の 5x5 行列は共正値行列であるが、半正定値行列と非負行列の和では表せない行列として知られている ([15] 及び [24] 参照)。

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

実際、この行列の 2 次形式は次の様に表すことが出来るが、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 + 4x_2x_5 + 4x_1(x_4 - x_5) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5)^2 + 4x_2x_4 + 4x_3(x_5 - x_4) \end{aligned}$$

と表すことができて、$x_4 \geq x_5$ ならば最初の式は非負であり、逆に $x_4 \leq x_5$ ならば最後の式が非負になり、結局 $\boldsymbol{x} \geq 0$ の時、常に非負であることがわかる。

この行列を使って、$\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G_0$ が G_0 の漸近的無限方向の場合とそうではない 2 次制約領域が作れる例について説明する。この $\boldsymbol{M}$ を使って $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5_+$ の次の式を満たす集合 G を考える。

$$x_1 = 1,\ \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ 2x_4 + x_5 \leq 3. \tag{3.15}$$

また、これと同値な表現として、不等式に対してスラック変数 $x_6 \geq 0$ を追加して等号化すると

$$x_1 = 1, \tag{3.16}$$
$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 + 4x_2x_5 + 4x_1(x_4 - x_5) = 0, \tag{3.17}$$
$$3x_1 - 2x_4 - x_5 - x_6 = 0 \tag{3.18}$$

とも表すことが出来る。ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,0,0,0,0,0) \in \mathbb{R}^6_+,\ \boldsymbol{a} = (3,0,0,-2,-1,-1) \in \mathbb{R}^6, \\ \boldsymbol{H}^0 &= \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^T \in \mathbb{S}^6_+,\ \boldsymbol{H}^1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^*,\ \boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T \in \mathbb{S}^6_+ \end{aligned}$$

と置くと、これらの制約式は、

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6_+,\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0$$

と書ける。そこで、これらの $\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{H}^2$ を使って制約領域 G を

$$G = \left\{ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K} : \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6_+ \right\}$$

とすると、$\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{H}^2 \in \mathbb{C}^*$ なので条件 (A)' と (C) を満たしている。そこでこの G が条件 (E) を満たしてるかを確認するために、$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G_0$ とすると、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ は、まず $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1$ なので $x_1 = 0$ である。そのため式 (3.18) より $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ となる。最後に式 (3.17) より $x_2 = x_3$ なので、結局 $\boldsymbol{d}$ は一方向のみの $\boldsymbol{d} = \delta(0, 1, 1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6_+$ for some $\delta > 0$ であることがわかる。 ここで全ての $\nu \geq 0$ に対して $\boldsymbol{x}(\nu) = (1, 1 + \sqrt{\nu}\delta, \sqrt{\nu}\delta, 0, 0, 3) \in \mathbb{R}^6_+$ とすると、$\boldsymbol{x}(\nu) \in \mathbb{R}^6_+$ は式 (3.16) と式 (3.18) は明らかに満たしている。式 (3.17) の左辺は $(1 - (1 + \sqrt{\nu}\delta) + \sqrt{\nu}\delta)^2$ なので式 (3.17) も満たされていることから、結局 $\boldsymbol{x}(\nu)\boldsymbol{x}(\nu)^T \in G$ であることがわかる。そこで $\nu \to \infty$ とすると、$(1/\sqrt{\nu}, \boldsymbol{x}(\nu)/\sqrt{\nu}) \to (0, \boldsymbol{d})$ なので、$\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T$ は G の漸近的無限方向であることがわかる。即ち、このケースの制約領域 G ではその漸近的無限方向が対応する G_0 に含まれる、特にこのケースでは G の漸近的無限方向集合が G_0 に一致するケースになっている。

今、(3.15) の代わりに同じ $\boldsymbol{M}$ を使い $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5_+$ で次の制約条件の場合の G を考える。

$$x_1 = 1,\ \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ \ x_5 \leq 3.$$

即ち (3.15) の最後の不等式 $2x_4 + x_5 \leq 3$ を不等式 $x_5 \leq 3$ に変更しただけである。そこで不等式 (3.18) を同様に

$$3x_1 - x_5 - x_6 = 0 \tag{3.19}$$

に置き換えて、また元の $\boldsymbol{a} = (3, 0, 0, -2, -1, -1) \in \mathbb{R}^6$ を $\boldsymbol{a} = (3, 0, 0, 0, -1, -1) \in \mathbb{R}^6$ に入れ替える。前述と同様に、$\boldsymbol{d} = (0, 0, 1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^6_+$ とすると明らかに式 (3.16)、式 (3.17) 及び式 (3.19) を満たしているので $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G_0$ である。さらに前述と同様に漸近的無限方向の議論が出来るのでこの制約下でも $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G_0$ は G の漸近的無限方向であることがわかる。

次に別の $\boldsymbol{d} = (0, 0, 1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^6_+$ について考える。この $\boldsymbol{d}$ も明らかに式 (3.16)、式 (3.17) 及び式 (3.19) を満たしているので $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G_0$ である。ところが実はこの $\boldsymbol{d}$ は G の漸近的無限方向ではないことがわかる。そのことを示すために背理法を用いる。即ち、$s \to \infty$ の時、$\|\boldsymbol{u}^s\| \to \infty$ かつ $(\sqrt{\mu^s}, \sqrt{\mu^s}\boldsymbol{u}^s) \to (0, \boldsymbol{d})$、となる数列 $\left\{(\mu^s, \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{u}^s)^T) \in \mathbb{R}_+ \times G \mid s = 1, 2, \dots \right\}$ が存在すると仮定する。ところが $\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{u}^s)^T \in G$ であることから、$u^s_1 = 1$ かつ $u^s_4 = u^s_5$ である。これは $d_4 = d_5$ を意味するが、この

ことは $d_4 = 1, d_5 = 0$ に反する。よって $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T$ は G の漸近的無限方向ではないということである。この制約領域 G の場合は G の漸近的無限方向ではない要素を G_0 が含んでいるケースになっている。

3.3.6 最適値一致条件

この条件 (E) を使って次の補題が成り立つ。

補題 3.7 (参照：Lemma 3.4 of [3])**.** もし問題 (3.2) が条件 (A)'、(C)、(D) 及び (E) を満たしているとすると、

$$\mathrm{cl\ conv}\ G \supseteq \mathrm{conv}\ G + \mathrm{conv}\ G_0$$

が成り立つ。

証明. 今 $\boldsymbol{Y} \in \mathrm{conv}\ G,\ \boldsymbol{D} \in \mathrm{conv}\ G_0$ として、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{D}$ とする。この時、$\boldsymbol{Y}$ と $\boldsymbol{Z}$ はそれぞれ、ある $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \in \mathbb{K}, \\
& \quad \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m), \\
\boldsymbol{D} &= \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{d}_j^T,\ \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{d}_j^T \in \mathbb{K}, \\
& \quad \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{d}_j^T \rangle = 0\ (k = 0, 1, \ldots, m)
\end{aligned}$$

となる $\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T\ (i = 1, \ldots, p)$ また $\boldsymbol{d}_j \boldsymbol{d}_j^T\ (j = 1, \ldots, q)$ が存在する。また、条件 (E) が成り立っているので、$\mu \to \infty$ の時に $\|\boldsymbol{u}^s\| \to \infty$ かつ $(\sqrt{\mu^s}, \sqrt{\mu^s}\boldsymbol{u}^s) \to (0, \boldsymbol{d})$ となる数列、

$$\left\{ (\mu^s, \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{u}^s)^T) \in \mathbb{R}_+ \times \boldsymbol{G} \mid s = 1, 2, \ldots \right\}$$

が存在する。ここで全ての $s = 1, 2, \ldots,$ に対して、

$$\begin{aligned}
\gamma^s &= 1 + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^s,\ \lambda_i^s = \lambda_i / \gamma^s\ (i = 1, 2, \ldots, r),\ \nu_j^s = \mu_j^s / \gamma^s\ (j = 1, 2, \ldots, q), \\
\boldsymbol{X}^s &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^s \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T + \sum_{j=1}^{q} \nu_j^s \boldsymbol{u}_j^s (\boldsymbol{u}_j^s)^T
\end{aligned}$$

とすると、$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \gamma^s > 0$ なので、

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^s + \sum_{j=1}^{q} \nu_j^s = (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^s)/\gamma^s = (1 + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^s)/\gamma^s = 1,$$
$$\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_i^T \in \widetilde{G}_p\ (i = 1, 2, \ldots, r),\ \boldsymbol{u}_j^s (\boldsymbol{u}_j^s)^T \in G\ (j = 1, 2, \ldots, q)$$

が成り立ち $\lambda_i^s \geq 0,\ \nu_j^s \geq 0$ なので、結果 $\boldsymbol{X}^s \in G$ であることがわかる。さらに、$s \to \infty$ の時に、

$$\gamma^s \to 1,\ \lambda_i^s \to \lambda_i\ (i = 1, 2, \ldots .r),\ \nu_j^s \to 0\ (j = 1, 2, \ldots, q),$$
$$\nu_j^s \boldsymbol{u}_j^s (\boldsymbol{u}_j^s)^T \to \boldsymbol{d}_j \boldsymbol{d}_j^T,\ \mathrm{conv}\ \widetilde{G}_p \ni \boldsymbol{X}^s \to \boldsymbol{X}$$

となるので、$\boldsymbol{X} \in G$ がわかり、$\mathrm{conv}\ G \supseteq \mathrm{conv}\ G + \mathrm{conv}\ G_0$ が示せた。 □

以上をまとめると次の定理が成り立つ。

定理 3.2 (参照：Theolem 3.5 of [3])**.** もし問題 (3.2) が条件 (A)'、(C)、(D) 及び (E) を満たしているとすると、2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) の制約領域 G と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (3.4) の制約領域 F について

$$F \ = \ \mathrm{cl}\ \mathrm{conv}\ G$$

が成り立ち、2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) の最適値 $\inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle : \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G \right\}$ と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (3.4) の最適値 $\inf \{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle : \boldsymbol{X} \in F \}$ は一致する。

証明. 条件 (A)' と (C) を満たす時、補題 3.4 と補題 3.6 より、

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{conv}\ G + \mathrm{conv}\ G_0 \\ &\supseteq \mathrm{cl}\ \mathrm{conv}\ G \end{aligned}$$

が成り立ち、さらに条件 (D) と (E) を満たす時、補題 3.7 より、

$$\mathrm{conv}\ G + \mathrm{conv}\ G_0 \ \subseteq\ \mathrm{cl}\ \mathrm{conv}\ G$$

が成り立つので、結局

$$F \ = \ \mathrm{conv}\ G + \mathrm{conv}\ G_0 \ = \mathrm{cl}\ \mathrm{conv}\ G$$

が成り立つことがわかる。

またこのことから、2 つの問題の制約領域について $F \ = \ \mathrm{cl}\ \mathrm{conv}\ G$ であり、目的関数は同じ線形関数なので 2 つの問題は同じ最適値を持つ。

□

次に、なぜ条件 (E) が必要かについて簡単な 2 次最適化問題の例で説明する。今 2 次最適化問題 (3.2) の具体例 (a) として、

$$n=2,\ m=1,\ \boldsymbol{H}_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{S}^2_+,\ \boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^*$$

を考える。そして定義 3.2 に従って G、及び定義 3.4 に従って G_0 を定義すると、

$$\begin{aligned}G &= \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ x_1^2=1,\ x_1x_2=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\},\\ G_0 &= \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ x_1^2=0,\ x_1x_2=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & x_2^2\end{bmatrix}: x_2\geq 0\right\}\end{aligned}$$

である。よって cl conv $G=\{(1,0)\}\neq\{(1,x_2):x_2\geq 0\}=$ conv $G+$ conv G_0^1 であり、G は有界閉凸集合であるにもかかわらず、conv $G+$conv $G_0\neq$ cl conv G であることを示している。これは、G_0 はゼロではない $\boldsymbol{x}=(0,1)$ での $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ を含むが G は有界なので、この単純な例は条件 (E) を満たしていないからである。

これに対して、次の例 (b) を考える。

$$n=2,\ m=0,\ \boldsymbol{H}_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^*.$$

この時、

$$\begin{aligned}G &= \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ x_1x_2=1\right\},\\ G^\infty &= \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T : \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ x_1x_2=0\right\}\end{aligned}$$

であるので、この例では $G^\infty=G_0$ となり条件 (E) を満たしており、$F=$ conv $G+$ conv $G_0=$ cl conv G なので最適値は一致する。

3.4 非負条件の拡張

ここまでは緩和問題の凸錐として $\mathbb{C}=$ conv $\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+\}$ を前提に議論してきた。この条件の $\mathbb{R}^n_+$ を任意の閉集合である錐 $\mathbb{K}$ に変更した、2.1 章で説明した錐

$$\mathbb{C}_{\mathbb{K}}=\text{conv}\ \{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_j^T,\ \boldsymbol{x}_j\in\mathbb{K}\}$$

を使っても、今までの各証明の議論に影響を与えないことがわかる。即ち 2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) を

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & \langle\boldsymbol{Q},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle\\ \text{sub. to} & \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=1,\\ & \langle\boldsymbol{H}^k,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\ (k=1,2,.,m),\\ & \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}\end{array}\tag{3.20}$$

として、その緩和問題の完全正値最適化問題を、

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\
\text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\
& \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, ., m), \\
& \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}_{\mathbb{K}}
\end{array}
\tag{3.21}
$$

と拡張して置き換えても今までの議論の結果を適用できるということである。さらに $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}$ という条件を錐ではなく、任意の閉集合（凸とは限らない）$D \subseteq \mathbb{R}^n$ に置き換えた条件下での一般的な 2 次制約 2 次最適化問題の場合についても議論できることを 5 章で記述する。

3.5　図による説明

今までのいくつかの議論で図で例示できるものについて説明する。今錐をそれぞれ

$$
\begin{array}{lll}
\mathbb{K} & = & \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+\}, \\
\mathbb{C} & = & \text{conv } \mathbb{K}
\end{array}
$$

とする。まず $\mathbb{S}^2$（３次元）では錐 $\mathbb{K}$ は図 1 のような曲面になる。

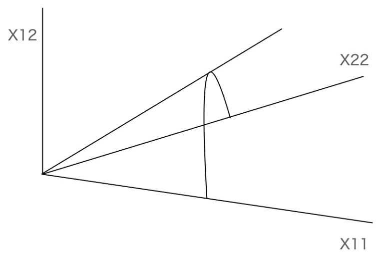

図 1: 錐 $\mathbb{K}$

今 $\boldsymbol{H}^0$ が強共正値の場合を考える。このとき完全正値緩和問題の制約領域
$F = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}\}$ は下図 2 のブルーの部分で、その上の点（星印）は $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の上の点であり、また錐 $\mathbb{K}$ 上の適当な 2 点の凸結合として表わされる。

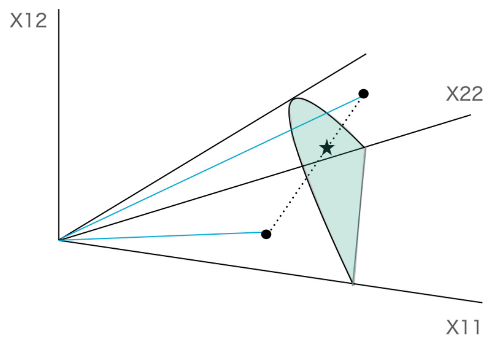

図 2: 制約領域 F

それに対して、元の問題の凸包 conv $G = \text{conv}\ \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}\}$ は、図 3 のように、錐 $\mathbb{K}$ と $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の平面の共通部分である赤い弧上の 2 点の凸結合で表される。

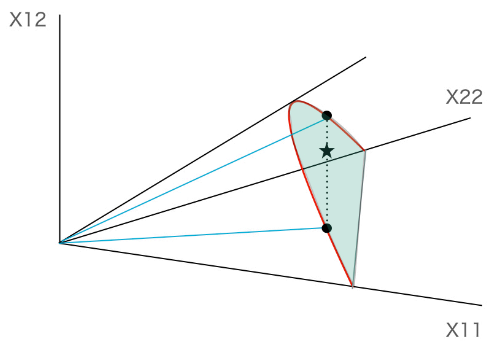

図 3: G の凸包

これが図 2 の凸結合の 2 点の長さを調整することで図 3 のように表せるので、$\boldsymbol{X} \in F \Rightarrow \boldsymbol{X} \in \text{conv}\ G$ となり、$F = \text{conv}\ G$ であることを示せる。

これに対して、$\boldsymbol{H}^0$ が共正値であるが強共正値ではない場合は、完全正値緩和問題の制約領域 F は下図 4 のグリーンの部分になり非有界になっている。グレーの部分がこの場合の集合 conv G_0 である。F の点（星印）は、錐 $\mathbb{K}$ と $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の平面

の共通部分である弧上の点と、conv G_0 上の点の和になっていることがわかる。即ち $F = \text{conv } G + \text{conv } G_0$ が成り立っている。

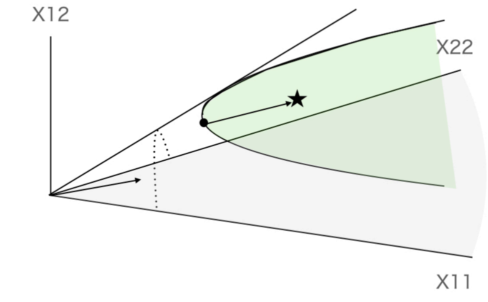

図 4: 制約領域 F

次に、3.3.6 の節の最後で説明した、漸近的無限方向の条件 (E) の具体例 (a) と (b) を図示する。図 5 が具体例 (a) の場合で、星印が元の 1 点からなる制約領域なので $G^\infty = \{\mathbf{0}\}$ だが、G_0 はグリーンの線分なので $G^\infty \neq G_0$、よって $F \neq \text{conv } G$ である。

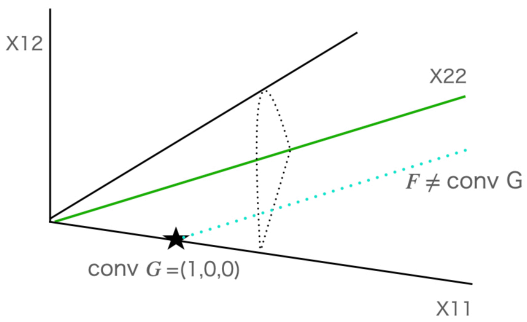

図 5: 条件 (E) 不成立例 (a)

図 6 が具体例 (b) の場合で、赤の曲線が元の問題の制約領域 G で、G^∞ は極限で結局 2 本のグリーンの線分である。一方 G_0 もグリーンの線分なので、結局 $G^\infty = G_0$ となり、$F = \text{conv } G + \text{conv } G_0 = \text{cl conv } G$ である。

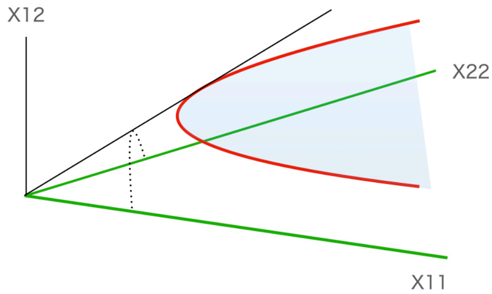

図 6: 条件 (E) 成立例 (b)

3.6 この章のまとめ

今までの議論をまとめるために、議論で出た条件について今一度記述する。

(A) $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*_{++}$：強共正値条件

(A)' $\boldsymbol{H}_0 \in \mathbb{C}^*$：共正値条件

(B) $\boldsymbol{H}^k \in \mathbb{C}^*$ $(k = 1, \ldots, m)$：共正値条件

(C) 全ての l=1,2,. . . ,m に対して

$$\langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G^{l-1}$$

(D) 全ての l=1,2,. . . ,m に対して

$$\langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in G_0^{l-1}$$

(C)' 全ての $l = 1, \ldots, m$ に対して

$$\langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \text{ for all } \boldsymbol{X} \in F^{l-1}$$

(E) 全ての $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \neq 0 \in G_0$ が G の漸近的無限方向である。

条件 (A) が成立つ時は $G_0 = \{\mathbf{0}\}$ であり、また条件 (A) を満たせば条件 (A)' が成り立つ。また条件 (B) を満たせば (C) が成り立つ。これらのことと、補題 3.5 で示された条件 (C)、(D) と条件 (C)' は同値であることから、最終的に以下の定理が成立する。

(定理 3.1)(参照：Lemma 2.1 of [3]).
条件 (A) が成り立つときは、条件 (C) または (C)' が成り立てば、2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (3.4) の最適値は一致する。

(定理 3.2)(参照：Theolem 3.5 of [3]).
条件 (A)' が成り立つときは、条件 (C) と (D)、または (C)' が成り立って、かつ条件 (E) が成り立てば 2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (3.4) の最適値は一致する。

4　0-1 混合線形制約２次最適化問題

この章では、一部の変数が 0-1 条件である線形制約上で目的関数が 2 次関数の最適化問題と、その緩和問題としての完全正値最適化問題について考察する。この問題の先行研究として 2009 年に発表された Burrer [16] の論文がある。この Burrer の論文では、元の問題として下記の問題を扱っている。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i \ i = 1,\dots,m \\ & \boldsymbol{x} \geq 0,\ x_j \in \{0,1\}\ j \in B. \end{array}$$

ここで、$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{Q} \in \mathbb{S}^n$ で、$B \subseteq \{1,\dots,n\},\ b_i \in \mathbb{R}$ である。これに対して、その完全正値最適化緩和問題として基本的に次のモデルを議論している。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i \ i = 1,\dots,m \\ & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}_i = b_i^2 \ i = 1,\dots,m \\ & x_j = Xjj \ \ j \in B \\ & \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^T \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}. \end{array}$$

ここで $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n,\ \mathbb{C} \in \mathbb{S}^{n+1}$ である。そしてこれらの 2 つの最適化問題の最適値は必ず一致すること、緩和問題の最適解は元の問題の最適解の凸包に含まれていることを証明している。Burrer はこの他にもいくつか似た形の同値な緩和問題の定式化を提案している。

それに対して、この章で提案する緩和問題としての完全正値最適化問題は、３本もしくは２本の制約式しかない単純な定式化になっており、対称行列空間の中だけで議論している。今 $\boldsymbol{A}$ を $m \times (n-1)$ 行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$ で $r \leq n-1$ とした時、次の問題がこの章で扱う元の問題で、基本的に Burrer の問題と同値である。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}_+,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},\ u_i \in \{0,1\}\ \ (i = 1,2,\dots,r). \end{array} \tag{4.1}$$

この問題の 0-1 変数条件は連続変数の条件として、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}_+,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},\ u_i(1-u_i) = 0\ (i = 1,2,\dots,r) \end{array} \tag{4.2}$$

の様に書き換えられる。もし $\boldsymbol{Q}^0 = \boldsymbol{O}$ ならばこの問題 (4.2) は標準的な 0-1 混合線形計画問題になる。

この章ではまず元の問題から、階層が 2 つ、すなわち $\ell = 2$ の階層的共正値条件を満たす 2 次制約 2 次最適化問題を導出し、その緩和問題としての完全正値最適化問題を定式化する。そしてこの問題 (4.2) が 3 章で示した階層的共正値条件と漸近的無限方向の 2 つの条件を満たすことを証明して、元の問題と緩和問題の最適解が一致することを示す。

次に元の問題を $u_i(1-u_i)=0$ の制約式の替わりに相補性条件を使って階層が 1 つ、すなわち $\ell = 1$ の階層的共正値条件での完全正値最適化問題を定式化する。これによって制約式が 2 本の最適化問題になる。そしてこの緩和問題の双対問題を考え、さらにこの主双対問題のラグランジュ緩和問題を導出する。最後にラグランジュ定数を大きくしていくことによって、これらのラグランジュ緩和問題の最適値は元の問題の最適値に収束することを証明する。

4.1 最適値一致の証明

ここでは 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題を変換した 2 次制約 2 次最適化問題 (4.2) の最適値と、その緩和問題としての完全正値最適化問題の最適値が一致することを証明する。

4.1.1 階層が 2 つの 2 次最適化問題

2 次最適化問題 (4.2) を階層的共正値条件の階層のレベルが $\ell = 2$ の 2 次制約式を持つ問題に変換する。まず u_i の 0-1 条件式である $u_i(1-u_i)=0$ を、階層のレベルが $\ell = 2$ の階層的共正値条件を満たす 2 次形式の 2 次制約に変換する方法について説明する。

$$\{u_i \mid u_i \in \{0,1\}\} = \{u_i \mid u_i(1-u_i)=0\}.$$

この制約式は 2 次形式ではないので新たに変数 u_0 を導入して同値な集合

$$\left\{u_i \mid u_0^2 = 1,\ u_i(u_0-u_i)=0,\ \boldsymbol{u} \geq 0\right\}$$

に書き換えられる。しかし $u_1(u_0-u_1) \geq 0$ for all $u_0^2=1,\ \boldsymbol{u} \geq 0$ ではないのでこの制約条件だけでは階層的共正値条件を満たさない。そこで $u_i \leq 1$ の条件を追加するためにスラック変数 u_{i+r} を導入して同値な集合

$$\left\{u_i \mid u_0^2 = 1,\ u_i + u_{i+r} = u_0,\ u_i(u_0-u_i)=0,\ \boldsymbol{u} \geq 0\right\}$$

に書き換える。そして制約式を 2 次形式に変換すると

$$\left\{u_i \mid u_0^2 = 1,\ (u_i + u_{i+r} - u_0)^2 = 0,\ u_i(u_0-u_i)=0,\ \boldsymbol{u} \geq 0\right\}$$

となる。ここで

$$u_i(u_0 - u_i) \geq 0 \quad \text{for all} \quad \boldsymbol{u} \in \left\{ u_i \mid u_0^2 = 1,\ (u_i + u_{i+r} - u_0)^2 = 0,\ \boldsymbol{u} \geq 0 \right\},$$
$$u_i(u_0 - u_i) \geq 0 \quad \text{for all} \quad \boldsymbol{u} \in \left\{ u_i \mid u_0^2 = 0,\ (u_i + u_{i+r} - u_0)^2 = 0,\ \boldsymbol{u} \geq 0 \right\}$$

が成立つので、3 章で示した、階層のレベルが $\ell = 2$ の階層的共正値条件 (C) と (D) を満たす。これを行列表現すると、$\boldsymbol{u} = (u_0, u_i, u_{i+r}) \in \mathbb{R}^3$ として、

$$\boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると、u_i の 0-1 条件は

$$\left\{ \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{u} = 1,\ \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{H}^1 \boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{H}^2 \boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{u} \geq 0 \right\}$$

と表され、$\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{C}^*$ で $\boldsymbol{H}^2 \notin \mathbb{C}^*$ であるが階層が 2 つの階層的共正値条件 (C) と (D) を満たす事になる。

この議論を元の問題全体に適用する。一般性を失わずに、u_{i+r} は不等式 $u_i \leq 1$ のスラック変数として制約式 $u_i + u_{i+r} - 1 = 0$ が等号制約式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ に含まれていると仮定できる。具体的には、今 $\boldsymbol{I}$ を $r \times r$ 単位行列、$\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^r$ を要素が全て 1 のベクトルとして、

$$\boldsymbol{A} \ = \ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ -\boldsymbol{e} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

と書くことが出来る。ここで新たに変数 u_0 を追加して問題 (4.2) を次のように書き換える。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{Q}^0 \boldsymbol{u} + 2u_0 \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & (u_0, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n_+,\ u_0 = 1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}u_0 = \boldsymbol{0}, \\ & u_i(u_0 - u_i) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, r). \end{array} \tag{4.4}$$

前述したように制約式 $u_i + u_{i+r} - 1 = 0$ が等号制約式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ に含まれているので、$0 \leq u_i \leq u_0$ であり、$u_i(u_0 - u_i) \geq 0\ (1, 2, \ldots, r)$ が成り立っている。よってこの r 本の等式制約 $u_i(u_0 - u_i) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, r)$ を、1 本の等式制約 $\sum_{i=1}^r u_i(u_0 - u_i) = 0$ にまとめることができて、

$$\sum_{i=1}^r u_i(u_0 - u_i) \geq 0 \ \text{ if } \ (u_0, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n_+,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}u_0 = \boldsymbol{0} \tag{4.5}$$

が成立つので、この問題 (4.4) の制約領域は階層的共正値条件を満たしていることがわかる。そこで問題 (4.2) を次の様に書き換える。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u}+2u_0\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & (u_0,\boldsymbol{u})\in\mathbb{R}^n_+,\ u_0^2=1, \\ & (A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)^T(A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)=0, \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^r u_i(u_0-u_i)=0. \end{array}$$

これで目的関数も制約式も 2 次形式になる。さらに 3 章での 2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) の形で表すために、$\boldsymbol{x}=(u_0,\boldsymbol{u})\in\mathbb{R}^n$ として、また行列 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{S}^n$ と $\boldsymbol{H}_k\in\mathbb{S}^n$ $(k=0,1,2)$ を下記の等式を満たすように作る。

$$\begin{array}{rcl} \langle\boldsymbol{Q},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle & = & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u}+2u_0\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u},\ \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=u_0^2, \\ \langle\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle & = & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0),\ \langle\boldsymbol{H}^2,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^r u_i(u_0-u_i). \end{array}$$

これらを使って、次の様に最終的に階層が 2 つの問題 (3.2) の形式に変換できる。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle\boldsymbol{Q},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle \\ \text{sub. to} & \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=1, \\ & \langle\boldsymbol{H}^k,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\ (k=1,2), \\ & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+. \end{array} \tag{4.6}$$

このとき定義 3.1 に従って G^0,G^1,G^2 を定義すると以下の様になる。

$$\begin{array}{rcl} G^0 & = & \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in\mathbb{K}\ \middle|\ \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=1\right\}, \\ G^1 & = & \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^0\ \middle|\ \langle\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)=0\right\}, \\ G^2 & = & \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^1\ \middle|\ \langle\boldsymbol{H}^2,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^r u_i(u_0-u_i)=0\right\}. \end{array}$$

　ここで、この問題 (4.6) の緩和問題としての完全正値最適化問題を 3 章の議論に従って、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X}\rangle \\ \text{sub. to} & \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{X}\rangle=1, \\ & \langle\boldsymbol{H}^k,\boldsymbol{X}\rangle=0\ (k=1,2), \\ & \boldsymbol{X}\in\mathbb{C} \end{array} \tag{4.7}$$

とする。

4.1.2 最適値一致

補題 4.1 (参照： Example 5.1 of [3])**.** 問題 (4.4) は条件 (A)' と、条件 (C) 及び (D) を満たしている。

証明. まず、$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{C}^*$ なので条件 (A)' を満たしている。
また $\boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{C}^*$ なので G^1 は (C) を、G^1_0 は (D) を満たしている。また、(4.5) の関係から、4.1.1節の初めに説明したように、G^2 は (C) を、G^2_0 は (D) を満たしている。 □

次に、最終的に元の 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.2) の最適値と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (4.7) の最適値が一致するための、3 章で示した条件 (E) について考察する。

補題 4.2 (参照：Example 5.1 of [3])**.** 問題 (4.4) は条件 (E) を満たしている。

証明. 今 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G^2_0$ とする。ここで G^2_0 は 3 章の定義 3.1 の $\ell = 2$ の場合に従って、

$$G^2_0 = \left\{ \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in \mathbb{K} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0\ (l = 1, 2) \right\}$$

である。よって、さらに $\boldsymbol{d} = (v_0, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n_+$ とすると、

$$v_0 = 0,\ (0, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n_+,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0,\ \ \langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = \sum_{i=1}^{r} -v_i v_i = 0$$

が成り立っている。まず明らかに $\boldsymbol{H}^0\boldsymbol{d} = 0$ で、また $\boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{S}^n_+$ なので $\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0$ ということは $\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{d} \rangle = 0$ である。また、$\sum_{i=1}^{r} -v_i v_i = 0$ から $v_i = 0\ (i = 1, 2, \dots, r)$ なので $\langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{d} \rangle = 0$ である。

また一方、明らかに全ての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ に対して、$s \to \infty$ の時に $\nu^s \to \infty$ となる非負の数列 $\{\nu^s \mid s = 1, 2, \dots\}$ が存在して、

$$\boldsymbol{u} + \nu^s \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_+\ (s = 1, 2, \dots) \tag{4.8}$$

が成り立つ。今 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ を問題 (4.2) の実行可能解とする。ここで $u_0 = 1$ として $\boldsymbol{x} = (u_0, \boldsymbol{u})$ とすると明らかに $\boldsymbol{x}$ は問題 (4.4) の実行可能解となる。そこで、まず $\boldsymbol{u} + \nu^s \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ なので $\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n_+$ である。次に、

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{H}^0, (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})^T \rangle &= (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})^T \boldsymbol{H}^0 (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d}) \\
&= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{x} + 2(\nu^s)^2 \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{d} \\
&= 1 + 0 + 0 = 1
\end{aligned}$$

が成り立ち、同様に、

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{H}^1, (\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})^T\rangle &= (\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{H}^1(\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d}) \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^1\boldsymbol{x} + 2(\nu^s)^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^1\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}^1\boldsymbol{d} \\
&= 0+0+0=0, \\
\langle \boldsymbol{H}^2, (\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})^T\rangle &= (\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d}) \\
&= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{x} + 2(\nu^s)^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{d} \\
&= 0+0+0=0
\end{aligned}$$

となり $(\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})^T \in G^2$ であることがわかる。さらに $s \to \infty$ の時に、$(1/\nu^s, (\boldsymbol{x}+\nu^s\boldsymbol{d})/\nu^s) \to (0, \boldsymbol{d})$ になるので、$\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T$ は G^2 の漸近的無限方向であり、条件 (E) を満たしている。 □

以上より次の定理が成り立つ。

定理 4.1 (参照：Example 5.1 of [3])**.** 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.2) の最適値と完全正値錐最適化緩和問題 (4.7) の最適値は一致する。

証明. 補題 4.1 より 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.2) は条件 (A)' を満たし、また階層的共正値条件の (C)、(D) を満たしている。そして補題 4.2 から漸近的無限方向の条件 (E) も満たしている。以上より定理 3.2 から、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.2) の最適値と完全正値錐最適化緩和問題 (4.7) の最適値が一致する。 □

4.2 主双対問題とラグランジュ緩和問題

前節で、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.2) の最適値と、その緩和問題である完全正値最適化問題 (4.7) の最適値が一致することを証明した。次にこの問題をより簡潔な形で問題の下限値を求めることを考える。そのために元の問題を階層が 1 つの 2 次制約 2 次最適化問題に定式化し、その双対問題とラグランジュ緩和問題について議論する。

4.2.1 階層が 1 つの 2 次最適化問題

まず 0-1 制約 $u_i(1-u_i)=0$ を、相補性条件である $u_iu_{i+r}=0$ $(i=1,2,\ldots,r)$ によって置き換えることを考える。ここでも u_{i+r} は不等式 $u_i \le 1$ のスラック変数として制約式 $u_i+u_{i+r}-1=0$ が等号制約式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ に含まれていると仮定する。そ

のとき 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.2) は、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{n-1}_+,\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})=0, \\ & u_iu_{i+r}=0\ (i=1,2,\dots,r) \end{array} \tag{4.9}$$

と書き換えることが出来る。ここで 2 次制約式 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})$ も u_iu_{i+r} $(i=1,2,\dots,r)$ も全ての $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{n-1}_+$ で非負である。よってこの 2 本の制約式を

$$g(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})+\sum_{i=1}^{r}u_iu_{i+r} \tag{4.10}$$

の様に 1 本にまとめることが出来て、結局 2 次最適化問題 (4.2) は、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{n-1}_+,\ g(\boldsymbol{u})=0 \end{array} \tag{4.11}$$

と書ける。

次に、問題 (4.11) を第 3 節で議論した形式の 2 次制約 2 次最適化問題 (3.2) に変換することを考える。そのために新たに変数 u_0 を追加して、次のように定義する。

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x} & = & \begin{bmatrix} u_0 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n_+,\ \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{Q}^0 \end{bmatrix}\in\mathbb{S}^n, \\ \boldsymbol{C}_i & : & (i,i+r)\text{ の要素が }1/2\text{ で残りは }0\text{ の }(n-1)\times(n-1)\text{ 行列} \\ & & (i=1,2,\dots,r), \\ \boldsymbol{H}^0 & = & \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\in\mathbb{S}^n,\ \boldsymbol{H}^1=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{r}\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_i+\boldsymbol{C}_i^T \end{bmatrix}. \end{array}$$

以上から、全ての $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} u_0 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$ に対して、

$$\begin{array}{rcl} \langle\boldsymbol{Q}\ ,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle & = & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}^0\boldsymbol{u}+2u_0\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}, \\ \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle & = & u_0^2, \\ \langle\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle & = & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}u_0)+\sum_{i=1}^{r}u_iu_{i+r} \end{array}$$

となる。ここでまた錐 $\mathbb{K}$ を $\mathbb{K}=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{S}^n:\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+\right\}$ として、3 章の定義 3.2 の $l=1$ の場合に従って、

$$\begin{array}{rcl} G^0 & = & \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in\mathbb{K}\ \middle|\ \langle\boldsymbol{H}^0,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=1\right\}, \\ G^1 & = & \left\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\in G^0\ \middle|\ \langle\boldsymbol{H}^1,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\rangle=0\right\} \end{array}$$

と表す。明らかに $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{C}^*$ でまた $\boldsymbol{H}^1 \in (\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n) \subset \mathbb{C}^*$ である。同様に 3 章の定義を使って、緩和問題である完全正値最適化問題の制約領域について、

$$\begin{aligned} F^0 &= \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1 \right\}, \\ F^1 &= \left\{ \boldsymbol{X} \in F^0 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \right\} \end{aligned}$$

と表す。

4.2.2　主双対問題とラグランジュ緩和

そこで上記の $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{S}^n$ を使って問題 (4.9) とその双対問題を次の様に定義する。

$$\eta^p(\mathbb{K}) := \inf \{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1, \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 0,\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K} \}, \tag{4.12}$$

$$\eta^d(\mathbb{K}) := \sup \left\{ y_0 \;\middle|\; \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^1 y_1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{K}^* \right\}. \tag{4.13}$$

さらに、これら主双対問題に対するラグランジュ緩和問題として次の問題を考える。

$$\eta^p(\lambda, \mathbb{K}) := \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \rangle = 1,\ \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{K} \right\}, \tag{4.14}$$

$$\eta^d(\lambda, \mathbb{K}) := \sup \left\{ y_0 \;\middle|\; \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{K}^* \right\}. \tag{4.15}$$

問題 (4.12) と問題 (4.14) のそれぞれの緩和問題である完全正値最適化問題は、

$$\eta^p(\mathbb{C}) := \inf \{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \}, \tag{4.16}$$

$$\eta^p(\lambda, \mathbb{C}) := \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \right\} \tag{4.17}$$

と定義できる。またそれぞれの双対問題として、$\mathbb{C}$ の双対錐である共正値錐 $\mathbb{C}^*$ を使った次の問題を定義する。

$$\eta^d(\mathbb{C}) := \sup \left\{ y_0 \;\middle|\; \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^1 y_1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{C}^* \right\}, \tag{4.18}$$

$$\eta^d(\lambda, \mathbb{C}) := \sup \left\{ y_0 \;\middle|\; \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{C}^* \right\}. \tag{4.19}$$

注意 4.1. ここで、元の問題 (4.2) と同値な問題 (4.12) と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (4.16) について、明らかに $\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{C}^*$ である。また、補題 4.2 の証明と同様に、0-1 条件がついた変数は有界で、その他の変数の制約条件は線形なので、漸近的無限方向の条件も満たしていることがわかる。実際、まず相補条件を $\boldsymbol{H}^2$ の制約式として残しても問題 (4.16) と同値な問題である。そこで相補性条件 $\langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^r v_i v_{i+r}$ の部分について $v_{i+r} = 1 - v_i$ の制約を代入すれば、補題 4.2 の証明の $\langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^r v_i(1 - v_i)$ となるので同様に証明できる。よって、元の問題 (4.2) と同値な問題 (4.12) と、その緩和問題の完全正値最適化問題 (4.16) の最適値は一致する。

4.2.3 ラグランジュ緩和問題の収束性

元の問題 (4.9) の主双対問題とラグランジュ緩和問題のそれぞれの緩和問題である最適化問題 (4.16)、(4.18)、(4.17)、(4.19)、即ち $\eta^p(\mathbb{C})$、$\eta^d(\mathbb{C})$、$\eta^p(\lambda,\mathbb{C})$、$\eta^d(\lambda,\mathbb{C})$ について次の一連の補題が成り立つ。

補題 4.3 (参照：Lemma 2.2 of [6])**.** 問題 (4.16)、(4.18)、(4.17)、(4.19) について次のことが成り立つ。

(i) 全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、$\eta^d(\lambda,\mathbb{C}) \leq \eta^p(\lambda,\mathbb{C})$ が成り立つ。

(ii) $\lambda_1 < \lambda_2$ ならば、$\eta^p(\lambda_1,\mathbb{C}) \leq \eta^p(\lambda_2,\mathbb{C}) \leq \eta^p(\mathbb{C})$ が成り立つ。

(iii) $\lambda_1 < \lambda_2$ ならば、$\eta^d(\lambda_1,\mathbb{C}) \leq \eta^d(\lambda_2,\mathbb{C}) \leq \eta^d(\mathbb{C})$ が成り立ち、かつ $\lim_{\lambda\to\infty} \eta^d(\lambda,\mathbb{C}) = \eta^d(\mathbb{C})$ が成り立つ。

証明. (i) は補題 2.19 の弱双対定理そのものなので、(ii) と (iii) について証明する。

(ii) 最初の不等式は、全ての $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}$ について $\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}\rangle \geq 0$ なので、$\lambda_1 < \lambda_2$ について目的関数値は $\langle \boldsymbol{Q} + \lambda_1 \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}\rangle \leq \langle \boldsymbol{Q} + \lambda_2 \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}\rangle$ である。2 番目の不等式を証明するために、$\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}$ を完全正値最適化問題 (4.16) での目的関数値 $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle$ を持つ実行可能解とする。この $\boldsymbol{X}$ は明らかにラグランジュ緩和問題 (4.17) の実行可能解であり任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\langle \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}\rangle = \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle + \langle \lambda \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}\rangle = \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}\rangle + 0$ なので同じ目的関数値を持つ。よって $\eta^p(\lambda_2,\mathbb{C}) \leq \eta^p(\mathbb{C})$ が成り立つ。

(iii) $\lambda_1 < \lambda_2$ と仮定する。もし y_0 がラグランジュ緩和問題の双対問題 (4.19) の $\lambda = \lambda_1$ での実行可能解とすると、$\boldsymbol{H}^1 \in \mathbb{C}^*$ なので、$\lambda = \lambda_2$ の時の問題 (4.19) の実行可能解でもある。このことから問題 (4.19) の実行可能領域は $\lambda = \lambda_1$ の時よりも $\lambda = \lambda_2$ の時のほうが大きいことになり $\eta^d(\lambda_1,\mathbb{C}) \leq \eta^d(\lambda_2,\mathbb{C})$ が成り立つことがわかる。次に 2 番目の不等式を証明するために、今 y_0 を $\lambda = \lambda_2$ の時の問題 (4.19) の実行可能解とする。そこで $y_1 = \lambda_2$ とした時の (y_0, y_1) は元の問題の双対問題 (4.18) の実行可能解でもある。よって問題 (4.18) の実行可能領域の方が問題 (4.19) の実行可能領域よりも大きいことになり、$\eta^d(\lambda_2,\mathbb{C}) \leq \eta^d(\mathbb{C})$ が成り立つ。逆に、もし (y_0, y_1) が元の問題の双対問題 (4.18) の実行可能解であるとすると、y_0 は $\lambda = y_1$ の時のラグランジュ緩和問題の双対問題 (4.19) の実行可能解となるので、$\lim_{\lambda\to\infty} \eta^d(\lambda,\mathbb{C}) = \eta^d(\mathbb{C})$ が成り立つ。 □

以上より、問題 (4.19) の最適値 $\eta^d(\mathbb{C})$ について、次の補題が成り立つ。

補題 4.4 (参照：Lemma 2.3 of [6])**.** 全ての $\lambda \in \mathbb{R}$ について問題 (4.14) と問題 (4.17) 及び (4.19) の最適値は一致して、$\eta^p(\lambda, \mathbb{K}) = \eta^p(\lambda, \mathbb{C}) = \eta^d(\lambda, \mathbb{C}) \leq \eta^*$ が成り立つ。さらに $\lambda \to \infty$ の時、最適値 $\eta^p(\lambda, \mathbb{K}) = \eta^p(\lambda, \mathbb{C}) = \eta^d(\lambda, \mathbb{C})$ は $\eta^d(\mathbb{C})$ に収束する。

証明. まず、問題 (4.17) は凸最適化問題で、補題 2.15 よりその制約領域は相対内点を持つので強双対定理 (例えば [41] 参照) が成り立ち $\eta^p(\lambda, \mathbb{C}) = \eta^d(\lambda, \mathbb{C})$ である。

次に、問題 (4.14) の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{C}^*$ なので 3 章の条件 (A)' を満たしている。また条件 (C) は制約式が $\langle H^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ だけなので必要無い。

そこで条件 (E) について考察する。問題 (4.14) の制約領域は階層のレベル ℓ が 0 なので、今 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in G^0_0$ とする。ここで、

$$G^0_0 = \left\{ \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in \mathbb{K} \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0 \right\}$$

である。よって、さらに $\boldsymbol{d} = (v_0, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n_+$ とすると、

$$v_0 = 0,\ (0, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^n_+,\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0$$

が成り立っている。まず明らかに $\boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{d} = 0$ である。

また一方、明らかに全ての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ に対して、$s \to \infty$ の時に $\nu^s \to \infty$ となる非負の数列 $\{\nu^s \mid s = 1, 2, \dots\}$ が存在して、

$$\boldsymbol{u} + \nu^s \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_+ \ (s = 1, 2, \dots) \tag{4.20}$$

が成り立つ。今 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ を問題 (4.2) の実行可能解とする。ここで $u_0 = 1$ として $\boldsymbol{x} = (u_0, \boldsymbol{u})$ とすると明らかに $\boldsymbol{x}$ は問題 (4.14) の実行可能解となる。そこで、まず $\boldsymbol{u} + \nu^s \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_+$ なので $\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n_+$ である。次に、

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{H}^0, (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})^T \rangle &= (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})^T \boldsymbol{H}^0 (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d}) \\
&= \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{x} + 2(\nu^s)^2 \boldsymbol{x} \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{H}^0 \boldsymbol{d} \\
&= 1 + 0 + 0 = 1
\end{aligned}$$

が成り立つので $(\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})(\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})^T \in G^2$ であることがわかる。さらに $s \to \infty$ の時に、$(1/\nu^s, (\boldsymbol{x} + \nu^s \boldsymbol{d})/\nu^s) \to (0, \boldsymbol{d})$ になるので、$\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T$ は問題 (4.14) の制約領域 G^0 の漸近的無限方向であり、条件 (E) を満たしていることがわかる。よって 3 章の定理 3.2 より、最適値 $\eta^p(\lambda, \mathbb{K}) = \eta^p(\lambda, \mathbb{C})$ が成り立つ。

最後に、補題 4.3 の (iii) より、$\lim_{\lambda \to \infty} \eta^d(\lambda, \mathbb{C}) = \eta^d(\mathbb{C})$ なので、結局 $\lambda \to \infty$ の時、最適値 $\eta^p(\lambda, \mathbb{K}) = \eta^p(\lambda, \mathbb{C}) = \eta^d(\lambda, \mathbb{C})$ は $\eta^d(\mathbb{C})$ に収束する。 $\square$

以上から、$\eta^d(\lambda, \mathbb{C})$ が $\lambda \to \infty$ の時に $\eta^d(\mathbb{C})$ に収束することがわかったが、この値が元の 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題を変換した問題 (4.2) の最適値と一致するとは

限らない。定理 4.1 より、問題 (4.2) の最適値とその完全正値錐最適化緩和問題 (4.7) の最適値 $\eta^p(\mathbb{C})$ は一致することがわかっているので、もし完全正値錐最適化緩和問題 (4.7) とその双対問題の間に強双対定理が成り立てば、$\eta^d(\mathbb{C})$ が元の 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題に収束することになる。元の問題に強双対定理が成り立つために追加に次の条件が必要になる。

(F) ある $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}$ について集合 $\left\{ \boldsymbol{X} \in F^1 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \leq \hat{\zeta} \right\}$ が空ではなく、かつ有界である。

この条件 (F) を使って次の補題が成り立つ。

補題 4.5 (参照：Lemma 2.5 of [6])**.** 問題 (4.16) の制約領域である F^1 が条件 (F) を満たすとすると、

$$\lim_{\lambda \to \infty} \eta^p(\lambda, \mathbb{C}) = \eta^p(\mathbb{C})$$

が成り立つ。

証明*.* 初めに、条件 (F) を満たしている時、十分大きな λ に対して集合
$L(\lambda) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \;\big|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle \leq \hat{\zeta}\}$ も空ではなくかつ有界であることを示す。まず、$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ の時、補題 4.3 の (ii) と条件 (E) より、

$$\emptyset \neq \left\{ \boldsymbol{X} \in F^1 : \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \leq \hat{\zeta} \right\} \subset L(\lambda_2) \subset L(\lambda_1)$$

であるので $L(\lambda)$ は空集合ではないことがわかる。
次に、全ての十分大きな $\lambda > 0$ について $L(\lambda)$ が有界であることを背理法で示す。即ち、$k \to \infty$ の時、$\boldsymbol{X}^k \in L(\lambda^k),\ 0 < \lambda^k \to \infty$ で $0 < \|\boldsymbol{X}^k\| \to \infty$ となるような点列 $\left\{(\lambda^k, \boldsymbol{X}^k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{K}\right\}$ が存在するとする。この時、

$$\begin{aligned}
&\frac{\boldsymbol{X}^k}{\|\boldsymbol{X}^k\|} \in \mathbb{C}, \quad \langle \boldsymbol{H}^1, \frac{\boldsymbol{X}^k}{\|\boldsymbol{X}^k\|} \rangle \geq 0, \quad \langle \boldsymbol{Q}, \frac{\boldsymbol{X}^k}{\|\boldsymbol{X}^k\|} \rangle \leq \frac{\hat{\zeta}}{\|\boldsymbol{X}^k\|}, \\
&\langle \boldsymbol{H}^0, \frac{\boldsymbol{X}^k}{\|\boldsymbol{X}^k\|} \rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{X}^k\|}, \quad \langle \boldsymbol{Q}, \frac{\boldsymbol{X}^k}{\lambda^k \|\boldsymbol{X}^k\|} \rangle + \langle \boldsymbol{H}^1, \frac{\boldsymbol{X}^k}{\|\boldsymbol{X}^k\|} \rangle \leq \frac{\hat{\zeta}}{\lambda^k \|\boldsymbol{X}^k\|}
\end{aligned}$$

となる。ここで、一般性を失わずに $\boldsymbol{X}^k / \|\boldsymbol{X}^k\|$ が $k \to \infty$ の時にゼロではない $\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in \mathbb{K}$ に収束すると仮定できる。そこで $k \to \infty$ の時、最後の不等式は $0 + \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle \leq 0$ となり結局 $\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0$ となるので、

$$\boldsymbol{O} \neq \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \rangle \leq 0$$

であることがわかる。今 $\boldsymbol{X} \in \left\{ \boldsymbol{X} \in F^1 : \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \leq \hat{\zeta} \right\}$ とすると $\left\{ \boldsymbol{X} + \mu \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T : \mu \geq 0 \right\}$ は条件 (E) での集合の無限方向の集合になるので条件 (E) に反する。よってある十分

大きな $\tilde{\lambda} > 0$ について $L(\tilde{\lambda})$ は有界で、また全ての $\lambda \geq \tilde{\lambda}$ に対して、$\emptyset \neq L(\lambda) \subset L(\tilde{\lambda})$ であることがわかる。

次に、$\{\lambda^k \geq \tilde{\lambda}\}$ を無限大に発散する数列とする。空ではない閉集合 $L(\lambda^k)$ は有界な集合 $L(\tilde{\lambda})$ に含まれるので、完全正値錐上でのラグランジュ緩和問題 (4.17) はそれぞれの $\lambda = \lambda^k$ について、集合 $L(\tilde{\lambda})$ の中に $\eta^p(\lambda^k, \mathbb{C}) = \langle \boldsymbol{Q} + \lambda^k \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}^k \rangle$ となる最適解 $\boldsymbol{X}^k$ を持つ。一般性を失わずにこの $\boldsymbol{X}^k$ がある $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ に収束すると仮定できる。一方、補題 4.3 の (ii) から $\eta^p(\lambda^k, \mathbb{C}) \leq \eta^p(\mathbb{C})$ なので、

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^k \rangle = 1, \ \ \langle \frac{\boldsymbol{Q}}{\lambda^k} + \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}^k \rangle \leq \frac{\eta^p}{\lambda^k}, \\ &\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}^k \rangle \geq 0, \ \ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^k \rangle \leq \eta^p(\mathbb{C})\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、$k \to \infty$ とすることで、

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{C}, \ \langle \boldsymbol{H}^0, \widetilde{\boldsymbol{X}} \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{H}^1, \widetilde{\boldsymbol{X}} \rangle = 0, \ \langle \boldsymbol{Q}, \widetilde{\boldsymbol{X}} \rangle \leq \eta^p(\mathbb{C})$$

が成り立つので、$\widetilde{\boldsymbol{X}}$ は完全正値錐最適化緩和問題 (4.16) の最適解であることがわかる。また

$$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^k \rangle \leq \eta^p(\lambda^k, \mathbb{K}) = \langle \boldsymbol{Q} + \lambda^k \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X}^k \rangle \leq \eta^p(\mathbb{C})$$

であるので結局、$k \to \infty$ の時、$\eta^p(\lambda^k, \mathbb{C})$ が $\eta^p(\mathbb{C})$ に収束することが示された。 □

このことより、ラグランジュ緩和問題の双対問題が、そのラグランジュ乗数を大きくすることにより元の問題の最適値に単調に近づくことを示した事になる。

4.3 この章のまとめ

この章では、いくつかの変数に 0-1 条件がついた線形制約上での 2 次関数の最適化問題とその完全正値錐最適化緩和問題について次の 2 つの結果について示した。

一つは定理 4.1 によって、全ての問題 (4.2) の形をした 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題を、それと同じ最適値を持つ完全正値錐最適化緩和問題に変換できることを示したことである。

もう一つは、その完全正値錐最適化緩和問題のラグランジュ緩和問題について議論した。もし条件 (F) を満たせば、ラグランジュ定数を大きくしていくことによって緩和問題の最適値が元の問題の最適値に限りなく近づくことを理論的に保証したことである。

この簡潔な定式化は、先行研究の例で挙げた、標準 2 次計画問題や、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題に適用できるので、この 0-1 問題に含まれる組合せ最適化問題である先行研究の最大独立集合問題、グラフ分割問題、 2 次割当問題等の具体的な個別問題にも適用することができる。また直接この定式化を適用できる場合でなくても、例えば高野、宮代 [58] による最近の線形回帰モデルの最良変数選択に関する研究は、0-1 条件付きの線形制約で 2 次関数最適問題に定式化できるので、この簡潔な定式化が適用できる可能性がある。

5　非凸錐上の線形最適化問題とその凸化

前章までは、実数ベクトル空間での 2 次制約 2 次最適化問題と完全正値錐上での線形最適化問題の関係に限定して議論し、その応用として 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題について議論した。すなわち、まず実数ベクトル空間での 2 次制約 2 次最適化問題を、対称行列空間での等価な非凸錐上での線形最適化問題に変換する。この問題と、この錐を凸化（凸包をとる）した凸錐上での線形最適化緩和問題との関係を考察した。

この章ではこの議論をより一般的な内積が導入されたベクトル空間に拡張する。錐については任意の非凸錐として、その錐上での線形最適化問題とその凸化について議論する。ここまでは $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ を仮定してきたが、この条件を外せることが Kim, Kojima, Toh [31] によって示された。空間や錐の拡張に加えて、このことを追加して考察する。すなわち任意の $\boldsymbol{H}^0$ について今までと同様な議論ができるということを説明する。

5.1　錐線形最適化問題

この節で使われる幾つかの記号について定義する。

まず、$\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{H}^k \in \mathbb{V}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ として、また $\mathbb{K}$ を任意の錐（必ずしも凸である必要はない）とした時、次の集合を定義する。

$$F(\mathbb{K}) := \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}, \tag{5.1}$$

$$F_0(\mathbb{K}) := \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}. \tag{5.2}$$

この集合 $F(\mathbb{K})$ を使って、この節では次の形の錐線形最適化問題を扱う。2.2 節で説明したように、$F(\mathbb{K})$ が錐ではない限り一般的な錐線形最適化問題 (2.2) は簡単にこの形に変換できる。

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbb{K}) &:= \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \mid \boldsymbol{X} \in F(\mathbb{K}) \right\} \\ &= \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

次にこの問題の制約領域について次の集合を定義する。

$$\begin{aligned} F^0(\mathbb{K}) &:= \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1 \right\}, \\ F^l(\mathbb{K}) &:= \left\{ \boldsymbol{X} \in F^{l-1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \right\}\ (l = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0^0(\mathbb{K}) &:= \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \right\}, \\ F_0^l(\mathbb{K}) &:= \left\{ \boldsymbol{X} \in F_0^{l-1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \right\}\ (l = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

この定義から $F(\mathbb{K}) = F^m(\mathbb{K})$、また $F_0(\mathbb{K}) = F_0^m(\mathbb{K})$ である。

5.2　2次制約2次最適化問題での例

3章で一般の2次制約2次最適化問題 (3.9) を問題 (3.2) のモデルに変換できることを示したので、問題 (3.9) は錐線形最適化問題 (5.3) に含まれる。この問題の制約条件の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ をより条件を緩めた任意の集合 $D \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ に置き換えた下記の問題も含まれることを説明する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{u} + \gamma_0 \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{u} + \gamma_k = 0, \\ & (k = 1, 2, \ldots, m),\ \boldsymbol{u} \in D. \end{array} \tag{5.4}$$

ここで、3章と同様に新たに変数 u_0 を追加して $\mathbb{K} = \text{cl}\ \{(u_0, u_0\boldsymbol{u}) : u_0 \geq 0,\ \boldsymbol{u} \in D\}$ とすると、

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{u} + 2u_0\boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{u} + \gamma_0 u_0^2 \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{u} + 2u_0\boldsymbol{c}_k^T\boldsymbol{u} + \gamma_k u_0^2 = 0, \\ & (k = 1, 2, \ldots, m),\ u_0^2 = 1,\ (u_0, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{K} \end{array}$$

と変換することができる。ここで $\mathbb{K}$ は閉包をとっているので閉錐であるが凸とは限らず、また凸包をとった時に完全正値錐になるとも限らない。ここでまた式 (3.10) を使って変換して、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ とすれば、錐線形最適化問題 (5.3) に変換することが出来る。$D = \mathbb{R}_+^{n-1}$ の時の錐 $\mathbb{K}$ が、3章で扱った錐 $\mathbb{K} = \left\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n\right\}$ である。以上から3章での一般の2次制約2次最適化問題 (3.9) の制約条件を緩めた問題 (5.4) は錐線形最適化問題 (5.3) に変換できることがわかる。

5.3　非凸錐での錐線形最適化問題とその凸化

この節では錐 $\mathbb{K} \subset \mathbb{V}$ が非凸錐の錐線形最適化問題に絞って議論する。ここでは、制約領域が空ではないことを仮定して、問題 (5.3) の最適値 $\zeta(\mathbb{K})$ と、その錐 $\mathbb{K}$ を conv $\mathbb{K}$ と置き換えた問題の最適値 $\zeta(\text{conv}\ \mathbb{K})$ が一致するための必要十分条件を示す。 この錐 $\mathbb{K}$ を conv $\mathbb{K}$ と置き換えた問題のことを元の問題の凸化と呼ぶことにする。

5.3.1　制約領域の階層のレベル ℓ が0のケース

前章までは制約条件の非同次式について、$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ を仮定して議論してきた。この章では、まずこの条件がなくても3章の補題 3.3 を拡張した次の補題が成り立つことを示す。

補題 5.1 (参照：Lemma 3.3 (i) of [31]). $F(\mathbb{K})$ が空でないとすると、任意の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ について、

$$F^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F^0(\mathbb{K}) + F^0_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$$

が成り立つ。

証明. 初めに $F^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{conv}\ F^0(\mathbb{K}) + F^0_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ の包含関係を証明するために、$\boldsymbol{X} \in F^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ とすると、次のような $\boldsymbol{X}^i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が存在する。

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{X}^i,\ 1 = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle.$$

ここで、

$$\begin{aligned}
I_+ &= \left\{ i \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle > 0 \right\}, \quad \boldsymbol{A} = \sum_{i \in I_+} \boldsymbol{X}^i, \\
I_0 &= \left\{ j \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0 \right\}, \quad \boldsymbol{B} = \sum_{j \in I_0} \boldsymbol{X}^j, \\
I_- &= \left\{ k \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^k \rangle < 0 \right\}, \quad \boldsymbol{Z} = \sum_{k \in I_-} \boldsymbol{X}^k, \\
\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

とすると $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ となる。また $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ なので I_+ は空ではない。
次に

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{A} \rangle + \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{B} \rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle > 0$$

であるので、$\alpha \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{C} \in \mathbb{V}$ を、

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle}, \\
\boldsymbol{C} &= (1 - \alpha)\boldsymbol{Y} + \alpha \boldsymbol{Z}
\end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
&0 < \alpha < \ 1, \\
&\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C} - \frac{1-\alpha}{\alpha}\boldsymbol{Y} = \frac{2\alpha - 1}{\alpha}\boldsymbol{Y} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C} \\
&\quad = \frac{2\alpha - 1}{\alpha}\boldsymbol{A} + \frac{2\alpha - 1}{\alpha}\boldsymbol{B} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}, \\
&\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \sum_{j \in I_0} \boldsymbol{X}^j \rangle = \sum_{j \in I_0} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0, \\
&\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{C} \rangle = \frac{-\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle} + \frac{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y} \rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle} = 0
\end{aligned}$$

である。ここで

$$
\begin{aligned}
2\alpha-1 &= \frac{2\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle + \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}\rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}\rangle} = \frac{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle + \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}\rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}\rangle} \\
&= \frac{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}\rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}\rangle} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}\rangle - \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z}\rangle} > 0
\end{aligned}
$$

であるので、もし

$$
\boldsymbol{W} = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\boldsymbol{B} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{C}
$$

とすると $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{W}\rangle = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{B}\rangle + \frac{1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{C}\rangle = 0$ となる。このことは、
$\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C} \in \mathrm{conv}\ \mathbb{K}$ なので $\boldsymbol{W} \in F_0^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ であることを意味する。
次に、$\mu_i \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{U}^i,\ \boldsymbol{U} \in \mathbb{V}$ を

$$
\begin{aligned}
&\mu_i = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i\rangle > 0, \quad \text{for } i \in I_+, \\
&\boldsymbol{U}^i = \frac{1}{\mu_i}\cdot\frac{2\alpha-1}{\alpha}\boldsymbol{X}^i, \quad \text{for } i \in I_+, \\
&\boldsymbol{U} = \sum_{i\in I_+}\mu_i\boldsymbol{U}^i = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\sum_{i\in I_+}\boldsymbol{X}^i = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{U}^i\rangle = \frac{\alpha}{2\alpha-1}\cdot\frac{2\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i\rangle}{\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i\rangle} = 1, \\
&1 = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}\rangle = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{A}\rangle + \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{B}\rangle + \frac{1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{C}\rangle = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{A}\rangle.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in I_+}\mu_i = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\sum_{i\in I_+}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i\rangle = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \sum_{i\in I_+}\boldsymbol{X}^i\rangle = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{A}\rangle = 1, \\
&\boldsymbol{U} = \sum_{i\in I_+}\mu\cdot\frac{1}{\mu_i}\cdot\frac{2\alpha-1}{\alpha}\boldsymbol{X}^i = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\sum_{i\in I_+}\boldsymbol{X}^i = \frac{2\alpha-1}{\alpha}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

となることがわかる。まとめると、全ての $i \in I_+$ に対して、

$$
\sum_{i\in I_+}\mu_i = 1,\ \mu_i > 0,\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{U}^i\rangle = 1,\ \boldsymbol{U}^i \in \mathbb{K}
$$

となり、結局 $\sum_{i\in I_+}\mu_i\boldsymbol{U}^i = \boldsymbol{U} \in \mathrm{conv}\ F^0(\mathbb{K})$ であることがわかる。よって
$\boldsymbol{U} \in \mathrm{conv}\ F^0(\mathbb{K})$ かつ $\boldsymbol{W} \in F_0^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ で、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ なので、
$F^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) \subseteq \mathrm{conv}\ F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ であることが示された。

もし I_0 が空の場合は $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}$、またもし I_- が空の場合は $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$、と置いて議論しても、上記の証明は有効である。

次に逆の包含関係 $F^0(\text{conv } \mathbb{K}) \supseteq \text{conv } F^0(\mathbb{K}) + F^0_0(\text{conv } \mathbb{K})$ を示すために、ある $\boldsymbol{Y} \in \text{conv } F^0(\mathbb{K})$ とある $\boldsymbol{Z} \in F^0_0(\text{conv } \mathbb{K})$ について、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ とする。そうすると $\boldsymbol{Y} \in \text{conv } F^0(\mathbb{K})$ は

$$\boldsymbol{Y} \;=\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{Y}^i,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ \boldsymbol{Y}^i \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle = 1$$

と表すことができて、また $\boldsymbol{Z} \in F^0_0(\text{conv } \mathbb{K})$ は

$$\boldsymbol{Z} \in \text{conv } \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle = 0$$

と表すことができる。まず conv $\mathbb{K}$ は凸錐なので、$\boldsymbol{Y} \in \text{conv } \mathbb{K}$ と $\boldsymbol{Z} \in \text{conv } \mathbb{K}$ であることから、$\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \in \text{conv } \mathbb{K}$ となる。また

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle + \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + 0 = 1$$

となり、 $\boldsymbol{X} \in F^0(\text{conv } \mathbb{K})$ が示された。
以上より $F^0(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^0(\mathbb{K}) + F^0_0(\text{conv } \mathbb{K})$ が成立する。 □

5.3.2 階層的共正値条件の一般化

次に、3 章の定義 3.2 で導入した階層的共正値条件を、錐線形制約最適化問題に拡張した以下の条件を導入する。

条件

(I) $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ ならば、 $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0\ \ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

(II) $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}_0(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、 $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0\ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

この条件は双対錐の定義から、

条件

(I) $\boldsymbol{H}^\ell \in (F^{\ell-1}(\mathbb{K}))^*\ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

(II) $\boldsymbol{H}^\ell \in (F^{\ell-1}_0(\text{conv } \mathbb{K}))^*\ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

と同値である。

3.2.3 節で説明した議論と同様に、もし $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ である $\boldsymbol{X}$ について、$\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ を満たす複数個の $\boldsymbol{H}^k$ $(k = 1, 2, \dots, p)$ がある場合は $\boldsymbol{H}^\ell = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{H}^k$ とすることができる。

また、3 章での補題 3.2 の命題を、この章の議論に対して同様に拡張できて、次の補題が成り立つ。

補題 5.2 (参照：Lemma 3.3 of [3])**.** 以下の 3 つの条件は同値である。

(i) 条件 (I) と条件 (II) が成り立つ。

(ii) $\boldsymbol{X} \in \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成り立つ。

(iii) $\boldsymbol{X} \in \text{cone conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ が成り立つ。

証明. 補題 3.2 での証明と同様に、(iii) $\Rightarrow$ (ii) と (ii) $\Rightarrow$ (i) は明らかである。

そこで (i) $\Rightarrow$ (iii) についてもほぼ同様であるが、凸包をとる位置が違うので以下で証明する。今、$0 < \mu \in \mathbb{R}_+,\ \boldsymbol{Y} \in \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ とすると $\mu\boldsymbol{Y} \in \text{cone conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ である。また $\boldsymbol{Z} \in F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ として $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ とすると、

$$\boldsymbol{X} \in \text{cone conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$$

である。まず $\boldsymbol{Y}$ について、$\boldsymbol{Y} \in \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ なので、

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{Y}^i,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \ (i = 1, 2, \dots, r)$$

となる $\boldsymbol{Y}^i \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ が存在する。条件 (I) が成り立っているので、全ての $i = 1, 2, \dots, r$ について $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y}^i \rangle \geq 0$ が成り立つ。よって、

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \mu\boldsymbol{Y} \rangle = \mu \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \lambda_i \boldsymbol{Y}^i \rangle \geq 0$$

が成り立つ。次に $\boldsymbol{Z} \in F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ については、条件 (II) が成り立っているので、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$ が成り立つ。以上より、条件 (I) と条件 (II) が成り立てば、

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$$

が成り立つので (iii) が成り立ち、結局 (i) と (ii) と (iii) の条件は同値であることが分かる。

□

また、3 章の系 3.2 での条件 $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ は、この章での議論では $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の場合にあたる。補題 5.1 では $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ は任意でよいことが示された。補題 5.2 の (iii) から、$\ell = 1, 2, \ldots, m$ について、条件 (I) と (II) を満たせば、

$$\boldsymbol{H}^\ell \in (\text{cone conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K}))^*$$

である。このことから次のことがわかる。もし $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ ではない場合、即ち

$$\text{ある } \boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \text{ について } \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle < 0 \tag{5.5}$$

とすると、cone conv $F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$ であることを示す。即ち、(5.5) であるような $\boldsymbol{X}$ は cone conv $F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$ には含まれないことを示す。今 $\boldsymbol{Y} \in$ cone conv $F^0(\mathbb{K})$ とすると、$\langle \boldsymbol{H}^0, \widehat{\boldsymbol{Y}} \rangle = 1$ とした時、$\boldsymbol{Y} = \rho \widehat{\boldsymbol{Y}},\ \rho > 0$ と表せる。また $\widehat{\boldsymbol{Z}} \in F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$ とすると、$\langle \boldsymbol{H}^0, \widehat{\boldsymbol{Z}} \rangle = 0$ である。そこで任意の $\widehat{\boldsymbol{X}} \in$ cone conv $F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$ について、

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \widehat{\boldsymbol{X}} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \rho \widehat{\boldsymbol{Y}} + \widehat{\boldsymbol{Z}} \rangle = \rho \langle \boldsymbol{H}^0, \widehat{\boldsymbol{Y}} \rangle + \langle \boldsymbol{H}^0, \widehat{\boldsymbol{Z}} \rangle = \rho + 0 > 0$$

となるので、(5.5) であるような $\boldsymbol{X}$ は

$$\boldsymbol{X} \notin \text{cone conv } F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$$

であることが分かる。よって、

$$\text{cone conv } F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$$

が示された。補題 2.7 の (b) より、(cone conv $F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K}))^* \supset \mathbb{K}^*$ なので、(5.5) の場合は、$\ell \geq 1$ な $\boldsymbol{H}^\ell$ は、$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の場合より広い範囲から選ぶことができることを意味している。

5.4 凸化と制約領域

次に非凸錐線形制約最適化問題 (5.3) の凸化を説明するために次の錐線形制約最適化問題を導入する。

$$\zeta_0(\mathbb{K}) \quad = \quad \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \boldsymbol{X} \in F_0(\mathbb{K}) \right\}. \tag{5.6}$$

この問題の制約領域は

$$F_0(\mathbb{K}) = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{X} \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}$$

であり、錐 $\mathbb{K}$ と超平面が作る部分空間の共通集合なので補題 2.6 より錐である。この定義を使って次の補題が成り立つ。

補題 5.3 (参照：Lemma 3.3, 3.4 of [3], Lemma 3.3 (i) of [31])**.** 非凸錐線形制約最適化問題 (5.3) の制約領域 $F(\mathbb{K})$ が空ではなく、条件 (I) と条件 (II) を満たしているとすると、

(i) $F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) \quad \ell = 0, 1, \ldots, m.$

(ii) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K}) + \zeta_0(\text{conv } \mathbb{K}).$

が成り立つ。

証明. (i) $\ell = 0, 1, \ldots, m$ について数学的帰納法によって証明する。まず、$\ell = 0$ の場合である $F^0(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^0(\mathbb{K}) + F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$ については補題 5.1 で証明されている。

そこで次に $F^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ が成り立っていると仮定して、$F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$ を証明する。
$F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) \subseteq \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$ の包含関係を証明するために、$\boldsymbol{X} \in F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$ と仮定する。$F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) \subseteq F^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ なので $\boldsymbol{X} \in \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ である。よってある $\boldsymbol{Y} \in \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ と、ある $\boldsymbol{Z} \in F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ が存在して、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ と書くことができる。そして $\boldsymbol{Y} \in \text{conv } F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ と $\boldsymbol{Z} \in F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ を次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{Y}^i, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0, \ \boldsymbol{Y}^i \in \mathbb{K}, \ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Y}^i \rangle = 0 \\
& \quad (i = 1, 2, \ldots, p, \ k = 1, 2, \ldots, \ell - 1), \\
\boldsymbol{Z} &\in \text{conv } \mathbb{K}, \ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle = 0, \ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Z} \rangle = 0 \\
& \quad (k = 1, 2, \ldots, \ell - 1).
\end{aligned}$$

さらに、条件 (I) と (II) を満たしていることから、

$$\langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{Y}^i \rangle \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, p), \quad \langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$$

が成り立っているが、一方 $\boldsymbol{X} \in F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$ であることから

$$0 = \langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{Y}^i \rangle + \langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{Z} \rangle$$

が成り立つ。$\lambda_i > 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, p)$ なので結局、

$$\langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{Y}^i \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, p), \ \langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{Z} \rangle = 0.$$

が成り立つので $\boldsymbol{X} \in \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$ である。よって $F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) \subseteq \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$ であることが示された。

次に逆の包含関係 $F^\ell(\text{conv }\mathbb{K}) \supseteq \text{conv }F^\ell(\mathbb{K}) + F_0^\ell(\text{conv }\mathbb{K})$ を証明するために、数学的帰納法より $F^{\ell-1}(\text{conv }\mathbb{K}) \supseteq \text{conv }F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\text{conv }\mathbb{K})$ を仮定する。今 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ として $\boldsymbol{Y} \in \text{conv }F^\ell(\mathbb{K})$ と $\boldsymbol{Z} \in F_0^\ell(\text{conv }\mathbb{K})$ であるとするとそれぞれ $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \boldsymbol{Y}^i,\ \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ \boldsymbol{Y}^i \in \mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Y}^i \rangle = 0 \\
&\quad (i = 1, 2, \ldots, p,\ k = 1, 2, \ldots, l), \\
\boldsymbol{Z} &\in \text{conv }\mathbb{K},\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Z}^j \rangle = 0 \\
&\quad (\ k = 1, 2, \ldots, l)
\end{aligned}$$

と表せる。$\mathbb{K}$ は錐なので、$\lambda_i \boldsymbol{Y} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ である。
よって $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \boldsymbol{Y}^i + \boldsymbol{Z} \in \text{conv }\mathbb{K}$ が言える。さらに、

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^i \rangle + \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Z} \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i + 0 = 1, \\
\langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Y}^i \rangle + \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Z} \rangle = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l)
\end{aligned}$$

が成り立つので、$\boldsymbol{X} \in F^\ell(\text{conv }\mathbb{K})$ がわかり、
結局 $F^\ell(\text{conv }\mathbb{K}) \supseteq \text{conv }F^\ell(\mathbb{K}) + F_0^\ell(\text{conv }\mathbb{K})$ が示された。

(ii) 問題 $\zeta(\text{conv }\mathbb{K})$ の目的関数は線形なので、補題 2.18 とこの補題の (i) の結果より、

$$\begin{aligned}
\zeta(\text{conv }\mathbb{K}) &= \inf\ \{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \mid \boldsymbol{X} \in F(\text{conv }\mathbb{K})\} \\
&= \inf\ \{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} \rangle \mid \boldsymbol{Y} \in \text{conv }F(\mathbb{K}),\ \boldsymbol{Z} \in F_0(\text{conv }\mathbb{K})\} \\
&= \inf\ \{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z} \rangle \mid \boldsymbol{Y} \in \text{conv }F(\mathbb{K}),\ \boldsymbol{Z} \in F_0(\text{conv }\mathbb{K})\} \\
&= \inf\ \{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Y} \rangle \mid \boldsymbol{Y} \in \text{conv }F(\mathbb{K})\} + \inf\ \{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z} \rangle \mid \boldsymbol{Z} \in F_0(\text{conv }\mathbb{K})\} \\
&= \zeta(\mathbb{K}) + \zeta_0(\text{conv }\mathbb{K})
\end{aligned}$$

が示された。 □

3 章とこの章での拡張された議論との一番大きな違いは $\boldsymbol{H}^0$ の条件である。3 章では $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{C}^*$ を仮定しているが、この章の補題 5.1 の結果が示すように、$\boldsymbol{H}^0$ の制約を外すことが出来て任意の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ で議論ができることが大きな違いである。

この $\boldsymbol{H}^0$ の制約を外すことが出来ることによって、もう一つ 3 章の結果と、この章での拡張された結果補題 5.3 の違いは次の点である。3 章の補題 3.4 での主張は $\ell = m$ とすると

$$F = \text{conv }G + \text{conv }G_0$$

であるが、$\mathbb{K} = \{\boldsymbol{X} : \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ として 5.1 節で定義した表記法を用いて表すと

$$F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + \text{conv } F_0(\mathbb{K})$$

となる。一方、この章の補題 5.3 の (i) の主張は、$\ell = m$ の時、

$$F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + F_0(\text{conv } \mathbb{K})$$

であり、両主張の右辺の第 2 項が違っている。この違いの理由について説明するために次の補題を示す。

補題 5.4. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{V}$ が閉錐で条件 (II) を満たしているとして、$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ とすると、

$$F_0^\ell(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F_0^\ell(\mathbb{K})$$

が成り立つ。

証明. 補題 2.5 から、$F_0^\ell(\text{conv } \mathbb{K}) \supseteq \text{conv } F_0^\ell(\mathbb{K})$ が成り立つ。そこで逆の包含関係を数学的帰納法で証明する。まず $\ell = 0$ の時、今 $\boldsymbol{X} \in F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$ とすると、$F_0^0(\text{conv } \mathbb{K})$ は錐なので、

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{X}^i,\ \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^0, \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{X}^i \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0$$

となる $\boldsymbol{X}^i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が存在する。ところが $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ なので $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle \geq 0$ である。よって、各 $\boldsymbol{X}^i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ について $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0$ であることがわかるので、全ての $\boldsymbol{X}^i$ が $\boldsymbol{X}^i \in F_0^0(\mathbb{K})$ となる。以上より、$\boldsymbol{X} \in \text{conv } F_0(\mathbb{K})$ が成り立ち逆の包含関係が示された。以上より

$$F_0^0(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F_0^0(\mathbb{K})$$

が成り立つ。

次に、$F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ が成り立っていると仮定して $F_0^\ell(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F_0^\ell(\mathbb{K})$ が成り立つことを示す。今 $\boldsymbol{X} \in F_0^\ell(\text{conv } \mathbb{K})$ とすると、

$$F_0^\ell(\text{conv } \mathbb{K}) \subset F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$$

であるので、$\boldsymbol{X} \in \text{conv } F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ でもある。そこで、$\text{conv } F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ も錐なので、

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{X}^i,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \quad (k = 0, 1, \ldots, \ell - 1)$$

となる $\boldsymbol{X}^i \in \mathrm{conv}\ F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})\ (i=1,2,\ldots,r)$ が存在する。この $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ と $\boldsymbol{X}^i\ (i=1,2,\ldots,r)$ について条件 (II) より

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}^i \rangle \geq 0\ (i=1,2,\ldots,r)$$

であるので、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0\ (i=1,2,\ldots,r)$ が成り立つ。以上より、$\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ F_0^{\ell}(\mathbb{K})$ が成り立ち、結局 $F_0^{\ell}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F_0^{\ell}(\mathbb{K})$ が示された。 □

補題 5.3 から、任意の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ について

$$F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F(\mathbb{K}) + F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$$

が成り立つが、もし $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の場合は、補題 5.4 の結果から、より小さい集合

$$F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F(\mathbb{K}) + \mathrm{conv}\ F_0(\mathbb{K})$$

で成立つという意味である。

また、この補題 5.4 から、もしもし $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ ならば、

条件 (II) $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ ならば $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

は下記の

条件 (II)' $\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ ならば $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

に置き換えることが出来る。

次に、$\boldsymbol{H}^0$ に関わる制約を外した下記の集合を定義する。

$$\begin{aligned} F_1^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) &:= \{\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ \mathbb{K}\}, \\ F_1^\ell(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) &:= \left\{\boldsymbol{X} \in F_1^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = 0\right\}\ (l=1,2,\ldots,m). \end{aligned}$$

この定義を使って次の条件を

条件 (V) $\boldsymbol{X} \in F_1^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ ならば $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

とする。この条件について次の補題が成り立つ。

補題 5.5 (参照：Lemma 3.3, 3.4 of [3])**.** $\ell = 1,2,\ldots,m$ について、

(i) もし条件 (V) が成り立つとすると、条件 (I) と (II) が成り立つ。

(ii) もし条件 (I) と (II) かつ $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ が成り立つと、条件 (V) が成り立つ。

証明. (i)　条件 (V) が成り立つならば、$F^{\ell-1}(\mathbb{K}) \subseteq F_1^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ なので、明らかに条件 (I) が成り立つ。 また $F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K}) \subseteq F_1^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ なので、明らかに条件 (II) が成り立つ。

(ii)　条件 (I) と (II) かつ $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ が成り立っていると仮定する。今 $\boldsymbol{X} \in F_1^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ とすると、

$$\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{X}^j,\ \langle \boldsymbol{H}^i, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0\ (k = 1, 2, \dots, \ell - 1)$$

となる、$\boldsymbol{X}^j \in \mathbb{K}\ (j = 1, 2, \dots, r)$ が存在する。$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ なので全ての $\boldsymbol{X}^j$ について、$\rho_j = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle$ とすると $\rho_j \geq 0$ である。今

$$J_+ = \{j : \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle > 0 \ \ j = 1, 2, \dots, r\},\ \ J_0 = \{j : \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0 \ \ j = 1, 2, \dots, r\}$$

とする。$j \in J_+$ である j について、$\boldsymbol{Y}^j = 1/\rho_j \boldsymbol{X}^j$ とすると

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{Y}^j \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{Y}^j \rangle = 0\ (k = 1, 2, \dots, \ell - 1)$$

であるので、 $\boldsymbol{Y}^j \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ であることがわかる。よって、条件 (I) が成り立っているので $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y}^j \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, 1/\rho_j \boldsymbol{X}^j \rangle \geq 0$ となり、$j \in J_+$ について、$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}^j \rangle \geq 0$ である。

また、$j \in J_0$ である j については、

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X}^j \rangle = 0\ (k = 1, 2, \dots, \ell - 1)$$

となり、$\boldsymbol{X}^j \in \boldsymbol{F}_0^{\ell-1}(\mathbb{K}) \subseteq \boldsymbol{F}_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ である。よって条件 (II) が成り立っているので、$j \in J_0$ についても、$\langle \boldsymbol{H}^l, \boldsymbol{X}^j \rangle \geq 0$ であることがわかる。以上より、

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{X}^j \rangle = \sum_{j \in J_+} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}^j \rangle + \sum_{j \in J_0} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X}^j \rangle \geq 0$$

となり、条件 (V) が成り立つ。 □

5.4.1　最適値一致条件

まず、補題 5.3 から、$\boldsymbol{H}^0$ に対する条件が強い場合の次の定理が成り立つ。

定理 5.1 (参照：Lemma 3.2 of [3]). 全ての $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}^*$ について $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle > 0$ とすると、

(i) $F^\ell(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^\ell(\mathbb{K})$

(ii) $\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$

が成立して、非凸錐線形最適化問題 $\zeta(\mathbb{K})$ は凸化しても最適値は変わらない。

証明. 条件から $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ の解は $\mathbf{0}$ だけなので、$\boldsymbol{F}_0^\ell(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \{\mathbf{0}\}$ である。よって補題 5.3 より、

$$F^\ell(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F^\ell(\mathbb{K})$$

が成り立つ。このことより目的関数が同じなので明らかに

$$\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$$

が成立して、非凸錐線形最適化問題 $\zeta(\mathbb{K})$ は凸化しても最適値は変わらない。 □

次に最終的に非凸錐線形制約最適化問題が凸化しても最適値が変わらない、即ち $\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ となる条件として、条件 (I) と (II) に追加して次の条件を仮定する。

条件

(III) 全ての $\boldsymbol{X} \in F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

まずこの条件について以下の補題が成り立つ。

補題 5.6 (参照：Lemma 3.1 of [6])**.**

$$\zeta_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \begin{cases} 0 & \text{条件 (III) が満たされる時} \\ -\infty & \text{その他の場合} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明. 問題 (5.6) $\zeta_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ の制約領域は錐と線形空間の共通集合なので補題 2.6 から錐である。また目的関数は線形なので $\zeta_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = 0$ かもしくは $\zeta_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = -\infty$ のどちらかで、$\zeta_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = 0$ である必要十分条件は、全ての制約領域について目的関数の値が非負であることである。すなわち条件 (III) が成り立つ時である。 □

以上をまとめると、非凸錐の錐線形最適化問題の凸化について以下の定理が成り立つ。

定理 5.2 (参照：Theorem 3.2 of [6])**.** $F(\mathbb{K})$ が空ではなく、条件 (I) と (II) が成り立っているとすると、

条件 (III) は、$\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ であるための必要十分条件である。

証明. $F(\mathbb{K})$ が空ではないので、$\zeta(\mathbb{K}) < \infty$ である。もし $\zeta(\mathbb{K}) = -\infty$ ならば、conv $\mathbb{K} \supset \mathbb{K}$ なので $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K}) = -\infty$ である。次に、もし条件 (III) が成り立っているとすると、補題 5.6 より $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = 0$ であるが、補題 5.3 の (ii) により $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。逆に、もし $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ ならば同じく補題 5.3 の (ii) により $\zeta(\mathbb{K}) = 0$ である。このことと補題 5.6 より条件 (III) が成り立つことが示された。 □

この定理 5.2 での主張「$\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ の必要十分条件は、条件 (III)」であるのに対して、3 章での結論である定理 3.1 での主張は、「条件 (A)'、(C)、(D) の元で、条件 (E) が十分条件」である。この条件 (E) をこの章での拡張された空間での議論で表現すると、

$$F_o(\mathbb{K}) \subseteq F(\mathbb{K})^{\infty} = \left\{ \boldsymbol{D} \in \mathbb{V} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{点列 } (\mu_r, \boldsymbol{X}_r) \in R_+ \times F(\mathbb{K}) \ (r = 1, 2, \dots) \text{ が存在して} \\ r \to \infty \text{ の時 } (\mu_r, \mu_r \boldsymbol{X}_r) \to (0, \boldsymbol{D}) \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

である。この条件を (E)' とした時、条件 (E)' は $\zeta(\mathbb{K}) = \zeta(\text{conv } \mathbb{K})$ になるための十分条件になっている。条件 (III) は条件 (E)' よりも弱い条件であることを次の補題が示している。

補題 5.7 (参照：Lemma 3.3 of [6])**.** $\zeta(\mathbb{K})$ を有界とする。

任意の $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{V}$ について、(E)' ならば (III) を満たす。

証明. 背理法で証明するために条件 (III) が成り立たないとする。即ち、$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{D} \rangle < 0$ となるような $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{D} \in F_0(\mathbb{K})$ が存在するとすると、仮定 (E)' から、$r \to \infty$ の時に $(\mu_r, \mu_r \boldsymbol{X}_r)$ が $(0, \boldsymbol{D})$ に収束するような点列 $\{(\mu_r, \boldsymbol{X}_r) \in R_+ \times F(\mathbb{K}) : r = 1, 2, \dots\}$ が存在する。よって、十分大きな全ての r に対して、$\langle \boldsymbol{Q}, \mu_r \boldsymbol{X}_r \rangle < -\delta$ となるような $\delta > 0,\ \delta \in \mathbb{R}$ が存在することになる。 よって、十分大きな全ての r に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}_r \rangle < -\delta/\mu_r$ なので、$r \to \infty$ の時、$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}_r \rangle \to -\infty$ になる。ところが点列 $\{\boldsymbol{X}_r : r = 1, 2, \dots\}$ は問題 $\zeta(\mathbb{K})$ の制約領域に含まれるため、$\zeta(\mathbb{K}) \to -\infty$ となり、$\zeta(\mathbb{K})$ が有界である仮定に矛盾する。以上より、(E)' ならば (III) を満たす。 □

実際、条件 (E)' は十分条件でしかないことを以下の例で説明する。即ち、以下の例では条件 (E)' は満たさないが元の問題とその凸化した問題の最適値は一致する。今 $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ 上での非凸錐を、

$$\mathbb{K} = \{ \boldsymbol{x} \mid x_1 x_2 = 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+ \}$$

とする。即ち、この錐は $\mathbb{K} = \{ \boldsymbol{d} \mid \boldsymbol{d} = (x_1, 0),\ x_1 \geq 0 \} \cup \{ \boldsymbol{d} \mid \boldsymbol{d} = (0, x_2),\ x_2 \geq 0 \}$ のように 2 本の線分からなる。そこで、この錐 $\mathbb{K}$ 上での錐最適化問題を、

$$\zeta(\mathbb{K}) = \inf\ \{ x_1 \mid x_2 = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K} \}$$

とすると、明らかにこの問題の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{x}^* = (0,1)$ で最適値は 0 である。この問題は条件 (I) と (II) を満たしているのは明らかである。またこの凸化した問題は

$$\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \inf\ \{\ x_1\ \mid x_2 = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathrm{conv}\ \mathbb{K}\}$$

であり、この問題の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ も $\boldsymbol{x}^* = (0,1)$ で最適値も明らかに 0 である。ところが、

$$\begin{aligned} F(\mathbb{K})^{\infty} &= \{\emptyset\} \\ F_0(\mathbb{K}) &= \{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, 0),\ x_1 \geq 0\ \} \end{aligned}$$

であるので、$F_0(\mathbb{K}) \neq F(\mathbb{K})^{\infty}$ となり、(E)' を満たしていない。これは条件 (E)' は満たしていないが、目的関数にあたる $\boldsymbol{Q} = (1,0)$ が条件 (III) を満たしているからである。この例から条件 (E)' は十分条件でしかないことがわかる。

5.5 図による説明

5.5.1 $F(\mathbb{K})$ と $F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ の関係

今までのいくつかの議論で図で例示できるものについて説明する。今非凸錐を $\mathbb{K}$ として次の錐をそれぞれ

$$\begin{aligned} FK &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, \ldots, m)\}, \\ FC &= \{\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ \mathbb{K} \mid \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, \ldots, m)\} \end{aligned}$$

とすると、制約領域の定義から

$$\begin{aligned} F(\mathbb{K}) &= \{\boldsymbol{X} \in FK \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1\}, \\ F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) &= \{\boldsymbol{X} \in FC \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1\} \end{aligned}$$

である。2 次元での非凸錐 FK を図 7 の左図のような 2 本の線分からなる錐とする。この非凸錐 FK の双対錐は右図のグレー部分の凸錐となる。補題 2.7(a) より任意の集合の双対錐は常に閉凸錐なので、双対錐の双対錐は元の集合とは限らない。

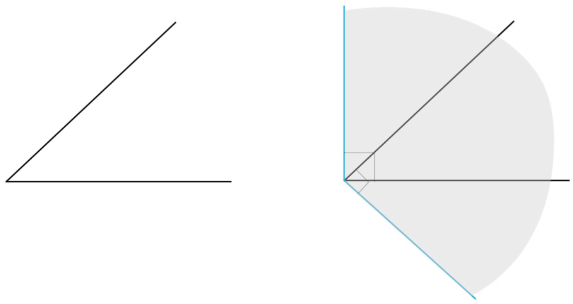

図 7: 双対錐

定理 5.1 の条件、全ての $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}^*$ に対して $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle > 0$、ということは FK の双対錐の内点（図 8 の右図）から $\boldsymbol{H}^0$ をとることになる。そのことから非凸錐 FK と平面 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ は必ず 2 点で交わり、その 2 点が制約領域 $F(\mathbb{K})$（図 8 の左図星印）ということになる。

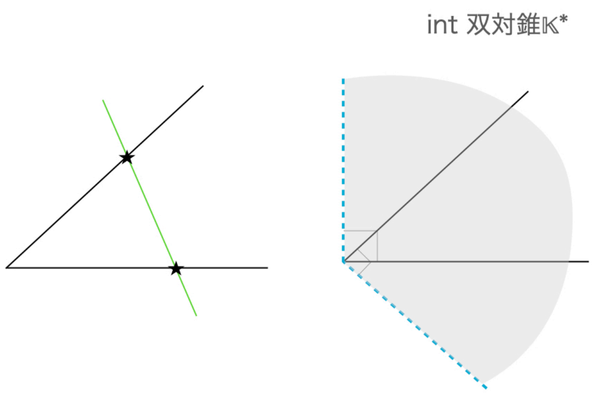

図 8: $\boldsymbol{H}^0$ 双対錐内点

この場合は、制約領域は有界で元の問題の制約領域の凸包と凸化後の制約領域は一致する。そのイメージを次の図 9 で示す。左図が $F(\text{conv } \mathbb{K})$ のイメージで、グリーン

の制約領域の点 (星印) は平面 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ 上にあり、$\mathbb{K}$ の凸包の中にあるので $\mathbb{K}$ の点の凸結合で表される。右図が conv $F(\mathbb{K})$ のイメージで、非凸錐 $\mathbb{K}$ と平面 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の共通集合である 2 点でこのグリーン上の点は凸結合で表される。

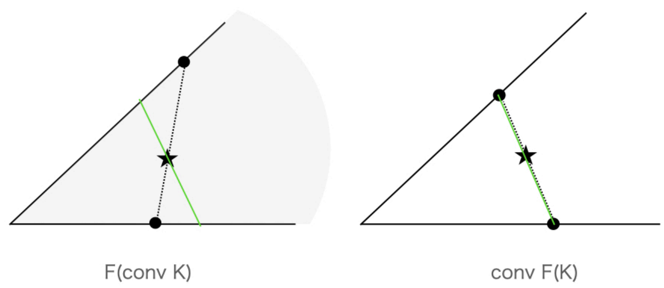

図 9: 制約領域一致

この 2 つの集合が一致する証明の考え方は、左の集合の点（星印）を張っている錐 FK 上の点の長さを調整すれば右の集合の表現になるということである。

次に、定理 5.1 の条件を満たさない場合について考える。この場合は図 10 のイメージになる。左図のグリーンの実線が凸錐 conv $\mathbb{K}$ と平面 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の共通集合で $F(\text{conv }\mathbb{K})$ のイメージである。右図は非凸錐 $\mathbb{K}$ と平面 $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の共通集合で 1 点（星印）であり、その凸包もその点自身である。よってこの場合は元の問題の制約領域の凸包と凸化後の制約領域は一致しない例になっている。

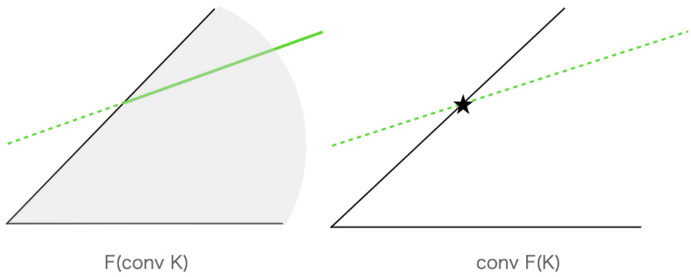

図 10: 任意 $\boldsymbol{H}^0$

次に、補題 5.4 で説明した、任意の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ について

$$F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F(\mathbb{K}) + F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$$

成り立つが、もし $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の場合は、

$$F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F(\mathbb{K}) + \mathrm{conv}\ F_0(\mathbb{K})$$

になりより小さい集合で成り立つということを図 11 で説明する。

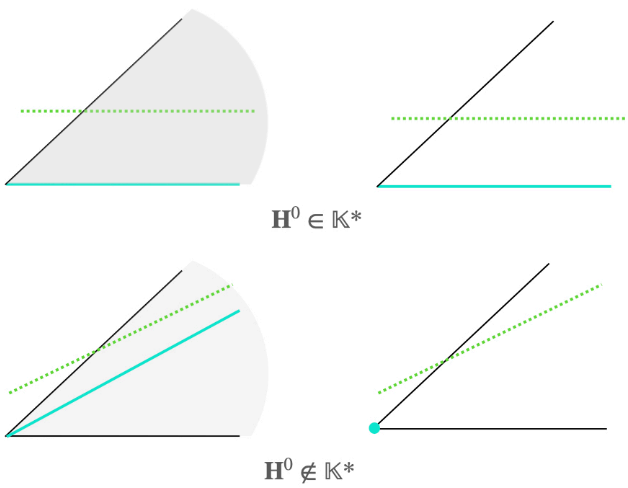

図 11: $\boldsymbol{H}^0$ 条件と F_0 集合

図 11 の 4 つの図とも、グリーンの点線が $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1$ の平面を表している。

まず上の 2 つの図が定理 5.1 の条件を満たさないが $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ を満たす場合のイメージである。左図のブルーの線が conv $F_0(\mathbb{K})$ を表しており、右図のブルーの線は $F_0(\mathbb{K})$ であるが、両方の集合は一致しているので、

$$F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + \text{conv } F_0(\mathbb{K})$$

を満たすことがわかる。しかし、下の 2 つの図は $\boldsymbol{H}^0 \notin \mathbb{K}^*$ の場合で、左図のブルーの線が $F_0(\text{conv } \mathbb{K})$ であるが、右図の $F_0(\mathbb{K})$ では $F_0(\mathbb{K}) = \{\boldsymbol{0}\}$ の 1 点だけの集合になり、

$$F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + \text{conv } F_0(\mathbb{K})$$

が成り立っていない。よって

$$F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + F_0(\text{conv } \mathbb{K})$$

とする必要があることがわかる。

5.5.2 階層的共正値条件

次に階層的共生値条件について、階層が 1 つの場合と階層が 2 つになる場合の例を $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ での図で説明する。まず錐 $\mathbb{K}$ を

$$\mathbb{K} = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \ X_1 = 0 \text{ or } X_2 = 0 \text{ or } X_3 = 0,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3_+\}$$

とする。これは非負象限を囲む 3 つの平面からなる錐である。そしてこの双対錐は $\mathbb{K}^* = \mathbb{R}^3_+$ である。次に 2 つの制約領域を定義する。2 つの制約領域ともに同時制約の数は 2 本である。

$$\begin{aligned}\widehat{F} &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid X_3 = 1,\ X_1 = 0,\ X_2 = 0\},\\ \widetilde{F} &= \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid X_3 = 1,\ X_2 = 0,\ X_1 - X_2 = 0\}\end{aligned}$$

まず $\widehat{F}$ については、$\boldsymbol{H}^1 = (1,0,0),\ \boldsymbol{H}^2 = (0,1,0)$ であり両方ともに双対錐 $\mathbb{K}^* = \mathbb{R}^3_+$ に含まれている。よって両式を足して 1 本にまとめることができるので、

$$\widehat{F} = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid X_3 = 1,\ X_1 + X_2 = 0\}$$

と表すことができる。それを図示したのが図 12 の左図である。ブルーの点線が $X_3 = 1$ の平面を表し、グレーの塗りつぶし部分が $X_1 + X_2 = 0$ の平面を表す。同次制約式が 2 本の時と 1 本の時のどちらにしても制約領域は図の星印の 1 点だけである。

次に $\widetilde{F}$ についてみると、$\boldsymbol{H}^1 = (0,1,0)$ は双対錐に含まれているが、$\boldsymbol{H}^2 = (1,-1,0)$ は含まれていないので 1 本にまとめることはできない。これを図示したのが図 12 の

右図である。グレーの塗りつぶし部分が $X_1 - X_2 = 0$ の平面を表す。ここで、$\widetilde{F}$ の階層が 1 つの集合は

$$\widetilde{F}^1 = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid X_3 = 1,\ X_2 = 0\}$$

であるので、この図でいうと、オレンジの点線部分になる。よって全ての $\widetilde{F}^1$ の点について $X_1 - X_2 \geq 0$ なので階層的共生値条件を満たしていることがわかる。

どちらのケースも制約領域は図の星印の 1 点だけであり、階層のレベル ℓ が 0 の集合、

$$\widetilde{F}^0 = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \mid X_3 = 1\}$$

は図 12 の左図の 2 本のブルーの点線部分である。

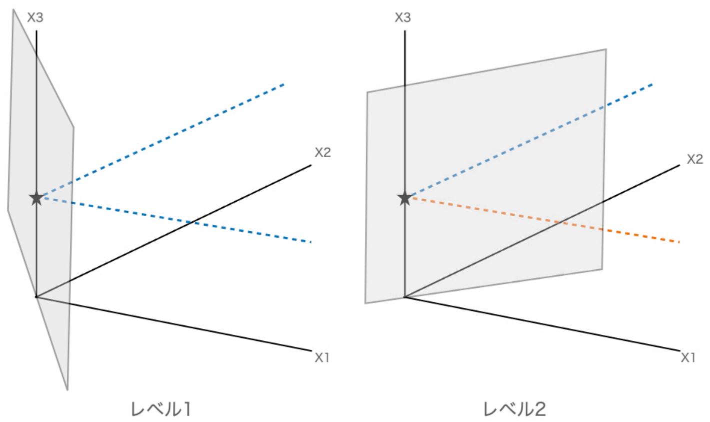

図 12: 階層的共生値条件

5.6　この章のまとめ

条件 (I) と (II) について次の補題が成り立つ。

補題 5.8 (参照：Lemma 3.4 of [3])**.** 下記条件 (IV) は、条件 (I) かつ (II) と同値である。

条件 (IV) $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ ならば、 $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0\ (\ell = 1, \ldots, m)$

証明. 今条件 (I) と (II) が成り立っているとする。補題 5.3 の (i) から

$$\begin{aligned} F^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) &= \mathrm{conv}\ F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) \qquad (5.7) \\ &\subseteq F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) \qquad (5.8) \end{aligned}$$

である。そこで $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ を、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}$ として $\boldsymbol{Y} \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{Z} \in F_0^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ とすると、条件 (I) と (II) が成り立っているので、

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y} \rangle \geq 0, \quad \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$$

である。よって、

$$\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z} \rangle = \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{Z} \rangle \geq 0$$

が成立つ。このことと包含関係 (5.8) より、$\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ なので条件 (IV) が成り立つ。

逆に条件 (IV) が成り立っているとすると、補題 5.3 の (i) から（式 (5.7) から）

$$\boldsymbol{X} \in \mathrm{conv}\ F^{\ell-1}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell-1}(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) \text{ ならば、} \langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ (\ell = 1, \ldots, m)$$

が成り立つ。このことは補題 5.2 の (ii) が成り立っていることになる。よって、補題 5.2 の結果から同値な条件 (ii)、即ち条件 (I) と (II) が成り立つことになり、条件 (IV) と、(I) かつ (II) は同値であることが示された。 □

また、条件 (III) について次の補題が成り立つ。

補題 5.9 (参照：Theorem 3.2 (i) of [6]). もし $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の時は、条件 (III) は

条件 (III)’ 全ての $\boldsymbol{X} \in F_0(\mathbb{K})$ に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

と書き換えることができる。

証明. $F_0(\mathbb{K}) \subseteq F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ なので、(III) が成り立てば (III)’ が成り立つ。そこで逆に (III)’ が成り立てば (III) が成り立つことを数学的帰納法で証明する。初めに $\ell = 0$ の場合について、今 $\boldsymbol{X} \in F_0^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ とすると、$F_0^0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ は錐なので、

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{X}^i, \quad 0 = \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle$$

となる $\boldsymbol{X}^i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が存在する。$\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ なので $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle \geq 0$ である。よって $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0$ となり、各 $\boldsymbol{X}^i$ は

$$\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X}^i \rangle = 0, \ \boldsymbol{X}^i \in \mathbb{K} \ (i = 1, 2, \ldots, r)$$

であるので、$\boldsymbol{X}^i \in F_0^0(\mathbb{K})$ である。$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i \rangle$ であるが、(III)’ の仮定より $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^i \rangle \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ なので、$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ である。

次に、

条件 (III)'　全ての $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ に対して　$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

が成り立っている時に、

条件 (III)'　全ての $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell}(\mathbb{K})$ に対して　$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

が成り立つことを示す。今 $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell}(\mathbb{K})$ とすると、$F_0^{\ell}(\mathbb{K}) \subset F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ なので、$\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell-1}(\mathbb{K})$ となり、帰納法の仮定から $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ である。よって、(III)' が成り立てば (III) が成り立つことになるので、条件 (III) と条件 (III)' は同値である。 □

以上をまとめるために、再度各条件を記述する。

条件 (I) $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ ならば、　$\langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ \ (l = 1, 2, \dots, m)$

条件 (II) $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、　$\langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ (l = 1, 2, \dots, m)$

条件 (III) $\boldsymbol{X} \in F_0(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、　$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

条件 (III)' $\boldsymbol{X} \in F_0(\mathbb{K})$ ならば、$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$

条件 (IV) $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、　$\langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ \ (l = 1, 2, \dots, m)$

条件 (E)'

$$F_o(\mathbb{K}) \subseteq F(\mathbb{K})^{\infty} = \left\{ \boldsymbol{D} \in \mathbb{V} : \begin{array}{l} \text{点列 } (\mu_r, \boldsymbol{X}_r) \in R_+ \times F(\mathbb{K}) \ (r = 1, 2, \dots) \text{ が存在して} \\ r \to \infty \text{ の時 } (\mu_r, \mu_r \boldsymbol{X}_r) \to (0, \boldsymbol{D}) \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

条件 (V) $\boldsymbol{X} \in F_1^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、　$\langle \boldsymbol{H}^{\ell}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ \ (l = 1, 2, \dots, m)$

これらの条件を使って、この章の結果をまとめる。今 $F(\mathbb{K})$ が空ではないとして、条件 (I) かつ (II) が成り立つか、または条件 (IV) が成り立っているとする。

1. 任意の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ について、
   (a) $F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + F_0^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K})$
   (b) 条件 (III) は、$\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件である。
   (c) 条件 (E)' が成り立てば、$\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。
2. $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の時は、
   (a) $F^{\ell}(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F^{\ell}(\mathbb{K}) + \text{conv } F_0^{\ell}(\mathbb{K})$

(b) 条件 (III)' は、$\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件である。

(c) 条件 (E)' が成り立てば、$\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。

3. 全ての $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}^*$ について $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle > 0$ の時は、

(a) $F^\ell(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \mathrm{conv}\ F^\ell(\mathbb{K})$

(b) 常に、$\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。

これらの結果は、3 章で議論した $\mathbb{R}^n_+$ 上での 2 次制約 2 次最適化問題と $\mathbb{S}^n$ 上の完全正値錐最適化問題の関係だけではなく、任意の集合 $D \in \mathbb{R}^n$ 上での 2 次制約 2 次最適化問題も特殊ケースとして含んでいる。またこれらの結果は次の章で多項式最適化問題にも適用できることを説明する。

注意 5.1. 凸化した問題の最適解の集合は、最適値が一致する場合は目的関数が線形なので、元の問題の最適解の集合の凸包になる。よって凸化した問題で求まった最適解が元の問題の最適解に一致するとは限らない。

6　多項式最適化問題とモーメント錐最適化問題

この章では 5 章の結果の一つの適用例として、多項式最適化問題について議論する。まず n 次元実ベクトル空間での多項式最適化問題が、ある q 次元実ベクトル空間での非凸錐上の線形最適化問題に変換できることを示す。そしてその錐を凸化した錐であるモーメント錐上での線形最適化緩和問題の最適値と元の問題の最適値について 5 章の結果を適用する。

6.1　表記法と記号

まずこの章で新たに使われる表記法や記号について説明する。
特に記述がない限り n 次元ユークリッド空間（実ベクトル空間）での議論を仮定する。n 次元ユークリッド空間の $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の内積を通常の $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ とする。$\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}_+^n$ について $|\boldsymbol{\beta}|_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i$ とする。$\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ は n 変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の実数多変数の多項式関数の集合を表す。多項式 $f \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ は $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{H}} f_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ と表現される。ここで、$\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}_+^n$ は空でない有限集合で、$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ で、各単項式は $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} = \Pi_{i=1}^n x_i^{\beta_i} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$ と表され、$f_{\boldsymbol{\beta}}$ $(\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{H})$ はその $f(\boldsymbol{x})$ の単項式 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ の係数である。またもし $\boldsymbol{0} \in \mathcal{H}$ ならば、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について、$f_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}}$ は多項式 $f \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ の定数項 $f_{\boldsymbol{0}}$ を表す。多項式 f のサポートを $\mathrm{supp}(f) := \{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{H} : f_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ と定義する。即ち $\mathrm{supp}(f)$ は多項式 f に含まれる単項式の種類を表す集合になる。また多項式 f の最大次数を $\deg(f) := \max\{|\boldsymbol{\beta}|_1 : \boldsymbol{\beta} \in \mathrm{supp}(f)\}$ で定義する。今 $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{\beta}^1, \boldsymbol{\beta}^2, \ldots, \boldsymbol{\beta}^p\}$ を空でない有限な $\mathbb{Z}_+^n$ の部分集合としたとき、多項式の集合を $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}, \mathcal{H}] := \{f \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] : \mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{H}\}$ と定義する。各 $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{H}$ に対応する座標軸を持った $|\mathcal{H}|$ 次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^{\mathcal{H}}$ と表す。この時 $(z_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})$ で $\mathbb{R}^{\mathcal{H}}$ の $|\mathcal{H}|$ 次元列ベクトルを表し、ベクトルの i 番目の各要素は $\boldsymbol{\beta}^i \in \mathcal{H}$ に対応する。今 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の時、$(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})$ は i 番目の要素が $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^i}$ である単項式を並べた $|\mathcal{H}|$ 次元列ベクトルとする。以上から多項式 $f \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}, \mathcal{H}]$ は、多項式関数 $f(\boldsymbol{x})$ の各単項式の係数ベクトルを $(f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{H}}$ とした時、$f(\boldsymbol{x}) = \langle (f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \rangle$ と表すことができる。

前述の表記法、記号について簡単な多項式の例で説明する。今 $\widehat{f}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{u}]$ を $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ 上での下記の多項式とする。

$$\widehat{f}(\boldsymbol{u}) = 2u_1^2u_2u_3 + 3u_1u_2^2 - u_2^2u_3 + 5u_3^2 - 2u_1 + 3. \tag{6.1}$$

ここで $n=3$ で $\deg(\widehat{f})=4$ である。また、$|\mathcal{H}|=6$ で、

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{H}| &= \operatorname{supp}(\widehat{f}) = \{(2,1,1),(1,2,0),(0,2,1),(0,0,2),(1,0,0),(0,0,0)\}, \\
(\widehat{f}_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) &= (2,\ 3,\ -1,\ 5,\ -2,\ 3), \\
(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) &= (u_1^2u_2u_3,\ u_1u_2^2,\ u_2^2u_3,\ u_3^2,\ u_1,\ 1), \\
\widehat{f}(u) &= (\widehat{f}_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})^T(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) = \langle(\widehat{f}_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}),(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})\rangle
\end{aligned}
$$

となる。

6.2 多項式最適化問題

多項式最適化問題をモーメント錐による緩和問題に変換することについて理論的な考察をするために、以下の特殊な形の多項式最適化問題のモデルを考える。今 $\widehat{\mathbb{K}}$ を閉錐（凸とは限らない）として、

$$
\zeta \ := \ \inf \left\{ f(\boldsymbol{x}) \ \middle| \ \begin{array}{l} h_0(\boldsymbol{x})=1,\ \boldsymbol{x}\in\widehat{\mathbb{K}}, \\ h_k(\boldsymbol{x})=0\ (k=1,2,\ldots,m) \end{array} \right\}. \tag{6.2}
$$

次にこの最適化問題の制約領域 G とそれに関連する集合 G^0 を

$$
\begin{aligned}
G &= \left\{ f(\boldsymbol{x}) \ \middle| \ \begin{array}{l} h_0(\boldsymbol{x})=1,\ \boldsymbol{x}\in\widehat{\mathbb{K}}, \\ h_k(\boldsymbol{x})=0\ (k=1,2,\ldots,m) \end{array} \right\}, \\
G_0 &= \left\{ f(\boldsymbol{x}) \ \middle| \ \begin{array}{l} h_0(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{x}\in\widehat{\mathbb{K}}, \\ h_k(\boldsymbol{x})=0\ (k=1,2,\ldots,m) \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

とする。重要なことは、この問題 (6.2) について $f,\ h_k \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]\ (k=1,2,.,m)$ に対して以下を仮定することである。

$$
f,\ h_k \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]\ (k=0,1,\ldots,m)\ \text{は全て次数}\ \tau \geq 1\ \text{を持った同次多項式である。} \tag{6.3}
$$

ここで、$f \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ が同次多項式であるとは次の条件を満たす場合とする。

$$
\text{全ての}\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \text{と}\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{に対して}\ \ f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^\tau f(\boldsymbol{x}) \tag{6.4}
$$

下記の一般的な非同次な多項式最適化問題はこの特殊な同次多項式最適化問題 (6.2) に変換することができる。今、$D \in \mathbb{R}^{n-1}$ とする。

$$
\widehat{\zeta} := \inf \left\{ \widehat{f}(\boldsymbol{u}) \ \middle| \ \widehat{h}_k(\boldsymbol{u}) = 0\ (k=1,2,\ldots,m),\ \boldsymbol{u}\in D \right\}. \tag{6.5}
$$

ここで $\widehat{f}(\boldsymbol{u}),\ \widehat{h}_k(\boldsymbol{u})\ (k=1,2,\ldots,m) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ は一般的な非同次な多項式である。もしこれらの多項式が全て 2 次多項式の場合は 3 章で扱った一般 2 次制約 2 次最適化問題になる。そしてこの 2 つのモデル (6.2) と (6.5) は 3.3 節での 2 次制約 2 次最適化問題の拡張になっている。

次にまず一般の多項式最適化問題 (6.5) が同次多項式多項式最適化問題 (6.2) に変換できることを説明する。

6.3 一般多項式最適化問題の同次多項最適化問題への変換

今 $\mathcal{H}_{\widehat{\zeta}} \subset \mathbb{Z}_+^{n-1}$ を $\mathcal{H}_{\widehat{\zeta}} = \mathrm{supp}(\widehat{f}) \cup (\cup_{k=1}^m \mathrm{supp}(\widehat{h}_k))$ として、$\left|\mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}\right| = q \in \mathbb{Z}_+$ とする。また $\tau_0 = \max.\left\{\deg(\widehat{f}),\ \deg(\widehat{h}_1),\ \deg(\widehat{h}_2),\ \ldots,\ \deg(\widehat{h}_m)\right\}$ とする。こうすると、q はこの多項式最適化問題 (6.5) に登場する単項式の種類の数を表し、各 $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}$ はそれぞれの単項式 $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} = u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \cdots u_n^{\beta_{n-1}}$ を意味することになる。そして τ_0 はこの問題に登場する単項式の中で一番大きい次数になる。また表記法と記号で説明したように、この問題の多項式 $\widehat{f}(u),\ \widehat{h}_k(u) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{u}, \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ は

$$\widehat{f}(u) = \langle (\widehat{f}_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}), (\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}) \rangle, \tag{6.6}$$

$$\widehat{h}_k(u) = \langle ((\widehat{h}_k)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}), (\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}) \rangle\ (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.7}$$

と表すことができる。ここで $(\widehat{f}_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}),\ ((\widehat{h}_k)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}})(k = 1, 2, \ldots, m) \in \mathbb{R}^q$ は各多項式の係数が作る q 次元の定数ベクトルである。また $(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}})$ は、$\mathcal{H}_{\widehat{\zeta}} = \left\{\boldsymbol{\beta}^1, \boldsymbol{\beta}^2, \ldots, \boldsymbol{\beta}^q\right\}$ とした時、$(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}) = (\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}^1}, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}^2}, \ldots, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}^q})$ の q 次元の変数ベクトルになる。

ここで次元を、最初の変数として x_0 を一つ増やした $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を考える。具体的には $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$ で $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n$ もしくは $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ と表される。今 $\tau \geq \tau_0$ として、各 $\boldsymbol{\beta}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ について $\left|\boldsymbol{\beta}^i\right|_1 = \tau_i$ とする。この時、対応する各単項式 $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}^i}$ を新たに $x_0^{\tau-\tau_i}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}^i}$ と置き替える。多項式 $\widehat{f}(\boldsymbol{u}),\ \widehat{h}_k(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{u}, \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ の対応する各単項式を置き換えて新たに $f(\boldsymbol{x}),\ h_k(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}, \mathcal{H}_{\widehat{\zeta}}]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ を作り変えて、$x_0^\tau = 1, x_0 \in \mathbb{R}_+$ の制約を加えるとそれぞれの多項式は全て同次多項式に変換できる。

このことを説明するために変換の一例として (6.1) の非同次多項式多項式 $\widehat{f}(\boldsymbol{u})$ を同次多項式多項式 $f(\boldsymbol{x})$ に変換する。この時 $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^4$ で今 $\tau = 4$ とすると、変換された同次多項式多項式 $f(\boldsymbol{x})$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_0, \boldsymbol{u}) = 2u_1^2 u_2 u_3 + 3x_0 u_1 u_2^2 - x_0 u_2^2 u_3 + 5x_0^2 u_3^2 - 2x_0^3 u_1 + 3x_0^4$$

という式になり、$\widehat{f}(\boldsymbol{u}) = f(1, \boldsymbol{u})$ となっていることがわかる。そして $(\widehat{f}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u} \in D)$ と $(f(\boldsymbol{x}),\ x_0^\tau = 1,\ \boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{u}),\ x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \boldsymbol{u} \in D)$ は同値になる。

この操作を $\widehat{f}(\boldsymbol{u}),\ \widehat{h}_k(\boldsymbol{u})$ $(k = 1, 2, \ldots, m) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ の全ての多項式関数に適用してそれぞれ $f(\boldsymbol{x}),\ h_k(\boldsymbol{x})$ $(k = 1, 2, \ldots, m) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ とする。それに追加の制約式として $h_0(\boldsymbol{x}) = x_0^\tau = 1$ とする。また $\widehat{\mathbb{K}} = \mathrm{cl}\ \{(x_0, x_0\boldsymbol{u}) : x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \boldsymbol{u} \in D\}$ とすると、$\widehat{\mathbb{K}}$ は閉錐であり、結局非同次多項式最適化問題 (6.5)

$$\widehat{\zeta} = \inf \left\{ \widehat{f}(\boldsymbol{u}) \;\middle|\; \widehat{h}_k(\boldsymbol{u}) = 0\ (k = 1, 2, \ldots, m),\ \boldsymbol{u} \in D \right\}$$

は同値な同次多項式最適化問題 (6.2)

$$\zeta \ := \ \inf \left\{ f(\boldsymbol{x}) \ \middle| \ \begin{array}{l} h_0(\boldsymbol{x}) = 1, \ \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}, \\ h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}$$

に変換できることがわかる。よって以降同次多項式最適化問題 (6.2) とそれに対応するモーメント錐最適化緩和問題について考察する。

6.4 同次多項式最適化問題とモーメント錐最適化緩和問題

ここからは $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の添字について通常の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする。$\mathcal{H}_{min} \subset \mathbb{Z}^n_+$ を $\mathcal{H}_{min} = \mathrm{supp}(f) \cup (\cup_{k=1}^m \mathrm{supp}(h_k))$ とする。また $\mathcal{H}_{\max} = \left\{ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}^n_+ : |\boldsymbol{\beta}|_1 = \tau \right\}$ として、$\mathcal{H}_{\min} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{\max}$ となる $\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}^n_+$ を選ぶ。$|\mathcal{H}| = q \in \mathbb{Z}_+$ とする。全ての $f, \ h_k \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \ (k = 0, 1, \ldots, m)$ は同次多項式なので $\tau = \deg(f) = \deg(h_0) = \deg(h_1) =, \ \ldots, = \deg(h_m)$ とする。以前説明したように q はこの多項式最適化問題 (6.2) に登場する同次単項式の種類の数を表し、各 $\boldsymbol{\beta}^i \in \mathcal{H}_f$ でそれぞれの単項式 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^i} = x_1^{\beta_1^i} x_2^{\beta_2^i} \cdots x_n^{\beta_n^i}$ を意味する。ここで､各多項式関数 $f, \ h_k \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \ (k = 0, 1, \ldots, m)$ を 6.1 節で説明した表記法で表すと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \langle (f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \rangle, \\ h_k(\boldsymbol{x}) &= \langle ((h_k)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \rangle \ (k = 0, 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

であるので、結局多項式最適化問題 (6.2) は、

$$\zeta_{COP} = \inf . \left\{ \langle (f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \rangle \ \middle| \ \begin{array}{l} \langle ((h_0)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \rangle = 1, \\ \langle ((h_k)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \rangle = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, m) \\ (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^q \end{array} \right\} \tag{6.8}$$

と書き換えることができる。ここで $(f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), \ ((h_k)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{R}^q \ (k = 0, 1, \ldots, m)$ で、

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \left\{ (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{R}^q \ \middle| \ \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}} \right\} \\ &= \left\{ (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^1}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^2}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^q}) \in \mathbb{R}^q \ \middle| \ \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}, \ \boldsymbol{\beta}^i \in \mathcal{H} \ (i = 1, 2, \ldots, q) \right\} \end{aligned}$$

である。今全ての $\boldsymbol{\beta}^i \in \mathcal{H}$ について $\left|\boldsymbol{\beta}^i\right|_1 = \tau$ であるので、全ての $\boldsymbol{\beta}^i \in \mathcal{H}$ に対して単項式 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^i}$ は同じ次数 τ である。よって $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{K}$ の時、$\lambda \geq 0$ に対して明らかに $\lambda \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ となり、$\mathbb{K}$ は錐であることがわかる。実際、$\lambda X_i = \lambda x_1^{\boldsymbol{\beta}_1^i} x_1^{\boldsymbol{\beta}_2^i} \ldots x_1^{\boldsymbol{\beta}_n^i} = \sqrt[\tau]{\lambda} x_1^{\boldsymbol{\beta}_1^i} \sqrt[\tau]{\lambda} x_1^{\boldsymbol{\beta}_2^i} \ldots \sqrt[\tau]{\lambda} x_1^{\boldsymbol{\beta}_n^i} = (\sqrt[\tau]{\lambda} \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\beta}^i}$ となるなので、$\lambda \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ である。

また、錐 $\mathbb{K}$ は $\widehat{\mathbb{K}}$ が閉錐なので、閉錐である。実際、今任意の $\boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ について、$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^1}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^2}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^q})$ とする。$\widehat{\mathbb{K}}$ が閉錐なので、各 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^i} (i = 1, 2, \ldots, q), \ \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}$ に

ついて、$j \to \infty$ の時、$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}^i}$ に収束する点列 $\{\boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{\beta}^i} : \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}},\ j = 1, 2, \dots\}$ が存在する。よって、$\boldsymbol{X}_j = (\boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{\beta}^1}, \boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{\beta}^2}, \dots, \boldsymbol{x}_j^{\boldsymbol{\beta}^q})$ とすると、$j \to \infty$ の時、点列 $\{\boldsymbol{X}_j \in \mathbb{K} : j = 1, 2, \dots\}$ は $\boldsymbol{X}$ に収束する。よって、錐 $\mathbb{K}$ は閉錐である。

ただし一般的には凸ではない。例えば $n = 2,\ q = 3$ の場合で、$\mathbb{K} = \left\{(x_1^2,\ x_2^2,\ x_1x_2) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2\right\}$ とする。$\boldsymbol{a} = (1, 0, 0) \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{b} = (0, 1, 0) \in \mathbb{K}$ であるが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の凸結合である $0.5\boldsymbol{a} + 0.5\boldsymbol{b} = (0.5, 0.5, 0)$ は明らかに $\mathbb{K}$ には含まれないのでこの $\mathbb{K}$ は非凸である。

今、ここで

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), \\
\boldsymbol{Q} &= (f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), \\
\boldsymbol{H}^0 &= ((h_0)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}), \\
\boldsymbol{H}^k &= ((h_k)_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})\ (k = 1, 2, \dots, m)
\end{aligned}
$$

とすると最適化問題 (6.8) は下記の非凸錐上の線形制約最適化問題に変換できる。

$$
\zeta(\mathbb{K}) = \inf.\left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0\ (k = 1, 2, \dots, m) \\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^q \end{array} \right\}. \tag{6.9}
$$

ここで $\mathbb{K} = \left\{(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{R}^q \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}\right\}$ なので、今

$$
\mathbb{M}(\mathcal{H}) = \mathrm{conv}\ \mathbb{K} = \mathrm{conv}\ \left\{(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{R}^q \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}\right\}
$$

としてこの錐をモーメント錐と呼ぶ。

6.5 最適値一致について

以上より、最適化問題 (6.9) は、5 章での最適化問題 (5.3) と全く同じ問題に変換できたことになる。よって 5 章で議論した錐線形制約最適化問題 (5.3) に対する結果が全て当てはまる。そこで 5 章で定義した集合をこのケースに適用する。

そのためにまず元の多項式最適化問題の制約領域について下記の集合を定義する。

$$
\begin{aligned}
G^0 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}} \mid h_0(\boldsymbol{x}) = 1,\right\}, \\
G^\ell &= \left\{\boldsymbol{x} \in G^{\ell-1} \mid h_\ell(\boldsymbol{x}) = 0,\right\}\ (\ell = 1, 2, \dots, m), \\
G_0^0 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}} \mid h_0(\boldsymbol{x}) = 0,\right\}, \\
G_0^\ell &= \left\{\boldsymbol{x} \in G_0^{\ell-1} \mid h_\ell(\boldsymbol{x}) = 0,\right\}\ (\ell = 1, 2, \dots, m).
\end{aligned}
$$

この定義から、$G = G^m$、また $G_0 = G_0^m$ である。

今 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とした時 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{K}$ とする。そしてある同次多項式 $g(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}, \mathcal{H}]$ について、その各単項式の係数ベクトルを $(f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})$ とする。そこで $\boldsymbol{G} = (f_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})$ とすると、$g(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{X} \rangle$ である。

このことから、$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H})$ なので、

$$\boldsymbol{X} \in F^l(\mathbb{K}) \quad \text{ならば} \quad \langle \boldsymbol{H}^i, \boldsymbol{X} \rangle = h_i(\boldsymbol{x}) \ (i = 0, 1, \ldots, l)$$

が成立つ。また、$\boldsymbol{x} \in G^l$ ならば、$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H}) \in \mathbb{K}$ は $\boldsymbol{X} \in F^l(\mathbb{K})$ であり、また明らかに conv $F_0^{l-1}(\mathbb{K}) \subseteq F_0^{l-1}(\text{conv } \mathbb{K}) = F_0^{l-1}(\mathbb{M})$ である。

そこで 5.3.2 節の階層的共正値条件

条件

(I) $\boldsymbol{X} \in F^{\ell-1}(\mathbb{K})$ ならば、 $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ \ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

(II) $\boldsymbol{X} \in F_0^{\ell-1}(\text{conv } \mathbb{K})$ ならば、 $\langle \boldsymbol{H}^\ell, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0 \ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

は、条件としては少し強くなるが

条件

(1) $\boldsymbol{x} \in G^{\ell-1}$ ならば、 $h_\ell(\boldsymbol{x}) \ \geq 0 \ \ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

(2) $\boldsymbol{x} \in \text{conv } G_0^{\ell-1}$ ならば、 $h_\ell(\boldsymbol{x}) \ \geq 0 \ (\ell = 1, 2, \ldots, m)$

と置き換えることができる。言い換えると、条件 (1) と (2) は条件 (I) と (II) を満たしている。

以上より、同次多項式最適化問題 (6.2) と最適値が一致する非凸錐線形最適化問題 (6.9) の凸化について、5 章で議論した錐線形制約最適化問題 (5.3) に対する結果が全て当てはまるので、このケースに適用する。

今 $F(\mathbb{K})$ が空ではないとして、条件 (1) かつ (2) が成り立つか、または条件 (IV) が成り立っているとする。

1. 任意の $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{V}$ について、
   (a) $F^\ell(\mathbb{M}) = \text{conv } F^\ell(\mathbb{K}) + F_0^\ell(\mathbb{M})$
   (b) 条件 (III) は、$\zeta(\mathbb{M}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件である。
2. $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の時は、

(a) $F^\ell(\mathbb{M}) = \mathrm{conv}\ F^\ell(\mathbb{K}) + \mathrm{conv}\ F_0^\ell(\mathbb{K})$

(b) 条件 (III)' は、$\zeta(\mathbb{M}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件である。

3. 全ての $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{X} \in \mathbb{K}$ について $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle > 0$ の時は、

(a) $F^\ell(\mathbb{M}) = \mathrm{conv}\ F^\ell(\mathbb{K})$

(b) 常に、$\zeta(\mathbb{M}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。

今 $\boldsymbol{x} \in G$ ならば $h_0(\boldsymbol{x}) \geq 0$ とすると、問題のサイズが大きくはなるが、理論的には元の問題 (6.2) は次のように変換でき、2τ 次同次多項式最適化問題に書き替えることができる。

$$\zeta_2 \ := \ \inf \left\{ f(\boldsymbol{x})h_0(\boldsymbol{x}) \ \middle| \ \begin{array}{l} (h_0(\boldsymbol{x}))^2 = 1, \ \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}, \\ (h_k(\boldsymbol{x}))^2 = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}. \tag{6.10}$$

この問題の最適値は明らかに問題 (6.2) と同値である。実際、問題 (6.2) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とすると、$\boldsymbol{x}^*$ は問題 (6.11) の許容解で、また最適解であることがわかる。そこで新たに、$f(\boldsymbol{x})h_0(\boldsymbol{x})$ を $f(\boldsymbol{x})$ に置き換え、$(h_k(\boldsymbol{x}))^2$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ を $h_k(\boldsymbol{x})$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ に置き換えると、$h_k(\boldsymbol{x})$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ は常に $h_k(\boldsymbol{x}) \geq 0$ なので、$h(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^m h_k(\boldsymbol{x})$ とすると、

$$\zeta_2 \ := \ \inf \left\{ f(\boldsymbol{x}) \ \middle| \ \begin{array}{l} h_0(\boldsymbol{x}) = 1, \ \boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{K}}, \\ h(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array} \right\}. \tag{6.11}$$

と書き換えることができる。ここで常に $h(\boldsymbol{x}) \geq 0$ なので、多項式最適化問題 (6.2) と同値な問題 (6.11) は条件 (1) と (2) を自動的に満たしていることになる。よって理論的には問題 (6.5) の型をした全ての多項式最適化問題について、条件 (III) が $\zeta(\mathbb{M}) = \zeta(\mathbb{K})$ となる必要十分条件である事になる。

7 数値例

ここでは今までの議論を説明するための簡単な数値実験の結果について紹介する。まず次の非常に簡単な 2 変数での 0-1 条件下での 2 次関数最小化問題について考える。この問題は Kim, Kojima [28] による例題を使用する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^2 \subset \mathbb{R}^2. \end{array} \tag{7.1}$$

ここで

$$\widehat{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

である。この問題の制約領域は 0-1 変数 2 つなので 4 点からなり、最適値は -8 であることがわかる。最適解は 3 つあり、$(0,1),(1,0),(1,1)$ である。

いくつかの錐最適化問題への定式化を行いソルバーを使って最適値、最適解を求めた。それぞれの結果に対する今までの議論との関係を説明する。（ソルバーとして Matlab の SeDuMi を使用した。）

7.1 階層的共正値条件を満たさない定式化

この例では 0-1 条件を次の連続関数で定式化した場合を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & x_1(1-x_1)=0,\ x_2(1-x_2)=0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+. \end{array}$$

全ての式を 2 次形式にするために新たに変数 x_0 を導入する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & x_1(x_0-x_1)=0,\ x_2(x_0-x_2)=0, \\ & x_0^2=1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+. \end{array}$$

ここで新たな $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1 \boldsymbol{H}^2$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{H}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

として、結局下記の完全正値最適化問題に定式化する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\ \text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\ & \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{S}^3. \end{array}$$

明らかに $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2$ が作る制約条件は階層的共正値条件を満たしていない。この問題を、完全正値条件の替わりに半正定値条件にしてソルバーで解くと最適値は -9 となり真の最適値 -8 とはギャップがあることがわかる。そしてその時の最適解 $\boldsymbol{X}^*$ は

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 & 0.375 \\ 0.75 & 0.375 & 0.75 \end{bmatrix}$$

であることがわかる。この解は半正定値でかつ $\mathbb{S}^3$ の非負半正定値でもある。補題 2.11 より $\mathbb{S}^3$ の空間では非負半正定値錐は完全正値行列錐に等しいので、この解は完全正値行列でもあることがわかる。よって最適値にギャップがある理由は、階層的共正値条件を満たしていないことである。

7.2　完全正値錐と半正定値錐

そこで、7.1 節の例に階層的共正値条件を満たすように各 0-1 変数にスラック変数を追加した下記問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & (x_1 + x_3 - x_0)^2 = 0,\ (x_2 + x_4 - x_0)^2 = 0, \\ & x_1(x_0 - x_1) = 0,\ x_2(x_0 - x_2) = 0, \\ & x_0^2 = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_+. \end{array}$$

この制約条件の 1 行目の 2 つの制約式は常に非負なので足して 1 本にして良い。また 2 行目の 2 つの制約式も 1 行目の制約を満たす実行可能解に対して階層的に非負なの

で足して 1 本にできる。以上から、新たな $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{H}^2$ を

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{H}^1 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

とおけば元の問題は下記の完全正値最適化問題に定式化できる。

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\
\text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\
& \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{S}^5.
\end{array}
$$

この問題についても完全正値条件の替わりに半正定値条件にしてソルバーで解くと、最適値は -9 となり真の最適値 -8 とはギャップがあることがわかる。そしてその最適解 $\boldsymbol{X}^*$ は

$$
\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & 0.75 & 0.375 & 0 & 0.375 \\ 0.75 & 0.375 & 0.75 & 0.375 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.375 & 0.25 & -0.125 \\ 0.25 & 0.375 & 0 & -0.125 & 0.25 \end{bmatrix}
$$

である。この場合は半正定値ではあるが非負半正定値にはなっていない。よってこの場合、最適値にギャップがある原因は完全正値錐 $\mathbb{C}$ を半正定値錐 $\mathbb{S}^5_+$ で緩和したためである。

7.3　完全正値錐と非負半正定値錐 1

そこで、7.2 節の定式化を非負半正定値の条件下で解くことを考える。非負半正定値錐最適化問題は半正定値錐最適化問題に変換できる。最も単純な方法は、確実ではあるが問題のサイズが非常に大きくなる方法で、次のような方法である。それは 2.2 節で説明した方法で、全ての対称行列の非対角成分に非負条件 $X_{ij} \geq 0$ $(1 \leq i < j \leq n)$ を $n(n-1)/2$ 個の制約式を追加することである。そのためまず対称行列の非対角成分

の個数だけ行列のサイズを広げ、各非対角成分にサイズを広げた対角成分を対応させて、それらが等しいという制約条件を追加する。こうすることによって行列の要素を非負に保証することができる。具体的には、今元の問題のサイズが $n \times n$ とした時、新たな問題のサイズを $m = n + n(n-1)/2$ として $m \times m$ に広げる。そして $i < j$ で $X_{ij} = X_{kk}$ という制約式を $n(n-1)/2$ 本追加する。

7.2 節の定式化の場合は、元の行列のサイズ 5×5 を 15×15 に広げ、制約式を 10 本追加してソルバーで解いた。その結果、7.2 節の定式化による緩和問題の最適値は -8 であり、元の問題の最適値と一致している。$\mathbb{C} \subset (\mathbb{S}^{15} \cap \mathbb{N}^{15})$ なので、ここで求まった最適解は非負半正定値行列でありかつ完全正値錐行列である可能性があることになる。

7.4　完全正値錐と非負半正定値錐 2

次に、今までの元の問題と非常に似た問題であるにもかかわらず非負半正定値錐緩和では元の問題の最適値とは一致しないケースについて説明する。

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^3 \subset \mathbb{R}^3. \end{array} \tag{7.2}$$

ここで

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

である。この問題の制約領域は $\{0,1\}^3$ なので 8 点からなる。最適値は -8 で、最適解は $(0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0)$ の 6 つである。

この問題に対して、7.2 節と全く同様の定式化を行う。2 次形式にするための変数とスラック変数 2 つを追加して 7×7 の対称行列空間の問題に変換する。そこで、新た

な $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{H}^2$ を

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{H}^1 &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

とおいて元の問題を下記の完全正値最適化問題に定式化する。

$$
\begin{array}{ll}
\text{min.} & \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \\
\text{sub. to} & \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \langle \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \\
& \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{S}^7.
\end{array}
$$

ここで $\boldsymbol{H}^1$ は半正定値で $\boldsymbol{H}^2$ は 7.2 節と同様階層的共正値条件を満たしている。この問題についても完全正値条件の替わりに半正定値条件にしてソルバーで解くと、最適値は -9 となり真の最適値 -8 とはギャップがあることがわかる。そしてその最適解 $\boldsymbol{X}^*$ は

$$
\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0.375 & 0.375 \\ 0.5 & 0.125 & 0.5 & 0.125 & 0.375 & 0 & 0.375 \\ 0.5 & 0.125 & 0.125 & 0.5 & 0.375 & 0.375 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.375 & 0.375 & 0.5 & 0.125 & 0.125 \\ 0.5 & 0.375 & 0 & 0.375 & 0.125 & 0.5 & 0.125 \\ 0.5 & 0.375 & 0.375 & 0 & 0.125 & 0.125 & 0.5 \end{bmatrix}
$$

であり、半正定値だけでなく非負半正定値であることがわかる。このことは、この最適解の行列は $\mathbb{S}^7$ の完全正値行列ではない非負半正定値行列であることを意味している。

7.5　ランク 1 最適解の数値例

次の主双対錐最適化問題のペアを考える。

$$\zeta^p(\mathbb{C} \cap \mathbb{S}^n_+) \ := \ \inf\left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \ \middle| \ \begin{array}{l} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}, \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}, \quad (7.3)$$

$$\zeta^d(\mathbb{C}^* + \mathbb{S}^n_+) \ := \ \sup\left\{ y_0 \ \middle| \ \begin{array}{l} \boldsymbol{Q} - y_0 \boldsymbol{H}^0 - \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{H}^i = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{Z}, \\ \boldsymbol{W} \in \mathbb{C}^*, \ \boldsymbol{Z} \in \mathbb{S}^n_+ \end{array} \right\}. \quad (7.4)$$

この両方の問題で半正定値条件は冗長な条件である。即ち、$\zeta^p(\mathbb{C} \cap \mathbb{S}^n_+) = \zeta^p(\mathbb{C})$ であり、また $\zeta^d(\mathbb{C}^* + \mathbb{S}^n_n) = \zeta^d(\mathbb{C}^*)$ である。このことは、問題 $\zeta^p(\mathbb{C} \cap \mathbb{S}^n_+)$ は 5 章の問題 (5.3) を凸化した $\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ と全く同じ問題なので、問題 (7.3)、問題 (7.4) は問題 $\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ の主双対問題のペアだということである。

この主双対問題に対して、強双対定理が成り立ち、最適解が存在してそれぞれ $\boldsymbol{X}^*, y_0^*, \boldsymbol{Z}^*, \boldsymbol{W}^*$ と仮定する。これらの最適解について、簡単に

$$\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}^* \rangle - y_0^* = 0, \ \langle \boldsymbol{W}^*, \boldsymbol{X}^* \rangle = 0, \ \langle \boldsymbol{Z}^*, \boldsymbol{X}^* \rangle = 0$$

であることがわかる。そこで、この $\boldsymbol{W}^*$ を使って次の主双対半正定値最適化問題を考える。

$$\inf\left\{ \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \ \middle| \ \begin{array}{l} \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1, \ \langle \boldsymbol{W}^*, \boldsymbol{X} \rangle = 0, \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \\ \langle \boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{X} \rangle = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right\}, \quad (7.5)$$

$$\sup\left\{ y_0 \ \middle| \ \boldsymbol{Q} - y_0 \boldsymbol{H}^0 - \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{H}^i - y_{m+1} \boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{Z} \in \mathbb{S}^n_+ \right\}. \quad (7.6)$$

ここで $\boldsymbol{W}^*$ として次のものを考える。

$$\boldsymbol{W}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

今この $\boldsymbol{W}^*$ を使って、7.4 節の $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{H}^2$ で問題 (7.5) をソルバーで解くと、最

適値は元の問題の -8 と一致し、最適解 $\boldsymbol{X}^*$ はランクが 1 の

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が求まる。この最適解の対角要素を見ると、元の問題の最適値である $(0, 0, 1)$ を示している。これは偶然に選んだ $\boldsymbol{W}^*$ が最適解を導く $\boldsymbol{W}^*$ だったということであるが、この半正定値最適化問題への定式化が、$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{W}$ を交互に固定して反復する新たな解法に結びつく可能性があると考えられる。

8　おわりに

8.1　本論文のまとめ

本論文は、小島教授、Kim 教授、Toh 教授との一連の共同研究 [3, 4, 5, 6, 7, 8] での主に非凸錐上での線形最適化問題の凸化の研究が基礎になっている。

本論文の成果をまとめると次の 2 点である。

本論文では、まず 3 章で 2 次制約 2 次最適化問題とその緩和問題である完全正値錐最適化問題の最適値の一致条件について考察を行なった。次に 4 章でこの結果を適用できる例として、0-1 混合線形制約 2 次最適化問題への適用を考察した。

3 章での、2 次制約 2 次最適化問題とその緩和問題としての完全正値最適化問題の最適値に関する考察の基本的な考え方は以下に基づいている。まず元の問題を非凸錐上の目的関数も制約式も線形な等価な最適化問題に変換する。この変換された問題の制約領域は非凸集合であるが、目的関数が線形なので制約領域全体の凸包をとっても最適値は変わらない。そこで非凸錐を凸化してできた完全正値最適化問題の制約領域と、元の問題の制約領域全体の凸包をとった集合の関係を考察した。もしこの 2 つの集合が等しければ目的関数が同じなので最適値が一致することになる。

5 章では、この考え方を、内積が導入された一般のベクトル空間の任意の非凸錐 $\mathbb{K}$ 上での線形最適化問題の凸化に拡張した。錐線形最適化問題 $\zeta(\mathbb{K})$(5.3) を定義し、その制約領域 $F(\mathbb{K})$(5.1) と、関連する集合 $F_0(\mathbb{K})$(5.2) を定義する。最終的に本論文の一つ目の主張は以下のように要約される。

1. $\boldsymbol{H}^0 \in \text{int } \mathbb{K}^*$ の時は、
    (a) $F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K})$
    (b) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ が成り立つ。
2. $\boldsymbol{H}^0 \in \mathbb{K}^*$ の時は、
    (a) $F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + \text{conv } F_0(\mathbb{K})$
    (b) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件は、
    全ての $\boldsymbol{X} \in F_0(\mathbb{K})$ に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ である。
3. $\boldsymbol{H}^0 \notin \mathbb{K}^*$ の時は、
    (a) $F(\text{conv } \mathbb{K}) = \text{conv } F(\mathbb{K}) + F_0(\text{conv } \mathbb{K})$
    (b) $\zeta(\text{conv } \mathbb{K}) = \zeta(\mathbb{K})$ である必要十分条件は、
    全ての $\boldsymbol{X} \in F_0(\text{conv } \mathbb{K})$ に対して $\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ である。

先行研究では、いくつかの非凸最適化問題を最適値が一致する完全正値最適化問題に定式化できることを示した。本論文のこの結果 1 から 3 は、先行研究の結果が対称行列空間での完全正値錐という特定の錐の性格によるものではなく、一般ベクトル空間での任意の非凸錐上での線型最適化問題の最適値 $\zeta(\mathbb{K})$ と、それを凸化した凸緩和問題の最適値 $\zeta(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ との関係に帰着できることを示した。

例えば、もしある非凸最適化問題が非凸錐上の線形最適化問題に変換できたとする。元の問題とこの非凸錐上の最適化問題を凸化した凸緩和問題にこの理論が適用できることになる。最適値が一致する凸最適化問題に変換できれば、凸最適化問題では局所解が大域解になっているので、局所解を求めることに集中すれば良いことになる。

その応用例として、6 章では 5 章での成果を、多項式最適化問題とモーメント錐に適用した例について説明した。まず一般の多項式最適化問題 (6.5) は変数を 1 つ増やすことで同次多項式最適化問題 $\zeta(6.2)$ に変換できることを示した。そしてその問題 $\zeta(6.2)$ の同次単項式の種類を q 個とすると、この問題 $\zeta(6.2)$ は、q 次元実数空間での等価な凸とは限らない錐上の線形最適化問題に定式化できることを示した。この錐を凸化した錐はモーメント錐と呼ばれ、この凸化した錐上の緩和問題と元の問題に対しても、5 章での議論を適用できることを示した。

本論文のもう一つの成果は、4 章で議論した 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題についてである。4 章では、まず 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題 (4.1) を 2 本の制約式からなる、等価な非凸錐上での線形最適化問題 $\eta^p(\mathbb{K})(4.12)$ に定式化できることを示した。この問題に対して、非凸錐の双対錐を使って双対問題 $\eta^d(\mathbb{K})(4.13)$ を導入する。そしてこれら主双対問題のラグランジュ緩和問題 $\eta^p(\lambda,\mathbb{K})$ と $\eta^d(\lambda,\mathbb{K})$ を導出し、それぞれの主問題に対する完全正値緩和問題と、双対問題に対する共正値緩和問題を定式化した。即ち、完全正緩和問題の問題 $\eta^p(\mathbb{C})(4.16)$ と問題 $\eta^d(\mathbb{C})(4.18)$、及びラグランジュ緩和問題としての問題 $\eta^p(\lambda,\mathbb{C})(4.17)$ と問題 $\eta^d(\lambda,\mathbb{C})(4.19)$ である。そして、完全正値・共正値緩和問題については最適値が一致すること、またラグランジュ緩和問題についてはそのラグランジュ定数を大きくしていくことによって緩和問題の最適値が元の問題の最適値に限りなく近づくことを理論的に保証した。

これらの 4 つの問題 $\eta^p(\mathbb{C})(4.16)$、$\eta^d(\mathbb{C})(4.18)$、$\eta^p(\lambda,\mathbb{C})(4.17)$、$\eta^d(\lambda,\mathbb{C})(4.19)$ の単純性を利用した効率の良い解法の開発が期待できる。特にラグランジュ緩和主問題の制約は $\boldsymbol{X}_{11}=1$ という非常に単純な制約式 1 本だけで、双対問題の変数は 1 つである。

さらに、$\mathbb{C}\subseteq\mathbb{S}^n_+\cap\mathbb{N}$ の関係から完全正値錐の替わりに非負半正定値で緩和することも考えられる。非負半正定値計画問題は半正定値計画問題に変換できるので理論的には内点法により多項式時間で近似解が求まる。ただしこの変換は 2.2.1 節で説明したように単純な方法ではサイズが非常に大きくなる。このラグランジュ緩和問題の主双対問題 (4.17)、(4.19) が非常に単純ことと、半正定値行列、非負行列の扱い易さから新しい解法の開発が期待できる。実際に Arima, Kim, Kojima and Toh [6, 8] の問題

(4.19) を解く数値実験から始まり、Kim, Kojima and Toh [29, 30] による内点法とは異なるラグランジュ関数の 1 次微分の情報によるアルゴリズムの継続的な改善によって、大規模な 0-1 線型制約 2 次最適化問題の非常にタイトな最適値の下限値が求められている。組合せ最適化問題など、実存する問題の実行可能解を求める際に、分枝限定法は確実な解法として広く用いられている。分枝限定法において、子問題のタイトな下限を効率よく求めることは，分枝限定法の有効性を左右する大きな要素であり、こうした手法の実装に貢献するものと期待できる。

以上の 2 つが本論文がもたらす主な成果である。

8.2 今後の課題

本研究の今後の課題については、次の 2 点が考えられる。

一つはこの論文での議論では同次制約である $\boldsymbol{H}^k$ についてである。最も弱い条件でも階層的共正値条件を前提に考察してきた。この前提は具体的な応用問題を考えた場合は 0-1 混合線形制約 2 次最適化問題での議論や多項式最適化問題 (6.11) で見たように強い前提ではないと考えられる。しかし理論的にはこの前提は十分条件であり必要条件ではない。実際に階層的共正値条件を満たさなくても制約領域が一致する例を作ることができる。階層的共正値条件よりも弱い必要十分条件は既に小島, Kim, Toh [31] により幾何学的に与えられているが、これは具体的な制約式を使った制約領域に対してのものではないので数値計算等への実用性はあまりない。そこで制約式で表された制約領域に対して、階層的共正値条件よりも弱い、できれば必要十分条件、またはよりわかりやすい実用的な条件を見つけることが今後の課題の一つと考えられる。

次に階層的共正値条件は満たさないが conv $F(\mathbb{K}) = F(\text{conv } \mathbb{K})$ となる簡単な制約領域の例について説明する。まず次の 2 次制約で表される制約領域の集合を考える。

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 2,\ -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 = 0,\ x_1, x_2 \geq 0\right\}.$$

行列表現すると以下のように表せる。

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^0\boldsymbol{x} = 2,\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}^1\boldsymbol{x} = 0,\ x_1, x_2 \geq 0\right\}.$$

ここで

$$\boldsymbol{H}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

である。この例では $\boldsymbol{H}_1$ は階層的共正値条件を満たさない。にもかかわらず、元の問題の制約領域と凸化した問題の制約領域は一致していることがわかる。この制約領域を図示すると図 13 のようになる。

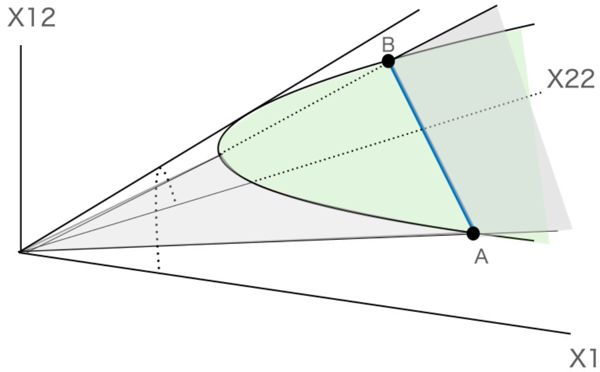

図 13: 制約領域

まずグリーン部分が凸化された錐と $\langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 2$ との共通集合になる。この集合と $\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ との共通集合は次の図 13 のようになる。グレーが $\langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ の平面で、ブルーの線が最終的な制約領域になる。また、$F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ は 3 軸が 0 の 1 軸と 2 軸の非負象限の平面であるので $F_0(\mathrm{conv}\ \mathbb{K}) = \{\boldsymbol{O}\}$ である。このブルーの線は凸化する前の制約領域の A と B の 2 点でも張れるので結局 conv $F(\mathbb{K}) = F(\mathrm{conv}\ \mathbb{K})$ となる。このことは例え階層的共正値条件を満たさなくても、この例では最適値が一致することになる。

もう一つは、応用範囲が非常に広いと考えられる 0-1 混合線型制約 2 次最適問題に対するアルゴリズムの開発である。4 章で記述したようにこの最適化問題は主問題が制約式が 2 本、双対問題の変数が 2 つという下記のような単純な問題に帰着できることを示した。

$$
\begin{aligned}
\eta^p(\mathbb{C}) &= \inf\left\{\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X} \rangle \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \langle \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle = 0,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}\right\}, \\
\eta^d(\mathbb{C}^*) &= \sup\left\{y_0 \mid \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^1 y_1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{C}^*\right\}.
\end{aligned}
$$

これらの問題をその単純性を利用して直接完全正値錐 $\mathbb{C}$、共正値錐 $\mathbb{C}^*$ 上の問題として解くアルゴリズムを開発することが考えられる。またこれらの問題の、$\mathbb{C}$ 及び $\mathbb{C}^*$ を $\mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{N}^n$ 及び $\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n$ にそれぞれ緩和することで、より効率的なタイトな緩和値を求めるアルゴリズムを開発することも考えられる。

さらに次のラグランジュ主双対緩和問題は λ を大きくすることで、元の 0-1 混合線型制約 2 次最適問題の最適値に収束することを示した。

$$\begin{aligned} \eta^p(\lambda, \mathbb{C}) &= \inf \left\{ \langle \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1, \boldsymbol{X} \rangle \mid \langle \boldsymbol{H}^0, \boldsymbol{X} \rangle = 1,\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C} \right\}, \\ \eta^d(\lambda, \mathbb{C}^*) &:= \sup \left\{ y_0 \mid \boldsymbol{Q} + \lambda \boldsymbol{H}^1 - \boldsymbol{H}^0 y_0 \in \mathbb{C}^* \right\}. \end{aligned}$$

これらの問題はさらに単純で、それぞれ制約式 1 本または変数 1 つの問題で、$\boldsymbol{H}^0$ は左隅が 1 で残りの要素が全て 0 という対称行列である。そこで直接完全正値錐 $\mathbb{C}$、共正値錐 $\mathbb{C}^*$ で解くか、もしくは $\mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{N}^n$、$\mathbb{S}^n_+ + \mathbb{N}^n$ に緩和して解く、この単純性を活かしたアルゴリズの開発が引き続き課題と考える。

9　謝辞

会社員生活を定年退職した後 60 歳から勉強を始めた私のような経歴の人間が、このような論文を書けたのはまず東京工業大学名誉教授の小島先生のご指導によるものです。小島研の研究生としてスタートし、学部生の学力も無い私は小島先生から一対一で懇切丁寧に指導を受けることができるという幸運に恵まれ、狭い範囲ですが何とかこの分野の研究ができました。小島先生とのこのような関係がなければこの論文を書くことは叶いませんでした。心から感謝致します。そして博士論文を書くにあたり、私のような未熟な学生を博士課程指導教授として受け入れて頂き、学位論文の書き方について非常に詳細な部分まで丁寧にご指導頂いた、筑波大学吉瀬章子教授に心から感謝致します。またこの論文の基礎になった共同研究に参加させて頂いた韓国梨花女子大学 Sunyoung Kim 教授、国立シンガポール大学 Kim-Chuan Toh 教授にも心から感謝します。共同研究中は、東京工業大学の福田光浩教授、山下真教授、中央大学の藤澤克樹教授にもいろいろな面でお世話になりました。心から感謝致します。筑波大学住田潮名誉教授にはこの博士課程の機会をいただき、また論文作成中には山本芳嗣名誉教授にいろいろ相談に乗って頂きました。心から感謝致します。また、吉瀬研の学生の汪さん、加納さん、大沼さんには、キャンパスにあまり行けず学生生活に慣れない中、いろいろサポート頂きました。心から感謝致します。

参考文献

[1] F. Alizadeh, P. A. Haeberly and M. L. Overton: Primaldual interior-point methods for semidefinite programming: Convergence rates, stability and numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 8 (1998), pp. 746–768.

[2] M. F. Anjos and J. B. Lasserre: *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*, International Series in Operations Research and Management Science, 166, Springer US, 2012.

[3] N. Arima, S. Kim and M. Kojima: A quadratically constrained quadratic optimization model for completely positive cone programming. *SIAM Journal on Optimization*, 23 (2013), pp. 2320–2340.

[4] N. Arima, S. Kim and M. Kojima: Simplified copositive and Lagrangian relaxations for linearly constrained quadratic optimization problems in continuous and binary variables. *Pacific Journal of Optimization*, 10 (2014), pp. 437–451.

[5] N. Arima, S. Kim and M. Kojima: Extension of completely positive cone relaxation to polynomial optimization. *Journal of Optimization Theory and Application*, 168 (2016), pp. 884–900.

[6] N. Arima, S. Kim, M. Kojima and K. C. Toh: Lagrangian-conic relaxations, Part I: A unified framework and its applications to quadratic optimization problems. *Pacific Journal of Optimization*, 14 (2018), pp. 161–192.

[7] N. Arima, S. Kim, M. Kojima and K. C. Toh: Lagrangian-conic relaxations, Part II: Applications to polynomial optimization problems. *Pacific Journal of Optimization*, 15 (2019), pp. 415–439.

[8] N. Arima, S. Kim, M. Kojima and K. C. Toh: A robust Lagrangian-DNN method for a class of quadratic optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, 66 (2017), pp. 453–479.

[9] E. R. Barnes: A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems. *Mathematical Programming*, 36 (1986), pp. 174–182.

[10] E. M. L. Beale: On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B Methodological*, 17 (1955), pp. 173–184.

[11] A. Berman and N. Shaked-Monderer: *Completely Positive Matrices*, World Scientific Publishing Co. Pre. Ltd. 2003.

[12] R. E. Bixby: Solving real-world linear programs: A decade and more of progress. *Operations Research*, 50 (2002), pp. 3–15.

[13] I. M. Bomze: On standard quadratic optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 13 (1998), pp. 369–387.

[14] I. M. Bomze and E. de Klerk: Solving standard quadratic optimization problems via linear, semidefinite and copositive programming. *Journal of Global Optimization*, 24 (2002), pp.163–185.

[15] S. Bundfuss: Copositive matrices, copositive programming, and applications. *Ph.D. Dissertation*, Technischen Universit at Darmstadt, Germany, (2009).

[16] S. Burer: On the copositive representation of binary and continuous non-convex quadratic programs. *Mathmatical Programming*, 120 (2009) pp.479–495.

[17] R. W. Cottle and G. B. Dantzig: Complementary pivot theory of mathematical programming. *Linear Algebra and its Applications*, 1 (1968), pp. 103–125

[18] I. I. Dikin: Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 8 (1967), pp. 674–675.

[19] I. Dukanovic and F. Rendl: Copositive programming motivated bounds on the stability and the chromatic numbers. *Mathematical Programming*, 121 (2010), pp. 249–268.

[20] M. Dur and G. Still: Interior points of the completely positive cone. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 17 (2008), pp. 48–53.

[21] G. Eichfelder and J. Povh: On the set-semidefiite representation of nonconvex quadratic programs over arbitrary feasible sets. *Optimization Letters*, 7 (2013), pp. 1373–1386.

[22] A.V. Fiacco and G.P. McCormick: *Nonlinear Programmig: Sequential Unconstrained Minimization Techniques.* John Wiley and Sons, Inc. New York, 1968.

[23] F. Giannessi and E. Tomasin: Nonconvex quadratic programs, linear complementarity problems, and integer linear programs. *Optimization Techniques, 5th Conference on Optimization Techniques Part I* (1973), pp. 437–449.

[24] M. X. Goemans and D. P. Williamson: Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of Association for Computing Machinery*, 42 (1995), pp. 1115–1145.

[25] N. I. M. Gould and P. L. Toint: *A Quadratic Programming Bibliography.* RAL Numerical Analysis Group Internal Report 2000-1, (2001).

[26] 茨木 俊秀: 相補的プログラミング, 経営科学 16(1) (1972), p.33–51.

[27] N. Karmarkar: A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4 (1984), pp. 373–395.

[28] S. Kim and M. Kojima: Binary quadratic optimization problems that are difficult to solve by conic relaxations. *Discrete Optimization*, 24 (2017) pp.170–183.

[29] S. Kim, M. Kojima and K. C. Toh: A Lagrangian-DNN relaxation: A fast Method for computing tight lower bounds for a class of quadratic optimization problems. *Mathematical Programming*, 156 (2016) pp. 161–187.

[30] S. Kim, M. Kojima and K. C. Toh: A Newton-bracketing method for a simple conic optimization problem. *Optimization Methods and Software*, 36 (2021) pp. 371–388.

[31] S. Kim, M. Kojima and K. C. Toh: A Geometrical analysis on convex conic reformulations of quadratic and polynomial optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 30 (2020), pp. 1251–1273.

[32] E. de Klerk and D. V. Pasechnik: Approximation of the stability number of a graph via copositive programming. *SIAM Journal on Optimization*, 12 (2002) pp. 875 – -892.

[33] 小島政和, 水野眞治, 吉瀬章子: 多項式オーダの主双対内点法, 統計数理研究所共同研究レポート, 5 (1987) pp. 13–24.

[34] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博: 「内点法」. 経営科学のニューフロンティア 9. 朝倉書店, 2001.

[35] M. Kojima, S. Mizuno, and Y. Yosise: A primal-dual interior point algorithm for linear programming. *Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods*, N. Megiddo, ed., Springer, New York, 1989, pp. 29–47.

[36] M. Kojima, S. Shindoh and S. Hara: Interior-Point Methods for the Monotone Linear Complementarity Problem in Symmetric Matrices. *SIAM Journal on Optimization*, 7 (1997), pp. 86–125.

[37] J. B. Lasserre: Global optimization with polynomials and the problems of moments. *SIAM Jounal of Optimization*, 11 (2001), pp. 796–817.

[38] C. E. Lemke and J. T. Howson: Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12 (1964), pp. 413–423

[39] O. L. Mangasarian, 関根智明訳, 「非線形計画法」,（株）培風館, 1972.

[40] H. Markowitz: The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3 (1956), pp. 111–133.

[41] J. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii: *Interior-Point polynomial methods in convex programming.* Theory and Applications, Applied Numerical Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1994.

[42] J. E. Nesterov and M. J. Todd: Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM Journal on Optimization*, 8 (1998), pp. 324–363.

[43] P. M. Pardalos and S. A. Vavasis: Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard. *Journal of Global Optimization*, 1 (1991), pp. 15–22.

[44] P. A. Parrilo: Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Mathematical Programming*, 96 (2003), pp. 293–302.

[45] J. Peña, J. C. Vera and L. F. Zuluaga: Completely positive reformulations for polynomial optimization. *Mathematical Programming*, 151 (2015), pp. 405–431.

[46] J. Povh and F. Rendl: A copositive programming approach to graph partitioning. *SIAM Journal on Optimization*, 18 (2007), pp.223–241.

[47] J. Povh and F. Rendl: Copositive and semidefinite relaxations of the quadratic assignment problem. *Discrete Optimization*, 6 (2009), pp.231–241.

[48] J. C. Preisig: Copositivity and the minimization of quadratic functions with nonnegativity and quadratic equality constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34 (1996), pp. 1135–1150.

[49] J. A. Renegar: polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming. *Mathematical Programming*, 40 (1988), pp. 59–93.

[50] K. Ritter: A method for solving maximum-problems with a nonconcave quadratic objective function. *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete* 4 (1966), pp. 340–351.

[51] S. Sahni: Computationally related prolems. *SIAM Journal on Computing*, 3 (1974), pp. 262–279.

[52] N. Z. Shor: Quadratic optimization problems. *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences*, 25 (1987), pp. 1–11.

[53] N. Z. Shor: Dual quadratic estimates in polynomial and boolean programming. *Annals of Operations Research*, 25 (1990), pp. 163–168.

[54] 高野祐一, 宮代隆平: 混合整数最適化による線形回帰モデルの最良変数選択. 日本統計学会誌, 50(2) (2021), pp. 343-362.

[55] K. Tanabe: Complementarity-enforcing centered Newton method for mathematical programming, 統計数理研究所共同研究レポート, 5 (1987) pp. 118–144.

[56] H. Tuy: Nonconvex Quadratic Programming. *Convex Analysis and Global Optimization*, Springer Optimization and Its Applications, 110. Springer, 2016.

[57] R. J. Vanderbei, M. S. Meketon and B. A. Freedman: A modification of Karmarkar's linear programming algorithm. *Algorithmica*, 1 (1986), pp. 395–407.

[58] P. Wolfe: The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, 27 (1959), pp. 382–398.

[59] H. Wolkowicz, R. Saigal and L. Vandenberghe: *Handbook of Semidefinite Programming, Theory, Algorithms and Applications*. International Series in Operations Research and Management Science, 27, Springer US, 2000.

[60] 山本芳嗣, 住田潮:「基礎数学 I. 集合・数列・級数・微積分」, 東京化学同人, 2015.

[61] 山本芳嗣:「基礎数学 IV. 最適化理論」, 東京化学同人, 2019.

[62] P. B. Zwart: Counterexamples to global optimization algorithm proposed by Ritter and Tui. *Operations Research*, 2 (1973), pp. 1260–1266.