筑波大学審査学位論文（博士）

数学的対象の美的性質の感得を促進する方法に関する研究

人間総合科学研究科学校教育学専攻

花園隼人

章構成

序章

研究課題と研究方法

本研究の目的は，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」の感得を，学習者に促進する方法を解明することである。本章では，はじめに，このことを目的とする研究を展開することで解決しようとしている数学教育における問題の所在を説明する（第１節）。次に，研究目的を達成するために設定した研究課題とその課題設定の意義を説明する（第２節）。続いて，設定した研究課題を達成するための研究方法について説明する（第３節）。最後に，本論文の構成について述べる（第４節）。

第１節　問題の所在と研究目的

数学では，定義や定理，概念，証明などといった数学的対象が優れていることを形容する際に，美しいという語を用いることがしばしばある。数学の魅力を発信する書籍では，そのタイトルに「美」や「ハーモニー」といった語を含むものが多くある（e.g., R. カプラン・E. カプラン著“Hidden Harmonies: The Lives and Times of The Pythagorean Theorem”（邦訳『数学の隠れたハーモニー　ピタゴラスの定理のすべて』; I. スチュアート著“Why Beauty Is Truth: The Story of Symmetry”（邦訳『もっとも美しい対称性』）；数学書房編集部（編）『この定理が美しい』）。また，インタビューをとおして数学者という人々の人柄を描こうとする試みにおいては，自身の仕事について語るときに「美」や「エレガンス」などの語を用いる多くの数学者が紹介されている（e.g., Cook, 2018）。このような数学，または数学者の特性は，フィクションの小説でも描かれており，一般的にも知られていることかと思われる（e.g.，小川洋子（著）『博士の愛した数式』[1]）。インタビューや小説で描かれるように，この数学的対象の「美しさ」は，数学者が数学研究を行う際の重要な動機づけの誘因となっている。

数学者が数学的対象の「美しさ」に注意を向ける理由としては，上記の動機付けに関することのほかに，著名な数学者であるポアンカレ（Jules-H. Poincaré）による言及がよく知られている。ポアンカレは，自身の数学の研究の過程を振り返ることで，数学的対象の「美しさ」が数学的事実の発見における指標になることを説明した（Poincaré, 1908/2003）。この説明は，やはり著名な数学者であるアダマール（J. S. Hadamard）によって支持され，アダマール自身の経験に基づいて詳しい説明が加えられた。またアダマールは，数学的対象の「美しさ」が新たな研究課題を選定する際の価値判断の観点になることも説明した（Hadamard, 1954）。このように多くの数学者にとって，数学的対象の「美しさ」は数学の研究に不可欠な本性であると言える。

数学教育では，数学研究における数学的対象の「美しさ」のこのような位置に着目し，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得できるようにすることを教育目標の一つに掲げてきた。例えば，数学的対象を「わかる」ことに関して言及する文脈では，数学の意味が「わかる」ということにその「美しさ」がわかることが含意されている（e.g.，和田，2007）。数学では，一旦の問題解決を終えた後に，解決をより美しくするために改めて問題や解決を見直すことがある（e.g., Polya, 1988/2004）。そしてそのようにして得られた着想に基づいて解決を再構成し，その美しい解決のみを記すことがしばしばある。その結果，この再構成された解

[1] 第 55 回（2004 年）読売文学賞，第 1 回（2004 年）本屋大賞受賞作品。2005 年に文庫化，2006 年に映画化，2009 年に英訳版が刊行されている。

決のみを見た学習者の中には，この解決の論理を追うことができてもその着想の起源が理解できず，「なぜそのように考えるのかわからない」という事態に陥る者がいる。筆者の数学教師としての経験では，この事態に陥った学習者には理解することを諦めて暗記を試みる者が少なくないように思われる。教科書等に見られる数学的対象が「美しさ」を追求した結果である場合があるとわかること，そしてその数学的対象の「美しさ」自体をわかることは，数学者ではない学習者にとっても数学的対象を「わかる」上で重要な意味をもつことが示唆される。

また，算数・数学の学習における動機づけについて言及する文脈では，数学者たちの研究の動機づけにおける誘因となる「美しさ」が，学習者の算数・数学の学習の動機づけにおける誘因となることが期待されている（e.g., 中島，1982；Sinclair, 2006）。図０－１に見られるように，日本の学習者の算数・数学の学習への動機は国際平均よりも著しく低水準になっており，このことは日本の算数・数学教育における積年の課題になっている。数学の本性とも言える「美しさ」に基づいて学習者の学習意欲を喚起することで，授業の場における効果だけでなく，入試のような「関門」を突破した後も数学との関わりをもち続ける学習者の育成に寄与することが期待できる。

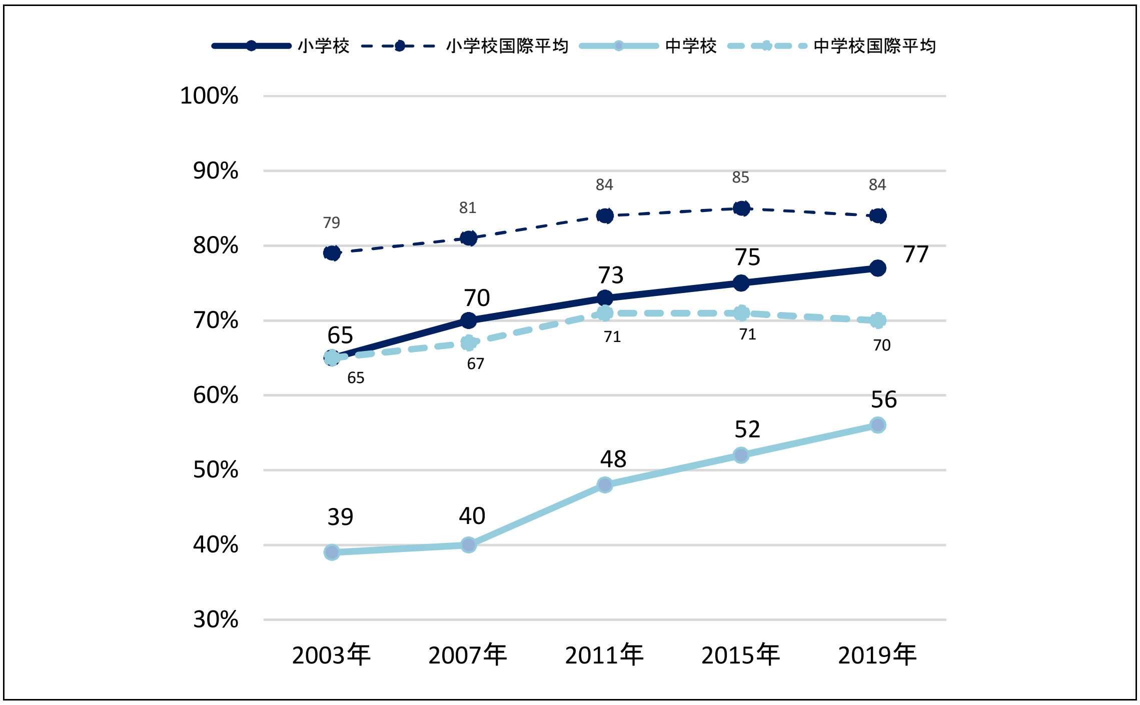


図０－１　TIMSS2018 における「算数・数学の勉強は楽しい」という回答の割合[2]

[2] 国立教育政策研究所の web ページ https://www.nier.go.jp/timss/2019/point.pdf から引用。数値は「強くそう思う」「そう思う」と回答した児童・生徒の小数点第１位までの割合を合計し，さらにその小数点第１位を四捨五入したものである。

一方で，数学教育において，数学者と非数学者，または数学的才能児と非才能児による数学の問題解決過程を比較する実証的な研究では，その知見として，数学者が感得するような数学的対象の「美しさ」と同質の「美しさ」を学習者が感得することの困難性が主張されている（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a）。加えて，数学的対象の「美しさ」が一般的な知覚対象の「美しさ」と同様に主観的かつ文脈依存的であるという指摘がなされたことで，学習者による感得を促進すべき数学的対象の「美しさ」を定めない研究も展開されるようになった（Sinclair, 2006）。すなわち，数学者がその価値を認めた，数学的対象のもつ数学らしい「美しさ」を学習者が感得することを目的とする研究は，この目的を達成することが難しいということ以上の知見を得ていない。ただし，上述の問題解決過程を比較する先行研究における調査では，調査者が問題解決者による問題解決行動の観察に徹する方法が選択されていたり，調査者が問題解決行動への介入を行うものについても美しいとされる解決方法を提示するに留まっていたりと，数学的対象の「美しさ」を感得しない問題解決者に対してその感得を促進する方法が十分に議論されているとは言えない。

他方，美術教育では，鑑賞教育について，その在り方とともに教師の役割についての議論が展開されている。直江（2018）は，鑑賞教育の在り方について次のように問題提起する。

> もし「鑑賞教育」が、権威者が定めた知識を学習者が受け取るという図式に支配され、学習者が自ら知識を探究するという視点を欠いているならば、自立した思考と判断のできる人間を育てるという理想に、「表現と鑑賞」からなるという美術教育の半分が逆行することになる。表現と鑑賞は一つの授業の中で密接に関わることが期待されており、学習の目標と評価における一貫性という観点からも、鑑賞教育に関わる価値観と方法を問い直すことは重要である。
>
> （直江，2018，pp.157-158）

そしてこの問題を考える契機として鑑賞に関わる複数の実践理論を紹介した上で，「わが国でもこれまでに鑑賞教育の指導方法が盛んに開発され」（直江, 2018, p.164）ているとし，「それらの鑑賞教育論において、多く共通する点」（直江，2018，p.164）として次を指摘している。

> それは、よく見て自分で考える機会を学習者にもたらすために、教師がいつ、どのような問いかけを行い、どのような刺激を与えたらよいかについて、心を砕いて検討しているということである。
>
> （直江，2018，pp.164-165）

このように，美術教育では鑑賞教育における教師の役割の重要性を認め，鑑賞教育の指導方法を盛んに議論しているのである。しかしながら，芸術作品と数学的対象の差異や，美術教育と数学教育の目標が同一でないことを踏まえると，美術教育における鑑賞教育の方法をそのまま数学教育に援用することはできない。数学教育においては，数学教育の目標論を踏まえた上で，数学的対象のもつ数学らしい「美しさ」を学習者が感得することを促進する方法を議論し，解明する必要がある。

数学教育における数学的対象の「美しさ」に関する先行研究で，この「美しさ」を感得することができない学習者による感得を促す教授方法が十分に議論されていないことの背景として，数学的対象の「美しさ」及びその感得についての理論的基盤が十分に検討されていないことが指摘できる。具体的には，先行研究は次の三つに大別することができる。第 1 に，「美しさ」という概念を特定の数学者による限られた言及に基づいて定めていることで，その数学者による言及外の事柄について議論することができない研究である。第 2 に，「美しさ」という概念をその研究者自身の主観に基づいて定めていることで実証的または実践的な議論に理論的根拠をもたない研究である。第 3 に，美学における理論を参照することで「美しさ」やその感得についての体系的な理論を背景として得つつも，数学の特徴を反映していない研究である。

学習者による感得を促進すべき，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」とはどのようなものか，その「美しさ」の学習者による感得は，どのように促すことができるのかという二つの問いは未解明であり，かつ切り離さずに解明されなければならない。なぜならば，数学らしさを踏まえない数学的対象の「美しさ」は，例え学習者が感得できたとしても，数学者が価値づけた役割を担わない可能性があるからである。また，学習者による感得を促す方法が未解明のままでは，数学教育目標論で掲げられた目標の達成に寄与しないからである。換言すると，学習者による感得を確かに促すことができるような，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」を特定する必要がある。

本研究の目的は，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」の感得を，学習者に促進する方法を解明することである。

第 2 節　研究課題

上記の目的を達成するために，本研究では次の二つの研究課題を設定する。第 1 の研究課題は，学習者による感得を促進すべき，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」を定めた上で，その「美しさ」の感得を促す方法を理論的に導出することである。

「美しさ」という概念は，プラトンやアリストテレスといった古代の哲学者によっても考究されたものであり，かつ，現代でも芸術の多様化に伴って様々な捉え方が議論されている

ものである。バウムガルテン（A. G. Baumgarten）やカント（I. Kant）が創始者と言われる近代の美学には，「美しい対象の特徴を規定するのではなく、それを経験する心の特質によって美を定義」（佐々木，1995，p.14）するという，知覚者の主観に基づく方法をとる立場がある。人々は自分にとっての「美しさ」を語ることができ，人々がある対象について美しいと語る性質や状態が同質のものである保証はない。

研究を進める上で「美しさ」を知覚者の主観に基づいて定義する立場をとらずとも，「美しさ」がこのような主観的な性質をもつものであることは認める必要がある。その一方で，この知覚者の主観に基づく方法をとる立場からは，数学者たちが感得する「美しさ」自体や，その特定の「美しさ」が学習者によって感得されたか否かについての議論を展開することはできない。したがって第 1 の研究課題を達成するためには，知覚者に帰属する軸に加え，知覚対象である数学的対象に属する数学的概念による軸をもって「美しさ」を捉えるような理論的枠組みを構築する必要がある。そして，この理論的枠組みによって捉えられる「美しさ」には数学らしさが反映されていること，この理論的枠組みが，数学者たちによって十分に言及されていない，「美しさ」の感得についての議論を可能にすることが求められる。

このように，数学らしさを反映した「美しさ」を捉え，その感得についての議論を可能にする理論的枠組みを構築すること，及び，この理論的枠組みに基づいて「美しさ」の感得の促進方法を導出することには，先行研究からは得られていない次のことを可能にする意義がある。第 1 に，学習者による感得を促す「美しさ」が，確かに数学者たちが感得する「美しさ」であるという保証が得られることである。先述のように「美しさ」の捉え方は多様であるがゆえに，数学らしさが十分に検討されていない「美しさ」を学習者が感得できたとしても，その感得によって数学教育的価値が実現するとは限らない。仮に数学らしさが十分に検討されていない「美しさ」が学習者によって感得され，学習者の学習意欲が高まるといったような数学教育的価値が実現したとしても，その「美しさ」が偶然にも数学者たちが感得する「美しさ」と同質であったからこその結果であるのか，数学者たちが感得する「美しさ」と異質の「美しさ」であっても数学教育的価値を実現するのかについて，判断することはできない。第 2 に，学習者による感得を促進すべき数学的対象の「美しさ」に関する教材研究を可能にすることである。算数・数学教育では，何らかの教育目標を達成するために教師の立場から学習者に与えた課題や数学的対象を教材と呼ぶことが多い。そして算数・数学の教師は，課題の構成要素となる問いや数学的対象について数学的な視点や教育的価値に基づく視点から入念な分析を行うとともに，その分析結果を反映させて学習者の反応を想定することで，教授・学習過程を構想する。授業等の実際の教授・学習過程では，この構想に基づいた展開や学習者への対応を行うことで，教育目標の必然的な達成を目指す。したがって，このような算数・数学教育の営みにおいて教材及び教材研究は不可欠な要素になっている。

先行研究では, 解決方法が複数ある数学的課題を意図的に選択して調査課題として設定しているものもあるが（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a），この「解決方法が複数ある」という条件からは上述のような入念な教材研究はできない[3]。より詳細な枠組みによって数学的対象の「美しさ」を捉えることによって，きめ細やかな教材研究が可能になる。

第 2 の研究課題は，第 1 の研究課題を達成することで定めた数学的対象の「美しさ」が，学習者にとって感得可能なものであることを実証的に示すこと，及び，その感得を促す方法を経験的データに基づいて解明することである。

先行研究では，文献研究の結果や，数学者が感得する「美しさ」と同質の「美しさ」を学習者が感得できないという調査結果などに基づいて，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促す方法が提案されてきた（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a; Silver & Metzger, 1989; Sinclair, 2006; Tjoe, 2016a; 2016b）。しかしながら，これらの方法を用いた実践的な考察は展開されておらず，経験的データに基づく評価はなされていない。学習者の問題解決過程を観察した研究においても，数学者が感得する「美しさ」と同質の「美しさ」を学習者が感得できないということ以上の知見が経験的データから得られていないがゆえに，続く提案には経験的な知見が反映されていないのである。したがってこの第 2 の課題を達成することによって，妥当性が議論された方法の提案という，先行研究にはない研究成果を得ることができる。また，理論的枠組みに基づいて設計された調査で記述される学習者の認識や学習者による数学的対象の「美しさ」の感得過程自体が，先行研究からは得られていない，さらなる研究を展開するための豊かな経験的データになることも期待できる。さらに，この成果に基づくことによって, 第 1 の課題の達成によって可能になる教材研究の方法について議論する視点を得ることも期待できる。教材研究は，実際の教授・学習過程の前後に行われる営みであるものの, その成果は教育目標の達成に大いに寄与していると言える。すなわち，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することを目標とする教材研究の方法は，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促進する方法に内包される。そこで本研究ではこの教材研究の方法に関する議論を，第 2 の課題を達成するための考察の一つとして位置づけることとする。

第 3 節　研究方法

第 1 の研究課題に対しては，数学者による数学的対象の「美しさ」についての言及や美学における知見の文献解釈を中心とする理論的考察を展開する。数学らしさを反映させる上

[3] 数学的対象の「美しさ」を無定義なものとして定義する研究（e.g., Sinclair, 2006）では，論理的な教材研究は展開されていない。

で，数学者による言及に基づくことは不可欠である。その一方で，これらの言及は断片的であり，数学の「美しさ」の感得の促進方法の解明までを射程とした本研究の理論的基盤を十分には与えない。そこで本研究では，「美しさ」についての体系的な理論を展開している美学における理論を援用することで，数学者による言及を補って論じるための理論的枠組みを構築する。このように美学における理論を援用することには，個別の数学者による言及に有機的なつながりを与えることが期待できる。そしてこの有機的なつながりが期待できるからこそ，本研究で構築する理論的枠組みには，特定の数学者の考えのみを反映させるのではなく，共通の「美しさ」を追求する文化の担い手とも言われる数学者の共同体がもつ文化的側面を反映させることができると考える。

本研究では，このような理論的枠組みを構築するための準備として，次の項目について検討する。第 1 に，援用する美学の理論の妥当性の検討である。先述のように美学における理論には多様な立場があり，任意の理論が本研究の目的に適合するわけではない。援用する美学の理論には，その理論が美学において重要性が認められていることに加え，数学者が言及してきた数学的対象の「美しさ」を説明できる理論であることを確認する必要がある。第 2 に，数学者を一つの集団として同一視して捉えることの妥当性の検討である。「美しさ」の主観性や多様性を主張する立場には，数学者が感得している「美しさ」も多様であるという主張がある（e.g., Wells, 1990）。このような主張を批判的に検討し，かつ，数学者を一つの集団と捉える立場について確認して，本研究がその立場をとることの妥当性を確認する。また，このことに関連して，数学者集団の代表として参照する数学者の言及としては，数学についての深い理解を信頼できるような著名な数学者によるものを選出することとする。

理論的枠組みを構築するための考察にあたっては，援用する美学の理論における諸概念を数学教育研究の知見に基づいて解釈するという方法をとる。美学の理論では，多様な芸術活動を想定した一般的な論が展開されている一方で，そこには数学的対象そのものや数学的対象に対する思考，数学の問題解決過程で見られる思考などの特異性は反映されていない。援用する美学の理論を構成する概念への対応概念及びその概念間の関係を整理することで，本研究の理論的枠組みを構築する。このような作業過程を経ることによって，本研究で構築する理論的枠組みが，数学者による言及を第 1 の基礎とし，その基礎に適合する美学の理論を援用することで理論的な基盤をもち，諸概念が数学教育研究の知見によって意味づけられていることで数学の教授・学習の場面に適応するものになると考える。

続いて，このように構築した理論的枠組みに基づいて，数学教育における先行研究で記述された数学者等による数学の問題解決過程から数学的対象の「美しさ」を感得する過程を抽出し，モデルとして定める。数学の問題設定や問題解決の過程をとおした数学的対象の「美しさ」の感得に注目することは，数学教育における先行研究でも多く見られる（e.g., Dreyfus

& Eisenberg, 1986a; Silver & Metzger, 1989; Sinclair, 2006; Tjoe, 2016a)。しかしながら，これらの先行研究では，数学的対象の「美しさ」を感得する過程の一部始終が記述されることはあまりない[4]。そこで本研究では，数学的対象の「美しさ」の感得に関する過程の一部始終が記述されている数少ない例として，Mason, Burton, & Stacey（2010）における例，Polya（1988/2004）における例，そして Sinclair（2006）におけるシンクレア自身の探究の事後報告を分析対象とする。このように少数の事例から得られるモデルは数学者等による同様な問題解決過程の事例を用いて「追試」されるべきものであるが（Yin, 2014），本研究ではここで得られるモデルを仮設的に用いることとする。そしてこのモデルを学習者による数学的対象の美的性質の感得過程のモデルとして転用し，このモデルに応じて学習者によるこの過程の遂行を促進する方法を設定することで，本研究における，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促進する方法を得る。この促進方法は，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得過程のモデルとあわせて，本研究において経験的な検討に基づく修正や補填の対象となる理論的仮説として位置づける[5]。

第 2 の研究課題に対しては，第 1 の研究課題を達成することで得られる理論的枠組み及び理論的仮説を前提とする事例研究による実証的考察と実践的考察を展開する。これらの考察では，得られるデータに基づいて学習者による数学的対象の「美しさ」の感得過程の詳細を記述すること，及び，その詳細な記述に基づいてこの感得の機序を解明することが必要になる。したがって，収集するデータ及びその分析方法を，質的研究の方法論に基づいて選択する。具体的な調査方法や分析方法については，第 1 の研究課題を達成することで得られる数学的対象の「美しさ」の感得過程のモデルや，そのモデルに関連する先行研究の成果と課題に基づいて選択することとする。

第 4 節　本論文の構成

本研究で設定した二つの研究課題のうち，第 1 の課題に対する考察は，第 1 章から第 3 章，及び，第 4 章と第 5 章の冒頭で行う。また，第 2 の課題に対する考察は，第 4 章から第 6 章にかけて行う。このように大きく二つに分けられる本論文の構成において，各章では以下の事柄に焦点を当てた考察を行うこととする。

---

[4] Silver & Metzger（1989）では，数学者の問題解決過程における「美しさ」への着目は記述されているものの，その着目場面に焦点化された記述になっている。Sinclair（2006）では，以下で説明するようにシンクレア本人による探究の事後報告のほか，学習者が「美しさ」に着目する過程が記述されているものの，この学習者が着目した「美しさ」は無定義に扱われているものであり，この学習者による着目の過程は参照することができない。

[5] このようにモデルを仮説として設定して経験的に補填する研究方法は，例えば Cobb and Steffe（1983）で説明されている。

第１章では，数学者たちが数学の魅力を語る際にしばしば言及する数学的対象の「美しさ」が，数学教育における重要な目標を達成し，積年の課題を解決する上での鍵概念であることを主張するとともに，この数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することを目指す研究によって得られた知見を整理し，それらの研究によって未解決となっている課題を指摘する。まず，著名な数学者たちによる数学的対象の「美しさ」への言及を概観し，数学的対象の「美しさ」と数学の研究との関わりを整理する。そしてこれらを数学教育における目的論・目標論と関連づけることで，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することの数学教育的価値を特定する。続いて，数学的対象の「美しさ」に着目した数学教育研究を概観することで，その研究成果と課題を指摘する。

第２章では，本研究における数学的対象の「美しさ」の捉え方について，美学者・竹内敏雄による理論を本研究の理論的基盤とすることの妥当性と価値を主張するとともに，竹内による理論に基づいて，本研究における数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを構築する。まず，竹内による「多様における統一」原理に基づく理論の概要と美学上の位置づけを概説することをとおして，美学におけるその重要性を確認する。続いて，竹内による理論を視点として，数学者による数学的対象の「美しさ」についての言及や関連する数学教育研究を捉えなおすことで，竹内による理論を本研究の理論的基盤とすることの妥当性と価値を主張する。ここでは，数学を文化として捉える立場（Wilder, 1968）を参照することで，本研究で数学者を一つの集団として同一視する立場をとることの妥当性を確認する。そして，竹内による理論と数学教育学における知見を照らし合わせ，竹内による理論における基本的な概念への本研究における対応概念を定めるとともに，その対応概念間の関係を整理することによって，本研究における数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを構築する。

第３章では，第２章で構築した本研究の理論的枠組みに基づいて，数学教育における先行研究で記述された数学者等による数学の問題解決過程から，数学的対象の「美しさ」を感得する過程を抽出してモデルとして定める。特に，(i)数学的対象の「形式」を同定する局面，(ii)数学的対象の「本質」を直観する局面，(iii)数学的対象の「全体」を直観する局面，(iv)数学的対象の「発展性」を実感する局面によって構成されている４局面モデルと，「形式」が「本質」としても位置づくことで(i)の局面と(ii)の局面が重なった３局面モデルの二つのモデルが抽出できることを主張する。そしてこのモデルを学習者による数学的対象の「美しさ」の感得過程のモデルとして転用し，理論的仮説として位置付けることによって，第４章と第５章における理論的考察の拠り所を得るとともに，感得過程についての経験的なデータに基づく考察の対象を得る。

第４章では，第３章で仮説とした４局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象

の「美しさ」の感得を促進する方法の解明を目的とした実証的な検討を行う。まず，４局面モデルに基づく数学的対象の「美しさ」の感得に関する先行研究の概観をとおして，この「美しさ」の感得に関する日本の学習者の特異性を指摘する。続いて，この日本の学習者の特異性を日本における特徴的な授業方法である問題解決型授業の「練り上げ」に由来するものとして捉えることの妥当性を確認する。すなわち，問題解決型授業における「練り上げ」を展開することを，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促す方法として捉えなおすことを提案する。第４章におけるここまでの理論的考察は，第１の研究課題の達成に向けた考察として位置づいている。続いて，第２の研究課題の達成に向けた考察の一部として，問題解決型授業が実践されている小学校算数科の授業への参与観察と，その授業に参加する小学生に対するインタビュー調査をとおして，実際に行われている問題解決型授業の「練り上げ」が，児童にとっての数学的対象の「美しさ」の感得過程になっているか否かについて，実証的に検討する。そして，実証的な検討の結果を踏まえて，問題解決型授業の「練り上げ」が，４局面モデルに基づく数学的対象の「美しさ」の感得を促進する方法として十分に機能するために必要な改善案を提案する。

第５章では，第３章で仮説とした３局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促進する方法の解明を目的とした実証的・実践的な検討を行う。まず，先行研究で試された数学的対象の「美しさ」の感得の促進方法を批判的に検討することによって，本研究における促進方法を理論的に導出する。ここまでの考察は，第１の研究課題の達成に向けた考察として位置づいている。続いて，第２の研究課題の達成に向けた考察の一部として，この促進方法を理論的仮説とする調査を実施し，教授的介入を受けた学習者がどのように問題解決を遂行するか，特に，数学的対象の「美しさ」を感得するのであればどのような過程で感得するかを記述し，理論的仮説との対照を行う。そして，この対照の結果を総合的に考察し，その結果に基づく改善案を導出することで，３局面モデルに基づく数学的対象の「美しさ」の感得の促進方法の解明を目指す。

第６章では，第４章と第５章における実証的・実践的な考察を踏まえて，第３章で仮説とした数学的対象の「美しさ」の感得過程のモデルに応じた教材研究の方法について議論する。はじめに，４局面モデルによって学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することを想定した教材について，そのような教材の一般的な特徴を第４章における考察を踏まえて定める。そしてその特徴を視点とした教材研究の方法について議論する。続いて，３局面モデルについても同様に，第５章における結果を踏まえて，教材の特徴及び教材研究の方法について議論する。

第１章

数学教育における数学的対象の「美しさ」への着目と研究上の課題

本章では，数学者たちが数学の魅力を語る際にしばしば言及する数学的対象の「美しさ」が，数学教育における重要な目標を達成しいくつかの積年の課題を解決する上での鍵概念であることを主張する。そしてその上で，主としてこの数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することを目指す研究によって得られた知見を整理し，それらの研究によって未解決となっている課題を指摘する。

この目的を達成するために，まず，数学者たちによる数学的対象の「美しさ」への言及を概観し，数学的対象の「美しさ」と数学の研究との関わりを整理する。続いて，数学教育の目的論・目標論における数学的対象の「美しさ」への言及を概観し，先に整理した数学的対象の「美しさ」と数学の研究との関わりと数学教育目標論を関連づけることによって，数学的対象の「美しさ」のもつ数学教育的価値を浮き彫りにする（第１節）。続いて，主として数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することを目指す数学教育研究を概観し，研究の成果と課題を整理する（第２節）。

第１節　数学教育における数学的対象の「美しさ」への着目

数学教育では，20 世紀の初頭から現在に至るまで, 学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を目標として挙げてきた。その背後には，数学の研究とその研究対象である数学的対象の「美しさ」との深い関わりについての，数学者たちによる言及がある。本節では，この数学者たちによる言及と数学教育の目的論・目標論における主張を関連づけることで，数学的対象の「美しさ」のもつ数学教育的価値を指摘する。

第１項　数学者による数学的対象の「美しさ」への着目

数学者のデービス（P. J. Davis）とハーシュ（R. Hersh）は,「数学の本質についての彼らの著名な説明」（Silver & Metzger, 1989, p.60）の中で，数学的対象の「美しさ」についての重要性と現状の認識について，次のように述べている。

> 数学の美的要素（the aesthetic element）への盲目性は広く行き渡っており，また，数学は塵と同様に乾燥しており，電話帳と同程度の刺激をもち，15 世紀のスコットランドにおける泥棒についての特権的な法律と同程度に無関係なものであるという感覚を説明できるものである。これに反して，この要素の感得は，この主題に素晴らしい息を吹き込み，人間の他のどのような創造にも見られないほど燃えさせる。
>
> （Davis & Hersh, 1981, p.185）

またデービスとハーシュは, 数学的対象の「美しさ」とその判断の存在や潜在性について, 次のように述べる。

> 美的判断（aesthetic judgment）は数学の中に存在し，重要であり，世代から世代へ，教師から生徒へ，著者から読者へと養われ，受け継がれる。しかし，それが何でありどのようにはたらくかについての形式的な記述はほぼ全くない。教科書やモノグラフにはそれらのトピックの美的側面（the aesthetic side）へのコメントが欠けているが，美的なもの（the aesthetic）はその行い方そのものの中に，そして何をするかについての選択の中に属している。
>
> （Davis & Hersh, 1981, p.185）

数学的対象の「美しさ」は，多くの人が数学に触れる媒体においては潜在的であり，気づかれないままになっている一方で，数学者たちにとって，存在し，重要であり，数学の魅力であるとされる。

写真家のクック（M. Cook）は，フィールズ賞やアーベル賞の受賞者を含む著名な数学者たちへのインタビューをまとめた著作の冒頭で，次のように述べている。

> 私はこれまでに，多くの人々の写真を撮ってきた。芸術家，作家，科学者など。自分の仕事について語るとき，数学者たちは「エレガンス」や「真」,「美（beauty)」といった語を，他の人々を束にしたのと比べても，より多く用いる。
>
> （Cook，2018，p.7）

実際このクックの著作では，数学者たちが自身の経歴や関心，数学をする動機などを語る中で，多くの数学者たちが数学的対象の「美しさ」に言及したり，数学と芸術を関連づけたりしている[1]。数学者たちが「美しさ」を見出した数学的対象や，見出された「美しさ」についての数学者たちによる説明はそれぞれであるものの，数学者たちが感じ取っている数学という学問や個々の数学的対象の魅力が美しいと形容されうるものであること，数学の研究において数学的対象が美しいことが重要な意味をもっていることが読み取れる。

数学の研究と数学的対象の「美しさ」やその「美しさ」を感得できることとの深い関わりについての説明で，最もよく知られているのはおそらく数学者ポアンカレ（Jules-H. Poincaré）によるものである。ポアンカレは,「純粋・応用の別なくほとんどすべての数学を自己の研究領域とした最後の数学者」（ベル，1997，p.226）とされ，数学のほか，数理物理学や天文学にもその見識が及んでいた。また，現在では位相幾何学と呼ばれる数学における巨大な 1 領域の理論は，ポアンカレの仕事が発端であると言われている（カッツ，2005）。したがって，ポアンカレによる説明は数学についての深い理解に基づいていることが期待できる。実際，このポアンカレによる説明は，別の著名な数学者たちによる著作で肯定的に参照されており（e.g., Davis & Hersh, 1981; Hadamard, 1954; Papert, 1993），数学者のコミュニティにおいても認められているものであることが窺える。

ポアンカレは，科学において避けられない「研究対象の選択」という過程において，その対象の「美しさ」が重要な役割を担っていると説明する。そしてその「美しさ」の特徴について次のように述べる。

> 私はもちろん，感覚に印象づける美（beauty）や性質や外観の美について話してはいない。その美を軽蔑することは決してないが，それは科学とは何ら関係がない。私が意味

[1] インタビューを受けた数学者の中には，数学が詩や音楽などとは異なることについて言及している者もいる。

しているのは，その部分の調和的な秩序から出てくる，そして純粋な知性が掴みえる，より一層心の奥底からの美である。

（Poincaré, 1908/2003, p.22，下線は引用者）

ポアンカレはまた，数学の発展がどのような方向に向かうかについて考究する中で，数学者が方法やその結果がエレガンスであることを非常に重要視すると述べ，このエレガンスに関して次のように説明する。

何が私たちに解や証明（demonstration）におけるエレガンスの感覚を与えるのか。それは異なる部分の調和，それらの対称性，巧みな調整，すなわち秩序をもたらし統一を与え，部分と同時に全体についても包括的な理解を明瞭に入手させうる全てのものである。

（Poincaré, 1908/2003, pp.30-31）

ポアンカレはさらに，自身の経験を内観することによって，数学上の発見を，既知の数学的事実から得られる数限りない組み合わせの中から無用な組み合わせと有用な組み合わせ[2]を識別して，この有用な組み合わせを選択することとして説明する。そしてこの有用な組み合わせの選択は，無意識において，「美しさ」を基準として行われるとする。

以上の二つの引用と数学上の発見についての説明からは，知性に関わる「美しさ」を基準とした数学的対象の選択が，研究課題の設定においても課題の解決においても，ポアンカレにとって重要な位置にあることがわかる。数学的対象が美しいことは，そうであることが望ましいという程度のことではなく，課題の設定と解決という研究活動の中心における要と見なされていると言える。

数学者アダマール（J. S. Hadamard）は，ポアンカレによる数学の研究と数学的対象の「美しさ」との関わりに関する言及に対する支持を表明している（Hadamard, 1954）。ポアンカレによる数学上の発見に関する説明がポアンカレ自身の内観に基づくものであったのに対し，アダマールはポアンカレによる言及を基礎としつつ，自身の内観の結果に加えて他の詩人や科学者，心理学者による発明[3]についての説明を参照し，数学における発明とその他の

[2] ポアンカレはこの「有用な組み合わせ」について，「有用な組み合わせとはまさに最も美しい組み合わせである」（Poincaré, 1908/2003, p.59）と述べている。

[3] アダマールは，それ以前からの存在の有無に基づく「発見」と「発明」の区別がよく知られていることを断った上で，そのような区別が「一目でわかるほど明白ではない」（Hadamard, 1954, p.xi）こと，「心理的条件はまったく同じであること」（Hadamard, 1954, p.xi）を理由

領域における発明の類似点や相異点を指摘することで，数学における発明の過程の解明を試みている。そして数学的対象の「美しさ」を基準とした「無意識に行われる選択」についてのポアンカレによる説明に対する否定的な考えに反論し，その存在や機序を肯定している。

またアダマールは，数学における研究課題の設定についても，ポアンカレと同様に「美しさ」を基準とした選択が行われることを主張する。アダマールは，発明を，与えられた実践的な目標を達成する手段を見いだすものと，実践的な有用性を後から考える，事実の発見とに区別する。その上で，「数学者たちは 2 番目のものにのみ慣れている」（Hadamard, 1954, p.126）と述べ，数学の特性について次のように説明する。

> 実践的な応用がある場合についても，一般的には，時間的にずっと先にあるものであり，数学上の発見は大なり小なり理論的な帰結に富んでいるはずである。その豊かな理論的な帰結でさえ私たちはしばしば気づかず，それは不燃性気球が太陽の大気の化学的成分を最初に発見した人たちに全く気づかれなかったのと同様である。
>
> （Hadamard, 1954, p.126）

このような数学における課題設定時の研究対象の価値の「見通しの悪さ」に対して，アダマールはいう。

> しかし，この重要で難しい選択はどのように方向づけられるのだろうか。…（中略）…私たちが信頼しなければならない道標は，その科学的な美の感覚（that sense of scientific beauty），その特別な美的感性（that special esthetic sensibility）であり，それらは彼[4]がその重要性を指摘したものである。
>
> （Hadamard, 1954, pp.126-127）

数学者ハーディ（G. H. Hardy）による数学の研究と数学的対象の「美しさ」との関係についての説明も，ポアンカレと同様に広く参照されている（e.g., Davis & Hersh, 1981）。ハーディは，数学を数学外に用いることについて否定的な見解を示した彼の著作『ある数学者の弁明』において，数学者と画家や詩人の類似性について言及し，その仕事について次のように述べる。

に，「発明」という語を用いつつも「発見」との区別をしないことを説明している。

[4] ポアンカレのことである。

数学者によるパターンは，画家や詩人によるもののように，*美しく*（beautiful）なければならず，アイディアは，色や言葉と同様に，調和的な方法で互いにフィットしなければならない。美（beauty）が第一の試験である。すなわち，醜い数学が永遠に居られる場所はない。

（Hardy, 1956/1992, p.85）

ハーディによるこの「醜い数学が永遠に居られる場所はない」という言及，または「美が第一の試験」という言及を，ポアンカレが「数学者は方法やその結果がエレガンスであることを非常に重要視する」と述べていたことと比較すると，ハーディが数学的対象の「美しさ」に対して研究上の価値をいかに置いていたか，その重要視の具合が読み取れる。ハーディは，この著作の中で展開した，「橋，蒸気機関，発電機のような数学の実践的応用」（Hardy, 1956/1992, p.64）を志向しない数学やそのような数学者の仕事の正当化が，ハーディ自身を正当化することであると断っている。そして，自身の研究成果について次のように述べ，自身のように数学の有用性や実用性を志向せず，「美しさ」を志向する数学者を「純粋数学者」や「真の数学者」と呼んでいる。

私は決して「有用な」ことを何一つしてこなかった。私の発見は，直接的にも間接的にも，善にしろ悪にしろ，世界の快適さに対して僅かながらの違いももたらしてきていないし，今後ももたらさないだろう。

（Hardy, 1956/1992, p.150）

デービスとハーシュがハーディによる言及を「極端である」[5]（Davis & Hersh, 1981, p.94）と判断するように，数学的対象の「美しさ」を志向する数学者たち全員が，ハーディのように数学の有用性や実用性に対して関心を払おうとしないということはないだろう。しかしながら，数学的対象の「美しさ」を至上のものとする人を純粋数学者と呼ぶ捉え方は，ワイルダー（R. L. Wilder）にも見られる（Wilder, 1968)。ハーディの立場は極端であるとしても，ワイルダーやハーディがいうような数学的対象の「美しさ」を重視する「純粋数学者」は，本節で取り上げたクックによって描写された数学者たちのように，数多く存在することが窺える。

ハーディやワイルダーとは異なる表現で数学者集団を区分し，数学的対象の「美しさ」へ

[5] デービスとハーシュによるこの「極端」という評価はハーディの考え方を否定するものではなく，氏らはこの考え方が20世紀の数学の支配的な性格であったことを認めている。その上で，近年のアメリカでは応用数学が流行になりつつあることも指摘している。

の志向との関係を説明した数学者に，クルル（W. Krull）がいる。クルルは数学者集団を，単純性や明瞭性などを「美しさ」の特徴とみなす「抽象的」数学者と，多様性（diversity）やまだら（variegation）を「美しさ」の特徴とみなす「具体的」数学者に分け，自身を前者に位置づける[6]。その上で，自身が感得しているような数学的対象の「美しさ」が，研究成果が発表するに足るかものどうかの判断の基準や, 真であることが確認された命題の証明を繰り返し行うことの目的になること，そして「数学のさらなる発展，新しい命題の導出，新しい理論の創造に深刻な影響を与えうる」（Krull, 1930/1987, p.52）と説明する。

この最後の数学の発展との関わりについて，クルルは数学の概念であるイデアルを例にして次のように説明する。クルルによると，自然数に対する素因数分解の一意性を美しいと捉える数学者がおり，このような規則性を他の分野でも見つけるために，代数的な数の構造に対する研究が展開される。そしてその結果として生み出されたイデアル論について，このイデアルという名称が美的（aesthetic）な意味での「理想」であると述べている[7]。このクルルによる説明はイデアル論が生まれる過程についてのものであるが，ポアンカレが行なったような数学上の発見の機序に関する数学的対象の「美しさ」の役割についての言及ではなく，イデアル論が生まれるまでの研究の動機づけの誘因として，自然数に対する素因数分解の一意性の「美しさ」が機能していることの説明であると読むことができる。このクルルによる説明は自身の研究の過程や成果に直接言及するものではないものの，クルル自身がイデアルに関する重要な研究成果をあげていることを鑑みると，重要であると思われる。

以上のポアンカレ，アダマール，ハーディ，クルルによる数学的対象の「美しさ」と数学の研究の関わりについての言及を整理すると，数学の研究における数学的対象の「美しさ」

[6] 興味深いことに，クルルによると，「具体的」数学者は，自分たちの数学が「すぐに実用化するような調査をする」（Krull, 1930/1987, p.52）数学であり，一方の「抽象的」な数学を「知的なゲームに没頭する」（Krull, 1930/1987, p.52）数学であると捉えて鋭く攻撃するものの，クルルにとってはこの「抽象的」と「具体的」の差異は美的な（aesthetic）意味での好みの差異でしかない。すなわち，ハーディやワイルダーが実用性や有用性を志向する数学者を「美しさ」を（少なくとも至上のものとしては）志向していないとみなしていたのに対し，クルルにとっては自身とは異なる好みの「美しさ」を志向していることになる。このような見識の差異は，一般的な「美しさ」の捉え方の差異に起因すると考えられるが，このことついては詳しく言及されていない。ここではクルル自身が感得し，言及している数学的対象の「美しさ」，すなわちハーディらと同様に実用性や有用性を志向しない「美しさ」と，その役割について参照する。

[7] ただしクルルは，次のように断っている。「（イデアルという概念を生み出した）クマーとデデキントが『イデアル』という名前を作ったときに，まさにこのような考えを持っていたのかどうかは知らない。」（Krull, 1930/1987, p.51，括弧内は引用者）。ここでは数学の史実を明らかにするのではなく，クルル自身が「イデアル」という名称を美的な理想として捉えているということを確認するにとどめる。

の位置が次の三つに大別できる。すなわち，第 1 に，数学の研究課題を選択する際の判断基準（ポアンカレ）や課題設定の方向づけの道標または動機付け（アダマール，クルル）になること，第 2 に，数学の研究課題の解決の機序の一端としての「無意識による選択」の基準（ポアンカレ，アダマール）になること，第 3 に，数学の研究成果の価値の基準（ポアンカレ，ハーディ，クルル）になることである。このことを数学の研究課題や成果の側から捉えなおすと，これらが認められる理由に，それらの「美しさ」が含まれていると言える[8]。

第 2 項　数学的対象の「美しさ」のもつ数学教育的価値

第 1 項で述べた数学者による数学的対象の「美しさ」への着目は，数学教育の目的論や目標論でも参照され，日本の学習指導要領解説[9]（e.g.，文部科学省，2018a）やアメリカの全米数学教師協議会（National Council of Teachers of Mathematics: NCTM）によるスタンダード（NCYM, 2000）では学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することが目指されている。このような記述は，日本では学習指導要領の試案（文部省，1951），アメリカではヤング（J. W. A. Young）による著書『Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School』（Young, 1924）には既に見られており，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することが数学教育における不易な目標の一つであることが窺える。

本項では，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することが，数学教育の目的や目標にどのように位置づけられてきたかについて，以下のように次の 3 観点で整理する。すなわち，学習者が数学的対象を「わかる」こと，学習者が数学的対象を発展的にとらえて考えること，学習者の算数・数学の学習の動機づけにおける誘因となることの 3 観点である。

[8] ハーディの立場からは，すべての研究成果は美しいことになる。クルルの立場からは，ハーディとは異なる意味で，（つまり「具体的」な数学も好みの違う「美しさ」を求めた結果であるという意味で）すべての研究成果は美しいことになる。本研究では，第 2 章で述べるように，「美しさ」に実用的であることを求めない。したがって本研究の立場からは，必ずしも美しくはない数学の研究課題や成果が存在することになる。

[9] 「試案」ではなくなった学習指導要領における「教科の目標」では，「美しさ」は明示的には言及されていない。ただし，「美しさ」の感得の重要性はその後の学習指導要領でも引き継がれたと説明されている（中島，1974）。また，平成元年改訂の小学校学習指導要領の作成に教科調査官として関わった清水静海は，この学習指導要領で再び教科の目標に含まれるようになった「よさ」という語に「美しさ」が含意されていると説明し（清水，1995，p.26），「数学のよさ＝審美的な価値」（清水，1995，p.20）と述べている。この平成元年の学習指導要領の改訂に先立つ教育課程審議会では，現代化の反省で失われた「統合的・発展的」という考え方を直接目標に含めることの代わりに，そのような考え方で追求する価値として「よさや美しさ」が原案として挙げられていた（清水ら，2021，p.105）。

(1) 学習者が数学的対象を「わかる」こと

先述の学習指導要領（試案）の作成に携わった和田義信は，数学を教える目的について，ポアンカレによる言及や資料[10]を参照しながら次のように説明する。

> この引用文献の前半の終わりの方に，音楽の鑑賞をするのと数学の授業というものとは同じだということが書いてあります。学校の先生は，クリエティブ（creative）な数学，一流の数学者をつくるのが目的ではないでしょう。音楽の授業をするのもそうなのであって，一流の音楽家を養成するつもりではないでしょう。あるいはまた，楽器をもって一流の演奏のできる生徒をつくるつもりでもないでしょう。それは豊かな鑑賞眼をもつ子どもをつくろうとしているのではないでしょうか。それと同じように，数学の非常に豊かな解釈・鑑賞ができるようにすることが，数学というものの意味がわかるということであろう，ということがいろいろな形で書いてあります。
>
> （和田，2007，p.22，下線は引用者）

和田によるこの「数学というものの意味」と「美しさ」との関連づけには，次のような和田の数学観が反映されていると考えられる。

> ケース・バイ・ケースの議論をするのではなくて，形式というものを大事にして，その形式にのせて，その形式をできるだけ使って，とことんまである形式を使いこなしていく，それがつまり形式の美なのです。その形式のもつ美，つまりその形式が非常によく使われ，いろいろな意味を含めうる，そういう形式の美を求めていくのです。もしそういうものがなければ，それは数学とはいえない。数学をつくるということは，反問をし続けて，より一般的なもの，より広いものをつくるということなのであって，ゲテものをつくることではない。いかにきれいに整理するかということです。それを皆さんの中には数学的事実をつくることかのように思われている節がありはしないかと思うのです。そうではありません，つまらないものの中にそうしたきれいなものがある。それを発見したり，そういう目でものを見ていくところに，私は数学があるのだと思います。
>
> （和田，2007，p.25）

和田は数学自体を「美しさ」と関連づけているからこそ，そのような数学が「わかる」ことには「美しさ」の鑑賞が不可欠なものになるのである。そしてそれは，「一流の数学者を

[10] 和田（2007）の pp.26-27 に該当箇所が抜粋されている。原著は未確認。

つくる」こととは異なる目的として位置づけられていることが確認できる。

和田によるこの言及のように，古藤（1995）も数学がわかることを，次のように数学が内包する「美しさ」の感得と関連づけている。

古藤はまず，杉岡司馬氏の講演で示された理解の捉え方として，次の３段階を示す（図１−1)。その上で，この中で最も望ましい段階とされる「③ Heart で分かる段階」における「よさ」の一つに「ウ）結果や過程に調和やリズムが実感される『よさ』」（古藤，1995，p.15）を挙げ，数学が内包する「美しさ」と呼んでいる。

① Hand で分かる段階：いわゆる道具的な理解の場合 ② Head で分かる段階：いわゆる関係的な理解の場合 ③ Heart で分かる段階：それらの「よさ」が感得される場合

図１－１　数学の理解の３段階（古藤，1995，p.12 を元に引用者作成）

以上の和田と古藤による数学教育の目的や目標についての言及は，第１項で整理したように数学的対象の成立の根拠には「美しさ」が内在していることがあることを踏まえると，看過できないことである。なぜならば，児童・生徒が学習する数学にも「美しさ」があり，この「美しさ」を感得しないことが，数学における「なぜそのようなことを考えるのか」や「なぜそのように考えるのか」といったことの理解を妨げてしまうことが想定できるからである。例えば，ファン・ドルモーレン（J. Van Dormolen）とザスラヴスキー（O. Zaslavsky）が整理した数学的定義が満たす基準にはその一つとしてエレガンスの基準が挙げられ，次のように説明される。

> 教科書の執筆者は，例えば，二つの同値な定義のうち，見た目がよく，文字数や記号が少なくて済むもの，あるいは，新たに定義される概念の元となる，より一般的な基本概念を使用しているものを選択しなければならない場合がある。次はその例である：
>
> **定義Ⅰ．** 二つの対象間の距離は，一方の端点が一方の対象上にあり，もう一方の端点が他方の対象上にある線分の，最小の長さである。
>
> **定義Ⅱ．** 二つの対象をデカルト座標系に置いた次の方程式をもつものとする。
>
> $$F(x,y,z)=0, \qquad G(x,y,z)=0$$
>
> すると，この二つの対象の間の距離は次の最小値である。
>
> $$\sqrt{(x_F-x_G)^2+(y_F-y_G)^2+(z_F-z_G)^2} \quad \text{ただし，} F(x_F,y_F,z_F)=0, G(x_G,y_G,z_G)=0$$

> 我々は，ほとんどの著者がよりエレガントなものとして定義Ｉを選ぶだろうと推測している。文章が短いだけでなく，3 次元のデカルト座標系に限定されず，さらにユークリッドの長さの定義にも限定されないため，より一般的であり，距離という概念の本質を伝えることができるからである。
>
> （Van Dormolen & Zaslavsky, 2003, pp.97-98）

数学的定義がもつこのような性質について，清水（2007）は，証明や論証の基礎である定義の役割を生徒が理解する上で，「定義の構成過程において，このような『定義』についての『メタレベル』での検討をすることが重要である」（清水，2007，p.262）と指摘する。定義として記述された内容そのものだけではなく，定義がもっている「美しさ」などの性質を感得することが，定義の理解，そして定義が用いられる証明や論証及びそれらの意義の理解には不可欠である（清水，2007）。

(2) 学習者が数学的対象を発展的に捉えて考えること

杉山（2012）は，平成 10 年改訂の小学校及び中学校の学習指導要領における算数科及び数学科の教科の目標に，「算数的活動」及び「数学的活動」という文言が含まれるようになったことを受けて[11]，この改訂学習指導要領の元で検定を合格した中学校数学科の教科書が「細かいステップを作って練習をさせるようにしたもの」(杉山，2012，p.16) であること，この構成によって子どもが「なんの役に立つかわからないようなことを次から次へとさせられ」(杉山，2012，p.17) るようになることを批判し，「数学的活動を通して学ばせる授業」を「数学を見つけ，つくり，つかいながら学ばせる授業」（杉山，2012，p.17）と捉え，次のように提案している。

> 私はここで，「数学する心」を大切にしたいと思う。「数学をする心」を言葉で説明することは難しいが，<u>数学をつくり発展させるときの姿勢</u>と言えばよいだろうか。はじめに数学を見つけ，つくり，発展させてきた人々は，数学のつくり方を学んで数学をつくったわけではなく，なにかを求める心に押されて数学をつくってきたと思う。（中略）<u>数学する心の中には，数学の美しさを感ずる心，美しさを求める心も含まれている。</u>
>
> （杉山，2012，p.18，下線は引用者）

---

[11] ここで杉山は言及していないが，平成 11 年改訂の高等学校学習指導要領における数学科の目標にも「数学的活動」という文言が含まれている。杉山はここで「中等科の数学科教育学の授業」への問題提起を行なっているので，高等学校学習指導要領に言及しなかったことには，高等学校の数学科を視野に含めないような意図を込めてないと考えられる。

第 1 項で見てきたように，数学者たちは研究課題の選択や課題設定の方向づけで，数学的対象の「美しさ」を基準として用いていた。杉山による上記の提案は，このような数学者たちの研究活動のように，児童・生徒による学習が発展的に展開されることを期待したものと考えられる。

児童・生徒が算数・数学を発展的に考えることが日本の学習指導要領における教科の目標に位置づいたのは，昭和 43 年改訂の小学校学習指導要領，昭和 44 年改訂の中学校学習指導要領，及び，昭和 45 年改訂の高等学校学習指導要領である。その後，この文言は教科の目標から削除され，平成 29 年改訂の小学校学習指導要領，中学校学習指導要領，及び，平成 30 年改訂の高等学校学習指導要領で復活した。

この昭和 43 年の小学校学習指導要領の改訂に教科調査官として関わった中島健三は，学習指導要領の目標に「統合的発展的な考察」という文言をとり入れたきっかけの一つとして，昭和 39 年に実施された国際教育到達度評価学会（The International Association for the Evaluation of Educational Achievement：IEA）による第 1 回国際数学教育調査の結果において，日本の中学生はその得点が国際的に最上位にある一方で，数学を発展的な学問とは捉えていないことに言及している（中島，1982）。このような数学の発展性や児童・生徒が発展的に考えることについては，国内で行われてきた大規模な学力・学習状況調査をとおして，日本の児童・生徒の学習上の課題であることが繰り返し指摘されてきた[12]。すなわち，児童・生徒が数学的対象を発展的に捉えて考えられるようになることは，日本の算数・数学教育における積年の課題の一つであると言える。

中島はこの課題への対応として取り入れた「統合的発展的な考察」に関して，昭和 43 年改訂の学習指導要領における教科の目標の「総括的目標」に含まれた「統合的，発展的に考察し」という表現について，次のように説明する。

> この表現に関しては，「統合的」と「発展的」とを並列的によみとらないで，「統合といった観点による発展的な考察」というようによみとることが望ましい。これは，「統

[12] 平成 17 年に実施された「特定の課題に関する調査」では，小学生を対象とした既習の三角形や平行四辺形の求積方法を基に台形の面積の求め方を考える問題に対する通過率は 34.3%であった一方で，「あなたは，これまでに台形の面積の求め方を考えたことがありますか」という質問に対して，85.8%の児童が「ある」と回答している。また，中学生を対象とした条件を変えても成立する図形の性質に関する問題に対する通過率が約 60%であった一方で，「この問題をもっと別の図形（例えば正方形など）に変えて考えてみたいと思いますか」という質問に対して，30%未満の生徒が肯定的に回答している（国立教育政策研究所，2006）。第 1 回国際数学教育調査やこの「特定の課題に関する調査」のような意識調査は実施されていないものの，近年の「全国学力・学習状況調査」においても，児童・生徒が発展的に考えることに課題があることが指摘されている（e.g.，国立教育政策研究所，2019）。

合」と言うことを，数学の立場で発展を考える際に，それを限定する方向，または，価値観を表すものの，いわば代表として，そこで用いているからである。

「発展」ということは，進歩することを表す日常の言葉で，どの教科についても考えられるべきことであるのに対して，ここでは，算数・数学として特に志向すべき発展の方向を表す代表的な観点として「統合」ということを考えているのである。したがって，この「統合」のほかに，簡潔，明確なども，発展の方向を示す観点として考えにいれてよいわけである。

（中島，1982，p.40）

さらに中島は，この「総括的目標」について「創造的活動[13]のあるべき姿を簡潔に表現しようとしたもの」（中島，1974，p.118）と説明する。そして，この「創造的活動」について，「必ずしも学問的に新しい創造を行うということではなく，個々のこどもにとって，創造的な活動として受けとめられるということが重要な点である」（中島，1974，p.118）と断った上で，「文化を創造していくに当たってその契機となるような審美的情緒的な心情が育成されることがどうしても必要である」（中島，1974，p.123）とし，先の簡潔，明確，統合といった観点との関係を次のように説明する。

統合ならびに簡潔, 明確などという価値を求めようとする心情を子どもがもつようになることがだいじで,「数学の美しさ」といっても，それは必ずしも，具象的なもののもつ美しさ[14]ではなく，たとえば，論理や形式の上での簡潔さや統合性に美しさを認めるようになるべきであろう。

（中島，1974，p.124）

以上の中島による説明を整理すると，昭和 43 年改訂の学習指導要領における教科の目標

[13] この「創造的活動」がどのようなものであるかについては第２章第３節参照。

[14] ここで中島が述べる「具象的なもののもつ美しさ」がどのようなものであるかは，これ以上の言及がないために明確ではない。ただし中島は，ここで子どもによる感得を目指すべき「美しさ」として挙げた「統合ならびに簡潔，明確などという価値」に関する「美しさ」との対比として，別の文献で「図形のような，『形』をもったものに関する直観にもとづく『美しさ』」（中島，1982，p.65）に言及している。そこではこの「形」に関する「美しさ」について，「数学的に『美しさ』をとらえたり実現したりするための観点として考え」（中島，1982，p.66）るという立場を表明し，「形」の例として規則性や対称性，黄金比などを挙げている。第２章で述べるように，本研究ではこの中島の言う「形」に関する「美しさ」を考察対象としている。ただし，この「形」に関する「美しさ」は，第２章で述べるように，中島の言う「統合ならびに簡潔，明確などという価値」に関する「美しさ」になっている。

の「総括的目標」は，学習の場における簡潔，明確，統合などに関する数学的対象の「美しさ」を追求する「創造的活動」の実現を目指しており，このことによって，日本の児童・生徒が算数・数学を発展的なものと捉えていないことや発展的な学習が実現されていないことの改善を図っていると言える[15]。

中島は，この「創造的活動」と，「総括的目標」に含まれている「数学的な考え方」について，「『数学的な考え方』の育成とは，端的にいって，『算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにすること』である」（中島，1982，p.69）と述べている。また，杉山は，先に引用した「数学的活動を通して学ばせる授業」について，「これまで『数学的な考え方を育てる学習指導』という言い方で試みられてきたことと同じである。」（杉山, 2012, p.17）と断っている。さらに，清水は，平成元年改訂の学習指導要領の教科の目標に含まれた「よさ」という語が, 統合的・発展的な学習の実現を意図したものであることを説明している[16]。

以上を踏まえると，数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することは，児童・生徒が算数・数学を発展的なものと捉えられるようになることや, 発展的に考えられるようになるという，日本の算数・数学教育の積年の課題に根差す教育目標を達成する上で重要な位置にあるとともに，そのことを超えて，学習指導要領における教科の目標に掲げられてきた「数学的な考え方」や「よさ」,「数学的活動」という鍵概念に密接に関わる目標であると言える。

(3) 学習者の算数・数学の学習の動機づけにおける誘因となること

日本の児童・生徒が抱える算数・数学の学習に関する重要な課題として，先述の発展性に関わる課題のほかに，学習の動機づけに関わるものがある。大規模な国際調査では，日本の児童・生徒が算数・数学に関心をもったり学習を楽しいと感じたりする割合が他国・地域と比べて明確に低いことが，調査結果として浮き彫りになってきた。近年の調査では過去の調査結果と比較して改善傾向ではあるものの, 依然として国際平均よりも低い水準になっている（e.g.，国立教育政策研究所，2013）。

中島（1982）は，先にも挙げた「数学的な考え方」にふさわしい「創造的な活動」がもつべき構造の一つに，この活動による課題の解決を評価することを位置づけている。そしてこの評価活動に含まれることが要求される二つの活動の一つに「課題の解決の確認とその進

[15] 当然ながら，この発展性に関わる課題の改善のみを図っているわけではない。創造的活動の実現には，「教科の教育を考える共有の基盤」（中島，1974，p.109）とされる「実用的目的」,「文化的または教養的目的」,「陶冶的目的」の全てが関わっていることが説明されており，「『創造的活動』というものは，実用的目的，文化的目的，陶冶的目的というそれぞれの立場から究極においてねらうことがらを統合したものであるということができる。」（中島，1974，p.118）と述べられている。

[16] 本章の脚注 9 を参照。

化の鑑賞」（中島，1982，p.92）を，そしてさらにその観点の一つとして「課題の解決の意義，特に数学的な価値観からみてのすばらしさの鑑賞」(中島，1982，p.96) を挙げている。そしてこのような評価活動によって「簡潔，明確，統合といった観点からみて不十分なことがあれば，それを改善しなければ黙っておられないような心情」（中島，1982，p.96）を育成することが児童生徒の人間性を豊かにする上で重要な役割を果たすことが，算数・数学を楽しむことと関連づけて次のように説明される。

> たとえば，算数では，計算が他人より速く多くできるとか，他人のできないむずかしい問題が解けたとかといったようなことに快感をもつような子どもも，はじめは少なくないとみられる。このような感情を中心に算数・数学の学習での楽しさを考えることから脱却して，<u>人間が数学という文化を創り出したり体系としてまとめたりする際の原動力として働いた観点</u>にポイントをおいて，価値観をもつように目を向けさせ，それを楽しむことができるようにすることがだいじである。
>
> このような観点としては，これまでに簡潔，明確，統合といった精神的なものを，その例としてくり返しあげてきている（後略)。
>
> ともかく，こうした観点に価値観をもち，その実現にロマンを求めて，これを「美しい」こととして「楽しむ」ことができる人間を育てたい。これが算数・数学で，人間として望ましい精神的な価値観を多様にし，人間性を豊かにすることに直接つながる道でもあろう。
>
> （中島，1982，pp.97-98，下線は引用者）

単に算数・数学の学習への動機を高めることが目的であれば，中島が指摘するような他者との競争を授業に取り入れることのほか，数学やその学習とは直接関係がないクイズ的な要素を取り入れたり，学習への取り組みに応じた何らかの報酬を与えるという方法を取ったりすることもできる。また，より極端に，算数・数学の授業を好きにさせるという目的であれば，その時間を好きなことができる「自習」にしてしまうということも可能である[17]。それに対して中島は，数学そのものに由来する魅力をもって児童・生徒の学習の動機づけにおける誘因とすることを提案しており，この魅力を「美しい」こととして児童・生徒が捉えることの重要性を説いている。

算数・数学の学習への動機が弱いことは日本における国レベルでの課題であるが，学習者

[17] 競争的な学習では，当然ながら，「負け」続けることで学習への動機は弱まるだろう。ここにあげた「競争」，「クイズ」，「報酬」，「自習」は，筆者自身がこれまでに実際に見聞きしたことがあるものである。

の動機を高めることは広く世界中で課題になりうることである。シンクレア（N. Sinclair）は，数学的対象の「美しさ」に着眼した研究の意図として，生徒の数学の学習への動機を高めることについて次のように述べる。

> 多くの教育者にとって，数学教育における最も根強い問題の一つは，生徒たちが数学を学びたい，または数学をしたいと思う動機を与えることである。この問題は先行研究でも注目されているが，そのような注目は，動機づけを数学を実際に行うことから切り離してしまう傾向がある。数学的な活動自体が本質的に動機を与える条件を発見しようとするのではなく，生徒たちを口当たりの良い数学的な文脈に誘導しようとするものが多い。しかし，私自身の指導経験では，生徒たちが数学の授業に完全に関与している場面－「スイッチが入っている」とき－には，事前の誘惑やその後の褒め言葉ではなく，実際に数学を行うことによって動機を与えられている。
>
> （Sinclair, 2006, pp.7-8）

第１項で見てきたように，数学はそれ自体が数学者たちを惹きつけており，その魅力はしばしば「美しさ」として表現されるものである。中島が述べる「簡潔，明確，統合といった観点からみて不十分なことがあれば，それを改善しなければ黙っておられないような心情」（中島，1982，p.96），すなわちこれらを観点とするような「美しさ」を追求するような価値観を，人間らしい一つの価値観として位置づけて児童・生徒を育成することが，日本おいて積年の課題であり，国際的にも改善が望まれている，算数・数学の学習への動機の低い水準の解消に寄与することが期待できる。

第２節　数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の成果と課題

第１節では，数学者による数学的対象の「美しさ」への言及を概観することで，研究において数学的対象の「美しさ」や「美しさ」を感得することが果たす役割を抽出し，これらの役割が数学教育の目的論・目標論で目指されてきた学習の実現に寄与しうるという，数学的対象の「美しさ」のもつ数学教育的価値を，次のとおり指摘した。第１に，学習者が数学的対象をその成立理由まで含めて「わかる」こと，第２に，学習者が数学的対象を発展的に捉えて考えること，第３に，学習者を算数・数学の学習に動機づけることである。

本節では以上の数学教育的価値のある数学的対象の「美しさ」に関して，数学教育研究の展開と成果を整理した上で，未解決の課題を指摘する。

第１項　数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の展開と成果

(1) 数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の展開

数学的対象の「美しさ」の重要性は，第１節で見てきたような数学者たちによる研究上の役割の主張を受けて，数学教育においても注目されるようになった。そして，数学的対象の「美しさ」と非数学者との関係についての研究が, 心理学を背景にもつパパート (S. Papert) やクルチェツキー（V. A. Krutetskii）によってそれぞれ展開された。数学教育においては, 1970 年代から，当時の数学教育研究において盛んに研究された問題解決や問題設定に関する研究の文脈で,「数学者と初学者との比較」の一端として展開されるようになった。以下ではまず，ここまでの研究の展開を概観する。

数学者パパートは, プログラミング言語 LOGO を開発した計算機科学者（コンピュータ・サイエンティスト）としてよく知られている。パパートは心理学者ピアジェ（J. Piaget）と交流があり，LOGO の開発には発達心理学についての彼の関心や知見が関わっている（Papert, 1993)。

パパート（Papert, 1978/1993）は，数学を対象とした考察における数学的対象の「美しさ」の役割について，ポアンカレによる説明をアダマールとは異なる方法で踏まえた考察を行った。まず，パパートは，数学の論理的な面と非論理的な面を区別し，後者に含まれる数学の美（beauty）や喜び，直観を同一視するという方法をとった。その上で，ポアンカレやアダマールとは異なり，非数学者を対象とした発話思考法を用いた観察[18]によって，非数学者による初等的な数学に対する意識的な思考が，美的な道標（aesthetic guidance）によって導かれることを見出した。

パパートの観察において用いられた初等的な数学は，２の平方根が無理数であることの証明である。パパートは，被験者たちがこの証明の過程において，等式

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (p\text{と}q\text{は整数})$$

に対して試行錯誤的に演算を施して根号を消去できたことに対して興奮と喜びを表明したことを報告した。そして，この根号の消去が，ユークリッドによる証明としてよく知られた p と q を互いに素として設定できることへの矛盾を指摘する証明や, 素因数分解した際の素数の個数の偶奇性に関する矛盾を指摘する証明の両方で機能すること，及び，この被験者たちはこの機能を見通して変形したようには見られなかったことを理由として, ポアンカレやアダマールが説明するような無意識の役割に言及せずに，非数学者が問題解決過程に提示したパターンと,「ポアンカレによって描写された過程との間の，ごく限られてはいるが構

[18] 調査対象者の情報や手続き，結果の詳細は記述されていない。

造的な類似」(Papert, 1978/1993, p.197）を認めた。

パパートによるこの観察結果の解釈は，彼が「美しさ」を非論理性としてあまりにも広く捉えている点で，鵜呑みにすることはできない。しかしながら，ポアンカレやアダマールが主張したような「美しくないもの」(ここでは平方根や分数表記とされている）の排除を意識的に，ただし論理的な意図なしで，非数学者が行っているという事実は，後の数学教育における問題解決を観察する研究の礎となっている。

心理学者クルチェツキー（V. A. Krutetskii）は，「具体的にいって数学能力とは何か，どのような個人的－心理学的特質が数学の成功的獲得をひきおこすか，つまり，人間を数学に対して有能にするか」(クルチェツキー，1969a，p.113，下線は原文）を解明するために，192名の児童・生徒を対象とした臨床的な研究を軸とした12年間に及ぶ大規模な研究を展開した（クルチェツキー，1969)。そして，児童・生徒による数学の問題解決過程の観察やインタビューおよび質問紙調査をとおして同定した数学的能力[19]の一つに，「解き方の明確さ・簡潔さ・経済性（『スマートさ』）への志向」(クルチェツキー，1969b，p.141）を挙げ，「有能な生徒はすべて，課題の解決を発見してからも，実験者がいいつけないのに，自分からもっといい解き方を探したがった」[20]（クルチェツキー，1969b，p.143）と説明した。

クルチェツキーは児童・生徒を能力[21]に応じた四つのグループに分け，あるグループの児童・生徒たちが示した特徴を，他のグループの児童・生徒が示さなかった場合に，その特徴をグループの特徴として同定するという手続きをとった。上記の「解き方の明確さ・簡潔さ・経済性（『スマートさ』）への志向」という能力は，数学的な有能さの特徴であることが次のように説明されている。

> 中位能力の生徒は，われわれの実験では，解き方の質に少しも注意を向けなかったとすれば（能力のない生徒は，いうに及ぶまい)，有能な生徒は，ふつう，最初に見つけた解き方で落ち着いてしまわなかった．もっとうまく，もっと簡単に解くことはできないとわかるまでは，課題をなげださなかった．自分が見つけた解き方が経済的，合理的

[19] その他には，「推理の論理性」や「思考過程の柔軟性」などを同定している。

[20] このような被験者による志向の例は，第2章第2節第3項参照。

[21] 数学に対してきわめて有能な生徒（「才能児」，「最有能児」)，有能な生徒，中位能力の生徒，能力のない生徒の四つである。選抜は，上述の，観察等で同定した数学的能力を視点にしたものではなく，「数学の自主的，創造的獲得における成功度」というより広い基準によって，実験的研究の前になされた。例えば，「有能な生徒」は「速やかに，容易に数学の教材を習得し，数学的操作を行なう技能を獲得する生徒，新しい教材の学習のとき，自主的に，ある程度，創造的に思考する生徒，非標準的な課題のオリジナルな解決を示す生徒」(クルチェツキー，1969a，p.236）とされた。

であり，「スマート」であったときにだけ彼らは満足感を味った．このような場合，彼らが独特な美的感情を体験することは，その情動的反応から明らかだった．「スマートな」解き方を知ったとき（たとえ，自分で見つけだせなかったとしても），彼らはこの美的感情を体験し，自分の友達や実験者に，その解き方をやってみせたのである．また，逆に，見つけた解き方が「荒削りで」，がさばっていて，複雑なやり方だったり，もっとよい解き方を見つけだせなかったときには，不満やいまいましさを，直接，言葉にあらわしたのである．

（クルチェツキー，1969b，pp.144-145）

クルチェツキーによるこの研究は，後述の数学者と初学者を比較する数学教育研究とは異なり，児童・生徒同士を比較している点が特徴的である。ここで有能さが認められた学習者は数学の初学者ではなく，幼少期からその数学的能力を発揮している姿が記述されている。例えば，「最有能児」の一人とされ，「解き方の明確さ・簡潔さ・経済性（『スマートさ』）への志向」という能力が観察されたソーニャという少女は，観察された当時は８歳であった。したがって，クルチェツキーによるこの研究成果は，数学者になるための特別な教育を受けずとも，「解き方の明確さ・簡潔さ・経済性（『スマートさ』）への志向」という能力を身につけて発揮する学習者が存在することを実証している。ただしこのことは，このような能力が教育不能であることまでを実証してはいない。以下の数学教育における問題設定や問題解決に関する研究では，数学的対象の「美しさ」を追求したり感得したりできることを教育可能な資質・能力の一つと捉えた研究も展開されている。

ブラウン（Brown, 1973）は，数学の人文学的な性格を考察するために，１から始まる自然数の和の求め方について考える過程を例示する。そして，項数が奇数の場合でも偶数の場合でも代数的な方法で一般化された結果が同じ形式をもつことに着目し，その理由を探るために幾何学的な解釈を施している。ブラウンは，この一連の過程に対して，「一般的な結果（奇数と偶数のケースをカバーする）と，将来の応用のために最も覚えやすい形をもたらすという意味でコンパクトな結果をもたらすからという理由で」（Brown, 1973, p.200），代数的な方法を最もエレガントであるとすることに同意すると表明した学生の考えに対して，より「深い」はずの数学におけるエレガンスがどのようなものであるかを探っている。

ブラウンははじめに，次の二つを挙げる。一つ目は，ユークリッドによる「素数が無限に存在すること」の証明がエレガントな対象であり，その理由は，簡潔であり，機械では考えられないような工夫がなされていること，一度つくってしまえば，簡単に理解でき，証明を完成させることができることであるとされる。二つ目のエレガントな対象は「微分積分学の基本定理」の主張であり，「表面的には概念的に（conceptually）異なる二つの概念（notions）

が，思いがけない形で結びついていること」(Brown, 1972, p.201) が理由とされている。続いて，先の学生によるエレガンスについての判断が単純性という概念 (a notion of simplicity) に依存していると判断した上で，この単純性を「演算や変数の数が最も少ない」と捉え[22]，このような単純性を志向することによって，自分たちが「どのように課題を考え，何に重点を置いて結論を導き出したのか」(Brown, 1973, p.202) という心理的特徴を見落しがちになることを指摘する。そして，証明と主張の間で「何をどのように調査したかを思い出させるもの」(Brown, 1973, p.202) である，「系譜 (genealogy)」(Brown, 1973, p.202) という証明と主張の相互作用を，三つ目のエレガントな対象として同定する。加えて，自然数の和で例示したアプローチが，元の問題を超えて幾何学的な「誰も予想しなかった新しい問いを私たちに設定させた」(Brown, 1973, p.203) ことに言及し，このような考察の「可能性 (potential)」をもつアプローチを，エレガントな対象として同定する。

ブラウンは，「エレガンスという概念を真剣に分析しようとしていない」(Brown, 1973, p.203) と断っており，ここで挙げた「美しさ」の基準についても，いくつかの基準の組み合わせが必要になることを確認しつつも，これらが必要十分であることは主張しない。その上で，学生が数学的対象の「美しさ」を判断する場合において，その判断が深いものではない場合があることを示していると言える。

ドレイフスとアイゼンバーグ (Dreyfus & Eisenberg, 1986a) は，ポアンカレやパパートによる言及を参照し，美学 (aesthetics) が生徒の数学教育に不可欠であると主張する。そして，ハーディにとっての数学的対象の「美しさ」の基準を参照し，明瞭さ (clarity) －単純さ－簡潔さ (brevity) －簡明さ (conciseness) －構造－力強さ－巧妙さ－意外性という，主観的な性質と数学の概念による連鎖によって，数学的対象の「美しさ」を説明している。その上で，大学院生や教員養成課程の学生による数学の問題解決過程の観察や，2 の平方根が無理数であることの証明方法についての学生と数学者との反応の差異の比較から，数学的対象としてのプロセスの「美しさ」を感得するのが数学者だけであるという結果を得たことを踏まえて，数学教育の現状を次のように厳しく問題視する。

> このような数学的思考 (数学の問題をエレガントな方法で解決したり，エレガントな解決を見たときに感動したりすること) の感得は，経験や学校教育を通じて成長することや, 大学の数学科の学生や数学の教員養成系の学生には確実に見られるべきであることを期待したいだろう。この希望は，ポリアの例に倣って，適切な問題とその解決を列挙

[22] ブラウンはこのような単純性の捉え方を，「不正確で過度に単純化された」(Brown, 1973, p.201) と評した上で用いている。

した何百もの本が書かれているという事実によって支えられている。このように，数学的思考の美的感得を教えるための材料は，無造作に整理されてはいるものの，入手可能である。この研究では，このような状況にもかかわらず，数学教育者がこの目的を達成するために惨めに失敗していることを示している。私たちは，テクニックやその基礎となるプロセスのいくつかの指導には成功しているようであるが，それ以上のことは数学の教室ではほとんど行われていないようである。

（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.7，括弧内は引用者）

私たちは，数学に対する美的感得は育むことができると信じている。（中略）しかし，この研究で見られたように，数学の教室ではまだこれが達成されていない。大げさかもしれないが，数学のカリキュラムには何か大きな問題があるのである。

（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.9）

ドレイフスとアイゼンバーグは，学生たちが数学的対象の「美しさ」を追求しようとしないだけではなく，提示された美しい数学的対象に価値を置かないことを強く問題視している。この立場は，学生たちによる数学的対象の「美しさ」の判断の特性を提示するにとどまったブラウンよりも，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得できるようになることの教育を強く志向していると言える。このような立場から，ドレイフスとアイゼンバーグは，「私たちの生徒における数学的美学（mathematical aesthetics）の感覚の促進に貢献しうる」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a , p.9）方法として，議論（arguments）の美的側面が議論されて（discussed）比較されるべきであると主張している。

シルバーとメツガー（Silver & Metzger, 1989）は，数学の専門家と初学者を比較する研究の一環で，専門家の問題解決に見られた美的な監視（monitoring）のポジティブな影響を記述している。シルバーとメツガーは，数学者５名と大学院生３名による発話思考法による問題解決過程の観察とインタビューをとおして，美的な監視が全ての被験者に見られたことや，３名の数学者の問題解決の記録で特に広範囲に見られたことを報告している。また，この論文では「専門家と初学者の美学（aesthetics）の影響についての比較を扱わなかった」（Silver & Metzger, 1989, p.71）が，「この研究以前に実施済みのいくつかの予備的研究に基づくと，美的な監視のポジティブな影響がほとんど専門家の記録のみからであり，熟練されていない初学者の記録からは見られなかったことは明らかであった」（Silver & Metzger, 1989, p.71）と述べている。すなわち，この論文では，数学者たちの問題解決過程における美的な監視の影響が記述されており，初学者との差異についてはほとんど言及されていない。しかしながら，その数学者たちによる問題解決過程の記述は，ドレイフスとアイゼンバ

ーグによるものよりも遥かに詳しい。

シルバーとメツガーは，数学者による問題解決行動における美学（aesthetics）の役割の一つとして，ポアンカレとアダマールによる数学の研究と数学的対象の「美しさ」との関係についての言及に基づき，問題解決における意思決定のガイドを挙げる。そして二つ目として，クルチェツキーの研究成果に基づき，完成した解決のエレガントさについての評価を挙げる。そしてこれらの二つの役割を視点とした問題解決過程の分析によって，インタビュアーが提示した単純で巧妙な解答をエレガントとして判断する姿や，幾何の問題を幾何の方法で解くという一貫性にこだわる姿を記述したのである。これらガイドと評価という二つの役割は，数学の問題解決におけるメタ認知の役割として注目されてきたものである。シルバーとメツガーはこの研究をとおして，問題解決者が必要性を「感じる（feels)」ことで為されるという，認知領域のみでは説明できないこれら二つの役割の特徴を浮き彫りにした。そして，この感性が情意領域で着目される情動（emotion）や動機づけと関連することから，シルバーとメツガーは，美学を認知またはメタ認知と情意に繋がりをもたらすものとして位置づけた。

また，シルバーとメツガーは，美的な監視が顕在化されるか否かについて二つの要因があることを推察している。一つ目は，問題の難易度であり，「専門家は与えられた問題が解けると知った時に，美的な考察の認知的な贅沢さを得る」(Silver & Metzger, 1989, p.69）と主張している。二つ目は，氏らが採用した発話思考法という手法に関して，何名かの数学者にとってはこの手法が煩わしいことが，美的な監視が顕在化されないことにつながったと推察している。

シルバーとメツガーは以上を総括して，問題解決行動への美学（aesthetics）の強い影響の現れを，エレガンスや倹約さ (parsimony)，対称性，一貫性，単純性,「美しさ (beauty)」，そしてその他の同様な属性が高く価値づけられる文化である，数学的文化に入ることの特徴と捉えている。その上で，学校数学で美的な原理の役割を考慮することの別の面への注意として以下のように主張し，数学的対象を美しくする過程の重要性を説いている。

> 私たちは，いくつかのこれらの美的法則の誤用による，ネガティブな教育的な結果について知っていなければならない。例えば，知ったかぶりをして倹約性，単純性または明快性を過度に強調することは，多くの生徒たちの気力や想像力をそぐことになってしまう（中略)。この研究で見てきたように，数学的な結果は専門的な数学者の決定的に洗練された形式における仕事からは現れない。数学的な考えが本来生み出すものは，この章で議論された美的原理によって形作られ，精錬さえ，洗練される。私たちは生徒たちに最後の結果のみを示すのではなく，彼らをより活発に，形成や精錬，洗練する過程

に巻き込まなければならない。この方法によって，彼らはより十分に数学の世界—美的原理が重要な役割を担う世界—を経験し始めるだろう。

（Silver & Metzger, 1989, p.72）

以上のブラウン，ドレイフスとアイゼンバーグ，シルバーとメツガーによる研究では，それぞれに定義した数学的対象の「美しさ」について，数学の専門家と初学者による数学の問題設定や問題解決の観察等をとおして，数学の問題設定や問題解決という短い探究活動においても数学者たちは数学的対象の「美しさ」を追求して感得していることが主張された。そして「美しさ」の観点から数学的対象の価値を判断したり，問題の選択や問題解決のガイドとして用いたりしている数学者たちの様子が報告された。そしてその一方で，そのような問題設定や問題解決における行動が，数学者特有であると判断された。この結果は，ポアンカレやアダマールが言及した長期的な研究活動における数学的対象の「美しさ」に関する選択が，短い意識的な探究時間でも行われうるということを示しており，かつ，数学的な熟達さの差異の一側面として扱われている点で，ポアンカレやアダマールによる言及を補い，パパートやクルチェツキーによる主張や研究成果を支持している。加えて，数学的対象の「美しさ」の感得についての教育に関心が向けられ，その方法についての言及が見られる一方で，そのような方法は論文の末尾における不明確な根拠に基づく主張にとどまっている。

このような，問題設定や問題解決を観察する研究に続いたのは，数学的対象の「美しさ」の基準の不確かさを主張したウェルズ（D. Wells）による研究と，ウェルズの主張を踏まえた新たな立場で研究を展開したシンクレア（N. Sinclair）による一連の研究，ウェルズとは異なる方法で数学的対象の「美しさ」の基準の社会的要因を考究したカープ（A. Karp）による研究，同基準の不確かさを主張したイングリス（M. Inglis）とアベルダイン（A. Aberdein）による研究，シンクレアによる研究を踏まえつつも異なる課題を探究した，チョー（H. Tjoe）による研究とラマン・サンドストーム（M. Raman-Sundström）による研究である。

ウェルズ（Wells, 1986）は先に参照したドレイフスとアイゼンバーグによる研究を受け，学校数学で学習者たちによる数学的対象の「美しさ」の感得を発達させるべきであるというドレイフスとアイゼンバーグの主張に同意する一方で，数学的対象の「美しさ」の基準を先のように明瞭さなどの連鎖で設定していることに対しては次のように反論した。

私が楽しんで感得している証明や構造はたくさんあるが，それらはチョークとチーズのように異なっている。私はそれらを序列化することはできないし，楽しみ方があまりにも異なっているのに，「同等に」楽しめると言っても意味がない。

数学的な「美しさ」を具体的な特徴に分解すると，また別の問題が出てくる。解決策

として，著者ら（ドレイフスとアイゼンバーグ）は，前提知識のレベル，明快さ，単純さ，構造，巧妙さ，意外性などに言及し，前提知識が大きいほど優雅さが劣るというような，それらの間の関係の可能性にも言及し，再び数量化に言及している。

　これらの要素を総合的に判断する方法について，数学者が一貫して同意しているという証拠はあるのだろうか？ちなみに彼ら（ドレイフスとアイゼンバーグ）は，数学者がこれらの判断を個別に評価する指標を持っていると考えているのだろうか？

（Wells, 1986, p.39，括弧内は引用者）

さらに，数学的対象の「美しさ」に関する教育に対しては次のように指摘する。

　子どもを中心とした教育と学習の大きな柱は，著者自身が主張しているように，個々の生徒の違いを認め，考慮に入れるべきだということである。数学の美的側面についてほとんど，あるいは全く経験のない教師が，教室では美学*が*重要であるという考えを持ち，さらに美的判断の尺度があると信じているとしたら，教師が「知っている」美を評価しない生徒には天罰が下るだろう。

（Wells, 1986, p.40，斜体は原文）

このウェルズの主張に対して，ドレイフスとアイゼンバーグ（Dreyfus & Eisenberg, 1986b）は，氏らによる数学的対象の「美しさ」の基準が絶対的であると主張する意図はなく，それらは相対的であること，そしてその上で，そのような相対的で内的ないくつかの基準の相互作用で成り立つ特定の構造によって，数学者やウェルズ自身も数学的対象の「美しさ」を判断しているということを主張した。また，「チョークとチーズ」についての反論に対しても，ドレイフスとアイゼンバーグの意図したものが「チーズとチーズ」の比較，すなわち同じ数学的対象同士についての比較であったと説明している。

ウェルズはこのようなドレイフスとアイゼンバーグたちの説明に対して再反論することは（少なくとも同じ誌面上では）していない。しかしながら，彼は，『The Mathematical Intelligencer』という雑誌への投稿をとおして，次のように主張を繰り返した。

ウェルズはまず，この雑誌に 24 の数学の定理を 0 から 10 の範囲で評価する質問紙を投稿し，読者に回答を依頼した（Wells, 1988）。続いてその結果を集計することで，得点にばらつきが認められることのほか，基準として多く用いられた簡潔性（brevity）などについても個人によって捉え方が異なることや，意外性という基準のように文脈に依存する性質があることを主張した（Wells, 1990）。ウェルズによるこの調査には，サンプルサイズが 80 程度であること，読者が数学者であるとは限らないことといった収集方法についての方法論

上の問題点がある。また，ドレイフスとアイゼンバーグ（Dreyfus & Eisenberg, 1986b）による，基準が絶対的であるとは捉えていないことや,「チョークとチーズ」の比較を意図していないといった説明に再反論するのではなく，自身の主張（Wells, 1986）を裏付けるような調査を意図していたと思われる。すなわち，方法論上の問題を踏まえずとも，ウェルズによる調査やその結果に基づく主張は，ドレイフスとアイゼンバーグの研究成果（Dreyfus & Eisenberg, 1986a）を揺るがすものにはなっていない。むしろ結果的に，数学的対象の「美しさ」について，数学者たちが内的ながら何らかの判断基準をもっているというドレイフスとアイゼンバーグによる仮説を，方法論上の問題を孕みながらも支持する調査結果であると言える。

このような数学の問題設定と問題解決の観察による研究や, ウェルズによる調査研究が展開されたのち，1990 年代では数学的対象の「美しさ」に関する研究は，管見の限りは展開されてこなかった。実際，シエルピンスカ（Sierpinska, 2002）は『Educational Studies in Mathematics』の編集者からのコメントとして，注目を集める分野の一つとして，数学的対象の「美しさ」について次のように言及している。

> 数学的知識の要素化に関する研究は，その認識論的および認知的な側面に焦点を当てる傾向がある。しかし，間違いなく，美的な側面と実用的な側面はもっと注目されるべきである。前者に関しては，デービスとハーシュ(1980)が,「受動的な熟考と実際の研究追求の両方において」数学の美的魅力について洞察的かつ雄弁に書いている(p.168)。しかし，彼らは，美術や音楽のように数学の美しさを描こうとすると，形式を明示する努力をしても, その根底にある美的性質が見えてこないことを認識していた。そのためか，学習者の中には数学を「埃のように乾いたもの」(p.169）と感じる人もいるようである。このような問題は, 数学の教育と学習の問題にも明らかに関連している。しかしながら，ESM に掲載されている論文の中で，数学を教えたり学んだりする際の感情の問題を取り上げているものが少ないことからもわかるように，この分野も数学教育ではあまり研究されていない。美の感得は個人的なものである（Davis and Hersh, 1980)。この分野が発展し，数学的美学の感得が個人的かつ社会的なものとして認識されるようになると, 美術や音楽のように，すべてのレベルの数学教育において美的感覚をより明確に使用する道が開けるかもしれない。数学を教える上で「数学の美学」を持つことの意味を明らかにしようとする試みは，この方向性に沿ったものである。
>
> （Sierpinska, 2002, pp.256-257）

シンクレアは，数学的対象の「美しさ」の基準の，絶対的ではないという意味での主観性

を強調するウェルズの立場と，上述のシエルピンスカの提言を受けて，数学的対象の「美しさ」に定義を与えない研究を展開している。彼女は，数学的対象の「美しさ」そのものを対象とせずに，数学の問題設定や問題解決における「美しさ」の判断の役割に焦点を当てた研究（Sinclair, 2001; 2004; 2006）と，「美しさ」を芸術同様に広く捉えて数学の学習を芸術の学習のような場にすること，すなわち個人による多様な「美しさ」の捉え方を認めたり，「美しさ」を批評することを推進したりすることを提案する研究（Sinclair, 2003; 2009; 2011; 2018a; 2018b）を中心として研究を進めてきた。以下では主にこの二つの研究を概観する。

シンクレア（Sinclair, 2001）は，分数の形式で入力した有理数の小数表記に現れる数のパターンが色彩を伴って表示されるようなソフトウェアを開発し，このソフトを用いた学習者の反応が，Dewey（1933）における提案を満たしていることを確認するとともに，美的反応を示す学習者とそうでない学習者の態度の差異を特定した。また，シンクレア（Sinclair, 2006）は，この Sinclair（2001）で示したソフトのほかに二つのソフトを開発し，同様に学習者の反応を観察及び記述した。そこでは，Sinclair（2004）で同定した，数学の問題設定や問題解決における数学者による「美しさ」の判断の役割である，評価的役割，生成的役割，動機づけ的役割が記述枠組みとして用いられており，シンクレアが開発したソフトを用いた学習環境において，学習者による「美しさ」の判断が，数学者による「美しさ」の判断と同様な役割を示しうることを実証的に主張した。加えて，Sinclair（2006）では，学習者たちによる素朴な「美しさ」の判断を数学者たちによる判断に近づける方法を美的文化化と呼び，「数学者と同じように数学を体験させる」（Goldenberg, 1989, p.171）ことを意図したカリキュラムについて検討したゴールデンバーグによる研究を参照して検討している。

この一連の研究において，シンクレアは数学的対象の「美しさ」についての自身の立場を，研究の展開とともに変えている。Sinclair（2001）では，数学と「美しさ」との関わりを説明する中で，芸術作品に潜む数学的な規則をアピールすることによる学生の知的好奇心の喚起に言及した上で，次のように述べて数学固有の「美しさ」の存在を主張している。

> そのよさを否定したいわけではないが，このようなリンクは他の領域への学生の興味を利用して数学への興味を誘導するものであり，（中略）数学自体が美的に不毛な領域であり，あるいは少なくとも外部の関心領域との関わりによってのみ可能性が実現される領域であるという信念を支持することになる。
>
> （Sinclair, 2001, p.25）

このような立場は Sinclair（2006）の第 4 部でも確認でき，先述のように，学習者たちによる素朴な「美しさ」の判断を，数学者たちによる判断に近づける方法が検討されている。

これは Sinclair（2004）でも同様であることが次の文章から確認できる。

> 数学的知識の確立された体系の中に生徒を招待したかったドレイフスとアイゼンバーグとは対照的に，ブラウンは美的な評価の生き生きとした意思に基づいた，育成している生徒の美的好みの発達を促す可能性を指摘した。このことによると，出発点は，専門家が賛同するような美的判断を生徒が身につけるように鍛えることではなく，むしろ，彼らが特別なアイディアの価値の個人的で社会的な交流への没頭を望む—また，それが可能な—機会を与えることにあるべきである。
>
> （Sinclair, 2004, p.268，下線は引用者）

この引用文に見られる「出発点」や「発達」という語からは，学習者による「美しさ」の判断を認めつつも，数学者による「判断」に近づけていくことを意図していることが窺える。一方，このように学習者による個人的な「美しさ」の判断を「出発点」とする立場は，Sinclair（2006）の第 3 部までには見られない。むしろ，数学への固有性が次のように否定される。

> 美的なもの（the aesthetic）を主観的かつ社会文化的に構築されたものとして認識することによって，私は，美的性質を対象物に固有のものであり，したがって知覚者から独立したものであると表現する一般的な傾向—言語学的な使用法によって支持されたもの—を排除しようとしているのである。
>
> （Sinclair, 2006, p.40）

ただし，Sinclair（2006）におけるこのような立場の振れは，全体としては数学に固有の「美しさ」を認める立場が優勢であるように思われる。実際，シンクレアは，「強いて言うならば」（Sinclair, 2006, p.41）と断って説明する「美しさ」についての実用的定義の記述に続いて，そのように定義される「美しさ」と数学との関わりを次のように説明する。

> この定義は，数学における美的なもの（the aesthetic）を経験していない人，または学校の数学を学ぶ学生の美的なものの洗練を疑問視する人にはほとんど助けを提供しない。
>
> （Sinclair, 2006, p.41，下線は引用者）

さらに，研究の目標について次のように説明する。

私の目標は，数学的な美的なものを鮮やかに記述し，数学者以外の人にも理解しやすく，数学を学ぶ人にも役立つようなものにすることである。また，この記述は，専門の数学者や趣味の数学者にとっても心を揺さぶるものでなければならない。

（Sinclair, 2006, p.44，下線は引用者）

もし数学に固有な「美しさ」の存在を否定するのであれば，数学における経験や数学者の心を揺さぶることは必要条件にはならない。この二つの引用からは，シンクレアが自身の研究や「美しさ」の定義の規範性を数学者や数学に求めていることを窺うことができ，したがって，全体としては数学に固有な「美しさ」の存在を認める設計になっていると考えられる。

このように，規範性を数学者に求めた見解は，Sinclair（2008）にも見られる。Sinclair（2008）では，２ヶ月の間に週に２回の頻度で観察した中学校（第７学年）の授業において，美的文化化がなされているかどうかが，数学の「何に」「なぜ」「どのように」注目するかを視点として分析された。ここで美的文化化とは，名称こそ Sinclair（2006）と同じものが用いられているものの，両者は異なる概念として扱われている。Sinclair（2006）では，大学院における数学の授業では「美しい」や「エレガント」などといった語を用いた明示的な価値づけがなされていたのに対して，典型的な小中学校の授業ではそのような明示的な価値づけがなされていないことを指摘し，このような「美しさ」に関する語を用いた明示的な価値づけの重要性を説いた。

一方，Sinclair（2008）では，分数係数の１次方程式に対して，そのまま計算するのではなく，「代数の獣を倒すための武器」（Sinclair, 2008, p.29）として教師が両辺にある分数の分母の最小公倍数を両辺にかける方法を紹介する過程が事例の一つとして提示された。そして，「幾何学者はかつて，ユークリッドよりも少ないステップで作図ができることに喜びを感じていた」（Sinclair, 2008, p.30）ことを踏まえて，この教師による方法は同様な効率性をもっていると判断している。すなわち，数学者による判断を根拠として，この教師が伝えているものが「美しさ」であると解釈している。その上で，「定理を証明したり，ジャーナル論文をレビューしたりするときだけでなく，定義をどのように書くかを考えたり，ある種類の表記法が他のものよりも優れている理由を考えたりするとき」（Sinclair, 2008, p.34）にも，教師や生徒が美的考察を行うことができると結論づけている。

シンクレアによる，主としてこれらの研究に続く研究では，このような立場の捩れが表面的には解消され，Sinclair（2006）が宣言したような，数学に固有な「美しさ」を認めず，また，数学者による「美しさ」の判断に向けた教育を展開することを否定する立場が表明されるものがある。発表時期は遡ることになるが，Sinclair（2003）では，ドレイフスとアイゼンバーグ（Dreyfus & Eisenberg, 1986a）は学習者が数学的対象の「美しさ」を感得でき

るように教育するべきだと提案したのに対して，ブラウン（Brown，1973）が学習者の素朴な「美しさ」の判断を指摘したに留まったことを受けて，次のように Dewey（1934）に依拠した立場が表明される。

> ここで問題となるのは，美的嗜好を育む目的が，プロの数学者の美的嗜好に合わせることなのかどうかということである。確立された数学的美学のシステムに生徒を参加させようとするドレイフスとアイゼンバーグとは対照的に，私は教育者が学校数学における美的評価の生気に満ちた目的に従って，生徒の美的嗜好の発達を育むことを提案する。その出発点は，「専門家」と一致した美的判断を採用するように生徒を訓練することではなく，むしろ，特定のアイデアの価値について個人的かつ社会的な交渉をしたいと思い，できる機会を生徒に提供することである。生徒の美的能力（aesthetic capacity）は，数学的プロダクトの経済性，巧妙さ，簡潔さ，構造，明瞭さ，驚きなどの形式的性質（formal qualities）を識別する能力と同等ではない。むしろ，美的能力とは，情報と想像力を組み合わせて，意味と喜びに関する目的のある決定を下す能力のことであり，これは Dewey (1934)のような解釈から導かれた「美的」という言葉の使い方である。
>
> （Sinclair, 2003, p.200，下線は引用者）

ここでは Sinclair（2004）と同様に「出発点」という表現が用いられている。そしてその「出発点」の内容については，この二つの研究に明確な差異は認められない。しかしながら，Sinclair（2003）では，Dewey（1934）に依拠し，数学らしさが反映されない「美的能力とは，情報と想像力を組み合わせて，意味と喜びに関する目的のある決定を下す能力」という定義がなされており，シンクレアの，研究対象とする「美しさ」に数学らしさを反映させないという意図が読み取れる。実際，Sinclair（2003）では，４名の生徒による作図ツールを用いた正方形の作図過程が描写されており，この過程において生徒たちが自身の方法の価値[23]について交渉したこと自体を価値づけている。すなわち，何らかの「美しさ」や価値に向かって生徒たちの価値観が変容することではなく，価値の交渉という過程自体を価値づけているのである。これは，Sinclair（2004）や Sinclair（2006）の立場とは明らかに異なっている。

---

[23] ここで描写された，コンパスと定規を使ったユークリッド流の「古典的な」方法を「より完璧で，より数学的」と価値づけた生徒に対して，シンクレアは，「しかし，彼女は，より技術的で複雑なものは，より数学的なものであると信じるように文化化されていたのかもしれない。」(Sinclair, 2003, pp.201-202）とコメントしている。シンクレアにとって，少なくとも，「古典的な」方法と「数学的である」ことは同等ではない。

Sinclair (2009) では，美的なもの (the aesthetic) の現代的な見方として，Dewey (1934)，Johnson (2007)，Gombrich (1979) と Wilson (1998)，Dissanakye (1992) と Pinker (1997) が参照され，これらの理論と数学教育研究との間の乖離の要因として次の三つが検討される。第 1 に，数学教育の研究に対する認知主義的な志向，第 2 に，美学の現在の理論と数学教室の基本的な社会性との間の関連性の欠如，第 3 に，数学教育を取り巻く力関係（the power dynamics）とそれに伴う数学的な美的なもののエリート主義的な見解の 3 点である。

第 1 の要因である認知主義的な志向については，数学教育研究における認知的アプローチが情意や美学を表面的にしか捉えていないことや, 時には美学を情意の領域内に含めてしまうことを批判し，認知，情意，美学がそれぞれ異なる機能を果たすことを主張している。第 2 の要因である社会性については，現代的な美学の視点が個人の能力や傾向に焦点を当てているのに対して，数学教育学では「コミュニケーションと文化化の論点が中心的」（Sinclair, 2009, p.56）であることを指摘している。そして関連する数学教育研究として Bishop(1991)，Yackel and Cobb（1996)，Sinclair（2008）を参照し，社会性を考慮すると一定期間の文化化が必要であることや，Sinclair（2008）で特定された美的文化化における教師や教材からの働きかけに対する生徒による解釈に焦点を当てた研究が展開されることの必要性が指摘されている。第 3 の要因である力関係やエリート主義については，数学を芸術と同一視する著名な数学者たちの見解が，非数学者たちに対する数学の垣根を下げるという期待は誤りで，それらは数学の「美しさ」をエリート主義的なものとして捉える力関係の根底にあるものであり，非数学者たちは数学よりも排他的ではない他の芸術領域で美的な魅力を経験することを選ぶだろうと指摘する。また，芸術において作品の美的価値（the aesthetic merit）を評価し，解釈し，議論するという役割を果たす批評家が数学には不在であることを問題視する。

Sinclair（2009）ではまた，数学的対象の「美しさ」の「客観性」と「主観性」についてのシンクレアの捉え方が明記されている。シンクレアは，「数学的な美的なもの（the mathematical aesthetic）の客観的見解は，数学者たちが数学的な美（beauty）の判断に同意するだろうというものである（もし彼らが同意しないのであれば，それは主観性の可能性を示唆している)。」(Sinclair, 2009, p.47）と述べている。すなわち，シンクレアにとっての数学的対象の「美しさ」の「客観性」は，「美しさ」を数学的対象に属する数学的概念（例えば，対称性や比など）のみで定義することではなく，数学者の共同体に「美しさ」の判断についての合意があることを意味するのである。そしてこれに対する「主観性」は,「美しさ」が個人的な基準（例えば，意外性や簡潔性）で判断されることではなく，数学者の共同体に「美しさ」の判断についての合意がないことを意味するのである。このような捉え方は，数学者の共同体には「美しさ」の判断に合意がないと主張したウェルズと同様である。

Sinclair（2009）では，数学的対象の「美しさ」を古典主義的なものとロマン主義的なものへと多元化したル・リヨネ（Le Lionnais, 1948/1986）の見解や，ウェルズによる調査結果に基づく主張を参照し，この意味での客観的な見解が挑戦されるべきものとして位置づけられている。その一方で，数学者による判断を根拠として，ある数学教師が伝えているものが「美しさ」であると解釈し，その行為を美的文化化として捉えた Sinclair（2008）を参照して，美的文化化を認め，推奨している点では，共同体による同意という意味での「客観性」を認めているようにも捉えられる。そもそも，ル・リヨネの見解は，数学者が感得する数学的対象の「美しさ」が，ル・リヨネがいうところの古典主義的なもののみではないことを示すものである。このように，数学者の間に「美しさ」についての好みの差異があるという見解は，クルルも主張している。このル・リヨネの見解から数学者たちによる「美しさ」の判断が「一枚岩」ではないと捉えることはできても，そこから数学者たちの間に合意がないと捉えるのは，過度に多様性を強調していると言える。

芸術における「美しさ」または美学の多様性や批評という営みに重点を置くシンクレアの研究は，続く研究（Sinclair, 2011; 2018a; 2018b）においてさらにそれまでの数学教育研究とは異なる視点を提示する。Sinclair（2011）では，Sinclair（2008）で用いた「何に」「なぜ」「どのように」という視点を数学の歴史に向け，これらの背後には「美しさ」の判断あることを確認する。その上で，数学における「美しさ」を批判することが，芸術における批評と同様に，数学を発展させるという仮説を立てるとともに，ジャーナルの査読などではこの批評が実際に行われていること，この査読での判断が数学研究を方向づけ，大学院や大学の教育に影響を与えると述べている。また，Sinclair（2018a）では，数学で「美しい」とされてきたものの代わりに，哲学者ランシエールによる美学（Rancière, 2004）や芸術家で美学者のコーレンによる美学（Koren, 2010）を参照すると，児童・生徒による算数・数学の学習のプロセスやプロダクトについての見方が変わることを説明している。そして，Sinclair（2018b）では，Sinclair（2018a）と同様に様々な美学を数学の背後に位置づけて数学を多様に捉える例を示すことで，数学教育における美学を「教師や生徒を麻痺させたり，社会的，政治的，さらには環境的にも重要な影響を及ぼす可能性のある特定の感覚の分布を優遇したりする現在の体制に，さまざまな方法で挑戦する新しいアプローチ」（Sinclair, 2018b, p.63）として位置づける提案をしている。Sinclair（2018a; 2018b）が提案する例の一つには，日本における「侘び寂び」の美学を数学の背後に置くものもある。この「侘び寂び」による数学では，「侘び寂び」が「不完全性，儚さ，未完成性，自然の粗雑さ，そして矛盾に価値をおく」（Sinclair, 2018b, p.59）とされるのに伴い，「問題解決のプロセスの痕跡を残しながらも，ごちゃごちゃとした解法，指で数えること，紛らわしい定義を提案すること」（Sinclair, 2018b, p.59）が成立することになる。このようなシンクレアの数学観，またはこのような数学を認

める数学教育観は，Sinclair（2006）で目指された，学習者たちによる素朴な「美しさ」の判断を出発点として数学者たちによる「判断」に近づけようとする数学教育観と反するものである。「侘び寂び」のように，不完全で未完成であるかのようなものを完成されたプロダクトとして捉えるような美学を背後にもつ数学では，例えば，ある命題に対する反例はその機能を失い，反例を乗り越えようとする数学的探究は展開されなくなるだろう。シンクレアの提案する数学教育における美学の役割がこのような損失を伴うだけの価値があるか否かについての深い議論はここではせず，第１節第２項で整理した数学教育の目的や目標の達成には寄与しないであろうということを指摘することにとどめることにする。

以上のシンクレアによる一連の研究とは別に，数学的対象の「美しさ」の基準が合意されていることに反論した研究として，Karp（2008）と Inglis and Aberdein（2014），Inglis and Aberdein（2020）がある。Karp（2008）では，アメリカとロシアの中学校・高等学校の教師や教師志望者が提出した「美しい問題」とその判断の理由[24]を分析するという手法を用いて，教師による数学的対象の「美しさ」の判断が何に由来するかを実証的に考察している。そして，アメリカ人教師とロシア人教師に提出された問題の間で認められた差異が，これらの教師が教えるカリキュラムの差異とよく対応していると指摘した。そして，「明らかに，問題の数学的な美しさが何らかの方法で客観的に測定されることを望むのは無駄である。問題の美しさについての見解は誰もが同じではありえない。人々は顕著な個人的な好みを示している。」(Karp, 2008, p.42）と主張している。Inglis & Aberdein（2014）では，数学者を対象に実施した調査の結果が統計的に分析され，数学の証明と関わりのある形容詞が四つの次元で説明された。そして，「美しさ」を単純性（simple）と関連づける伝統的な捉え方に反して，これら「美しさ」と単純性（simple）はほとんど無関係であるという結論を得ている。また，Inglis & Aberdein（2020）では，これまで数学者たちによる「美しさ」の判断の一貫性のなさを主張してきた調査研究（e.g., Inglis & Aberdein, 2014; Wells, 1990）では，判断の場が個人的な場であり，社会的な影響を受けにくい場であったことに注目し，数学者を対象に証明の「美しさ」を点数化することを求める質問紙調査の方法を工夫することで，「美しさ」の判断が「美しいかどうか」の判断ではなく，「数学者の共同体で美しいとされているものかどうか」という社会的な判断になっている可能性を指摘した。そこでは，数学者たちを無作為に２グループに分け，一方にはその証明が，美しい証明が収録されていると知られている『Proofs from THE BOOK』から引用されたものであることが情報として与えられ，もう一方にはこの情報は与えられなかった。そして，この情報を知らされた純粋数学者たちは，知らされなかった純粋数学者たちよりも，証明の「美しさ」を高く評価したこ

[24] 判断の理由が収集・分析されたのはアメリカの教師及び教師志望者のもののみ。

とが示されたのである。

チョー（H. Tjoe）は，ポアンカレやハーディといった数学者による数学的対象の「美しさ」についての言及や，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することを志向する数学教育研究（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a; Silver & Metzger, 1989, Sinclair, 2001; 2004）を参照し，同様な志向の研究を展開している。Tjoe（2016a）では，これまでの問題解決研究では注目されていなかった高校生による問題解決とそれに伴う美的判断が，数学者による美的判断と比較された。具体的には，３名の数学者たちによる美的判断を総合して「数学者による美的判断」を設定し，その結果と高校生による美的判断が比較された。調査の対象になった高校生は，志願者 30,000 人のうちの 5%未満しか入学できない高校の生徒であり，数学的な才能を有した生徒としてみなされた。調査の結果としては，「数学者による美的判断」と高校生による美的判断の質的な差異が浮き彫りにされた。この結果は，Dreyfus & Eisenberg（1986a）や Silver & Metzger（1989）に類するものである。その一方で，クルチェツキー（1969b）には反するものであるかのようにみえるが，クルチェツキーによる研究とチョーによるこの研究とでは，研究対象も調査方法も異なっている。特に，チョーが対象とした数学的才能をもった高校生は，高校入試において発揮される数学の熟達さであることから，クルチェツキーが同定した数学的能力と同等な能力を有しているとは限らない。

チョーはまた，小学校第１学年の加法の指導法に注目して，数学的解法の「美しさ」が感得されるような授業展開を構想した (Tjoe, 2016b)。ここでは２桁同士までの加法を対象に，児童たちが多様な方法を用いて計算することができるようになること，それぞれの方法が適した加数・被加数の組み合わせがあることがわかることなどを目標に，教材が構成されている。ただしこの構想は実践的に検討されていない。

ラマン・サンドストームは，数学者オーマン（Lars-Daniel Öhman）との共同研究で，数学の証明と「美しさ」の関係を，フィットの感覚に焦点化して考察している（Raman-Sundström & Öhman, 2018)。このフィットの感覚は，シンクレアが数学的対象の「美しさ」を厳密ではない形で説明する際に用いていたものである（e.g., Sinclair, 2004; 2006)。ここでは約 20 個の証明のセットを分類することによってフィットの感覚をフィットする対象によって３種類に分類し，さらにそのそれぞれに対して２個ずつの基準を設けた上で，具体例を提示している。そしてその合計６個の基準のうち，証明の「美しさ」と関連するものとして，以下の三つが同定された（表１－１)。

表１－１　証明の「美しさ」に関係するフィットの基準

（Raman-Sundström & Öhman, 2018, pp.187-188 をもとに引用者作成）

基準	説明
詳細度	証明の伝達方法（書かれ方）と読み手との間のフィットの基準の一つ。 根底にある考え方が適切な詳しさの量で提示されていること。
透明性	証明の伝達方法（書かれ方）と読み手との間のフィットの基準の一つ。 議論の構造がはっきりとしていること。
接続性	特定の証明とその証明の族との間のフィットの基準の一つ。 証明のアイディアが他の定理の証明のアイディアと結びついていること。

この三つの基準が証明の「美しさ」と関連していることについては,「詳細度」については美の特徴としてしばしば示唆される簡潔さ（brevity）と関連していること,「透明性」については証明の把握しやすさという考えを介して「美しさ」と関連していること，証明や定理を新しい方法で見ることができ，定理の深さの何らかの尺度になりうることが理由として挙げられた[25]。この研究は，数学的証明という知覚対象とその「美しさ」を明確に関連づけているという点で，シンクレアによる一連の研究とは立場が異なっている。

以上のように展開されてきた数学的対象の「美しさ」に関する研究とは独立して，国内でも学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することを志向した研究や実践が行われてきた。平岡は，海外の数学教育の目標論を参照して，算数・数学教育は「数量や図形に関わる審美的価値（aesthetic value）を追求したりそのような美しさを創造したり味得したり鑑賞したり（appreciate）するような情意的側面を育成・伸長させる指導にも大いに力を注いでいかなければならない」（平岡，1987，p.218）と述べ，デザイン学者や哲学者，美学者，そしてポアンカレによる説明を参照した上で，数学がもっている特質として統合性（unity），正確性（correctness），明瞭性（clearness），的確性（exactness），首尾一貫性（consistency），簡潔性（simplicity）を挙げている。その上で,「このような特質の発現や価値の追求を目指していくところに算数･数学の美しさの創造や鑑賞が行われることになる」(平岡, 1987, p.220）と述べ，異分母分数の大小比較や立体の体積の指導法を提示している。ただし，デザイン学者や哲学者, 美学者による言及と先に挙げた 6 個の特質との関係は説明されておらず, また, これらの特質と自身が提示した指導法との関係も説明されていない。指導法については，それらが「数理の不思議さ」や「生徒にとっての驚き」に関係していると説明されている。

[25] ラマン・サンドストームとオーマンは，この議論を「やや憶測的」（Raman-Sundström & Öhman, 2018, p.185）と自評している。

松尾（1999）は，哲学では「美はある社会における一つの価値として，その社会に属する人々が求めるものである」（松尾，1999，p.71）とされていることを確認した上で，数学者による言及や数学教育の目標論を参照し，「教育上その感得が目指されている算数数学の美しさは算数数学の事実に関わる対称性やバランスなどとともに，算数数学を考えていく思考過程における簡潔さ，明瞭さ，的確さ，論理性，統一性などであると考えらえる。」（松尾，1999，p.75）とまとめている。その上で，小学校５，６年生と教員養成課程の大学生３，４年生を対象に，算数や数学を学んで「美しいなあと感じたこと」を記述してもらうアンケートを実施し，先にまとめた「美しさ」との差異を分析している。そしてその結果を受け，「主なる問題点は美しさを感得できていないということである。特に，子どもが感得している美しさには偏りがある。」（松尾，1999，p.77）と指摘し，子どもが美しさを感得するための手立てとして，「教師自身が算数数学の美しさを知ること」，「子どもに算数数学の美しさを紹介すること」，「子どもが自分で算数数学の美しさを考える場面を設定すること」の３点を挙げている。そして特に第２，第３の手立てについては，「算数数学に特有な思考過程で見られる美しさ」（松尾，1999，p.78）を取り上げることの必要性を強調している。

池田らは，図形についての「美しさ」を定め，その感得を促す教材を提案している（池田ら，2010）。そこでは，哲学で指摘される「美しさは客観に備わるという立場」と「美しさは人間による創造物に見いだされる」という二つの立場を融合させて，「対象のもつ構造や性質に限定せず、人間が創り上げていくプロセス、考え方までを含めて」[26]（池田ら，2010，p.2），「人間が創り上げたものに限定することなく、人間が探究することで明らかにされた、人間の行為を超越して存在している自然界の美しさ」[27]（池田ら，2010，p.2）にも言及して「美しさ」を捉えるとしている。そして後者の立場をもとに，「美しさ」を「個人的・階級的なものではなく、全ての人を対象とした社会的なものである」（池田ら，2010，p.2）と捉える立場が表明されている。池田らはこの立場から教材や実践例を集めて「美しさ」を五つに類型化し，小学校算数科の教材を提案している。また，前田らはこの池田らによる研究と同一の研究の一環として，中学校・高等学校数学科の教材を提案している（前田ら，2010）。

池田ら（2010）や前田ら（2010）では，共同研究者たちが集めた教材を元にした考察を行なっているが，国内では他にも，自身が考える数学的対象の「美しさ」に関する実践が報告されている。例えば，算数教育の雑誌『新しい算数研究』では，特集として「算数の美しさを味わってたのしむ」が組まれ，小学校教諭による四つの実践事例が報告されている（新算数教育研究会，2014）。

[26] 前者の「美しさは客観に備わるという立場」にはない捉え方である。
[27] 後者の「美しさは人間による創造物に見いだされるという立場」にはない捉え方である。

以下ではここまででの数学教育研究の概観を踏まえ，数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の成果を整理し，学習者によるこの「美しさ」の感得を志向する上での研究上の課題を指摘する。

(2) 数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の成果

① 数学的な熟達性を説明する特徴の一端であること

クルチェツキー(1969b)や Brown(1973), Dreyfus & Eisenberg(1986a), Silver & Metzger（1989），Tjoe（2016a）で指摘されてきたことから，数学的対象の「美しさ」を感得できることは，数学的な熟達性を説明する特徴の一端であると言える。特に，クルチェツキー（1969b）からは，この特徴が学校教育とは無関係に備わりうることが確認できる。また，Tjoe（2016a）からは，高校入試において極めて優れた熟達性を示す高校生でも，感得する数学的対象の「美しさ」の質が数学者とは異なりうることが確認できる。ただし，Inglis & Aberdein（2020）から，数学者たちも，数学的対象の「美しさ」の判断の際に，数学者の共同体による判断の影響を受けている可能性があることがわかる。すなわち，この数学的対象の「美しさ」の感得という面での熟達性は，数学者たちですらも発達過程である可能性がある。加えて，Silver & Metzger（1989）や Sinclair（2009）で言及されているように，この熟達性は，認知領域や情意領域の両方に関係する三つ目の次元に位置づけられるものである。

② 問題設定・問題解決において重要な役割をもつこと

ポアンカレやアダマールといった数学者が指摘してきことは，数学的対象の「美しさ」を感得できることが，数学の研究課題の設定や課題解決において中核的な役割を果たしていることであった。このような役割は，Sinclair（2004）において，評価的な役割，生成的な役割，動機づけ的な役割としてまとめられた。このような役割のうち，研究課題の解決，すなわち数学上の発見に関する生成的な役割については，ポアンカレやアダマールが無意識によるプロセスを主張したのに対し，Papert（1978/1993）からは非数学者の意識的な問題解決過程にも確認できること，Silver & Metzger（1989）からは数学者による数学の問題設定や問題解決という普段の研究活動よりも短時間で意識的な探究においても確認できることがわかる。さらに Sinclair（2006）からは，Sinclair（2004）で同定された三つの役割を，学習者による「美しさ」の判断ももちうることが確認できる。ただし，Papert (1978/1993) や Sinclair（2006）では数学的対象の「美しさ」を広く捉えていることから，確認されたこれらの役割が，確かに「美しさ」の判断に由来するものであるのかどうかは不明確である。

第１節第２項で整理した，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することの数学教育的価値を実現するためには，学校数学における算数・数学の学習過程を，数学者が数学的対象

の「美しさ」を感得するような過程にする必要がある。意識的な考察の間に無意識による考察が介在するポアンカレやアダマールの研究の過程を学校数学で実現することが困難であることを踏まえると，Silver & Metzger（1989）における知見は重要である。

③ 学習者による数学的対象の「美しさ」の感得の促進方法についての仮説

数学的対象の「美しさ」の感得を数学的な熟達性として説明する Dreyfus & Eisenberg（1986a）や Silver & Metzger（1989），Tjoe（2016a）のほか，Sinclair（2004; 2006）においても，この感得は教育可能なものとして位置づけられている。その上でこの研究者たちは，その教育方法を仮説として提示している。それらを整理すると，次のようになる。

まず，Dreyfus & Eisenberg（1986a）と Tjoe（2016a）では，数学的対象の比較という手法が提案されている。Silver & Metzger（1989）では，数学的対象を「形成や精錬，洗練する過程」（Silver & Metzger, 1989, p.72）に学習者を巻き込むことが提案されている。Tjoe（2016b）では，多様な解決方法を検討する実用的価値を学習者がわかるようにした上で，多様な解決方法が生じるように教材を開発して配列することが提案されている。そして Sinclair（2006）では，授業において教師が「美しさ」に関する語を用いることとその評価の理由を説明すること，解決方法の比較を行うこと，そして最終的にはそのような比較を生徒たちに委ねることが提案されている。この Sinclair（2006）の提案は，松尾（1999）における提案の中の「子どもに算数数学の美しさを紹介すること」，「子どもが自分で算数数学の美しさを考える場面を設定すること」と類するものであるであると考えられる。

以上の提案では，それぞれが感得を目指す数学的対象の「美しさ」が同質のものであるとは限らないことを念頭に置く必要があるものの，数学的対象の比較が共通して含まれていることが確認できる。

第２項　数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の課題

(1) 数学的対象の「美しさ」及びその感得を説明しうる理論的枠組みの構築

第１項で概観した，数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究では，この「美しさ」をそれぞれに定義したり（Brown, 1973; Dreyfus & Eisenberg, 1986a; 平岡, 1987; 池田ら, 2010; クルチェツキー，1969b; 前田ら，2010; 松尾，1999; Papert, 1978/1993; Raman-Sundström & Öhman, 2018; Tjoe, 2016b），調査に参加した数学者の判断に任せることで定義を明示しなかったり（Inglis & Aberdein , 2014; 2020; Karp, 2008; Silver & Metzger, 1989; Tjoe, 2016a; Wells, 1990），シンクレアによる一連の研究のように定義しないことを明言していた。このように，数学的対象の「美しさ」については，簡潔性などのように頻繁に説明に用いられる性質はあるものの，その定義の合意はなく，合意を目指すこと自体に否定的な

考えもある。このような研究の実態は「美しさ」という概念自体に由来する方法論上の困難性に起因するものであり，既に提案された定義の比較のみから合意の得られる定義を導出することは困難である。その一方で，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を目的とする研究を展開する上では，実証的・実践的な方法を可能にする操作的な定義が不可欠である。

数学教育における数学的対象の「美しさ」に関する研究において扱われる「美しさ」は，上記の定義の明記・不明記や有無に関わらず，次の三つの方法またはその組み合わせで対象化されている。

第 1 に，「美しさ」という概念を特定の数学者による限られた言及や実際の判断に基づいて定める方法である（Dreyfus & Eisenberg, 1986a; 平岡, 1987; Inglis & Aberdein , 2014; 2020; Karp, 2008; クルチェツキー, 1969b; 松尾, 1999; Papert, 1978/1993; Raman-Sundström & Öhman, 2018; Silver & Metzger, 1989; Tjoe, 2016a; 2016b）。この方法では，研究で対象とする「美しさ」に数学者に由来する規範性を付与することができるが，その数学者による言及外の事柄について議論することができない。このことは，数学者による数学的対象の「美しさ」についての言及が断片的であることを踏まえると，看過できない。

第 2 に，「美しさ」という概念をその研究者自身の主観に基づいて定める方法である。ここで「研究者自身の主観に基づいて」とは，その研究が参照した文献等が示されていなかったり（Brown, 1973; Tjoe, 2016b），数学者による言及に参照元が不明な基準等が付加されていたり（Dreyfus & Eisenberg, 1986a; 平岡, 1987; Karp, 2008; Papert, 1978/1993; Raman-Sundström & Öhman, 2018; Silver & Metzger, 1989），美学や哲学に関する文献を参照した上で，参照元が不明な基準等が付加されていたり（平岡, 1987; 池田ら, 2010; 前田ら; 2010）するということを意味している。この方法では，参照元が不明の基準等があることによって，その研究における解釈や主張が確かに数学者によって感得されているような数学的対象の「美しさ」に関するものであるのか否かが判断できなくなる。

第 3 に，美学における理論を参照することで「美しさ」やその感得についての体系的な理論を得つつも，数学の特徴を反映していない研究である。これは，シンクレアによる一連の研究が該当する。シンクレアによる研究の多くは，主として Dewey（1934）を理論的な基盤として展開されている。これらの研究では，「美しさ」は主観によるものであることから数学的対象の「美しさ」の判断についての数学者による合意はないという立場のもと，少なくとも定義上は数学者の考えが反映されていない。第 2 節第 1 項で見てきたように，シンクレアの研究の一部では個々の判断において数学者による言及を参照しており，実際には数学者に由来する規範性を付与している判断もある。しかしながらこの立場では，第 2 の立場と同様に，研究における解釈や主張が確かに数学者によって感得されているような数学的

対象の「美しさ」に関するものであるのか否かが判断できなくなる。加えて,「美しさ」と知覚対象との関係を排除することは,数学教育の目的や目標を達成しようとする検討において,教材を議論の対象から排除することになる。換言すると,学習者が「美しい」と感じるのであれば,その際の知覚対象は何であっても,例え数学的対象ではなくてもよいことになってしまう。数学とは不可分な数学教育の目標を鑑みると,この立場を採ることはできない。

以上から,学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を目的とする研究を展開するためには,実証的・実践的な研究に先立って,その「美しさ」が数学者によって感得されているような「美しさ」である保証を与え,「美しさ」について数学者による言及外の事柄についての議論も可能にするような,理論的枠組みを構築する必要がある。加えて,この理論的枠組みには,知覚対象となる数学的対象自体をその「美しさ」と関連づける観点を位置づける必要がある。

(2) 数学的対象の「美しさ」の感得を促進する方法の詳細な検討

数学的対象の「美しさ」に関する数学教育研究の成果の一つとして整理したように,学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促す方法については,いくつかの仮説が得られている。また,それらに共通するものとして,数学的対象の比較という手法が確認できる。しかしながら,Dreyfus & Eisenberg(1986a)と Tjoe(2016a)においては,数学者が「美しい」とする数学的対象を提示してもなお,学習者がその「美しさ」を認めないことが報告されている。加えて,この「数学的対象の比較」を含めて提案された方法は,すべて実践的な検討を経ていない。さらに,先行研究の多くが参照している数学者たちによる数学的対象の「美しさ」についての言及では,その「美しさ」を感得する方法についての言及がないこともあり,数学教育研究において提案されたこれらの方法には,数学者たちによる言及に基づく裏付けはない。すなわち,理論的にも経験的にも根拠が得られていない。

以上から,学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を目的とする研究を展開するためには,その感得の促進方法について,上記で指摘したような理論的枠組みに基づく理論的根拠のある方法を導出した上で,実証的・実践的な検討を経て評価する必要がある。

第１章のまとめ

本章では，数学者たちが数学の魅力を語る際にしばしば言及する数学的対象の「美しさ」が，数学教育における重要な目標を達成し，いくつかの積年の課題を解決する上での鍵概念であることを主張すること，そしてその上で，主としてこの数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することを目指す研究によって得られた知見を整理し，それらの研究によって未解決となっている課題を指摘することを目的としていた。

この目的を達成するために，第１節ではまず，数学者たちによる数学的対象の「美しさ」への言及を概観し，数学的対象の「美しさ」と数学の研究との関わりを整理した。その結果，数学の研究において数学的対象の「美しさ」が担う役割として，次の３点が指摘できた。第１に，数学の研究課題を選択する際の判断基準や課題設定の方向づけの道標または動機づけの誘因になること，第２に，数学の研究課題の解決の機序の一端としての「無意識による選択」の基準になること，第３に，数学の研究成果の価値の基準になることである。そしてこのことを数学の研究課題や成果の側から捉えなおし，これらの数学的対象が認められる理由に，それらの「美しさ」が含まれていることを指摘した。

続いて，数学教育の目的論・目標論における数学的対象の「美しさ」への言及を概観し，先に整理した数学的対象の「美しさ」と数学の研究との関わりと数学教育の目的論・目標論を関連づけることによって，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することの数学教育的価値として，次の３点を指摘した。第１に，しばしば数学教育における学習者による理解に関する研究で指摘される，「なぜそのようなことを考えるのか」や「なぜそのように考えるのか」といったことの理解につながりうること，第２に，児童・生徒が算数・数学を発展的なものと捉えられるようになることや，発展的に考えられるようになるという，日本の算数・数学教育の積年の課題に根差す教育目標を達成しうること，第３に，日本おいて積年の課題であり，国際的にも改善が望まれている，算数・数学の学習への動機の低い水準の解消に寄与しうることである。

続く第２節では，主として数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することを目指す数学教育研究を概観し，研究の成果と課題を整理した。その結果，研究の成果を次の３点に整理した。第１に，数学的対象の「美しさ」を感得できることが認知領域と情意領域に関わる第３の次元として位置づくような数学的熟達性の一側面としてみなせること，第２に，数学的対象の「美しさ」が数学の研究で担っていた役割が，より短時間で行われる数学の問題設定や問題解決という探究においても機能すること，第３に，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促す方法についての仮説が得られていることである。

一方，研究の課題としては，次の２点を指摘した。第１に，学習者による数学的対象の「美

しさ」の感得を目的とする研究を展開するためには，実証的・実践的な研究に先立って，「美しさ」について数学者による言及外の事柄についての議論も可能にするような，理論的枠組みを構築する必要があることである。そしてこの理論的枠組みを構築する上で，「美しさ」を「主観のみによるもの」とする立場では数学教育の目的や目標を達成するための教材について議論ができないという目的論・目標論に関する教育の方法論上の問題や，研究を進めていく上でなされる判断や主張が，数学者によって感得されているような数学的対象の「美しさ」に関するものであるかの否かが判断できなくなるという研究方法論上の問題から，この理論的枠組みには知覚対象となる数学的対象自体をその「美しさ」と関連づける観点が位置づけられること，及び，その「美しさ」が数学者によって感得されているような「美しさ」である保証を与えることが必要であることを指摘した。第 2 に，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得の促進方法について，上記で指摘したような理論的枠組みに基づく理論的根拠のある方法を導出した上で，実証的・実践的な検討を経て評価する必要があることを指摘した。

第２章

数学的対象の美的性質とその感得を捉える枠組み

第１章では，数学にとって数学的対象の「美しさ」が無視することのできない重要な性質であることを示し，この立場から数学教育に数学的対象の「美しさ」を反映させることの意義を主張した。その一方で，この「美しさ」の捉え方という方法論上の課題を理由の一つとして，数学的対象の「美しさ」を主題におく数学教育研究が十分に展開されてこなかったことを主張した。加えて，数学的対象の「美しさ」の捉え方を定める上で，主観のみに依存する性質として捉えてしまうことの問題点を，数学教育目標論と研究方法論の二つを視点に指摘した。

本章では第１章の議論を踏まえて，本研究における数学的対象の「美しさ」の捉え方について論じる。具体的には，第１章で指摘した「美しさ」の概念規定で生じうる問題を解消する方法として美学者・竹内敏雄による理論を本研究の理論的基盤として援用することについて，その妥当性と価値を論じる（第１節と第２節）。その上で改めて竹内による理論を参照し，本研究における数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを構築する（第３節）。

第１節　「多様における統一」原理に基づく美学理論の概要と美学と数学における位置づけ

第１項　「多様における統一」原理に基づく美学理論の位置づけ

美学とは,「美とは何か」を主題の一つとする哲学の一分岐である[1]。佐々木（1995）によると，学問分野としての美学はドイツの哲学者バウムガルテン（A. G. Baumgarten）によってはじめてその存在を主張されたものであり[2]，現在の美学を意味する aesthetics という語もバウムガルテンによる造語であるとされる。この時代以前には，プラトンによる美の哲学やアリストテレスによる芸術哲学といった「古典として永く人びとの思索に影響を及ぼしてきたもの」（佐々木，1995, p.5）もあるが，近代美学が「感性学」という意味の aesthetics という名称を与えられたことに現れているように,「例えば三度の音程をよしとする根拠が、三という数字の神秘的・象徴的性質に求められるのではなく、耳で聴いて快いということに置かれる。そこに近世の新しい傾向がある。」（佐々木，1995，p.6）とされる。

美という概念の美学における捉え方は，上記の美学の成立過程とも関連して，時代とともに変化してきた。「客観的規定」（佐々木，1995，p.13）は,「美を客観的な一般的な特質や構造によって定義する」（佐々木，1995, p.13）ものであり，佐々木はその古典的な代表的定義の一つとして比例説を挙げている。比例説とは,「ピュタゴラス派による音律の理論と、特にギリシア語で『カノン（尺度）』と呼ばれる人体比や黄金比の理論などに見られる」（佐々木, 1995, p.13）ものであり, 経験の集積を形成の背後にもつ理論であるとされる（佐々木, 1995)。この「客観的規定」に対し，近世の美学は「主観的規定」（佐々木，1995，p.14）として,「美しい対象の特徴を規定するのではなく、それを経験する心の特質によって美を定義」（佐々木，1995，p.14）することを選んだ（佐々木，1995)。佐々木はこの「主観的規定」を次のように評している。

> 確かに、われわれにとって意義をもつのは、現にわれわれが生きいきと経験している美である。しかし、このような観点を突きつめてゆくとき、＜われわれの態度を制御するならば、対象の如何にかかわらず、いっさいのものが等しく美として知覚される＞という考えへの通路が読み取れる。確かに、静観的な態度[3]は、その態度そのものが満足を

---

[1] 美学という語には，この他に,「美しさに関する独特の価値観・こだわり」（新村（編), 2018，p.2435）といった用法もあるが，ここではこの語をこの意味では用いない。

[2] 同時期に刊行されたカント（I. Kant）の『判断力批判』（Kant, 1790）を近代美学の確立の指標とする捉え方もある（佐々木，1995，p.6)。

[3] この静観的な態度とは,「対象の知覚以外の目的もしくは関心を持たない」（佐々木，1995, p.179）態度であり，カントなどによって「無関心性」という語でも説明される。加えて，佐々木によると,「観照」も表現が異なるだけで「静観」と同じ概念である（佐々木，1995, p.234)。

与えるところがあり、ゆるやかな意味でなら、何を見ても美しい、ということがありうる。（中略）しかしこのような状況は、我々に感嘆を強いる巨きな美を忘れた結果であり、実は美のほうがわれわれに静観的な態度を取らせているのだということを見失ったところから生まれたもの、と考えられる。

（佐々木，1995, p.14）

佐々木はこのような「主観的規定」に対する批判を述べ，続いて「以上の二つの立場の中間的な性格をもった規定」（佐々木，1995，p.15）として，「客観的な規定でありながら、主観の経験のなかで捉えられた特質を対象の側に投影したもので、実はかなり有力な観点」（佐々木，1995，p.15）の最も単純なものとして，「多様における統一」を挙げ，次のように解説する。

多数性における統一を含めての多様における統一は、ごく一般的な概念であって、その起源を特定することもできない。「一」を論ずることはすでに「多」を前提としている、ということができる。したがって、右に述べたカノンや比例の理論は、一種の多様における統一説と見られる。現に竹内敏雄は、多様における統一を「最高の形式原理」とみなしている。

（佐々木，1995，p.19）

このように有力な観点として佐々木に評された「多様における統一」という観点については，現代の美学者であるヘッカート（P. Hekkert）も美的な喜び（aesthetic pleasure）を捉える観点の一つとして着目している（e.g., Hekkert, 2006; 2014）。また，デービスとハーシュは，「数学の本質についての有名な説明」（Silver & Metzger, 1989, p.60）と評される彼らの著書において，「多様性における統一（Unity within Diversity）」（Davis & Hersh, 1981, p.214）について次のように言及している。

単一化，すなわち多様であるような複数の対象の間にある一つの関係を確立することは，数学において，偉大な動因の一つであるとともに，美的満足（aesthetic satisfaction）の偉大な源泉の一つである。

（Davis & Hersh, 1981, p.214）

デービスとハーシュはこの例として，三角関数と指数関数を関連づけるオイラーの公式を挙げ，自然対数の底 e，円周率 π，虚数単位 i について成り立つオイラーの等式

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

に言及している。そして，この等式を出発点としてフーリエ解析や微分方程式などを発展的に考えることができ，「宇宙の隅々に潜んでいる現実的ならびに潜在的な統一の感覚」（Davis & Hersh, 1981, p.216）に直ちに到達できると述べている。

以上の佐々木，ヘッカート，デービスとハーシュによる言説に基づくと，「多様における統一」という観点は美学史において有力であり，現代の美学者にも用いられており，かつ，数学とも関連する観点であるといえる。

以上を踏まえて，本研究ではこの「多様における統一」という観点に着目し，次項においてその詳細を体系的に論じた竹内敏雄による理論（竹内，1979）を概観する。そして次節においてこの竹内による理論に依拠して数学者が言及してきた数学的対象の「美しさ」を説明した上で，この説明可能性を一つの軸として竹内による「多様における統一」を原理とする理論を本研究における理論的基盤として援用することの妥当性と価値を論じる。

第２項　竹内敏雄による「多様における統一」原理に基づく美学理論の概要

竹内（1979）は芸術様式の変転などの歴史的変遷を鑑みた上で美学の対象概念を再定式化するなかで，古来の「美」という概念のみならず，崇高や悲壮，滑稽などといった類型概念をも含めた「美的なるもの（das Ästhetische）[4]」（竹内，1979，p.27）を対象として据えている。そして，佐々木が述べるように，「多様における統一」を原理として知覚者と知覚

[4] 佐々木（1995）では，この概念は「美的なもの the aesthetic」とされ，様々な美的質（aesthetic qualities）の集合全体とされる。この美的質とは，ここで挙げた「崇高」や「悲壮」のような少数の類型（美的範疇と呼ばれる）によらずに，「晴れやかな」や「単純な」，「崇高な」などを含む開いたリストによって広義の美を捉えるための概念である（佐々木，1995)。竹内（1979）は美的質をいう語を用いていないものの，「美」という概念を広義に捉えるという意図のもとで「美的なるもの」を扱っていることから，この「美的なるもの」に含まれるものを佐々木のいう美的質として捉えることとする。ただし本研究でこの aesthetic qualities という概念を用いるにあたって，次の理由から「美的性質」と訳出することにする。

佐々木は，「美的質」という訳出について，aesthetic qualities という概念が価値と関連することを「価値の契機は質という語にも既に含まれており、to have quality（「質をもつ」）というのは価値の優れているという意味である」（佐々木，1995，pp.156-157）と説明している。一方，このように美的性質と価値が関連していることについて，竹内は，「美的品質（ästhetische Wertqualität）」（竹内，1979，p.236）という語を用いて説明している。すなわち，美的性質の「質をもつ」という含意を強調する語が設定されている。したがって竹内の理論を援用する本研究では，aesthetic qualities という語を用いる際にこの「質をもつ」という含意を強調する必要がないと考え，直訳である「性質」という語で訳出することにした。なお，aesthetic quality を美的性質とする訳出は，柴垣和三雄による『数学的経験』（Davis & Hersh, 1981，邦訳 1986年）にも見られる。以降，竹内の理論を参照するにあたって，広義の美として説明されている概念を美的性質と表現する。

対象の双方を考慮することによって，以下のように「美的なるもの」を捉えている。

まず竹内は，美的性質の主観面，つまり知覚者側の属性の主題を整理することで，「美的主観の作用は知覚・表象・想像・感情・想念などからなる綜合的活動であり、これをその全体としての構成にわたって考察することが、美学の課題でなければならぬ」（竹内，1979，p.96）と述べ，美学の基本概念として「美的体験」を研究対象とすることを提案し，この概念を次のように説明する。

> 一般に体験とは、われわれが直接に身をもって経験し、とりわけ有意義な行為や運命において経験するもの、われわれの生にはじめて内包をあたえるものであり、したがって「あるものがわれわれに体験された」というのは、それが単に認識されたのではなくて、われわれ自身のうちにひきいれられてわれわれの自己の一片となり、われわれの本質の深みに沈下してそこに定着したことを意味する。ところで美的態度においてはわれわれは判断や解釈のような知的作用に終始するのではないと同様に、一種の享楽として快感にみちた満足の状態に滞留するのでもなく、客体と主体との相即不離の交渉において生産される美的価値を、対象に帰属し内在すると同時に、われわれ自身の「生」を一層意味ぶかく、内包のゆたかなものに充実化するものとして、内面的に「体得する」のであるから、これこそ「体験」とよぶにふさわしいものである。
>
> （竹内，1979，p.97 ）

竹内はさらにこの美的体験の構造を，自然美を感得する「自然美的観照」,「自然美的観照」によって感得された自然美を芸術作品として創作する「芸術創作」，芸術作品として形成された芸術美を感得する「芸術美的観照」の三段階[5]で説明した上で，これら美的体験の三段

[5] 竹内は，美的性質をになう知覚対象に関して，美的性質が「自然美」「人間美」「技術美」「芸術美」などの諸類型に区分されると説明する。その上で，これらの境界は不明確であるとし，「まったく美的効果への意図をもって加工されない、単なる自然物の場合と、まったく美的以外の目的にとらわれない、純粋の芸術品の場合を両極として、そのあいだに無限の漸層的差異をもって展開する」（竹内，1979，p.33）という立場をとる。そして，「芸術美に優先権を与え，これを本来の対象とするものであった」（竹内，1979，p.28）旧来の美学に対して，芸術美と対極をなす自然美を考察対象とする必要性を主張した。本研究において美的性質をになう知覚対象は数学的対象である。したがって，数学的対象が自然に属するものと捉えるのか，芸術作品に属するものと捉えるのか，その立場を明確にしなければならないという懸念が予想できる。しかしながら，数学が「どこにあるのか」といった問題や，数学は「発見する対象」と「発明する対象」のいずれかいった問題については，見解の一致は得られていない（e.g., Hadamard, 1945；Hardy, 1956/1992)。定理などのように定式化される以前の数学的な事象を例に考えると，仮に定式化後の定理等を芸術作品のように見なす立場を取る場合には，定式化以前であることを根拠にこのような事象は芸術作品ではないと見なすことができる。その一方

階に共通する基本構造として，「美的静観」と「美的交感」，「形成活動」の三つの局面を挙げ，次のように説明する。

第 1 の局面である「美的静観」は，知覚対象の全体像を捉えつつ，さらにその対象の本質を直観する局面である。ここで知覚者は「その対象を獲得しまたは利用しようとする欲望を超越し、一切の実践的関心から解放されている」（竹内，1979，p.115）必要がある[6]。例えば，食欲を満たしたい人がリンゴを見ても，リンゴの美的性質は感得できない。

第 2 の「美的交感」と呼ばれる局面は，自然美を対象とする際には，知覚対象の色や形から感情を読み取ることや, 大自然の中に自身を位置づけて大自然との一体感を得ることを指す。そして芸術美を対象とする際には，作者が芸術作品に込めた感情を読み取ることや，作者の感性に共感することを指す。

第 3 の「形成活動」と呼ばれる局面は，「美的静観」で得られた全体像と本質や「美的交感」で得られた感情に対して「形式」[7]を与える局面であり，「形式賦与の活動が美的体験の構造上枢要の本質的契機」（竹内，1979，p.109）とされる重要な局面である。この「形成活動」の局面をとおして，直観や感性はさらに洗練され，美的性質が感得されることが次のように説明される。

で，その事象に数や図形などの数学的対象が含まれていた場合には，そこには数や図形を定式化した先哲による美的性質があるという点で，芸術作品と見なすこともできる。すなわち，数学や数学的対象を自然と芸術作品のいずれかのみに帰属させることは不可能であると思われる。このような数学または数学的対象の捉え方の不確かさに対し，竹内による理論では，「自然美的観照」と「芸術創作」，「芸術美的観照」に共通する基本構造として，「美的静観」と「美的交感」，「形成活動」が与えられている。すなわち，これらの基本構造に着目することによって，数学や数学的対象が自然と芸術作品のいずれに属するかについては断定せずに，その美的性質について議論することが可能になっている。

[6] 本章註 3 及び第 2 節第 3 項も参照。

[7] この形式という語について，竹内は，美学における「形式」の概念を曖昧多義と指摘した上で，その意味が根本的には次の二つに分類されるとしている。一方は知覚対象の内容を表現するためのものであり，この意味での形式を，竹内は形象とも称している。そしてもう一方を，知覚対象の内容及び形象の構成方式としている（e.g., 竹内，1979，p.273）。竹内はこのように「形式」の意味を定めた上で，最も普通に「形式」と呼ばれるものはこの二分した「形式」が複合的に使われる場合であるとし，この場合の「形式」を「感覚形象の構成方式」と呼んでいる。本研究において以降で言及する竹内による「形式」概念は，特に断りがない限り，すべて構成方式としての「形式」である。

一個のそれ自身において完結した美的対象[8]を構成するためには、無限定のままあたえられたものを一定の範囲に局限することが必要であり、かくして限定されたものの内部構造については、これを混乱するところなく首尾一貫した諸分子の有機的関連から構成されるように秩序づける要がある。この条件にしたがってはじめて美的対象は、その全体を一目瞭然とみわたし、みとおすことができるものとなる。これが人間一般の本性にねざす美的要求を満足させるゆえんである。

（竹内，1979，p.109）

以上の美的体験の３段階と，それらに共通する基本構造である３局面は，それぞれ次のように関連づけられる。美的体験の第１段階である「自然美的観照」と最終段階である「芸術美的観照」では，「美的静観」と「美的交感」の局面が強調される一方で，「形成活動」も行われる。「自然美的観照」では知覚対象に不完全ながらも「形式」を見出すことが「前芸術的形成」（竹内，1979, p.132）と呼ばれ，「芸術美的観照」では観照者が内面で芸術作品を再構成することが「追形成」（竹内，1979，p.205）と呼ばれる。その一方で，「芸術創作」の段階では「形成活動」が強調され，「美的静観」と「美的交感」の役割は衰退する。しかし，創作過程において，感得された自然美を振り返るためにこの二つの局面が繰り返されることもあることから，「芸術創作」の段階もこの二つの局面と切り離すことはできないとされる。

このように強弱はあるものの，竹内が「美的体験の構造上枢要の本質的契機」と称した「形成活動」は，美的体験全般にわたって行われることが確認できる。次に，この「形成活動」を「根底において規定する」（竹内，1979，p.110）原理である「多様における統一（unity in variety, Einheit in der Mannigfaltigkeit）とよばれている形式原理」（竹内，1979，p.110）を含め，知覚対象側の属性について竹内の理論を概観する。

竹内は美的性質をそなえる知覚対象を美的対象と称し，この概念をその「素材」と「形式」，「内容」の３観点で構造的に捉えている。そして「素材」を材料と題材，「形式」を表現と構成方式，「内容」を表現された意味と構成された題材として，それぞれ二つの視点から説明する。さらに竹内は構成方式としての「形式」を規定する原理として，「多様における統一」の意味を次のように定める。

[8] 美的性質をそなえる知覚対象を指す。知覚対象そのものを「美」として捉える捉え方も日常的な用法には存在するが，竹内は「芸術においては芸術作品が『美しい』のであって、（中略）それ自身美なのではない。」（竹内，1979，p.236）と述べ，美的性質と知覚対象そのものを区別している。

この原理は多様な諸要素から共通のものを抽出してそれらを一様化し、全体の統一に帰せしめることを要求するのではなく、多様なものをその具体相において生かしつつ、その変化を通じて一貫するものを顕現させ、多様そのもののうちに統一を支配させるべきことを意味する。「多様の統一」ではなくて「多様における統一」というゆえんである。

（竹内，1979，p.110）

竹内はさらに，最高原理である「多様における統一」から分化された諸特殊原理として，シンメトリやプロポーションのように合理的に「多様における統一」もたらす「形式」を「合法則的形式」と称した。その一方で，この「合法則的形式」は美的体験の主体の「個性的人格にもとづいて分化する各自に固有の観かた、感じかた、把握のしかたにしたがって、さまざまに変容され、おおかれすくなかれ自由化される」（竹内，1979，p.111）とし，この自由化された「形式」を「個性化的形式」と称した。この「個性化的形式」は，「個人の法則」（竹内，1979，p.111）によって規定されるとともに，この法則を背後で支えて方向づける「世代や時期や時代、種族や民族、職業や階級などの超個人的全体精神」（竹内, 1979, p.111）に特徴づけられることによって,「美的形成[9]は人格的個性の法則にしたがうとともに歴史的個性の法則にしたがっておこなわれる」（竹内，1979，p.111）ものであり，「決して無軌道にはしらず、随時ほしいままに変動したり」（竹内，1979，p.111）はしないとされる[10]。

以上のように，竹内による理論では，知覚対象が美的性質をそなえるためには「多様における統一」を原理とする構成形式が賦与されている必要がある。そしてこのことを知覚者側から説明すると，知覚者は知覚対象に「多様における統一」を原理とする構成形式を見出すか，賦与しなければならない。

第２節　「多様における統一」原理に基づく美学理論による数学的対象の「美しさ」の説明

第１項　数学的概念に基づく数学的対象の「美しさ」の説明

竹内（1979）による理論で「合法則的形式」として概念化されているシンメトリやプロポーション，すなわち対称性や黄金比に代表される比などの数学的概念は，数学的対象の「美しさ」の説明においても広く用いられてきた。第１章でも引用したように，ポアンカレは数学的対象の「美しさ」を次のように説明する。

---

[9] 著作内で定義されていない語であるが，本研究では「形成活動」と同義と捉えた。

[10] 古典主義やキュビスムなどといった様式は，「個性化的形式」が外面化されたものとされる。

何が私たちに解や証明（demonstration）におけるエレガンスの感覚を与えるのか。それは異なる部分の調和，それらの対称性，巧みな調整，すなわち秩序をもたらし統一を与え，部分と同時に全体についても包括的な理解を明瞭に入手させうる全てのものである。

（Poincaré, 1908/2003, pp.30-31，下線は引用者）

デービスとハーシュは，黄金比 $\Phi = {}^{1}\!/_{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ を辺の比にもついわゆる黄金四角形が最も美しい長方形であるとする説について，「非古典的な芸術や建築を前提に育てられた世代によって，今日真面目に扱われることはない」(Davis & Hersh, 1981, p.186）と断った上で，「黄金比 Φ における美的喜びは，今日では，それが生起する多様で意外性のある場所に由来する。」(Davis & Hersh, 1981, p.186）と述べ，その場所の例として１辺の長さが１である正五角形の対角線の長さや，ある項が直前の２項の和で定義される数列[11]の隣項間の比の極限，そして，次の連分数を挙げている。

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$$

デービスとハーシュは，このように数学的対象の「美しさ」と黄金比を関連づけた。ただし，ここで挙げたような数学的対象をよく学習して理解することによって意外性がなくなり，美的喜びが減少すると述べている。

以上のポアンカレ及びデービスとハーシュによる数学的対象の「美しさ」の説明では，それぞれ対称性や黄金比といった数学的概念に言及している。この点で，美の判断を「対象の概念によってその対象を認識する」（カント，1964，p.85）という意味での論理的判断と区別し，美と知覚対象の概念との関係を否定したカントのような美の捉え方とは異なっていることがわかる。

その一方で，数学的概念の存在のみで数学的対象の「美しさ」を担保していない点が特徴的である。実際，ポアンカレは対称性によってもたらされる秩序や統一，包括的で明瞭な理解といった知覚者の主観に関わる要素を説明に加えている。また，デービスとハーシュは個人の経験や理解に関わる意外性の必要性を強調している。この点で，ポアンカレ及びデービスとハーシュが言及している「美しさ」は，「ピュタゴラス派による音律の理論と、特にギリシア語で『カノン（尺度)』と呼ばれる人体比や黄金比の理論に見られる」(佐々木, 1995, p.13）比例説に代表される，美の「客観的な一般的な特質や構造」(佐々木，1995，p.13）

[11] 初項と第２項がそれぞれ１，４とされている。これらを共に１にしたものがフィボナッチ数列と呼ばれる。

による定義とも異なっている。

したがって，このポアンカレ及びデービスとハーシュのように，対称性や黄金比といった数学的概念とその概念に起因する認知または感覚に関する要素による数学的対象の「美しさ」の説明は，佐々木が「客観的な規定でありながら、主観の経験のなかで捉えられた特質を対象の側に投影したもの」（佐々木，1995，p.15）であると考えられる。そして着目された数学的概念が対称性や比であることから，ポアンカレ及びデービスとハーシュが捉える「美しさ」を，竹内（1979）が「合法則的形式」と称した「形式」に関する「形成活動」や「美的静観」,「美的交感」によって感得される美的性質として解釈することができる。

第２項　数学的価値に関する数学的対象の「美しさ」の説明

数学者による数学的対象の「美しさ」の説明では，数学において望ましい性質とされる単純性や簡潔性，一般性などといった語が，地域や時代を超えて広く用いられてきた。19 世紀から 20 世紀にかけてイギリスで活躍した数学者であるハーディは，数学者の仕事や数学の魅力について説明するなかで,「すべての数学者たちが一級品として認めるであろう『本物の』数学の定理の例」(Hardy, 1956/1992, p.91）としてピタゴラスによる「素数は無限に存在する」ことの証明とユークリッドによる「$\sqrt{2}$ は無理数である」ことの証明を挙げている。その上で，これらが優れていることを説明することを目的として，これらの定理に共通する「『純粋に美的な』性質（‘purely aesthetic’ qualities)」(Hardy, 1956/1992, p.113）を次のように抽出している。

> 両方の定理において（もちろん，私は定理にその証明を含める）とても高度な<u>意外性</u>があり，それは<u>必然性</u>と<u>経済性</u>に結びつけられている。議論は非常に奇妙で驚くべき形式をとっている。用いられる道具は，遠くに達するその結果に比べると非常に子どもじみて<u>単純</u>なようである。しかし，その結論から逃れる術はない。細部の複雑さはなく，いずれの場合も一つのアプローチで十分である。
>
> (Hardy, 1956/1992, p.113，下線は引用者)

ハーディ自身による明確な言及はないものの，この引用部のうち,「その結論から逃れる術はない」の部分が必然性,「細部の複雑さはなく，いずれの場合も一つのアプローチで十分」の部分が経済性を説明していると考えられる。その上で，遠くに達する結果と用いる道具の単純性との対照によって意外性が生じると述べているものと考えられる。

さらにハーディは,「数学の定理の美しさ（beauty）は，その重大性（seriousness）に非常に大きく*依存する*」(Hardy, 1956/1992, p.90）と述べた上で,「重大な」定理は「意義深

い（significant)」アイディアを含んでいるとし，この「意義深い」アイディアの本質的な事柄として，generality と深さ（depth）を挙げている。この generality という語の意味については，広く数学で用いられる「一般性」とは異なる意味であることがハーディ自身によって説明されている。また，深さ（depth）という語についても，この語によって表す内容が説明されている。以下ではハーディによるそれらの説明を概観し，解釈することにする。

ハーディはこの generality をもつ概念について次のように説明する。

> 意義深い数学のアイディア，重大な数学の定理は，次のような意味で ‘general’ であるべきである。そのアイディアは，多くの数学の構成概念の要素であり，様々な種類の定理の証明に用いられるものである。その定理は，もともとは（ピタゴラスの定理のように）非常に特別な形式であっても，少なからぬ拡張の可能性をもち，この種の諸定理の集合全体の典型である。証明によって明らかにされた諸関係は，多くの異なった数学的アイディアを結びつける。
>
> （Hardy, 1956/1992, p.104）

そして，この generality は，全ての数学の定理がもつような「一般性」と区別していることを明確に述べ，全ての数学の定理がもつような「一般性」として，次のように例を挙げて説明する。

> 私たちが $2+3=5$ と主張するとき，私たちは「もの」の三つの集まりの間の関係を主張している。そしてこの「もの」はリンゴやペニー硬貨ではなく，どんな特定の種類のものでもない。*ただの*ものであり，「どんなものだって構わない」。
>
> （Hardy, 1956/1992, p.106）

この全ての数学がもつような「一般性」についての引用文と，先の generality についての引用文とを比較すると，重大性（seriousness）に関する generality は，定理が適用される一定の範囲をもつことではなく，その範囲を拡張する可能性をもつことであると読み取れる。そして，定理が拡張されることで，多くの異なる数学的概念が結びつけられるものであると捉えられる。すなわち，この generality とは，定理の一般化可能性または拡張可能性であると解釈できる。

フランスで 20 世紀に活躍した数学者であるル・リヨネ（F. Le Lionnais）は，数学と芸術とのつながりについて言及するなかで，「数学における美を明示する（attests）」（Le Lionnnais, 1962/1971, p.119）ために，二つの基準を用いて数学的対象の「美しさ」を分類

した。すなわち，数学者の仕事の構造についての基準である「事実」と「方法」の区別と，人間による美の考え方についての基準である「古典主義」と「ロマン主義」の区別である。そしてこの後者の基準の古典主義について[12]次のように述べる。

> 私たちが，数学的命題が古典主義的な美（classic beauty）を有していると言うのは，その数学的命題の，<u>余分なものがない簡素さ（austerity）</u>や多様性を覆う統制によって私たちが感心するとき，あるいはまた，二つの特徴が調和的に配置された構造の中で結び付けられたときのことを言う。
>
> （Le Lionnnais, 1962/1971, p.124，下線は引用者）

> ある方法（method）が古典的という形容を受けるのは，その方法が<u>節度のある</u>手段（moderate means）で強力な効果に到達させられるときのようである。
>
> （Le Lionnnais, 1962/1971, p.136，下線は引用者）

前者の古典主義的な「美しさ」をもつ数学的事実の例としては，三角形の九点円やサイクロイド，導関数と原子関数が一致する関数 $y = e^x$ を挙げ，後者の古典主義的な「美しさ」をもつ数学的方法の例としては数学的帰納法を挙げた上で，次のように評している。

> この方法は，無限の数のつながりで構成された結論の連鎖の最後まで，一足飛びでたどり着くことができる。そしてそれはありふれた三段論法によって結論を導き出すのと同程度に<u>簡易（ease）</u>で不可謬である。
>
> （Le Lionnnais, 1962/1971, pp.136-137，下線は引用者）

---

[12] ロマン主義的な「美しさ」をもつ数学的事実については，原理を「激しい感情や非体制順応主義，奇抜さへの称賛」（Le Lionnnais, 1962/1971, pp.130）とし，メビウスの帯や有理数や負の数の指数，虚数などを挙げている。また，ロマン主義的な「美しさ」をもつ数学的方法は間接的な特徴を有しているとし，その例として背理法を挙げている。そして背理法について，「他の証明と同程度の説得力をもっている一方で，実際のところ，証明している命題の構造には全く光を当てない。これによって，きわめて特徴的な不満の状態に陥る。」（Le Lionnnais, 1962/1971, pp.141）と述べている。ただし，奇抜さなどについての判断基準は示されておらず，これらを「美しさ」の基準とする他の数学者の主張は管見の限りない。また，背理法が構造を明らかにしないことによる不満に言及しているものの，古典主義的な「美しさ」の例にあげた数学的帰納法もまた命題の構造を明らかにしないことについては言及していない。このような論の不明確さから，本研究ではル・リヨネによる分類を援用しない。

以上のように，ル・リヨネによって言及されている古典主義的な「美しさ」には，「余分なものがない簡素さ（austerity）」や「節度のある（moderate）」，「簡易（ease）」といった，単純性や簡潔性などと関連する語が見られる。

以上に記した数学者たちによる言及では，それぞれの意味が完全に一致しているかどうかは判定できないものの，単純性や簡潔性，一般性などといった数学において望ましい性質，すなわち価値[13]を表す語が用いられている。このように，数学者たちが「美しさ」として追求している価値に時代や地域を超えた共通性が見られることを理解する上で，ワイルダー（R. L. Wilder）による，数学を文化として捉える立場（Wilder, 1968）が示唆に富む。

ワイルダーは，数学の概念が創造され発展してきた歴史的過程を解明することを目的とした論を展開する上で，数学者を，「数学をする」という職業を結合因子として関連づけられたひとつの集団と捉えている。加えて，数学者集団を「数学として知られる文化的要素の所有者」（Wilder，1968，p.27）であり，かつ「ある文化，この場合は数学という文化[14]の担い手」（Wilder，1968，p.27）とみなす。なお，ここで「文化的要素」または「文化」としての数学とは，その集まりの諸部分が互いに影響を与えあう有機的な全体であることを意味している。

このように数学者集団の職業の対象である数学に対して，ワイルダーは，その「人文学的」側面に着目している。ここでワイルダーは「人文学」と言う語を次のように説明する。

> 私は「人文学」という語を美的追求を示すものとして使っている。この美的追求では普通，芸術や文学，または音楽の手段を用いる。極めて簡潔に言うと，ある種の記号を，美（beauty）や単純性（simplicity），調和（harmony），または美的な満足を与えると一般的に思われている諸性質（generally considered to be aesthetically satisfying qualities）の他の類型を達成するために使用することである。
>
> （Wilder, 1968，p.6）

---

13 価値という語は多義的であり，知覚者と知覚対象のいずれの属性とするかという立場の違いのほか，値打ちなどとも同義として用いられる（新村，2018）。価値を知覚対象の属性とする立場では，価値に対する知覚者側の対応概念として価値観や価値意識という語が用いられる（e.g.，見田，1996）。その一方で，価値を知覚者の属性とする立場では，当然ながら価値観などの語は用いられない。本研究で価値という語を用いる場合には，知覚対象の属性としての価値を意味することとする。

14 ワイルダーは，一般に，「文化」を「文化的要素」の集まりとして定めるが，この数学に関する場合の「文化的要素」と「文化」という語の間には「ほとんど違いはない」（Wilder, 1968, p.27）とする。

すなわち，ワイルダーによる数学及び数学者の捉え方によると，数学者は数学における「美（beauty）や単純性（simplicity)，調和（harmony)，または美的な満足を与えると一般的に思われている諸性質（generally considered to be aesthetically satisfying qualities）の他の類型」を追求する集団なのである。したがって，この立場では，数学者集団の一員であるそれぞれの数学者たちが類似した価値を追求することは必然であると言える。

本研究では，先に引用したポアンカレをはじめとする数学者たちが追求している価値に共通性があることに対する説明として，数学者の集団を，ワイルダーのように文化を担う有機的な集団として捉えることにする。その上で，この文化の担い手としての数学者集団が追求している簡潔性や一般性といった価値を，数学的価値と呼ぶことにする。

以上のような，数学者たちが「美しさ」として追求している価値に共通性があるという考え方に対し，実証的な研究をとおした異議も提案されている。

イングリスとアベルダインは，数学者を対象に実施した調査の結果を統計的に分析し，数学の証明の「美しさ」と単純性（simple）との間に関連がないことや，数学者たちが数学の証明の「美しさ」を判断する際に，他者の判断に依存していることを主張した。

まず，Inglis and Aberdein（2014）では，255 名の数学者を対象に，リストに含まれる 80 個の形容詞に対して「最近査読をしたか読んだ，論文や書籍に含まれている特定の証明との関連の度合い」を 5 点法のリッカート尺度で回答してもらい，その結果の因子分析を行なった。そして，美的次元（the *aesthetic* dimension)，複雑性の次元（the *intricacy* dimension)，有用性の次元（the *utility* dimension)，正確性の次元（the *precision* dimension）という四つの因子を特定した。続いて，「美しい（beautiful)」との相関係数を求め，「美しい（beautiful)」や「エレガントな（elegant)」と，「単純な（simple)」との間には強い相関がないことを示した。そして，「単純な（simple)」は「美しい（beautiful)」とも「つまらない（dull)」とも共に用いられるという事実に対し，単純性（simplicity）が美的次元とは独立しているという解釈を与えた。その上で，伝統的に数学的対象の「美しさ」が単純性（simplicity）によって説明されてきた理由を，「単純性（simplicity）は覚えやすさ（memorability）を助ける。そしてそうであるからこそ，刺激を受けた際に思い出される美しい（beautiful）証明がより単純な（simpler）ものであるという推察は，合理的である。」（Inglis & Aberdein, 2014, p.104）と説明した。加えて，これまで数学の実践に対する我々の理解を伝統的に支配してきたエビデンスには，その入手方法が著名な数学者による内省，特に時間が経った出来事に対する内省であるという方法論的な弱点があることを指摘した。

また，Inglis and Aberdein（2020）では，これまで数学者たちによる「美しさ」の判断の一貫性のなさを主張してきた調査研究（e.g., Inglis & Aberdein, 2014; Wells, 1990）では，判断の場が個人的な場であり，社会的な影響を受けにくい場であったことに注目し，数学者

を対象に証明の「美しさ」を点数化することを求める質問紙調査の方法を工夫することにした。その工夫とは，第１章でも述べたように，数学者たちを無作為に２グループに分け，一方にはその証明が, 美しい証明が収録されていると知られている『Proofs from THE BOOK』から引用されたものであることを情報として与え，もう一方にはこの情報は与えないというものであった。そして，この情報を知らされた純粋数学者たちは，知らされなかった純粋数学者たちよりも，証明の「美しさ」を高く評価したという調査結果[15]に基づいて，証明の「美しさ」の判断が「美しいかどうか」の判断ではなく,「数学者の共同体で美しいとされているものかどうか」という社会的な判断になっている可能性を指摘した。

ウェルズ（Wells, 1988）は，数学的対象の「美しさ」に関するアンケートを数学の雑誌に投稿し，その結果を分析することで，数学者たちによる「美しさ」の判断が多様であると主張した。具体的な手順は以下のとおりである。

まず，24 個の数学の定理をリスト化した上で，それぞれの定理の「美しさ（beauty)」を０から 10 の範囲で評価することを求めた質問紙を数学の雑誌に掲載した。そして，続報（Wells, 1990）において，調査結果を回答者のコメントとあわせて分析した結果として，自然対数の底と円周率，虚数単位に関するオイラーの公式のように美しい定理として知られている定理は,「美しい定理として評価しやすい」といった社会的な要因が存在することを主張した。また,「美しさ」の説明で広く用いられる単純性（simplicity）や簡潔性（brevity）については，その捉え方が個人に依存することや「美しさ」の判断がその主体の専門領域に依存するという主観性の問題があること，単純性や簡潔性と同様に「美しさ」の説明で用いられる意外性や神秘性が主体の経験や数学的対象に対する理解の程度に依存するといった文脈依存性の問題があることなどを根拠に,「数学者が，自分たちによる美の判断に広く同意しているという考えは，好意的にみてもあまりにも単純化しすぎている」（Wells, 1990, p.40）と主張した。

これらイングリスとアベルダイン及びウェルズの主張は, 単純性のような価値が数学的対象の「美しさ」と関連づいているという伝統的な捉え方や共通認識があることを念頭に，実証的に反論を試みたものである。しかしながら，ウェルズが主張しているように単純性のような価値は個人の捉え方に依存するものであり，両者が採ったような質問紙調査では質問紙の回答者がこれらの語にどのような意味づけをしているかを判断することはできない。したがって，イングリスとアベルダイン（Inglis & Aberdein, 2014）が主張したように,「単純な（simple)」が「美しい（beautiful)」とも「つまらない（dull)」とも共に用いられるとい

[15] 応用数学者たちからは，純粋数学者たちからのような差異が得られなかった。イングリスとアベルダインはこの結果の差異について，応用数学者たちの間では『Proofs from THE BOOK』が浸透していない可能性を指摘した。

う事実から単純性が「美しさ」と別次元であると判断することはできない。なぜならば,「美しさ」と関連する単純性と,「つまらない」と関連する単純性は質的に異なる可能性が払拭できないからである。換言すると，イングリスとアベルダインの主張は，単純性には単一の意味しかないという立場をとらない限り，成立しないものである。

ウェルズによる主張についても，単純性のような価値は個人の捉え方に依存することについての解釈の仕方に起因する誤解があるように思われる。ウェルズの採った手法は具体的な 24 個の数学の定理を数値で評価することを求めたものであるが，単純性のような価値が個人の判断に依存するからこそ，この評価にばらつきが生じるのである。その上で，個々の定理の評価がばらついていながらも，回答に付されたコメントに「単純性（simplicity）や簡潔性（brevity）ほど頻繁に美しさ（beauty）と関連づけられた基準はなかった」（Wells, 1990, p.39）ことが重要なのである。なぜならば，この回答結果は，主観性のある単純性や簡潔性が，調査に協力した数学雑誌の多くの読者にとって「美しさ」と関連づいていることの証拠でもあるからである。

Inglis and Aberdein（2020）の調査結果は，純粋数学者たちによる証明の「美しさ」の判断が完全に個人的なものではないことを示しており，非常に興味深いものである。この調査結果は，全ての数学者が全く同様な「美しさ」の基準をもっているという立場を否定する一方で，数学者が数学の書籍から新たな事実を学びうることと同様に，書籍や他の数学者たちから「美しさ」の基準を学んでいると捉える立場までを否定するものではない。

イングリスとアベルダイン及びウェルズが行った調査は，数学的対象一つ一つに点数をつけることを求めていることにも注意が必要である。チョークとチーズのように異なる数学的対象の「美しさ」は序列化することができないというウェルズ（Wells, 1986）の主張に対して，ドレイフスとアイゼンバーグ（Dreyfus & Eisenberg, 1986b）はチーズとチーズの「美しさ」の比較を意図していると反論している。ポアンカレやワイルダーは，ある二つの異なる数学的対象のいずれの方がどの程度「美しい」かについては言及していない。また，異なる数学的対象の「美しさ」を比較しているハーディにしても，比較の例は限られており，任意の異なる数学的対象の「美しさ」の比較可能性を示しているわけではない。得点として「美しさ」を表すこともしていない。イングリスとアベルダイン及びウェルズによる調査のような状況における「美しさ」の判断の共通性は，もとより主張されていないと言える。

以上の論に基づき，本研究では数学者集団を，数学という文化を担う有機的な集団として捉えることにする。この立場では，文化の担い手である数学者集団によって竹内（1979）が概念化した「個性化的形式」が定められているという前提を置くことができる。したがって，数学的対象の「美しさ」に関連づけられる数学的価値は，この「個性化的形式」に関する「形成活動」や「美的静観」,「美的交感」によって感得される美的性質を特徴づける性質として

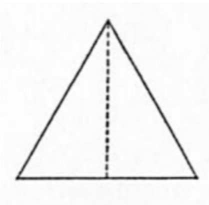
解釈することができる。言い換えると，数学的価値によって特徴づけられた数学的対象の「美しさ」を，竹内（1979）が「個性化的形式」と称した「形式」に関する「形成活動」や「美的静観」,「美的交感」によって感得される美的性質として捉えることができる。

第３項　数学的対象の「美しさ」の無用性の説明

数学の「美しさ」を追求する過程を，数学者や数学の才能児による問題解決過程の観察をとおして記述した実証的な研究では，数学の「美しさ」がもつ重要な特性が浮き彫りになった。それは，「問題の解決のために不可欠なものではない」という特性である。

クルチェツキーは，192 名の児童・生徒を対象とした臨床的な研究を軸とした 12 年間に及ぶ大規模な研究を展開し，「具体的にいって数学能力とは何か，どのような個人的－心理学的特質が数学の成功的獲得をひきおこすか，つまり，人間を数学に対して有能にするか」（クルチェツキー，1969，p.113，下線は原文）を明らかにした（クルチェツキー，1969）。クルチェツキーは，児童・生徒による数学の問題解決過程の観察やインタビューおよび質問紙調査をとおして同定された数学的能力の一つとして挙げた「解き方の明確さ・簡潔さ・経済性（『スマートさ』）への志向」（クルチェツキー，1969，p.141）について，「有能な生徒はすべて，課題の解決を発見してからも，実験者がいいつけないのに，自分からもっといい解き方を探したがった」（クルチェツキー，1969，p.143）と説明し，その事例を複数提示した。次の事例は，この志向が特に際立っていた数学的才能児として認定されたソーニャによる，「ある２等辺３角形で，１つの中線がこの３角形を 12 cm と 9 cm の２つの部分にわけています。３角形の３つの辺の長さを計算しなさい。」（クルチェツキー，1969，p.142）という問題に対する問題解決過程である。

ソーニャはまず図を書いた（「図-65」）。


（図-65）

「これが，底辺の中線でないことはすぐわかります。端きれをもった長い辺は，同じ長さの端きれをもった短い辺よりも 3 cm だけ長い。まわりの長さは 21 cm。２つの側辺は 6 cm だけ多い。つまり，8，8，5 です。わたし，もっと簡単に解けるわ。１つの辺の $1\frac{1}{2}$ が 12 cm，だから 8，8，5 です。」（ごらんのように，解決はひじょうに圧縮されている。後に，ソーニャは次のように説明した。「１つの側辺と，側辺の半分とで 12 cm に等しい。」）。それからソーニャは次のようにいった。「これには，２つの答えがあるわ。辺の $1\frac{1}{2}$ は 9 cm。２番目の３角形は，6，6，9 です。」（実験者にいわれて，彼女は次のように説明した。）「側辺が底辺より長いこともあるけど，底辺の方が，それぞれの側辺より長いこともあります。２つの場合を，

わけて考えないといけません。」

（クルチェツキー，1969，p.142）

このソーニャの事例では，一度解決した問題を「もっと簡単」な方法で解決する姿が記述されている。すなわち，クルチェツキーが「スマートさ」としてまとめた数学的対象の「美しさ」は，ソーニャにとって，もとの問題を解決するために不可欠なものではなかったことがわかる。

大学院生や教員養成課程の学生と数学者を比較したドレイフスとアイゼンバーグは，その比較の結果として，数学的対象の「美しさ」を感得するのは数学者だけであるという結論を得た（Dreyfus & Eisenberg, 1986a）。そして，ポリア（G. Polya）による問題解決過程の四つの相への区分を前提に，「振り返り」の相を拡張したものとして，問題解決の過程や得られた知見を美の観点からアセスメントする「problem solving plus」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.8）という相に注目した。この「振り返り」の相に関する「美しさ」の追求については，ポリア自身による以下のような例示がある。

ポリアは，問題解決の「振り返り」の相で役立つストラテジーの一つとして「異なる方法で同じ解を得られるか」を挙げ，その例として自身による円錐台（図２－１）の側面積の求積過程を次のように示している。

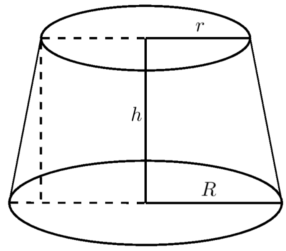


図２－１　円錐台（Polya, 1988/2004, p.63）

ポリアはまず，上底の半径が r，下底の半径が R，高さが h である円錐台の側面積 S を，底面の半径が R である直円錐の側面積から，底面の半径が r である直円錐の側面積を引く計算[16]によって，

$$S = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2} \cdots (*)$$

として得た。続いてポリアは，「より明瞭で手っ取り早い方法（a clearer and less roundabout

[16] ポリアによる説明と同様に詳細はここでも省略するが，底面の半径が R である直円錐から底面の半径が r である直円錐を除くことで図２－１が残るような図形を想定している。

argument)」（Polya, 1988/2004, p.62）を得るために，自らに「異なる方法で同じ解を得られるか，それを一目で理解できるか」（Polya, 1988/2004, p.62）と問い，この面積の式 $(*)$ に次のような図形的解釈を与えている。まず，$\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ をこの円錐台の母線の長さと捉え，$\pi(R+r)$ を

$$\pi(R+r)=\frac{2\pi R+2\pi r}{2}=2\pi\frac{R+r}{2}$$

と変形し，この部分を上底と下底の中間の位置にある断面の円周として捉え直した。そして，面積を表す式 $(*)$ を

$$\text{面積}=\text{中央にある断面の周の長さ}\times\text{母線の長さ}$$

として再定式化し，この式から台形の面積の公式

$$\text{面積}=\text{中央にある線分の長さ}\times\text{高さ}$$

が想起されると述べた。ポリアはこの式 $(*)$ に対する図形的解釈に対して，「『ほとんど一目に』円錐台についての結果の全体を理解することができる。すなわち，私たちはいま，長い計算によって得られた解に対する短くて直接的な証明に，とても接近していると感じる。」（Polya, 1988/2004, pp.63-64）と述べることで，その価値を説明した。

ドレイフスとアイゼンバーグが「problem solving plus」と捉えた問題解決の相や，ポリアによる例示においても，数学的対象の「美しさ」の追求は問題の解が得られてから行われており，この「美しさ」がもとの問題の解決に不可欠なものではないことが確認できる。

数学の専門家と初学者の問題解決を比較することで，成功的な問題解決のメカニズムの解明を試みたシルバーとメツガーは，数学の専門家を特徴づける性向（tendencies）や能力として，問題解決過程で行う美的な判断を記述した（Silver & Metzger, 1989）。そして，この美的な判断による問題解決への影響の一つとして同定した「意思決定の際のガイドとしての美的な監視」の例の一つに，調査対象者の一人である D 教授による次のような問題解決過程を挙げた。

D 教授は，半径 R の円の周上にある 3 点から作られる三角形について，面積が最大になるような 3 点の選び方が問われた問題に対して，計算によって解決できる見通しを得ながらも，この方程式がきたなく（messy）なる見込みであることを理由にこの方法を避け，対称性を部分的に利用しながら問題を解いた。D 教授は，計算による解決がこの問題の解が正三角形になる理由を明らかにしないという理由で，自身による解法にも満足しなかった。

この事例において，D 教授はあくまで解決の見通しを得た後に数学的対象の「美しさ」を追求しているという点で，ここまでに引用したソーニャの事例やポリアによる例示と同様に，数学的対象の「美しさ」をもとの問題の解決に不可欠なものとして追求してはいない。その一方で，ソーニャの事例やポリアによる例示とは異なる点として，数学的対象の「美し

さ」が，問題の解を得る以前の解決の見通しを得ただけの段階でも追求されうるものであることが確認できる。

先行研究で記述されてきた数学的対象の「美しさ」がもつ以上のような特性は，竹内（1979）の理論における次のような美的性質の特性として説明できる。

竹内は，美的性質の特性を，他の諸価値との関連や異同によって明確にしている。そして，「美的価値はなにか他の望ましいものを獲得するための手段として尊重されるような、extrinsic な価値ではなく、作品自身に内属する固有の価値である。」（竹内，1979，p.393）と述べ，美的性質それ自体が追求の対象であり，他の目的のための道具として追求されるものではないことを説明している。このような美的性質の特性について竹内は，美的性質を感得する際の知覚者側の特性としても，次のように説明している。

> 一般に美的体験では、実生活における行為の対象がつねに現実に存在しなければならないのに反して、観照あるいは表現の対象が実存することを必要とせず、ただそこに存在するかのようにみえればよいわけである。（中略）美学上、美的対象が仮象（Schein）として規定されるのは、そのありかたが真実の存在ではなくて虚仮の存在、いわば「かのように」の存在（Als-ob-Sein）としての性格を有するからにほかならない。これに応じて美的観照は対象の実存に「関心づけられざる」観照、実践的意思の動きを超越した観照であり、この意味において静観（contemplation）として規定されるのである。
>
> （竹内，1979，pp.106-107）

この竹内による言及に基づくと，数学的対象の「美しさ」の追求が問題の解や解決の見通しが得られてから行われること，すなわちこの「美しさ」が問題解決に不可欠なものではないことはむしろ必然であると言える。したがって，竹内の理論を用いて数学的対象の「美しさ」を説明する上で，この数学的対象の「美しさ」のもつ特性は不整合を起こさないことが確認できる。ただし，竹内が用いた「関心づけられざる」や「静観」という語はいずれも知覚者側の特性を説明する語であるので，本研究では数学的対象の「美しさ」の側の特性としてこの性質に言及する際に，「必要とされない」という意味で「無用性」と呼ぶことにする。

第３節　数学的対象の美的性質とその感得を捉える理論的枠組み

第１項　美的性質としての数学的対象の「美しさ」

本章第１節で述べたように，美学では，主たる研究対象である「美しさ」という概念の捉え方が時代とともに変化してきた。概説すると，「美しさ」という概念を客観的な性質とする捉え方から，主観的な性質とする捉え方へと移行してきた。そしてその過程では，類似し

た特性をもつ諸性質を束ねた美的範疇という概念や，少数の性質によって構成される美的範疇という概念では捉えられない多様な性質を包括的に扱うために，「美的なもの（the aesthetic)」や「美的性質（the aesthetic qualities)」といった概念が登場した。この概念の捉え方の変化は，「美しさ」という性質に主観性や多様性を認めてきた経緯とみることもできる。

本研究の対象である数学的対象の「美しさ」は，これまで見てきたように，数学者たちによって，対称性や黄金比などといった数学的概念や，簡潔性などの数学的価値を用いて説明されてきた。そして，前者の数学的概念による説明では，この数学的概念の存在のみで数学的対象の「美しさ」を担保できないことが主張されている（Davis & Hersh, 1981)。また，後者の数学的価値による説明については，実証的な研究をとおして，これらの数学的価値の捉え方に個人差があることが示されている（e.g., Inglis & Aberdein, 2014; Wells, 1990)。加えて，ル・リヨネのように，簡潔性や一般性のような数学的価値とは異なる観点から数学的対象の「美しさ」を説明する数学者もいたことがわかっている（Le Lionnnais, 1962/1971)。

数学的対象の「美しさ」のもつ以上のような主観性や多様性を踏まえて，本研究では数学的対象の「美しさ」という概念を，美的性質という射程の広い概念で捉えることとする。特に，竹内（1979）による「多様における統一」を原理とする理論に基づくことによって，前節で見てきたように，数学者たちによる数学的対象の「美しさ」についての言及が解釈可能になる。すなわち，本研究における数学的対象の美的性質は，第 1 章で示したような数学者たちが価値づけた「美しさ」の特性を反映していることが期待できるだけでなく，美的性質をそなえる数学的対象自体について言及することを可能とするものであり，かつ，美的性質のもつ主観性や多様性も考慮に入れることを可能にする概念であると言える。

次項からはより具体的に，数学的対象の美的性質に関する諸観点について，竹内の理論と数学教育学の先行研究の対照をとおして論じる。特に，竹内が美的体験に共通する基本構造とした三つの局面である「美的静観」と「美的交感」，「形成活動」について，本研究における対応概念を議論する。

第 2 項　数学的対象の「形式」としての構成要素間の「同値関係」と「擬同値関係」

竹内（1979）は，「多様における統一」を原理として知覚対象を構成する方式を「形式」とし，合理的に「多様における統一」もたらす「形式」を「合法則的形式」，自由化された「形式」を「個性化的形式」と称した。この「形式」は，竹内による「美的体験に共通する基本構造」のうち，「構造上枢要の本質的契機」である「形成活動」を根底において規定するものであり，美的性質を知覚者と知覚対象の双方から捉える竹内の立場において，知覚対象の属性として重要な位置を占めるものである。以下では数学的対象の美的性質を捉える

観点を得るために，知覚対象を数学的対象に限定する本研究において，これらの概念に対応する概念を定める[17]。ただし，竹内は「合法則的形式」と「個性化的形式」を繰り返し説明する一方で厳密な概念規定はないようである。したがって，「合法則的形式」と「個性化的形式」に対する対応概念の規定に先立ち，竹内による「合法則的形式」と「個性化的形式」についての説明を概観した上で，本研究による解釈を述べることにする。

(1) 本研究における「合法則的形式」に対する解釈と対応概念の規定

竹内は「合法則的形式」について，最高原理である「多様における統一」から分化される諸特殊原理として，シンメトリやプロポーションなどを例示している。そして派生したこれらの「合法則的形式」が知覚対象に備わることで，「それぞれ調子や強度や方向や数量において相違しまたは対立する構成要素のあいだにまた共通しあるいは和合するところがあって、多様のうちに統一がたもたれる」（竹内，1979，p.110）と説明する。さらにこれらの具体的な「合法則的形式」を，「本来はそれぞれ一定範囲の諸芸術に属するものでありながら、往々類比的意味では他の領域へ転化される」（竹内，1979，p.291）ものとする。すなわち，シンメトリなどの例は，特定の芸術領域に限定されて用いられる構成方式ではなく，多岐にわたって用いられるという点で，それぞれが「合法則的形式」の類型の特徴を表したものになっている。加えて竹内は，具体的な「合法則的形式」は，「諸芸術にわたって作品の諸構成要素の同時的あるいは継起的結合関係を規定するものであるが、いずれも結局は多様における統一に還元される」（竹内，1979，p.290）ものとし，「根本的に相関連する」（p.291）ものとする。このことから，シンメトリなどと表現される各類型は，互いに排反の関係ではないことがわかる。したがって，「合法則的形式」の概念を解釈する上で，その諸類型を個別に捉えるよりも，総体としての「合法則的形式」を捉える方が有意義であると考える。

以上を踏まえて，本研究では竹内による「合法則的形式」を，「知覚対象の異なる構成要素の間に統一をもたらす規則」として包括的に捉えることとする。この捉え方は，竹内による「合法則的形式」の説明に含まれている「合理的に『多様における統一』をもたらす」という機能が，知覚対象の「それぞれ調子や強度や方向や数量において相違しまたは対立する構成要素のあいだに」，「共通しあるいは和合するところ」をもたらし，「多様のうちに統一」

[17] 数学教育学では，内容の対概念として位置づけられた形式が注目を集めてきた（e.g., Byers & Erlwanger, 1984）。この内容としては，概念や意味などが含まれている。この意味での形式は，例として記数法や形式的証明の三段論法が挙がっているように表現または表記そのものではなく，表現や表記の構成方法である。したがって，数学教育学で広く用いられる形式概念は，竹内による「形象の構成方式」としての意味をもっている。（本章註 7 参照）。本研究で用いる「形式」概念は，この「形象の構成方式」としての意味よりも広義であり，竹内のいう知覚対象の内容及び形象の構成方式である。

をたもたせるものであると捉え，その機序を簡潔に表現することを意図したものである。

以上のように捉えた「合法則的形式」に対し，知覚対象が数学的対象である場合の対応概念を定める上で，以下ではまず，竹内が「合法則的形式」の例として挙げたシンメトリ，プロポーションから類推し，これらに相等する数学的概念である対称性と比例[18]について考察する。具体的には，これら数学的概念の特性と「合法則的形式」との対照を行う。

まず, 対称性は, 線対称や面対称, 点対称などに代表されるような幾何学的な性質として, 次のように説明される関係概念である。

> ある図形の*対称性*とは，その図形を不変に保つ変換のことである。ここで不変に保つとは，この図形上の個々の点がその変換で別の点に移ったとしても，全体としてみると，変換の前後で図形が変わらないということを意味する。
>
> （Devlin, 1994, p.146）

このデブリン（K. Devlin）による定義に従うと，対称性は変換，すなわちある集合Aから自分自身への写像の一つとして定義される。写像は関係概念なので, 集合Aの構成要素間の関係を表す規則であると言える。また，「全体としてみると，変換の前後で図形が変わらない」ことで，変換の前後の間の統一が成立している。すなわち，数学的概念としての対称性も，シンメトリと同様に「合法則的形式」の一つであると言える。

デブリンによる対称性についての説明は図形に関するものであったが，この対象概念を代数的な式に置き換えても，図形の場合と同様に対称性を「合法則的形式」と考えることができる。実際, 基本対称式$a+b$に見られるような記号間の交換可能性は「代数的な対称性」（Devlin, 1994, p.151）と呼ばれる。したがって本研究においても，図形と代数的な式の双方を対称性の対象概念として捉えることとする。

次に, 比例は, ユークリッドの原論では「同じ比を持つ量は比例すると呼ばれるとしよう」（斎藤・三浦, 2008, p.368）と定義される関係概念である。ここで比とは「同種の２つの量の大きさに関する何らかの関係」（斎藤・三浦，2008，p.367）であるので，比例は四つの量a,b,c,dを用いると，$a{:}b=c{:}d$と表すことができる。また，比例を集合XとYの関係概念として捉えると, $\forall x\in X$とxに対応する$y\in Y$について，比$x{:}y$が一定であるような関係と

---

[18] プロポーションに対応する概念としては，比例の他に比も考えられる。しかしながら，比は同種の２つの量の大きさに関する何らかの関係」（斎藤・三浦，2008，p.367）であり，単独の比は「２つの量」の間に統一という関係をもたらすものではない（$a:b$はaとbとの間の統一を意味しない)。したがって，ここでは比例に焦点を当てることにする。

定義することもできる。このどちらの定義においても，2 量が比例関係である場合には，それらの間に「比が一定」という統一性が成立している。したがって，数学的概念としての比例も，プロポーションと同様に「合法則的形式」の一つであると言える。

以上のように「合法則的形式」として捉えられることが確認された対称性と比例は，いずれも反射律と対称律，推移律をそれぞれ満たす数学的な同値関係であるという共通性をもつ[19]。逆に，数学的対象の構成要素間に何らかの同値関係が成立する場合，その同値関係は数学的対象の異なる構成要素の間に同値という統一をもたらす規則であるので，「合法則的形式」であると言える。そこで，本研究における数学的対象の「合法則的形式」を，数学的対象の構成要素間の「同値関係」[20]として定める。

上述の定義に基づくと，例えばスティーン（L. A. Steen）が「数学の体系の根源をなすもの」（Steen, 1990, p.3）として挙げたもののうち，線形性，周期性，相似，再帰といった関係概念も，以下のように数学的対象の「合法則的形式」と捉えることができる。

まず，線形性は恒等写像について成立するので反射律をみたす。また，線形写像が逆写像をもてば，その逆写像も線形写像なので対称律をみたす。そして，集合 X , Y, Z において X から Y への写像 f と Y から Z への写像 g がともに線形写像である場合, 合成写像 $g \circ f$ も線形写像であるので推移律もみたす。すなわち，写像としての関係が全単射である場合には，線形性は同値関係である。先述した比例は，この場合の線形性の下位概念である。

次に周期性について，f が基本周期 k をもつ場合，$f(x)$ と $f(x+k)$ の間には同値関係が成立する。すなわち，$f(x)=f(x+k)$ である。

続いて相似について，図形 F_1, F_2, F_3 について相似を $\sim$ と表すと，（反射律）$F_1 \sim F_1$，（対称律）$F_1 \sim F_2 \Longrightarrow F_2 \sim F_1$ ，（推移律）$F_1 \sim F_2, F_2 \sim F_3 \Longrightarrow F_1 \sim F_3$ を全て満たす。ただし相似は，次のように比例を用いて定義することもできる。すなわち, k を定数として, F_1 上の任意の点 $\mathrm{P_1}$ と，点 $\mathrm{P_1}$ に対応する F_2 上の点 $\mathrm{P_2}$ との間に，常に $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ となる点 O が存在することを，F_1 と F_2 が相似であると捉えることができる。

最後の再帰については，数学において頻出するにもかかわらず，一般に受け入れられた意味がないとされる数学的概念である（Kilpatrick，1986）。キルパトリックは，このような再帰の位置づけを踏まえた上で，最も興味深い特徴として「自己参照 self-referential」（Kilpatrick，1986, p.9）という側面を挙げている。この「自己参照」とは，フラクタル図形に見られる自己相似性や，数列の漸化式による定義などに見られる，入れ子状の構造のこ

---

[19] ただし，ここでの対称性は前述のように広義である。線対称のような具体的な対称性には推移律を満たさないものもある。

[20] 以降，この鉤括弧を付した同値関係を，この「合法則的形式」の対応概念を意味する語として用いる。

とである。例えば，$n \in \mathbb{N}$ について，$n! \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-1)!$ と定義する際に，右辺においても自然数の階乗が現れている構造のことである。ここで右辺には n! そのものが用いられているわけではないので循環論法とは異なる。しかし，どちらも「自然数の階乗」という意味は等しい。すなわちこの意味では，

$$[\text{自然数の階乗}] \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot [\text{自然数の階乗}]$$

となっている。より一般に，参照する自己を S，参照される自己を $(S)'$ と表し，これらが意味の上では等しいという関係を ~ とすれば，（反射律）$S \sim S$，（対称律）$S \sim (S)' \Rightarrow (S)' \sim S$，（推移律）$S \sim (S)'$，$(S)' \sim \left((S)'\right)' \Rightarrow S \sim \left((S)'\right)'$ が満たされるので，再帰も同値関係である。

本研究では，ここまでで数学的対象の「合法則的形式」として，対称性，比例，線形性，周期性，再帰の五つの同値関係を挙げた。これらは，線形性と比例，相似の間の関係のように，互いに排反ではない。また，当然ながら，数学における同値関係はこの五つに限定されるものではない。したがって，本研究における「合法則的形式」への対応概念としての「同値関係」も，ここで挙げた五つに限定されるものではなく，互いに排反な概念ではない。

(2) 本研究における「個性化的形式」に対する解釈と対応概念の規定

本章第 1 節で述べたように，竹内は美的体験を，自然や芸術作品から美的性質を見いだす「自然美的観照」と「芸術美的観照」，そして芸術作品を形成する「芸術創作」の 3 段階で捉えている。そしてこれら 3 段階すべてに含まれる「形成活動」において，「合法則的形式」が原理としてはたらくとする。その上で竹内は，「形成活動」が「合法則的形式」のみに基づいて行われるのではなく，次に述べる二重の「主体的個性化の原理」（竹内，1979，p.111）によって「合法則的形式」が個性化された，「個性化的形式」にも従うとしている。

第 1 の「主体的個性化の原理」は，「人格的個性の法則」と呼ばれる原理である。この法則では，「合法則的形式」が「個人的人格にもとづいて分化する各自に固有の観かた、感じかた、把握のしかたにしたがって、さまざまに変容され、おおかれすくなかれ自由化され」（竹内，1979，p.111）る。第 2 の「主体的個性化の原理」は，「歴史的個性の法則」と呼ばれる原理である。この法則では，人格的個性の「背後にあってそれをにない、ささえる世代や時期や時代、種族や民族、職業や階級など」（竹内，1979，p.111）によって，「合法則的形式」が自由化される。

これら二重の原理によって個性化される前の「合法則的形式」は，美を「客観的規定」によって捉える立場の一つである「形式主義」において，美の基準として用いられるものである。対照的に，この「個性化的形式」は竹内の「多様における統一」原理における美的性質の主観性を保証するものであり，竹内は次のように「形式主義」との差異を明示している。

形式主義の美学によって強調されたような美の普遍的妥当的形式原理[21]はこの二重の主体的個性化の原理をはなれて絶対的権威を有するとはみとめられず、これと提携し協同してはじめて美的意義を全うすることができる。

（竹内，1979，p.111）

また，この美的性質の主観性に関連して，竹内は，同一の知覚対象を異なる人が観照した場合に感得される美的性質が「いくらかずつ相異なったものとなる」（竹内，1979，p.295）ことや，「複数の作者が同じ媒材をもって同じ題材を扱っても、唯一不二のたがいに置換できないものとなる」（竹内，1979，p.295）ことを，この「個性化的形式」の差異で説明している。

以上のように「個性化的形式」は，竹内による「多様における統一」原理に基づく美的性質の主観性の説明の鍵概念であるが，この竹内はこの主観性が無規則なものではないことを，次のように説明する。

同一の芸術家に属するものの間にはその全体を通じて一貫する形式特徴がみいだされ、一つの時代において一つの民族に属する諸作家の諸作品のあいだにもまた共通の特徴をもった形式が支配している。元来、芸術的創造の自由は決してほしいままにその都度ちがった形式を取ることではなく、各主体の精神に固有の個人的[22]および歴史的個性の法則によって精神それ自身の活動を律することだからである。この自己規定によって同一主体の諸作品は、相互間の多様な変異にもかかわらず、これをこえて一定の形式で構成されたものとなり、それらすべてにわたって一定の形成類型としての様式を備えたものとなる。

（竹内，1979，p.295）

すなわち，竹内による美的性質の主観性の捉え方の特徴として，「合法則的形式」の個性化について，「人格的個性の法則」及び「歴史的個性の法則」のいずれをとっても，無規則で「何でもあり」のものにすることはないと捉えていると言える。なお，芸術家の個人様式や，古典主義や浪漫主義といった歴史様式は，「個性的法則性が作品に客観化されたもの」（竹内，1979，p.296）として説明される。

---

21 この引用中の「普遍妥当的形式原理」についての直接的な説明はないが，直前に「合法則的形式」を「すべての美的主体に対して妥当する普遍的形式原理」と称していることから，「合法則的形式」を指していると解釈できる。

22 この個人的個性は，人格的個性と同一概念と解釈した。

以上を整理し，本研究では「個性化的形式」を次のように捉える。すなわち，「『人格的個性の法則』及び『歴史的個性の法則』という二重の『主体的個性化の原理』によって個性化された，知覚対象の異なる構成要素の間に統一をもたらす規則」とする。

知覚対象を数学的対象に限定する本研究において，この「個性化的形式」に関わる個性化または自由化を行う主体は，数学者または数学者集団である。この数学者集団が広く感得している数学的対象の美的性質については，本章第２節において，簡潔性や一般性といった数学的価値で特徴づけられるものとして定めた。したがって以下では，この「個性化的形式」への対応概念を定めるために，この数学的価値を得る過程を考察する。

簡潔性や一般性などの数学的価値を追求する過程については，中島（1974; 1982）による定式化が示唆に富む。なぜならば，中島が文部省で改訂を担当した学習指導要領において新たに導入された「数学的な考え方」という用語で実現を目指した算数・数学にふさわしい創造的な活動は，「より簡潔にしたい，より明確にしたい，より統合されたものにしたい」（中島，1982，p.83）という価値観による活動であり，かつ，中島はこの簡潔・明確・統合という観点で数学的対象の美的性質[23]を捉える立場を明言しているからである[24]。

中島は，算数・数学にふさわしい創造的な活動について，小学校算数科の教科内容の学習場面を想定した例を用いて，その構造を説明している。ただし，1974 年の文献と 1982 年の文献では，この構造の要素となる活動の区分が異なっている。そこで，後述する具体例との対応関係によって両文献で示された区分を整理したものが表２―１である。ここでは，中島（1974）が創造的活動の構造を説明するために示した，乗数が分数で表される乗法に関する問題解決を例として，中島の言う創造的な活動の構造をなす要素を表２－１のように整理した理由を説明する。具体的な問題場面は，整数どうしの乗法が既習であることを前提とし，乗数が分数で表されている場合を新たに考察する場面である（図２－２）。

（問題）　１m24円のリボンを買うことにする。
(1)　２mではいくらか。３mではいくらか。
(2)　$\frac{1}{3}$mではいくらか。$\frac{2}{3}$mではいくらか。

図２－２　乗数が分数で表される場合の乗法の導入問題（中島，1974，p.125）

[23] 中島（1974; 1982）は「美しさ」と表現しているものの，この「美しさ」に主観性を認めている（中島，1982，p.66）。したがって，ここでは美的性質という語を用いた。
[24] 中島は 1974 年の文献と 1982 年（初版は 1981 年）の文献の両者で，数学の「美しさ」をこれら三つの観点で捉える立場を明言しているが，1982 年の文献では「直観的に，ある意味での『形』が関係する対象についての『美しさ』」（中島，1982，pp.65-66）として，対称性などが関係する「美しさ」などについても言及している。

表２―１　算数・数学にふさわしい創造的な活動の構造

（中島（1974，pp. 124-128）及び中島（1982，pp.82-102）をもとに引用者作成）

<table>
<tr><th></th><th>1974 年の文献</th><th colspan="2">1982 年の文献</th></tr>
<tr><td rowspan="5">創造的な活動の構造をなす要素</td><td>問題の習慣的処理
（問題の場の提供）</td><td colspan="2" rowspan="2">課題を簡潔，明確，統合などの
観点をふまえて把握すること</td></tr>
<tr><td>課題の意識（P 段階）</td></tr>
<tr><td>仮想的な対象の設定
（I 段階）</td><td rowspan="2">仮想的な対象の設定と実在化（実体化）のための手法</td><td rowspan="3">・解決の鍵としての「数学的なアイデア」の存在とその意識づけ
・「構造」の認識と保存</td></tr>
<tr><td>仮想的な対象の実在化
（R 段階）</td></tr>
<tr><td>評価（E 段階）</td><td>評価</td></tr>
</table>

この問題に対し，中島（1974）は「問題の習慣的処理（問題の場の提供）」として，既習事項を用いた次のような立式を示している。

$$(1)\ 24 \times 2, \qquad 24 \times 3$$

$$(2)\ 24 \div 3, \qquad 24 \div 3 \times 2$$

続いて，「課題の意識（P 段階）」として，この(1)と(2)が同じ問題場面の中での処理でありながら式の表現が異なることを「複雑」で「不便」であると捉え，「簡潔さ，または統合ということに価値を認め追求しようとする心情」（中島，1974，p.126）から，この改善を課題として意識することを挙げている。

ここまでの中島（1974）による例示は，中島（1982）が定めた「課題を簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること」という活動に相等すると考えられる。その第１の理由は，ここまでの中島（1974）による例示に続く活動と，中島（1982）による「課題を簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること」という活動に続く活動が，ともに「仮想的な対象の設定」であることである。また，第２の理由として，中島（1982）が定めた「課題を簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること」という活動は，乗数が分数で表される乗法についての例示はないものの，この活動で定められる課題について次にように説明していることが挙げられる。

そうした課題は，算数・数学を人間が作り上げたときに求めようとしていた価値観にもとづいたものであることが，要請されるといってよいはずである。

このような価値観に関しては，…（中略）…，基本的なものとして，たとえば，より簡潔にしたい，より明確にしたい，より統合されたものにしたい，といったことをあげてきている。このような観点から不都合があったら，何とか工夫改善しなければ気がおさまらないという心情にかられて構成されるのが，ここでいう算数・数学の創造的な活動を推し進める原動力としてふさわしい「課題」であると考えるのである。

（中島，1982，pp.83-84）

このように，1974 年の文献においても，1982 年の文献においても，中島の述べる創造的活動の原動力となる課題は簡潔さや統合などを観点とした改善を目指す上で設定されるものになっている。なお，中島（1982）は，1974 年の文献で見られた「問題の習慣的処理」といった活動を明示していない。しかしながら，中島（1974）が示したとおり，課題が「簡潔さや統合などを観点とした改善」を目指す上で設定される過程では，これらの観点からの不満が不可欠であると言える。したがって，中島（1982）が述べる「課題を簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること」という活動には，1974 年の「問題の習慣的処理」が含まれていると解釈した。

中島（1974）は，「課題の意識（P 段階）」に続いて，「仮想的な対象の設定（I 段階）」として，「24 × p という形式の乗法が，p が整数，分数に限らず考えられるものと，『仮定的に』考えてみる」（中島，1974，p.126）という活動を挙げている。そしてこの活動では，「形式の統一ということに価値を求めて，既知の整数の世界で用いてきた形式を，新しい分数を含めた世界にも持ち込もうとする考え」（中島，1974，p.126）として例示される「形式不易の原理」が用いられているとする。そしてこれに続く活動として「仮想的な対象の実在化（R 段階）」をあげ，「$24 \times p$ という，仮に考えた対象を，既に実在しているものと同じように扱ってよいようにしてやらなければならない」（中島，1974，p.126）とし，その実在化の手続きとして次のように「本質的な性質」に言及する。

これは，これまでの既知の世界，すなわち，整数の情報について成り立った本質的な性質が仮に考えた対象にも成り立つように決めてやることである。…（中略）…整数のときと全く同じにならないにしても，乗法という以上，その本質的な性質だけは成り立つように乗法の意味を新しく決める（ここで抽象が行われている）ことである。

（中島，1974，p.127）

その上で中島（1974）は，整数どうしの乗法がもつ本質的な性質として比例関係をあげ，この比例関係を保存しながら意味が拡張されるように，a × p という乗法を「『a を単位にし

たときに，測定数が p になる大きさ』または，『a が一定のときに，p に比例する大きさ』」（中島，1974，p.127）としてとらえなおしている。なお，中島（1974）はこのような本質的な性質（関係）を「新しい数が乗法に関して保持すべき『構造』といわれるもの」（中島，1974，p.128）と説明しており，中島（1974）の述べる「構造」という語が，拡張の際に保持される性質を意味していることが窺える。

一方，1982 年の文献では，この中島（1974）による「仮想的な対象の設定（I 段階）」と「仮想的な対象の実在化（R 段階）」は「仮想的な対象の設定と実在化（実体化）のための手法[25]」としてまとめられていると解釈できる。実際，中島（1982）はこの活動の例として乗数が分数で表現された乗法の導入場面を挙げており，その場合でも整数どうしの乗法と同じ形式で表現しようとすることや，この同じ形式による表現が成立するように比例関係に着目して意味を拡張することが説明されている。

中島（1974）は，創造的活動についての説明の最後に「評価（E 段階）」を挙げ，「以上で目的を達成したかどうか，まだ，どんな問題があるか，または，あとどんな発展が考えられるかなどといった検討がなされなければならない」（中島，1974，p.128）と説明する。これに対して，1982 年の文献において「評価」として述べられた活動は，「(1)課題の解決の確認とその真価の鑑賞」及び「(2)残された問題点と発展への志向」という二つの主な観点から，より詳細に説明がなされている。この二つの観点からわかるとおり，1982 年の文献における説明は，1974 年の文献で言及された内容を内包していると考えられる。

以上の例示によって，中島（1974）が説明した創造的な活動の構造の要素の全てに言及した一方で，1982 年の文献で挙げられた「解決の鍵としての『数学的なアイデア』の存在とその意識づけ」及び「『構造』の認識と保存」については言及していない。以下ではこれらについての中島（1982）による説明をもとに，筆者による表 2 − 1 における位置づけの意図を述べる。

中島（1982）は，既習の知識や手法だけでは処理できない障害を乗り越えるためには，この障害について観点を変更することなどによって既習の知識や手法とのつながりをつけることが必要であると述べ，この観点の変更にあたって着想としての働きをするものを「数学的なアイデア」と呼んでいる。そして，上述の「乗数が分数で表現された乗法」についての創造的活動の過程で用いられた比例関係について，「A×p を p に比例するものとして一般に見直すという『比例の考え』」（中島，1982，p.90，強調は原文）を，解決の鍵として働く

[25] ここで「手法」という語が用いられているが，中島（1982）は実在化のための手法を「『目的に合ったもの』として認める活動」（中島，1982，p.86）の言い換えとして用いており，意味の上では 1974 年の文献における「仮想的な対象の実在化（R 段階）」と同等であると解釈できる。

「数学的なアイデア」の例の一つとして挙げている。また，２位数に１位数をかける計算 23×4 の導入場面を例に，既習の九九で処理できるようにするための二つのアイデア① $(20+3)\times 4$ を $20\times 4+3\times 4$ と捉えなおせる「分配法則の考え」と，② 20×3 を $10\times(2\times 3)$ と捉えなおす際に用いる，単位を１から10に変更して考える「単位の考え」を挙げている。

これらのうち，「比例の考え」に関する比例関係については上述のように乗法の意味を拡張する際に保存されており，1974年の文献では「構造」や「本質的な性質」とも称されていたものである。一方，「分配法則の考え」や「単位の考え」については，これらの関する数学的な概念を保存して課題の解決を図ろうとするものではなく，「比例の考え」と同様に直接的に用いられるある種のプロセス[26]とみなすことができる。

中島（1982）はこのような「数学的なアイデア」を，「数学的な考え方」の要件として位置づけており，「その指導という立場からは，課題の解決にあたって，どんな数学的なアイデアが働いたかをはっきり把握し，それを子どもたちにも意識させることが重要である。」（中島，1982，pp.90-91）と述べている。この指導についての言及から，創造的な活動の構造の要素としての「解決の鍵としての『数学的なアイデア』の存在とその意識づけ」という活動は，「仮想的な対象の設定と実在化（実体化）のための手法」と「評価」にまたがるものであると窺える。このことが，この「数学的なアイデア」に関する活動を表２－１のように位置づけた理由である。

最後に，中島（1982）による「『構造』の認識と保存」という活動について説明する。中島（1982）は，この「『構造』の認識と保存」という活動を創造的な活動に位置づけた理由を，次のように述べる。

> 統合という観点からの課題にもとづいて，特に，「拡張による統合」の立場にもとづいて創造的な活動を行う場合が，「数学的な考え方」の指導においても，実質的にはきわめて重要な位置を占めている。それで，「数学的な考え方」を考察する際の要件の一つとして，特にこの４[27]を加えておくことにしたものである。
>
> （中島，1982，pp.91-92）

[26] 「数学的なアイデア」について，1974年の文献では，指導過程の要件の一つとして「鍵となっている数学的なアイデアをはっきりさせること」という言及がある（中島，1974，pp.128-129）。また，ここでは数学的なアイデアの例として，形式不易の考えのほか，「乗法の基本的な性質を抽出して，新しく乗法というものを規定しなおすというようなアイデア」が挙げられている。ここでも，比例関係や分配法則といった数学的な概念そのものではなく，ある種のプロセスが例示されている。

[27] この４は，「『構造』の認識と保存」の項目の見出し番号を指している。

この引用文から，この「『構造』の認識と保存」は，拡張や統合を伴うような創造的な活動において重要な活動として位置づいているとみなせる。この「構造」について，中島（1982）は，数を複素数に拡張する際に大小関係が捨象されるのに対して抽象されて保持される性質があることに言及し，この性質のことを「構造」と呼んでいる。また，「形式」[28]が「構造」として保持されることを，「『形式不易の原理』ということがある」（中島，1982，p.139）と説明する。

中島（1982）はまた，この「構造」について，「『仮想的な対象』の想定やその実在化のための手法と密接な関わりをもつものであり，…（中略）…「数学的なアイデア」に相応するとみなすことができる場合もある。」（中島，1982，p.92）と説明する。したがって，「数学的なアイデア」に関する活動と同様に，この「『構造』の認識と保存」も「仮想的な対象の設定と実在化（実体化）のための手法」と「評価」にまたがる活動であると窺える。このことが，この「構造」に関する活動を，表２－１のように位置づけた理由である。

以上のような中島による創造的な活動の説明についての解釈と表２－１に基づくと，数学的価値を得る過程は，課題を把握する段階と，仮想的な対象を設定して実在化する段階，評価の段階に大別できる。そしてこのうち，知覚対象に数学的価値が実現するのは仮想的な対象を設定して実在化する段階であり，この段階では数学的価値が実現された仮想的な状態と，それ以前の実際との差を埋めるような「数学的なアイデア」や「構造」が鍵としてはたらいている。

この「数学的なアイデア」や「構造」を視点として，先述のポリアによる問題解決の例を捉えなおしてみると，ポリアは，計算によって得られた $S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ という式を分解し，$\pi(R+r)$ を上底と下底の中間の位置にある断面の円周として，$\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ を母線の長さとして考察対象である図形に位置づくような解釈を与えていた。このように，計算結果として得られた式と，考察対象である図形またはその構成要素の量を「同じ」とみることによって，「より明瞭で手っ取り早い方法」や「ほとんど一目に」結果を理解できるような解釈を得ている。この場面の「同じ」とみる解釈は，先の「同値関係」のように数学的に形式化されたものではなく，個人や集団の捉え方に依存するインフォーマルなものであると言える。言い換えると，「同値関係」を「個性化」したものであると解釈できる。

ポアンカレは，数学的対象の美的性質を感得する機序と思考の節約を関連づけた上で，繰

[28] このように「形式不易」という語が用いられる際の形式は，交換法則や結合法則といった演算に関する規則を指している。また，中島（1982）は，比例になっている数量関係を表す式が，乗法による式であることを例として挙げている。いずれも，式などといった表現（竹内の用法でいう「形象」）についての規則や構成方法なので，竹内の言う「形象の構成方式」としての「形式」であると捉えられる。

り返し現れるものに同じ名前をつけることの重要性を説き,「数学はいろいろの異なるものに同じ名前を与える芸術である。」(Poincaré, 1908/2003, p.34) という,後に名言として広く知られる解釈を述べた。そして,「これらのものは,内容 (matter) としては異なっていても形式が類似していれば,十分に,存在すること,いわば同じ型の中で機能する (run) ことが可能である。」(Poincaré, 1908/2003, p.34) と続けた。このポアンカレの言説に基づくと,先のポリアによる「同じ」を見いだす思考過程は,思考の節約と関連づくような数学的対象の美的性質の感得過程において,重要な役割を果たすと言える。さらに,この場合の「同じ」は,形式が「同じ」であれば十分であるので, ポリアの例で言えば,$\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ という式の由来が計算であるかどうかは不問になる。

以上を整理すると,本研究では数学者集団を文化の担い手と捉える立場に立ち,この集団による「個性化的形式」が存在するという前提を置いた。そしてこの「個性化的形式」に関する数学的対象の美的性質を特徴づける性質を,簡潔性や一般性などの数学的価値として定めた。その上で,この数学的価値の実現には,「同値関係」をインフォーマルにした,構成要素間の「同じ」と見なせる関係が鍵であることをポリアによる数学的対象の美的性質の感得過程とポアンカレによる言説から確認した。

竹内 (1979) が概念化した「個性化的形式」は,「美的体験の構造上枢要の本質的契機」(竹内, 1979, p.109) である「形成活動」において知覚対象に賦与される構成方式としての「形式」の一つであり,「合法則的形式」が自由化されたものであった。このような美的体験における「個性化的形式」の位置は,ポリアによる例やポアンカレによる言及に見られる,数学的対象の美的性質の感得過程において構成要素間に成立するインフォーマルな「同じ」という関係と酷似している。したがって,本研究ではこの構成要素間に成立するインフォーマルな「同じ」という関係を,竹内の「個性化的形式」への対応概念として捉えた上で,「同値関係」との関係を明示することを意図して「擬同値関係」と呼ぶことにする。

第3項 「美的静観」としての数学的対象の「本質」と「全体」の直観

本項では,竹内 (1979) が「美的体験に共通する基本構造」と位置づけた三つの局面のうち,「美的静観」について竹内による説明を概観し,本研究における対応概念を定める。

先述のように,竹内のいう「美的静観」を端的に述べると,知覚対象の全体像を捉えつつ,さらにその対象の本質を直観する局面である。竹内はこの「美的静観」を,自然を対象とする場合の「現象の静観」及び「本質の静観(諦観)」の二つと,芸術作品を対象にする場合の「現象描写に対する静観」及び「本質象徴に対する諦観」の二つの計四つで以下のように説明する。

竹内は,「現象の静観」を,主に視覚による感覚的現象をそれ自身としてとらえるととも

に，それを通じて対象の意味を把捉するものとして説明する。そして具体例として，花を対象とした「現象の静観」を次のように説明する。

美的観照にとっては花を植物の生殖器官として認知することが必要なのではなく、ましてそれが何科の植物のものであるかを知る要はない。しかしそれを単なる色斑現象として知覚するだけでは花の美を応分に享受することができない。花は鮮麗な色や均斉をえた形をもって現象するのみならず清新旺盛な生命力の有機的開展を意味するものとして把捉されてこそ、われわれを魅することができる。

（竹内，1979，p.117）

竹内によると，通常の知覚においては感覚にふれるものが意味を表現するためのみに存在するのに対し,「現象の静観」はそれに反して,「現象をそれ自身として把捉すると同時に、それをとおして意味を透視する」（竹内，1979，p.118）のであり，「現象そのものが意味の外面化として直観され、意味が現象に内在する」（竹内，1979，p.118)。このように，感覚的現象と意味の双方ともを捉えることが必要であるとする。

続いて竹内は，「本質の静観（諦観)」を，「現象の静観」で把捉された意味について，その意味が内在する具体的対象をこえて「個々の対象ないしその関連のうちに普遍的なものを把得し、現象のうちに本質を観得する」（竹内，1979，pp.118-119）ことと説明する。そして，この「本質の静観（諦観)」と知的直観との類似性について，次のように述べる。

哲学上の認識においても知的直観は皮相の現象をつきぬけてその背後にひそむ本質を直接に把得するといわれるが、美的体験ではその本来の感性的直観がおおかれすくなかれ同様の知的直観へと発展するのであって、そのかぎり、それはその対象の表面現象に滞留せず、これをとおして内奥の本質に観入する。

（竹内，1979，p.119）

この本質の直観は次第に深まり，より大きな全体の本質の直観に至ることが次のように説明される。

この美的静観の深化はしかし存在領域の累層的序列にしたがって個別的自然対象の本質から次第により普遍的なものの本質へおよぼされ、ついには自然そのものの全体本質に達する。

（竹内，1979，p.119）

このように哲学上の認識や知的直観との類似性が言及される「美的静観」について，竹内は，哲学上の直覚的方法との差異として，本質の主観性について次のように説明する。

> 哲学上の直覚的方法では個々の現象において本質を観得することが可能であるとしても、眼目とするところは客観的に真実な普遍妥当的認識でなければならないが、美的態度における本質の直覚的認識は観照者自身にとって真実らしくみえるものでありさえすればよい。あらためていうまでもなく、美は仮象にあるのだからである。美的自然観照で私は私の「眼」で、私の精神的視角から本質的なものを発見する。したがって、客観的には同一の現象も主体の観かたによっていくらかずつ相異なった仮象としてあらわれるのと同様に、学的認識では一定不変のものとして把得されるべき本質も、様々に変相においてとらえられる。勿論、（中略）美的本質諦観もほしいままに変動することはゆるされず、客体の性状によっておのずからある範囲内に限定される。しかし美的主体は各自の没我的でしかも同時に主我的な態度をもって自然と人生の諸現象をながめ、そのうちに本質的形相をみいだすのであって、この本質直観が多分に主観性を帯びていることはいなまれない。
>
> （竹内，1979，p.123）

以上の「現象の静観」と「本質の静観（諦観）」の位置づけ，すなわち「現象の静観」が発展して「本質の静観（諦観）」になるという関係と，「本質の静観（諦観）」と知的直観との類似性を踏まえると，竹内の理論における自然を対象とする「美的静観」は，感覚現象そのものと，感覚現象に内在しつつ個々の対象をこえる全体の本質を，静観的な態度[29]で直観する局面であると解釈できる。この本質は，「現象の静観」から「本質の静観（諦観）」へと「美的静観」が深まるにつれて，その本質の及ぶ範囲である全体が広がるものである。そしてまた，この本質については，「ほしいままに変動すること」は許されないながらも，主観性が反映されたものであると捉えられる。

続いて，芸術作品を対象とする「美的静観」である「現象描写に対する静観」と「本質象徴に対する諦観」の二つを概観する。

まず，芸術作品を対象とした「美的静観」における「現象描写に対する静観」は，自然を対象とした「美的静観」における「現象の静観」に対応するものである。後者では「その現象に即して一定事物としての意味を把得する」（竹内，1979，p.188）のに対して，前者の「現象描写に対する静観」では「作品に再現された対象を一個の現象像として直観すると同時に、

[29] 本章註 3 及び第 2 節第 3 項参照。

一定の事物として再認する」（竹内，1979，p.188)。竹内は，この再認された意味と直観された現象とが結びつくことが不可欠であることを，花の絵の美的性質の感得を例に次のように説明する。

> もしわれわれが花をえがいた絵を単なる色と形の複合体としてのみ知覚し、そこに「花」をみることをしなかったら、皮相の色彩美や形式を享受するにとどまり、花となって開展した植物の生命性に関する美を感得すべくもないであろう。
>
> （竹内，1979，p.189）

このように「現象描写に対する静観」において直観される形式や色彩と再現された意味との関係は，自然を対象とした「現象の静観」において直観される感覚的現象と対象の意味の関係と，同じ構造をしている。また，自然を対象とする「現象の静観」において感覚的現象の直観自体が重要な位置を占めていたこと以上に，「現象描写に対する静観」では現象の直観が重要な位置を占めていることが次のように説明される。

> 芸術では作品に再現された対象が仮象としてのみ存在し、その現象が自然的現実においてよりも純粋に、明瞭に、印象ふかく映発するように描写されているので、観照者はおのずから現象そのものに注目し、その直観に没頭して、自然観照においてよりも一層美的に純化され高揚された静観に達する。
>
> （竹内，1979，p.189）

この「現象描写に対する静観」は，自然を対象とした「現象の静観」が「本質の静観（諦観)」に深化したことと同様に，「芸術的再現が現象の直観的描写から本質の象徴的啓示へふかまりゆくのに応じて、描写された現象の静観から本質の諦観へ深化発展する」(竹内, 1979, p.191)。ただし，この芸術作品に対する「本質象徴に対する諦観」は，自然を対象にした「本質の静観（諦観)」に比べて優越性が認められることが次のように説明される。

> ＜自然を対象とする本質の静観では＞かような内包がこれをおおいかくす（verbergen）個々の雑多な偶然的一時的現象にさえぎられて、常人には容易にうかがいしれない。これに対して芸術ではすでに事物の本質や真存在がこれを現象のカオスからあばきだす（entbergen）芸術家の知的直観によって象徴的表現にもたらされ、それ自身明るみへでてくるので、芸術品の観照者はこの現実よりも真実な再現にみちびかれて、おのずから本質諦観に達し、存在の根源的形相をかいまみることができる。
>
> （竹内，1979，pp.191-192，括弧＜＞内は引用者）

以上のように，芸術作品を対象とする「美的静観」は，優越性の点においての差異はあるものの，基本的な構造としては自然を対象とする「美的静観」と同一であると解釈できる。この解釈を踏まえて，本研究では竹内の理論における「美的静観」を次のように捉えることとする。すなわち，「美的静観」とは，感覚現象そのものと感覚現象に内在しつつ個々の対象をこえる全体の本質を静観的な態度で直観する，美的体験の一局面であるとする。

この「美的静観」への対応概念を定めるためには，本研究における美的体験の知覚対象である数学的対象について，その本質と，この本質を直観する過程の深化に関連する，本質の及ぶ範囲である全体の捉え方を定める必要がある。そこで以下では，数学的対象の本質や全体について論じている先行研究を参照する。具体的には，直観との関係で本質について論じている杉山の論と，前項で参照した，美的性質の感得との関連が強い数学の創造的活動において本質について論じた中島の論を参照することにする。

杉山（1992）は，教育学者の篠原助市による直観についての説明として，「『見る』といったときに、感覚でとらえるだけでなく、その個、具体物の中に全体を見たり、関係を見たり、法則を見たりすること、それを見通すこと、それが直観であると言っている」（杉山，1992，p.38）と述べた上で，「内在する本質や関係，法則を見通す力，それが直観力である。」（杉山，1992，p.38）と説明している。そして，教育学者の東岸克好による直観についての説明として，直接見ること及び見ることによって生ずる直観像と表象である「感覚的直観」と，感覚では見られない，具体の中の抽象や法則などを見る直観である「超感覚的直観」に言及した上で，これらが連続したものではなく，「その飛躍があるところに論理が介在する場がある」（杉山，1992，p.39）と説明している。

この杉山による説明は，次の２点で本研究にとって示唆に富んでいる。１点目は，全体や関係，法則，本質が直観されるものとして挙げられており，全体及び本質と直観を関連づけている点である。２点目は，「感覚的直観」と「超感覚的直観」の関係は，前者が感覚現象に対する直観であり，後者がその背後にある法則などに対する直観であるという点で，竹内による「現象の静観」と「本質の静観（諦観）」の関係，または「現象描写に対する静観」

と「本質象徴に対する諦観」の関係と類似している点である。しかしながら，杉山（1992）は直観の概念について先行研究をもとにまとめることを意図しており，数学的対象に関する本質や全体に関する具体的な議論は限られている[30]。そこで以下では，直観と本質の関係ついてより詳細な議論を展開している別の論考（杉山，1986）を参照する。

杉山（1986）は，数学を学問としての数学たらしめた公理的方法について説明する中で，公理系を仮設として捉える現代数学の考え方に基づき，新しい数学的世界の理論の骨組みである構造を決定するものとして，公理的方法を位置づけている。そしてこの構造を見出す過程について「いくつかの事象に共通しているものが直観的に認められると，それらに共通な性質を探り，これを明らかにしていくことにより構造を見出すことができる」（杉山，1986，p.80）と説明した上で，「似ているものを見抜くのは直観である」（杉山，1986，p.80）と述べ，公理的方法に直観を位置づけている。この構造を見出す過程は，杉山が定めた公理的方法の考えの一つである「根拠を探る」考えに帰着できるものとされており，この「根拠を探る」考えは数学における形式的な証明のもつ「内へ探りを入れて構成要素を分析」（杉山，1986，p.127）するという考え方を例示する際に，以下のように具体化されている。

杉山（1986）は，「根拠や条件を求めるもの」（杉山，1986，p.138）として証明を考える立場[31]を取ることで，この意味での証明によって「本質が明らかになり，それをもとに新しい知識，新しい問題が見出されたり，統合の視点が得られるという創造的な面が出てくる」（杉山，1986，p.138）と述べる。そして，「ある数の一の位の数の２倍の数を，元の数の十の位以上の数から引くことを繰り返し，最後に得られた数が０か±７であれば，元の数は７の倍数である」という７の倍数の判定法についての証明（図２－３）とこの数学的対象の本質について，以下のように説明する。

---

[30] 平面図形の面積が，その周の長さによっては一意に決まらないことと，線対称では対応する点が対称軸から等距離であり対応する点を結ぶ線分が対称軸に垂直であることを例として挙げている。前者は論理を用いる前の直観が誤りになりうることの例として用いられており，この例における本質や全体などには言及されていない。後者は，この距離と位置関係に関する性質が明確でない状態の直観を論理で確かめられる前の直観であるとし，「折ってみて重なるか、定義に基づいて確かめてみるなどして、正しい直観を作り上げるようにしなければならない」（杉山，1992，p.41）と述べており，概念の形成や法則を見つけたりするときの直観と論理の関係の例として用いている。

[31] 上述の，内へ探りを入れて構成要素を分析するものとして証明を捉えることと同義である。

与えられた整数を$10A+B$とする。ただし，A と B は整数で，$A \geqq 0$，$9 \geqq B \geqq 0$ である。まず，$10A+B$ が 7 の倍数であるとすると，

$$10A+B=7m \quad (m\text{ は整数})$$

とおける。これより，$B=7m-10A$

これを $A-2B$ に代入して

$$\begin{aligned} A-2B &= A-2(7m-10A) \\ &= A-14m+20A \\ &= 21A-14m=7(3A-2m) \end{aligned}$$

これで，与えられた数が 7 の倍数であれば，上の手続きを施したのちの数も 7 の倍数であることがいえた。したがって，この手続きを続ければ，最後には，0，±7 になる。

逆に，$A-2B$ が 7 の倍数とすると，

$$A-2B=7n \quad (n\text{ は整数})$$

とおける。

$A=7n+2B$ を，$10A+B$ に代入すると

$$\begin{aligned} 10A+B &= 10(7n+2B)+B \\ &= 70n+21B=7(10n+3B) \qquad (Q.E.D) \end{aligned}$$

図２－３　7 の倍数の判定法の証明（杉山，1986，pp.138-139 をもとに作成）

この証明において，杉山（1986）は「7 の倍数が判定できることの本質」（杉山，1986，p.139）として「一の位を 2 倍して十の位以上の数から引くという操作が，実は，10 の 2 倍と 1 とで，7 の倍数 21 を作るための手続き」（杉山，1986，p.139）になっていることに着目する。そしてより一般的な表現[32]で「一と何十を加えた何十一が，その数の倍数になればよいわけである。つまりその数の倍数で，一の位が 1 になる数を考えれば，それに合わせて何倍して引くか決めればよい」（杉山，1986，p.139）として，この判定法が 7 の倍数を判定する根拠，そして他の数の判定法を考える際にも通用する原理を同定している。

この例において杉山 (1986) が同定している本質は，詳しく表現された形式的証明を読むことから得られたものであり，7 の倍数の判定法の根拠になっていること，及び，一の位が 1 になる倍数をもつような任意の整数の倍数の判定法に及ぶ原理であることが論理によって明確にされたものである。したがってこの本質を同定する過程を，杉山自身が本質を直観した過程だと見なせば，竹内（1979）が述べた「本質の静観（諦観）」または「本質象徴に

[32] このように，見出した根拠を原理，または仮設としての公理として，この原理による帰結を分析することを，杉山（1986）は「仮設をおいて考える」と称し，公理的方法の一つとして位置づけた。

対する諦観」に至る「美的静観」の過程，及び，杉山（1992）が述べた「感覚的直観」から「超感覚的直観」に至る過程になっていると解釈できる。換言すると，杉山（1986）が倍数の判定法の例で同定した本質は，竹内のいう本質，そして杉山（1992）のいう「超感覚的直観」で直観される抽象や法則と類似した過程で得られるものであり，その意味でこれら本質及び抽象や法則と同質と見なせるものである。

杉山（1986）は，この倍数の判定法の例に加えて，「教科書に見られる普通の証明問題」（杉山, 1986, p.140）をもとに同様な考察を行うことができる例として，平行四辺形 ABCD とこの四角形に関連づけて位置を定める 4 点 E，F，G，H について，四角形 EFGH が平行四辺形になる条件を定める過程を挙げている。そして平行四辺形を得る複数の条件を比較することをとおして，統合する条件として，4 点 E，F，G，H が 1 点に関して点対称な二組になる位置にこの 4 点を定めればいいことを示している。つまり，平行四辺形の点対称という性質を，この問題における本質として同定している。この本質についても，図示された平行四辺形と平行四辺形であることの証明から得られたものであり，新たな四角形 EFGH が平行四辺形であることの根拠になっていること，及び，この問題場面で考えられる平行四辺形一般に及ぶ原理であることが論理によって明確にされている。すなわち，先の倍数の判定法の例と同様に，竹内が述べた「本質の静観（諦観）」または「本質象徴に対する諦観」に至る「美的静観」の過程，及び，杉山（1992）が述べた「感覚的直観」から「超感覚的直観」に至る過程になっていると解釈できる。すなわち，この平行四辺形になる条件の例では，平行四辺形の点対称という性質が本質であり，竹内がいう本質，及び，杉山（1992）がいう「超感覚的直観」で直観される抽象や法則と同質とみなせるものである。

中島（1974）は，数学的な考え方という目標概念によって実現を意図した創造的活動を，乗法の意味の拡張場面を例にして具体化している。その際，乗法の本質的な性質として比例関係を抽出し，拡張後の乗法においてもこの性質が成り立つように乗法の意味を定める過程を提示している。そしてこの本質的な性質を，「新しい数が乗法に関して保持すべき『構造』といわれるもの」（中島，1974，p.128）と説明している。

一方で，中島（1982）は，創造的活動を乗法の意味の拡張場面によって例示する上で，「『構造』の認識と保存」[33]を創造的な活動における重要な活動として位置づけている。そして，中島（1974）と同様にこの「構造」が拡張の際に抽象されて保持される性質であることを説明した上で，「形式」[34]が「構造」として保持されることを，「『形式不易の原理』ということがある」（中島，1982，p.139）と説明している。加えて，中島（1982）はこの「構造」

---

[33] 前項参照。
[34] 本章註 28 参照。

について,「『仮想的な対象』の想定やその実在化のための手法と密接な関わりをもつものであり，…（中略）…『数学的なアイデア』に相応するとみなすことができる場合もある」（中島，1982，p.92）と説明している。すなわち，中島が「構造」という語で表現している「本質的な性質」は，数学的対象が拡張される際に抽象されて保持される「構造」であり，拡張前の数学的対象を含むより広範囲の数学的対象に共通するものであると言える。この共通性を踏まえると，中島がいう「本質的な性質」または「構造」は，杉山（1986）のいう本質または構造と同質であり，それゆえに竹内のいう本質や杉山（1992）のいう「超感覚的直観」で直観される抽象や法則とも同質であると見なせる[35]。

以上の竹内による「美的静観」についての説明と，杉山（1986；1992）及び中島（1974；1982）による数学教育学における本質に関する議論との対照に基づき，竹内による「美的静観」に対する本研究における対応概念を次のように定める。すなわち，ある数学的対象についての性質の原理となっており，関連する複数の数学的対象の間に共通している性質を「本質」とし，この「本質」の及ぶ範囲を「全体」とする。その上で，問題の解決などの実用的な目的ではなく,「本質」や「全体」を得ること自体を目的とし，数学的対象についての図や証明などといった表現を参照したり論理的に考えたりすることでこの「本質」と「全体」を直観することを,「美的静観」の対応概念として捉える。以降はこれを簡略化し,「『本質』と『全体』の直観」と表現する。

---

35 本質という語を異なるものの間に共通する性質として用いる用法は，辞書的な意味に通じるものである。例えば広辞苑では本質の説明の一つに,「変化する現象的存在に対し、その背後または内奥に潜む恒常的なもの。」（新村，2018，p.2726）とある。一方，構造という語については「①いくつかの材料を組み合わせてこしらえられたもの。またそのしくみ。くみたて。（中略）②全体を構成する諸要素の、対立や矛盾、また依存などの相互関係。」（新村，2018，p.992）とあり，共通性に通ずる含意は見られない。杉山（1986；1992）と中島（1974；1982）がともに構造という語をもって共通性をもつ性質を表現したことの背後には，集合論を基礎とした現代数学に見られる公理系に対する呼称としての構造があると見られる。現代数学で代表的な数学者集団であるブルバキは，数学の構造として代数的構造，順序構造，位相構造の三つを整理した。この意味での構造は数学の体系を定めるものであり，既知の体系の構造は未知の体系の考察に利用される。実際，杉山（1986）は現代的な公理的方法の特徴を同定する際，現代数学における構造への着目を参照している。また，中島（1982）と杉山（1986）は，それぞれブルーナー（J. S. Bruner）による「教科の構造」に関する理論についても言及している。杉山（1986）は，ブルーナーが述べた，構造への着目が新しい知識の獲得に役立つという主張に重きをおいており，その立場ゆえに，上述のブルバキによる数学の構造のような学問の構造に固執せずに,「根拠」や「原理」という語で表現した数の構成や対称性などについても本質または構造として捉えていると思われる。中島は，ブルーナーによる「教科の構造」と自身の述べる「構造」との異同については明確に言及していないものの，提示する例における「構造」または「本質的な性質」は，比例関係や平均などであり，やはり学問の構造である数学の構造に固執していないことが窺える。

以上の「本質」は，中島（1974；1982）が例示したような数学的対象を拡張する場面では，拡張をする主体によって選択される場合がある。その一方で，杉山（1986）による倍数の判定法の例で本質とされた「一と何十を加えた何十一が，その数の倍数になればよい」という数の構成に関する法則は，他の倍数の判定法への転用を意図して選択されたものではなく，証明を読む中で同定された根拠であった。このような本質を得るまでの過程の質的な差異を踏まえ，本研究における「本質」を直観する過程についても，「本質」が同定される場合と選択される場合の双方を含めて考えることとする。

一方，数学的対象の「全体」を直観することは，その数学的対象の「本質」が及ぶ範囲を同定することなので，杉山（1986）による倍数の判定法の例において 7 以外の倍数の判定を考察した「仮設をおいて考える」という公理的方法以外にも，元の数学的対象と，それとは異なる数学的対象との関係を考えることが有効だと考えられる。このような異なる数学的対象との関係を考えるにあたっては，ブラウン（S. I. Brown）とワルター（M. I. Walter）が提唱した What-If-Not 方略が示唆に富む。

ブラウンは，数学的対象の理解を内的理解と外的理解に分け，次のように定義した。

> X を内的に理解するとは，X 自身の内部における関連がわかることである。X を外的に理解するとは，X を一つの全体と考えて，それが異なるものとどう関係しているかがわかることである。
>
> （Brown, 1974, p.27）

そして，ブラウンとワルターは，この外的理解を得るための方略として What-If-Not 方略を提案した（Brown & Walter, 2005）。この方略を端的に説明すると，数学的対象の属性をリスト化し，その属性に対し「What if not?（そうでなければどうなるか）」と問うことで新たな問題を設定し，その問題を解決することで「そうでない場合」との関係として元の数学的対象についての外的理解を得るものである。

例えば，ブラウンとワルターが What-If-Not 方略による問題設定と問題解決との関係[36]の説明で用いた，ピタゴラスの定理を例に説明すると次のようになる。ピタゴラスの定理の証明において直角三角形の辺上に構成した正方形（図２－４）に対して「What if not?」と問

[36] ブラウンとワルターは，「与えられた二つの正三角形に対して，面積がこれら二つの正三角形の面積の和と等しいような三つ目の正三角形を見つけよ。」（Brown & Walter, 2005，p.111）という問題の解決から例示を始めている。そして，問題解決の結果として三つの正三角形の面積の間にピタゴラスの定理の関係が成立する理由を理解するために，ピタゴラスの定理に関する図形（図２－４）に対して What-If-Not 方略を適用している。

うと，多様な図形を得ることができる（図２－５）。

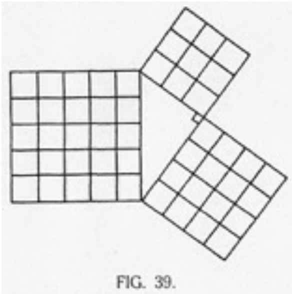


図２－４　ピタゴラスの定理と正方形（Brown & Walter, 2005，p.117）

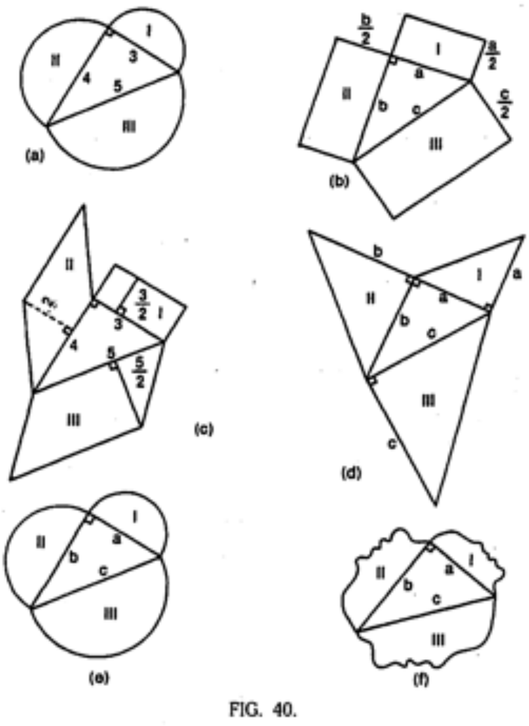


図２－５　What-If-Not 方略で得られた多様な図形（Brown & Walter, 2005，p.118）

この図２－５で挙げた多様な図形において，直角三角形の辺上に構成した三つの図形 I と II 及び III の関係を調べると，(a)から(e)ではそれらの面積の関係が I＋II＝III，つまり図２－４の正方形の場合と同様になっている。これらのうち，(c)を除く四つの図形と，元の正方形の場合とを比較すると，これらは全て直角三角形の辺上に構成した三つの図形 I と II 及び III が互いに相似になっている。この事実を踏まえ，ブラウンとワルターは次のような推測を述べる。

もし，三つの相似な図形が直角三角形の三つの辺上に構成されるのであれば，その面積は加法的である。すなわち，直角を作る二つの辺上に構成された図形の面積の和は，斜辺上に構成された図形の面積と等しい。

（Brown & Walter, 2005，p.119）

そして，元の正方形で考えていたピタゴラスの定理について，直角三角形の辺上に相似な図形を構成した図形の特殊として，外的理解を得ている。すなわち，直角三角形の三つの辺上に正方形が構成された図形を X とし，正方形以外を構成した X とは異なる図形 X’を得た上で面積が加法的かどうかを調べることで，加法的であることを確認している。そして，X と X’の比較によってこれらを内包する加法的な図形の集合として「直角三角形の三つの辺上に相似な図形が構成された図形」という集合を同定している。

なお，ブラウンとワルターは，図２－５における(c)の図形，すなわち直角三角形の三つの辺上に構成された図形が互いに相似ではないながら加法的である場合については，詳しく述べていない。このピタゴラスの定理の例でいう「直角三角形の辺上の図形が相似であること」が加法的であるための十分条件ではあるが必要条件ではないことを示すための例として挙げたのではないかと思われる。この(c)の図形のように， What-If-Not 方略で得られる「そうでないもの」としては，X が属する集合 A を拡張した集合 A'の要素 X’の他に，A'に属さないながら X 及び X’と同じ性質をもつ Y，そして A'には属さず X 及び X’と同じ性質をもたない Z がある。このピタゴラスの定理の例では，正方形が構成された図形 X と，相似な図形が構成された図形の集合の要素である X’（図２－５の(c)以外の図形）の他に，(c)のように加法的ではあるものの相似な図形が構成されていない図形 Y，加法的ではなく相似な図形が構成されていない Z が考えられる。ブラウンとワルターは，直角三角形の三つの辺上に構成される図形が相似であるという条件の抽出にあたってこの Z に当たる例を用いていないものの，A'を決める条件，すなわち本研究でいう「本質」を選択する上で Z に当たる例を参照することは有益であると考えられる。

以上のように，本研究では「本質」の直観と「全体」の直観を区別して捉えている。この捉え方に対し，「本質」は複数の数学的対象の間に共通する数学的概念と定めたことから，この複数の数学的対象を含む集合の条件となる一方で，「全体」はこの集合であるので，これらは同時に同定されるものと解釈される懸念がある。実際に，例えば $n \in \mathbb{N}$ という n についての条件は，n が属する集合が $\mathbb{N}$ であることを同時に示している。上記のピタゴラスの定理の例でも，直角三角形の三つの辺上に構成される図形が互いに相似であることは，加法的な図形の集合の条件を表していると同時に，この条件を満たす図形の集合を表しているとも解釈できる。しかしながら，ピタゴラスの定理の例でいうところの加法的であることの「本

質」として「直角三角形の三つの辺上に構成される図形が互いに相似であること」を捉えたとしても，このことによって「全体」として図２－５における(f)のような図形を含む集合を捉えているかどうかは定かではない。むしろ，多角形や円といった慣れ親しんだ図形に限定して「全体」を捉える可能性が十分に考えられる。つまり，ある数学的概念を「本質」として条件pで直観したとしても，この「本質」を満たす範囲である「全体」を，$S=\{x|x$ は p を満たす$\}$ ではなく，他の条件 q との交わりによって定まる集合 $T=\{x|x$ は $p \wedge q$ を満たす$\}$ として直観する可能性がある。このような曖昧さを考慮し，本研究では「本質」の直観と「全体」の直観を区別している。

第４項　「美的交感」としての数学的対象の「発展性」の実感

本項では，竹内（1979）が「美的体験に共通する基本構造」と位置づけた三つの局面のうち，最後の一つである「美的交感」についての竹内による説明を概観し，本研究における対応概念を定める。

竹内のいう「美的交感」は，「人間はたがいに他者とともに生きることを欲し、また他者とともに生きているほかない。」（竹内，1979，p.124）ということを前提に，「人間同士の心の交わり」（竹内，1979，p.124）を基礎とするものとして説明され，人間のほか，「心をもって生きているかのような」（竹内，1979，p.128）すべての自然物や，芸術作品と一体化することとされる。先述の「美的静観」が「対象を自我からひきはなし、おしへだてて、客観的にながめる」（竹内，1979，p.106）のに対し，「自我の全存在をあげて対象へと没入し、これに自己自身を投射する」（竹内，1979，p.107）ものとして，美的体験に位置づけられる。「美的交感」の過程は，人間を含む自然を対象にする場合の「個別的交感」と「普遍的交感（渾一感）」の二つと，芸術作品を対象とする場合の「感情表出に対する交感」と「人格の発露に対する交換」の二つの計四つで，以下のように説明される。

実在の人間を含む自然を対象にする「個別的交感」では，知覚者は，他者の身体的表出現象，または，自然の明度や飽和度などに基づいて知覚者が実感する「知覚対象の感情」[37]と，その「知覚対象の感情」によって喚起された自己の「感情反応」を交感する。そして，「美

[37] 竹内は，この自然のもつ感情について，知覚対象を「有心化（Beselung）ないし有生化（Belebung）」（竹内，1979，p.128）することによってその対象に属するものとして感受されると説明する。また，この有心化や有生化を擬人化と区別しており，知覚対象の明度や飽和度から，人間の感情を連想することなしに，直接的に感情が感受されると説明している。そして「色の純視覚的印象が温度感の印象を介して主として純感情的状態をあらわすのに対して、線や形の空間的視覚印象は運動印象とむすびついてむしろ意志的活動を象徴する。」（竹内，1979，p.120）とした上で，このどちらも「強力な感情印象効果を有する」（竹内，1979，p.129）とする。

的静観が現象直観から本質直観にふかめられるのに応じて、美的交感は個別的感情の共感から次第により普遍的な共感（渾一感）へ発展する」（竹内，1979，p.131）。 この「普遍的交感（渾一感）」では，実在の人間が知覚対象である場合には，「個別的交感」で実感された感情をその知覚対象の「人格の本質性に根ざしたものとして感得」（竹内, 1979, p.132）し，この感情は「一種の人間愛として一層ふかい内容にみちたものとなる」（竹内, 1979, p.132）。また，人間を除く自然が知覚対象である場合には，「個別的交感」で実感された感情はその個体としての生の本質に根ざしたものとして共感され，「生ける自然そのものとの一体化に達する」（竹内，1979，p.133）。そしてさらに，「眼前の対象世界と内面的に交融するにとどまらず、これを通じて有機的存在の生死を超越する大自然そのものに帰依し、これに小我を没入させて、『天人合一』の境地にいたる」（竹内，1979，p.133）。

一方の，芸術作品を対象とする「感情表出に対する交感」では，「芸術創作」をとおして感情内容が「適応した形態を与えようとする配慮と努力をもって、直観的表現にもたらされる」（竹内，1979，p.195）ので，現実の諸対象に対する「個別的交感」よりも内包に満ちたものになる。また，「人格の発露に対する交感」では，「作品のあれこれの表出内容を感得するとともに、その背後にある作者の個人的性格をその総体的統一において感知し、それに感応する」（竹内，1979，p.199）。このように説明した上で，竹内は，「すべての芸術的表出はその主体的基盤をなす人格から発し、おおかれすくなかれこれを反映するからには、それに対する芸術的交感は個別的内容からこれを統括する内奥の一なるものへおよばされなければならぬ」（竹内，1979，p.199）とし，実在する人間に対する「美的交感」との対比によって，芸術作品に対する「美的交感」を次のようにまとめる。

> すでに現実の人間に対する美的観照においてもわれわれは対象の個別的感情を感受し、これに反応するにとどまらず、これを相手の人格にねざすものとして体験し、かくして一層ふかめられた交感に達するのであるが、芸術観照では作品に表現された人物に対して同様の人格的交感をおこなうだけでなく、作品の全内容を作者自身の人格に関係づけてこの基盤から了解し体得するにいたり、作者そのひとと心をかよいあわせて共に生きるのである。
>
> （竹内，1979，p.199）

以上の竹内による「美的交感」の説明では，「普遍的交感（渾一感）」及び「人格の発露に対する交感」において，自然美を対象とする場合と芸術美を対象とする場合とでその基本的な構造が明らかに異なっている。具体的には，後者では前者には存在しない「作者」と「心をかよいあわせ」ることが強調されている。また，自然美を対象とした「個別的交感」にお

いて，知覚対象が人間であるか自然であるかについての区別が明示されている。このような区別は，本節でここまで概観してきた「美的静観」や，「形成活動」を根底において規定する「形式」ではみられなかったものであり，「美的交感」の特徴であると言える。しかしながら，数学的対象が人間である場合や，人間と見なされるような解釈は，管見の限りない。したがって，本研究において知覚対象を数学的対象に限定した場合の「美的交感」への対応概念を定める上で，知覚対象が人間である場合の「美的交感」は，数学的対象を知覚対象とする場合の「美的交感」では起こり得ないものとして論を進める。すなわち，以下では，数学的対象に特定の「作者」が存在しない場合の，人間を除く自然を知覚対象とする「美的交感」と，数学的対象に特定の「作者」が存在する場合の，人間とは見なされない芸術作品を知覚対象とする「美的交感」とを区別し，この二つについて知覚対象が数学的対象である場合を考察する。

まずは，知覚対象である数学的対象に「作者」が存在しない場合について考察する。この「作者」が存在しないとは，「作者」が不明であることではなく，知覚対象が「まったく美的効果への意図をもって加工されない」（竹内，1979，p.33）ものであることを意味している。したがって，定理や命題，証明などといった数学的対象には美的性質が備わっているという立場を取るのであれば，「作者」が不明な数学的対象であったとしても，それが既に定式化されている命題であったり，完成された証明であったりする場合には「美的効果への意図」が含まれていると考える必要がある。すなわち，例え知覚者にとって初見の数学的対象であっても，その数学的対象を既に知っている人から解説されるような場合や，内容が整理された文献を読むような場合は，「作者」が存在する数学的対象に対する知覚として捉えなければならない。

数学的対象の知覚を学習の場面で考えた場合，「作者」が存在しない数学的対象の美的性質の感得になりうる学習の一つとして，本節第２項で参照した中島（1974；1982）による「算数・数学にふさわしい創造的な活動」または「創造的活動」が挙げられる。中島は「創造的」という語の意味について次のように説明する。

> 算数・数学の指導でいう「創造的」とはどんなことか。それは，たしかに，何かしら「新しいものをつくり出すこと」であるが，「新しいもの」といっても，小学校や中学校の段階では，世間の人がまったく知らない新しい数学的な内容をはじめて創り出すことは必ずしも期待できない。実際にも，指導内容としてカリキュラムの上で取り上げられていることは，学問的にはすでによく知られた初歩的なことがらにすぎないわけである。
>
> それでは，「創造的な指導」という場合に目指していることはどんなことか。それは，

次のようなことであるということができよう。すなわち，

「算数や数学で，子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に，教師が既成のものを<u>一方的に与える</u>のではなく，子どもが自分で必要を感じ，自らの課題として新しいことを考え出すように,教師が適切な発問や助言を通して仕向け,結果において,どの子どもも，いかにも自分で考え出したかのような<u>感激をもつ</u>ことができるようにする。」

このような学習指導であると，一応考えておくことにしよう。

（中島，1982，p.70，下線は引用者）

この中島による「創造的」についての説明は，中島自身が「一応」と断っているように，厳密な概念規定ではない。実際，下線部の「一方的に与える」や「感激をもつ」などのように，基準としては曖昧な語も用いられている。しかしながら，先に述べた「その数学的対象を既に知っている人から解説されるような場合や,内容が整理された文献を読むような場合」とは明確に異なっており，学習者が教師の介入を受けて「新しいことを考え出す」ことが意図されている。したがって，中島による「算数・数学にふさわしい創造的な活動」または「創造的活動」は，その学習者にとって学習以前には創出されていない数学的対象，つまり,「作者」が存在しない数学的対象についての学習であるとみなせる。

一方で，中島による「算数・数学にふさわしい創造的な活動」または「創造的活動」には，表２―１で示したとおり，その要素として竹内のいう「美的交感」の過程に含まれる「個別的交感」や「普遍的交感（渾一感）」は，少なくとも明示的には含まれていない。それどころか,「個別的交感」のように数学的対象から感情（意志を含む）を読み取ることについて詳察した数学教育研究は，管見の限りない。しかしながら,「普遍的交感（渾一感）」のように，数学的対象の超越的な大きさに自身を位置づけることによって生じる感情については，ワルターとブラウン（Walter & Brown, 1969）が本節第３項で引用した What-If-Not 方略について説明する中で，次のように述べている。

われわれは，ここで座して論文を書きながら，新しいジオボードのアイディアと属性の相互作用が，果てのない深淵から無限に長い論文によって自分たちを見つけるようなものであるということに，恐れを抱き始めた。

（Walter & Brown, 1969, p.39）

このワルターとブラウンが得た感情は,これ自体を何らかの主張として論じられたものではなく，感想のように記述されたものである。しかしながら，ワルターとブラウンがこのよ

うな感情を得たことは，What-If-Not 方略の過程を踏まえると必然性が高いように思われる。

What-If-Not 方略は，数学的対象の属性をリスト化し，その属性に対し「What if not?（そうでなければどうなるか）」と問うことで新たな問題を設定し，その問題を解決することで「そうでない場合」との関係として元の数学的対象についての外的理解を得るものであった。この過程では，数学的対象の属性のうち「定数」とされていたものを「変数」と見直すことになるので，その「変数」が代表する集合の分だけ，図２－４と図２－５で示したような加法的な図形のように，ある規則が成り立つ数学的対象に広がりがもたらされる。したがって，ワルターとブラウンがWhat-If-Not方略を用いる過程で得たこのような感情は，What-If-Not 方略によって広がった数学的対象の広大さや発展性に由来する，実感される必然性が高いものであると考えられる。

以上を踏まえて，本研究では，「作者」が存在しない数学的対象に対してその広大さや発展性を実感することを，竹内のいう人間を除く自然を対象とした「美的交感」に対応する過程として捉えることとする。

続いて，知覚対象である数学的対象に特定の「作者」が存在する場合について考察する[38]。数学では，定理のように真であることが証明された命題の中には，命題を定式化した数学者や証明した数学者が誰であるかについて，共通認識が得られているものがある。例えば，「３以上の自然数 n について，$x^n + y^n = z^n$ となる自然数 (x, y, z) の組は存在しない」という命題は数学者フェルマー（P. de Fermat）によって定式化されたことが知られており，「フェルマーの最終定理」または「フェルマーの大定理」などと呼ばれている。この命題は，数学者ワイルズ（A. J. Wiles）によって証明された。また，数学には，ユークリッドの『原論』のように，「作者」の名前が付されていながらその「作者」についての確かな情報が得られていないものもある[39]。

このような「作者」が存在する数学的対象に対する「美的交感」は，竹内による「美的交感」の説明に基づくと，次のようになされる。まず，「感情表出に対する交感」については，先の数学的対象に特定の「作者」が存在しない場合と同様に，数学的対象そのものから感情を読み取ることについては考え難い。一方の「人格の発露に対する交感」については，「作品の全内容を作者自身の人格に関係づけてこの基盤から了解し体得する」（竹内，1979，p.199）ことであるので，数学的対象の「作者」に着目し，この「作者」による他の「作品」

[38] ここでは命題の定式化や証明に成功した者，体系を編集した者を「作者」と呼び，そのような数学的対象が「発見」されたものか「発明」されたものかといったようなことは議論しない。第１章の註３も参照。

[39] ここでは編集者（作者）がいることが重要なのであり，ユークリッドが実在したか否か，実際に『原論』を編集したか否かについては議論しない。

のほか,「作者」が著名な場合はその伝記などを参照することをとおして，それらを作者自身の人格に関係づけることができれば，実現可能であると考えられる。

しかしながら,「作者」が存在する場合の数学的対象についての「美的交感」は，次の二つの理由から，本研究の対象としては不適当である。第1に，先に挙げた特定の「作者」による他の「作品」や伝記などを参照する方法では,「作者」が特定され,「作者」に関する情報が入手可能であることが求められる[40]。この制約は，学校数学で扱う数学，特に小中学校で扱う初等的な数学的対象を想定すると，これらの方法の適用場面を著しく限定するものであることが想定できる。第1章で整理した数学教育の目標論を踏まえると，数学者が数学的対象をわかったり，発展的に捉えて考えられるようになったりするためには，学校数学で広く扱いうる数学的対象の美的性質を第1に考察する必要がある。

第2に，第1章や本章第2節までで参照してきた数学者による数学的対象の美的性質に関する言及では，数学的対象の「作者」に言及していなかった。「ユークリッドによる証明」として「作者」に触れたハーディにおいても，ユークリッド自身については全く言及していない。竹内のいう芸術作品を知覚対象とする「美的交感」では「作者」の存在が重要な位置にあったことを踏まえると，竹内のいう芸術作品を対象とする「美的観照」は，知覚対象を数学的対象にして何らかの実現を図ったとしても，それは数学者たちが感得している数学的対象の美的性質とは質的に異なっていることが考えられる。

本研究で学習者による感得を目指している数学的対象の美的性質は，数学者たちが価値づけており，その価値づけを背景に数学教育の目標に位置づいてきた美的性質である。したがって，本研究では「作者」の存在する数学的対象の美的性質については考察の対象外とする。

以上の考察から，竹内による「美的交感」に対する本研究における対応概念を,「作者」が存在しない数学的対象に限定し，その数学的対象の広大さや発展性を実感する過程として定め，数学的対象の「発展性」の実感と呼ぶことにする。ただしこの過程は，考察の対象となる数学的対象に「作者」がいないことから，上述のように，学習者が「新しいことを考え出す」過程であることが求められる。

なお，この捉え方によって，本研究で対象とする数学的対象の美的性質の感得過程は，竹

[40] 歴史的な文献については，先述のユークリッドの『原論』のように「作者」の情報が不確かであったり，テキストの内容に加筆が確認されていたりするものもある。それに対して，数学者の集団を「作者」と仮定することを認めれば，この仮定が認められる範囲において,「作者」の「人格」を解釈することが可能であるとも考えられる。例えば，ブルバキ（N. Bourbaki）は数学者集団がつくりあげた架空の数学者であり，この著者名による著作を有している。集合論を基礎として公理的に構成されたこの著作では厳密性が重視されており，そこからはブルバキ以前の数学の文献とは異なる様相を読み取ることができる。

内の理論における，自然美を感得する「自然美的観照」に対応するものに限定される。ただし，先述のように，先に見てきた「形式」や,「本質」や「全体」及びその直観については,本研究では知覚対象が自然であるか芸術作品であるかによる区別はしていない。

第５項　数学的対象の美的性質を捉える観点間の関係

第４項までで考察してきたことを整理すると，本研究では数学的対象の「美しさ」を，多様性や主観性を認める射程の広い概念である美的性質を用いて，数学的対象の美的性質として捉えることとした。そして，竹内による「多様における統一」を原理とする理論（竹内,1979）を理論的基盤として，竹内による「形式」,「美的静観」,「美的交感」への対応概念として，それぞれ，数学的対象の構成要素間の「同値関係」または「擬同値関係」，数学的対象の「本質」と「全体」の直観，数学的対象の「発展性」の実感を定めた。この「形式」としての構成要素間の関係は，数学的対象そのものについての観点である。また，「本質」と「全体」及びその直観は，知覚者の認知的な営みに関する観点である。そして，「発展性」は，知覚者の感覚的な営みに関する観点である。この感覚的な営みは，前章で確認した Silver & Metzger（1989）や Sinclair（2009）などで言及されたように，認知領域や情意領域のみでは説明できないものである。本研究では，竹内の理論を基盤とすることで，これら数学的対象そのもの，知覚者の認知的な営み，知覚者の感覚的な営みという三つの軸による枠組みによって，数学的対象の美的性質とその感得を捉えることとする。このように捉える数学的対象の美的性質は，前章で確認した数学教育の目的論・目標論に応えるものであることが期待されていることから，学習者の動機づけなどの情意領域とも関連するものである。

この三つの軸及び「形式」,「本質」,「全体」,「発展性」という４観点は，竹内による「形式」を付与する営みである「形成活動」と「美的静観」及び「美的交感」との関係を踏まえると，次のように互いに関連している。

まず,「発展性」については，数学的対象の「本質」と「全体」が知覚者に直観されたのち，その直観以前の数学的対象との比較をとおして実感される。これは，竹内による「美的交感」の「個別的交感」から「普遍的交感（渾一感）」に至る過程が,「美的静観」の「現象の静観」から「本質の静観（諦観）」への深まりに応ずるものとされていることに基づく。一方，竹内による「形成活動」は，知覚対象について「その全体を一目瞭然とみわたし、みとおすことができる」（竹内，1979，p.109）ようにするものであるので,「本質」や「全体」の直観や「発展性」の実感に先立つこともあれば，これらの過程で行われることもある。実際，数学的対象の構成要素間の「同値関係」や「擬同値関係」が同定されることによって，その数学的対象の構成要素内で「同じ」と見なせるものが明確になり，本質的ではない構成要素やそれらの関係等が捨象できるようになることで,「本質」として適切な性質が直観さ

れやすくなると言える。

ただし，中島（1974）が，乗数が分数で表されている場合を新たに考察する場面で保存した「本質」が比例であったことや，ブラウンとワルター（Brown & Walter, 2005）がピタゴラスの定理に What-If-Not 方略を用いたときに同定された「本質」が相似であったように，数学的対象の構成要素間の「同値関係」は「本質」として扱われることがある。その際，「形式」としての「同値関係」が同定される過程と，「本質」として「同値関係」が直観される場合には，重なりがあると考えられる。この重なりについては，次章で詳しく検討する。

以上で論じた互いに関連をもつ３軸及び４観点を，本研究における数学的対象の美的性質とその感得を捉える理論的枠組みとし，第３章以降はこの枠組みを前提とした理論的考察による理論的仮説の導出と，学習者を対象とした実践的または実証的考察に基づく理論的仮説の経験的補填を展開する。

第２章のまとめ

本章では，本研究における数学的対象の「美しさ」の捉え方について，美学者・竹内敏雄による理論を本研究の理論的基盤とすることの妥当性と価値を主張した上で，本研究における，竹内による理論に基づく数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを構築することを目的としていた。

この目的を達成するために，第１節ではまず，美学と数学についての文献を参照し，竹内の理論の原理である「多様における統一」という観点の位置を確認した。その結果，この「多様における統一」という知覚の主体と知覚対象の両面に基づいて「美しさ」を捉える観点が，「美しさ」を多様に捉えてきた美学の歴史を鑑みても有力な観点であり，現代の美学者にも用いられており，かつ，数学とも関連する観点であることが明らかになった。その上で，竹内による「多様における統一」を原理とする理論を概観して，その基本的な概念を整理した。

続く第２節では，竹内の理論を本研究の理論的基盤とすることの妥当性と価値を主張するために，竹内による理論を視点として数学者による数学的対象の「美しさ」についての言及や関連する数学教育研究を捉えなおした。その結果，竹内による体系的な理論を視点とすることで，断片的に語られてきた数学者たちによる数学的対象の「美しさ」についての言及を補い，関連づけて捉えることができること，すなわち，竹内による理論を本研究の理論的基盤とすることには，数学者たちが言及してきた数学的対象の「美しさ」を有機的・包括的に説明可能であるという妥当性と価値があることが確認できた。

第３節では，第２節までの議論を受け，竹内による理論を基盤として本研究における数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを構築するために，竹内の理論と数学教育学における知見を照らし合わせ，竹内の理論における基本的な概念への本研究における対応概念を検討した。まず，本研究で対象とする数学的対象の「美しさ」を，竹内の理論の前提になっている，「美しさ」の多様性や主観性を認める概念である「美的なもの（the aesthetic）」及びその構成要素である「美的性質」を用いて捉えることを確認した。すなわち，本研究で対象とする「美しさ」を，数学的対象の美的性質として捉えることとした。

続いて，本研究における，「数学的対象の美的性質の感得」を定めるために，竹内による「美的観照」の概念を数学教育学の知見と照らし合わせた。その結果，本研究における数学的対象の美的性質をその感得とあわせて，次の３軸及び４観点をもつ枠組みで捉えることを述べた。すなわち，第１の軸である数学的対象そのものについての観点としての，数学的対象の構成要素間の「同値関係」及び「擬同値関係」という「形式」，第２の軸である知覚者の認知的な営みとその結果についての２観点としての，関連する複数の数学的対象間に共通する性質として見出されたり選択されたりする「本質」と，「本質」が成立する範囲と

して捉えられる「全体」，第３の軸である知覚者の感覚的な営みとその結果についての観点としての，数学的対象の「全体」が広がることに基づいて実感される，広がりや深まりといった何らかの意味での広大さを意味する「発展性」である。

この３軸及び４観点については，竹内による「形式」を付与する営みである「形成活動」と「美的静観」及び「美的交感」との関係を踏まえ，次のように互いに関連しているものとして捉えることとした。まず,「発展性」については，数学的対象の「本質」と「全体」が知覚者に直観されたのち，その直観以前の数学的対象との比較を通して実感される。他方,「形式」は,「本質」や「全体」の直観や「発展性」の実感に先立つこともあれば，これらの過程で行われることもある。また，数学教育学における知見を参照した結果，知覚対象が数学的対象である場合には,「形式」である「同値関係」が「本質」としても扱われることがあることが確認できた。この場合,「形式」としての「同値関係」が同定される過程と,「本質」として「同値関係」が直観される場合には，重なりがあると考えられる。

以上の，数学的対象の「形式」,「本質」,「全体」,「発展性」という４観点と，これらがそれぞれ位置づく３軸，及び，観点間の関係が，本研究で構築した数学的対象の美的性質とその感得を捉える理論的枠組みである。

第３章

数学的対象の美的性質の感得過程のモデル

第２章では，竹内（1979）の「多様における統一」を原理とする理論を基盤として構築した，本研究における数学的対象の美的性質とその感得を捉える理論的枠組みを，次の３軸及び４観点によって示した。すなわち，第１の軸である数学的対象そのものについての観点としての，数学的対象の構成要素間の「同値関係」及び「擬同値関係」という「形式」，第２の軸である知覚者の認知的な営みとその結果についての２観点としての，関連する複数の数学的対象間に共通する性質として見出されたり選択されたりする「本質」と，「本質」が成立する範囲として捉えられる「全体」，第３の軸である知覚者の感覚的な営みとその結果についての観点としての，数学的対象の「全体」が広がることに基づいて実感される，広がりや深まりといった何らかの意味での広大さを意味する「発展性」である。

本章では，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法の検討に先立って，第２章で構築した本研究の理論的枠組みと，先行研究で記述された数学者等による数学的対象の美的性質の感得に関する問題解決過程に基づいて，数学的対象の美的性質の感得過程についてのモデルを抽出した上で，このモデルを学習者による感得過程として転用することで本研究の理論的仮説として位置づける。この仮説として位置づけたモデルは，次章以降で同じく理論的仮説として定める，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法の検討の際の拠り所として用いられるとともに，実証的・実践的な研究をとおして経験的に補填されることを意図するものである。はじめに，先行研究で記述された数学的対象の美的性質の感得に関する過程として，メイソンとバートン，ステイシー（Mason, Burton, & Stacey, 2010）による例と，ポリア（Polya, 1988/2004）による例，シンクレア（Sinclair, 2006）による例を，本研究の理論的枠組みに基づいて分析する（第１節）。続いて，これらの過程を特徴づけ（第２節），数学的対象の美的性質を感得する過程のモデルを同定し，理論的仮説を得る（第３節）。

第１節　数学的対象の美的性質の感得に関する問題解決過程の分析

本節では，数学的対象の美的性質の感得過程のモデルを同定するために，先行研究で記述された数学的対象の美的性質の感得に関する過程を，本研究の理論的枠組みに基づいて分析する。この目的に適した過程は，あまり多くのものが共有されていない。第１章で参照した数学者らによる言及は，長期的な研究との関連についてのものであり，そこでは具体的な探究過程は触れられていない。また，数学者を対象とした実証的な研究では，数学者が問題設定や問題解決の過程で数学的対象の美的性質を求める姿が記述されたものの，これは一部始終ではないので，一連の過程の同定を試みる本研究にとっては十分なものではない。そこで，実際の過程そのものではなく整えられた可能性があることを認めた上で，数学教育で広く参照されているメイソンらによる例とポリアによる例，そして数学的対象の美的性質に関する研究を広く展開してきたシンクレアによる例を主として参照することとする。

第１項　単純性に関する数学的対象の美的性質の感得過程

メイソンらは，「チェス盤の正方形」の問題（図４－１）の解決過程を例示することで，数学の問題解決過程で用いる，氏らが RUBRIC writing と呼ぶメモの活用方法を解説した。この解決過程は以下の通りである。

チェス盤の正方形

あるとき，204 個の正方形が通常のチェス盤上にあると主張されました。この主張を正当化できますか。

図４－１　　チェス盤の正方形の問題（Mason et al., 2010，p.17）

メイソンらはまず，異なるサイズの正方形を全て数えるということに気づき，その結果をサイズごとに表に整理することにした。そして２×２のサイズの正方形（図４－２）を数えるにあたって重複による混乱を避ける方法について考え，チェス盤の横の線を一つ固定し，その横線と上の辺を共有する正方形の個数を数えることにした（図４－３）。

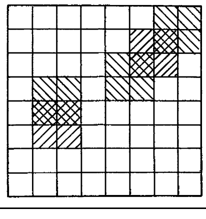


図４－２　２×２のサイズの正方形の重複（Mason et al., 2010，p.18）

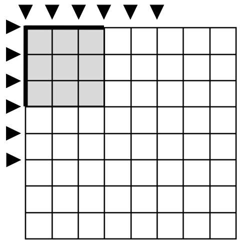


図４－３　３×３のサイズの正方形の２辺を共有できるチェス盤の横線と縦線
（下向きの三角形が左の辺を共有できる縦線，右向きの三角形が上の辺を共有できる横線を指している）

１×１のサイズの正方形と２×２のサイズの正方形の個数がそれぞれ 64＝８×８個，49＝７×７個であるという結果に基づき，メイソンらは，３×３のサイズの正方形の個数が 36＝６×６個であると予想した。そしてこの予想の正しさを実際に数えながら確認し，このチェス盤と正方形のサイズとの関係に基づいて，K×Kのサイズの正方形が共有するチェス盤の横線と縦線の本数がそれぞれ（９－K）本ずつであることを導いた。そして次の表４－１のようにその結果をまとめ，その合計を計算することで 204 本という正方形の総個数を求めた。

表４－１ チェス盤上にある異なるサイズごとの正方形の個数

サイズ	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	K×K
個数	64	49	36	25	16	9	4	1	$(9-K)^2$

メイソンらは，この解決過程を振り返り，次のようにまとめている。

> 鍵となるアイディアは，２×２の正方形の数え方についての組織的なアプローチだった。このアイディアは一般化され，望んだ結果をもたらした。２×２の正方形の全ての重複の扱い方についての乱雑さ（confusion）や不確かさ（uncertainty）から，線を共有する正方形を数えることの単純性（simplicity）や平静（calm）への移行は，記憶の中で際立っている。
>
> （Mason et al., 2010，p.20，下線は引用者）

メイソンらが「鍵」と明言するように，この単純性（simplicity）や平静（calm）を感得し

た過程において，チェス盤の横線と縦線を利用した２×２のサイズの正方形の数え方は重要な役割を担っている。この数え方では，数えようとしている各サイズの正方形といった構成要素と，その正方形の上の辺と左の辺を共有するチェス盤の横線と縦線という重複なく数えやすい構成要素との一意対応を活用し，この後者のチェス盤の横線と縦線を数えることによって，単純性（simplicity）や平静（calm）を得ている。すなわち，数えようとしている各サイズの正方形という構成要素とチェス盤の横線と縦線という構成要素間の一意対応という「擬同値関係」が同定されている。そして，この「擬同値関係」の同定によって，Ｋ×Ｋのサイズの正方形が共有するチェス盤の横線と縦線の本数がそれぞれ（９－Ｋ）本ずつであり，その個数が $(9-K)^2$ 個であるといった，全てのサイズの正方形といった「全体」に成立する「本質」や，チェス盤がＮ×Ｎの格子状であった場合にはこの「本質」的な個数が $(N+1-K)^2$ 個であるといったことが直観されている。メイソンらによるこの一連の探究過程からは,「発展性」の実感の有無は確認できない。この一連の過程で実感しうる「発展性」としては，２×２のサイズの正方形を対象に用いた数え方が他のサイズの正方形に適用できることや, 異なる本数の縦線と横線をもつ格子状の図形に対しても適用できることによる, 適用範囲の広がりが挙げられる。

メイソンらの例では,「擬同値関係」である一意対応が同定されて用いられることによって，単純性などの数学的価値に関する美的性質が感得可能であることが読み取れるが，この一意対応自体の同定の過程は示されていない。そこで，一意対応を同定して問題解決に用いることについて，その過程を説明する中島（1982）を参照する。

中島（1982）は，メイソンらと同様に，格子状の図形に含まれる正方形の個数を数える問題の解決を，一意対応を用いた問題解決の例として着目している。中島は数えようとしている正方形の上の辺を格子状の図形の最上位の線と対応させ，左の辺を格子状の図形の最も左にある線と対応させているという点でメイソンらの方法とは異なるが，いずれにしても数えようとしている各サイズの正方形の代わりに格子状の図形の横線と縦線を数えているという点で，メイソンらの方法と一致している。（図４－４）。

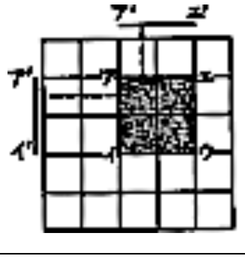


図４－４　中島による格子状の図形内の正方形の個数の数え方（中島，1982，p.199）

中島は，この一意対応を用いた問題解決を，次のように文部省の小学校指導書算数編（昭和53年5月発行）を引用しながら説明する「関数の考え」の例として提示している。

> 「一つの数量を調べようとするとき，それと関係の深い数量をとらえ，それら数量との間に成り立つ関係を明らかにし，その関係を利用しようとする考えが，関数の考えの基本的な考えである」として，次の三つのことがらをあげている。（表現は多少簡略にしている。）
>
> ㋐　まず，ある数量について，他のどんな数量と関連づけられるか，その数量をきめればきまるか，その数量に伴って変化するか，というような見方に立って，数量を考察していくこと。
>
> ㋑　次に，伴って変わる二つの数量について対応や変化の特徴を明らかにすることへ進む。対応や変化の特徴をとらえるには，変量の間の関係を表やグラフに表したり，式に表したり，式からよみとったりすることが必要になること。
>
> ㋒　こうして，伴って変わる二つの変量の間の対応や変化の特徴が明らかになったら，その特徴をはじめの問題の解決に利用すること。
>
> （中島，1982，p.179）

この中島による説明のうち，㋐の箇所は一意対応を同定する過程を示しており，メイソンらが明示的に言及していない過程を補うものとして有益である。

以上のように，メイソンらによる単純性の追求過程を本研究における数学的対象の美的性質の感得過程として解釈した結果を，中島による一意対応の同定過程を加味してまとめると，次のようになる。まず，「ある数量について，他のどんな数量と関連づけられるか，その数量をきめればきまるか，その数量に伴って変化するか，というような見方に立って，数量を考察」するなどといった過程を通して「擬同値関係」としての一意対応を同定する。続いて，この一意対応を活用して「本質」や「全体」を浮き彫りにすることで直観し，「全体」の広がりに基づく「発展性」を実感する。

第２項　明瞭性に関する数学的対象の美的性質の感得過程

ポリアは，問題解決の「振り返り」の相で役立つストラテジーの一つとして「異なる方法で同じ解を得られるか」を挙げ，その例として自身による円錐台（図４－5）の側面積の求積過程を次のように示している。

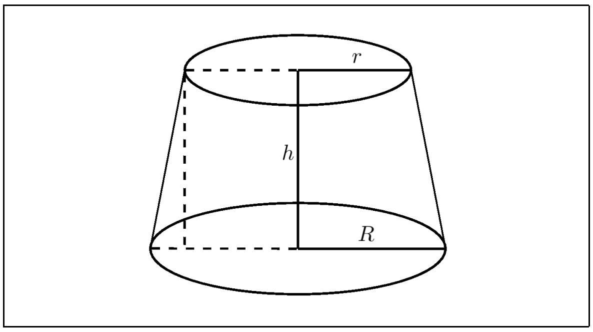


図４ － ５　円錐台（Polya, 1988/2004, p.63）

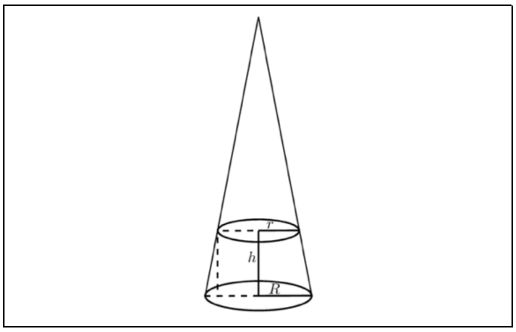


図４ － ６　直円錐

まず，上底の半径が r，下底の半径が R，高さが h である円錐台の側面積 S を，底面の半径が R である直円錐の側面積から，底面の半径が r である直円錐（図４ － ６）の側面積を引く計算によって

$$S = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2} \cdots (*)$$

として得た。

続いて，「より明瞭で手っ取り早い議論（a clearer and less roundabout argument）」（Polya, 1988/2004, p.62）を得るために，自らに「異なる方法で同じ解を得られるか，それを一目で理解できるか」（Polya, 1988/2004, p.62）と問い，この面積の式 $(*)$ に次のような図形的解釈を与えた。まず，$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$ をこの円錐台の母線の長さと捉え，$\pi(R + r)$ を

$$\pi(R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} = 2\pi\frac{R + r}{2}$$

と変形し，この部分を上底と下底の中間の位置にある円の周の長さとして捉え直した。そして，面積を表す式 $(*)$ を

$$\text{面積} = \text{中央にある断面の周の長さ} \times \text{母線の長さ} \cdots (**)$$

として再定式化し，この式から台形の面積の公式

$$\text{面積} = \text{中央にある線分の長さ} \times \text{高さ}$$

が想起されると述べた。面積を表す式 $(*)$ を図形的に解釈したこの $(**)$は，ポリアにとって，「『ほとんど一目に』円錐台についての結果の全体を理解することができる」（Polya, 1988/2004, pp.63-62）ものであり，「より明瞭で手っ取り早い」という数学的価値に関する数学的対象の美的性質を備えているものとなっている。

ポリアは上記の過程において，計算によって形式的に得られた面積を表す式 $(*)$ の構成要素 $\pi(R + r)$ と $\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$ の間の，どちらも同じ図形の構成要素の量の式表現として解釈できるという意味での「同じ」という関係を活用することで，側面積を表す「より明瞭で手っ取り早い」関係式 $(**)$ を得ている。すなわち，この構成要素 $\pi(R + r)$ と $\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$

の間のこの意味で「同じ」という「擬同値関係」が同定されている。

この関係式 (**) をみると，回転体の表面積についてのパップス・ギュルダンの定理と捉えることも，次のように，面積を積分で求める際の，被積分関数を 1 次式で表すような積分変数を同定して活用した式と捉えることもできる。

図 4 － 7 において，点 P は辺 AB 上の点，点 Q は OQ＝OP となる辺 CD 上の点であるとする。このとき，弧 PQ の長さは，中心角の大きさを α とすると，$\alpha \mathrm{AP} + \alpha \mathrm{OA}$ として，AP の 1 次式で表せる。この関数を，AP について区間 $[0, \mathrm{AB}]$ で積分すると，側面積 ABCD が得られる。一方で，弧 PQ の長さ $\alpha \mathrm{AP} + \alpha \mathrm{OA}$ は AP の 1 次関数なので，積分区間の中点における関数の値は，区間 $[0, \mathrm{AB}]$ における関数の値の平均と一致している。それゆえ，

$$\text{側面積 ABCD} = \left(\alpha \frac{\mathrm{AB}}{2} + \alpha \mathrm{OA}\right) \cdot \mathrm{AB}$$

$$= \text{中央にある断面の周の長さ} \times \text{母線の長さ}$$

として側面積を得ることができる。

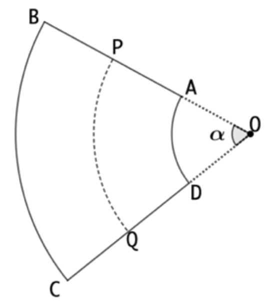


図 4 － 7　　円錐台の側面の展開図

一方，ポリアがこの関係式 (**) の類比として台形の面積の公式 [面積＝中央にある線分の長さ × 高さ] を挙げていることを鑑みると，ポリアは関係式 (**) を，後者の「被積分関数を 1 次式で表すような積分変数を同定して活用した式」として捉えていると推察できる。すなわち，この過程で「擬同値関係」を同定することを通して直観された「本質」は，「被積分関数を 1 次式で表すような積分変数を同定できた場合，その積分によって求まる面積は，積分区間の中点に対する被積分関数の値と積分区間の長さとの積で求まる」であり，「全体」は，このポリアの探究過程で明示された範囲では（直）円錐台と台形であるといえる。ただしこの「全体」は，面積や体積などを表す定積分の被積分関数を 1 次式で表すような積分変数が存在するような図形全てであり，正多角錐の側面積を求める際などにも適用できる。ポリアによるこの一連の探究過程からは，「発展性」の実感の有無は確認

できない。この一連の過程で実感しうる「発展性」としては，円錐台の側面積を求める式が台形の面積を求める際にも適用できることによる，適用範囲の広がりが挙げられる。

以上のように，ポリアによる明瞭性の追求過程を本研究における数学的対象の美的性質の感得過程として解釈した結果をまとめると，次のようになる。まず，形式的に得られた式などの数学的対象の構成要素に対する同値変形などを通して，この式などを「図形の構成要素の量」のような異なる構成要素の属性などとして解釈することで，「擬同値関係」を同定する。続いて，この「擬同値関係」を活用してもとの数学的対象全体を再解釈することで「本質」や「全体」を直観し，「全体」の広がりに基づく「発展性」を実感する。

第３項　対称性を「本質」とする数学的対象の美的性質の感得過程

シンクレア（Sinclair, 2006）は，数学的対象の美的性質に関する研究を問題設定や問題解決の過程における美的性質の役割を視点として展開するために，数学者たちによる言及に基づいて同定した三つの役割である，評価的な役割，生成的な役割，動機づけ的な役割を，自身による「the kissing angle」の探究過程を例にして説明している。

この問題の探究は，シンクレアの同僚が彼女に見せた，三角形の辺上に構成された三つの正方形の中心を頂点とする三角形（図４－8）に対する疑問から考察が始められた。

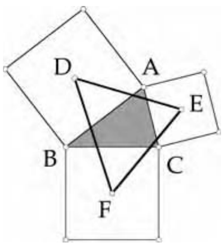


Figure 4.1. The center triangle DEF constructed from triangle ABC.

図４－８　問題解決の契機となった図形（Sinclair, 2006, p.45）

シンクレアは，この図形から三角形のナポレオンの定理を想起し，正方形の中心を頂点とする△DEF の形状に関心を持った。そして，作図ツールを用いて動的に考察できるようにし，△ABC を動かしてみたところ，△DEF の形状については示唆が得られなかったものの，点 A が辺 DE 上にある場合の ∠BAC の大きさに関心が移った。続いて，作図ツールを用いてこの大きさを測定したところ 91.031° だったので，∠BAC = 90° の場合を作図することで，点 A が辺 DE 上にあるように見える図を構成することができた。

シンクレアは，この結果の背景を探るために，△ABC の辺上の図形を正三角形に変更して同様の測定を行ったところ，∠BAC の大きさは 120° に近い値になった。また，正六角形の

場合では，$\angle BAC$ の大きさは $60°$ に近い値になることがわかった。シンクレアはここまでの結果から，△ABC の辺上の図形が正 n 角形で，頂点 A が辺 DE 上にある場合，

$$\angle BAC = \frac{360°}{n}$$

になるという予想を立てた。

この予想を証明するために，シンクレアは作図ツールのパラメータ機能を用いた作図による解決を試みた後で，再び最初の正方形の場合の図形を対象とした論証幾何的な方法で考察した（図４－9）。そして，△ABC≡△ANM を証明することで，この場合に$\angle BAC = 90°$であることを証明した。

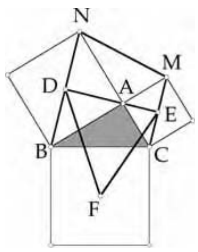


Figure 4.6. Toward a proof of the kissing angle theorem.

図４－９　論証幾何的な方法による考察（Sinclair, 2006, p.54）

シンクレアはさらに，△ABC の辺上の図形が正方形以外の場合について考え，同僚からの助言を受け，線分 AD が点 D を中心とする正方形の対称の軸であることに注目し，同様に線分 DE が点 E を中心とする正方形の対称の軸にもなっていることに気づいた。そして△ABC の辺上の図形が正 n 角形の場合にも同様な対称性が成り立つこと，そしてこの対称性に基づくと，$\angle BAC$ の大きさが次のように求められることを確認した[1]。

$$\begin{aligned}\angle BAC &= 180° - (\angle BAD + \angle CAE) \\ &= 180° - 2\angle BAD \\ &= 180° - \left[180° \frac{(n-2)}{n}\right] \\ &= \frac{360°}{n}\end{aligned}$$

この最終的に得られた証明に対して，シンクレアは次のように述べている。

[1] シンクレアは，ここで△ABC の頂点の記名方法を変更し，頂点 B が線分 DE 上にある場合を用いて，この一般的な証明を示している。ここでは誤解がないように，元の記名方法のままで記す。

　これで私は本当に証明に釘付けになった。どんな多角形にも適用できるだけでなく，この証明には数学の強力なツールである対称性の議論も含まれていた。さらに，この証明は，より一般的なものであったにもかかわらず，以前の私の証明よりも短く感じられた。そしてまたしても，今まで見たことのない全く新しい形，隠れた六角形[2]を発見することができた。

（Sinclair, 2006, p.55）

　私を本当に喜ばせたのは対称性についての議論だった。見えない対称性の線が図全体をきれいにまとめ，欠けていた不変な構造を与え，中心の三角形の奇妙で予測不可能な振る舞いを補ってくれたのである。

（Sinclair, 2006, p.56）

　以上のようにシンクレアが「本当に喜んだ」対称性は，本研究における構成要素間の「同値関係」の一つである。この対称性が同定されることによって，∠BAD が構成される正多角形の内角の半分であることが確認され，短い証明が得られている。一方で，この対称性は，三角形の辺上の図形が正方形ではない場合にも同様に成立することが確認され，この「全体」に対する「本質」としての役割も果たしている。すなわち，このシンクレアによる探究過程の例では，対称性という「同値関係」が「形式」として同定されるとともに「本質」として同定され，三角形の辺上の図形が正多角形の場合に成立するという「全体」が同定されている。また，ここでは，証明が「どんな多角形にも適用できる」という，三角形の合同を指摘した証明との差異に基づく「発展性」が実感されていると考えることができる。

　以上のように，シンクレアによる対称性に関する美的性質の追求過程を本研究における数学的対象の美的性質の感得過程として解釈した結果を改めてまとめると，次のようになる。まず，同僚からの助言を受けて着目した対称性が，三角形の辺上の図形が正方形以外の場合についても成立しているということを確認することで，数学的対象の「形式」であり「本質」でもある対称性を同定及び直観し，任意の正多角形を構成した場合で成立するという「全体」を直観する。続いて，「本質」や「全体」が直観される前の数学的対象と，最後に得られた数学的対象との比較をとおして，「発展性」を実感する。

[2] 明記はされていないものの，BCEMND のことだと思われる。図４－９では四角形になっているが，他の正多角形では（凹も含めた）六角形になる。

第２節　数学的対象の美的性質の感得過程の特徴

第１項　数学的価値の位置づけ

第２章で検討したように，数学者たちによる数学的対象の美的性質についての説明では，単純性や簡潔性，明瞭性，一般性などといった，数学において望ましいとされる性質が頻繁に用いられていた。本研究ではこれらの性質を数学的価値と呼び，数学者集団によって個性化された構成要素間の「同値関係」である，構成要素間の「擬同値関係」に基づく美的性質の特徴として捉えている。 実際，第１節で分析したメイソンらによる「チェス盤の正方形」の問題の解決における単純性の追求の過程や，ポリアによる円錐台の側面積の探究における明瞭性の追求の過程では，一意対応などの「擬同値関係」の同定が，数学的価値を伴う美的性質の感得過程に位置づいていた。

一方，シンクレアによる「the kissing angle」の探究過程では，対称性という本研究における「同値関係」が同定されることによって，一般性や「短く感じられる」ような性質を伴う美的性質が得られていた。すなわち，数学的価値に特徴づけられる数学的対象の美的性質は，構成要素間の「擬同値関係」が同定される場合だけでなく，「同値関係」が同定される場合にも感得されうるものであることがわかる。実際，この「同値関係」として本研究で捉えなおした概念である竹内（1979）の「合法則的形式」は，知覚対象の異なる構成要素の間に合理的に統一をもたらす規則であり，「その全体を一目瞭然とみわたし、みとおすことができる」（竹内，1979，p.109）ようにするものであった。また，中島（1982）は数学における統合を，「結果において，『簡単』にすることと関連のあることであることはいうまでもない。」（中島，1982，p.57）と説明していた。すなわち，異なる構成要素を「同じ」とみなすことによって感得される数学的対象の美的性質は，その「同じ」が「同値関係」であっても「擬同値関係」であっても，数学的価値によって特徴づけられたものであると言える。

構成要素間の「擬同値関係」として本研究が捉えなおした概念である竹内（1979）の「個性化的形式」は，「『人格的個性の法則』及び『歴史的個性の法則』という二重の『主体的個性化の原理』によって個性化された，知覚対象の異なる構成要素の間に統一をもたらす規則」と捉えられるものであり，浪漫主義や「侘び・寂び」などの様式がその例となる概念であった。この「個性化的形式」に基づく美的性質は，この個性化という作用によって，「合法則的形式」に基づく美的性質とは一般には異質なものとして捉えられる。これは，時代や地域によって芸術作品のもつ美的性質が異質であることを説明するものである。したがって，「合法則的形式」の対応概念である「同値関係」に基づく美的性質と，「個性化的形式」の対応概念である「擬同値関係」に基づく美的性質が，ともに数学的価値によって特徴づけられることは，知覚対象が数学的対象であり，「形式」を個性化する集団を数学者集団とする，本研究の前提条件に基づく特殊性であると言える。

第２項　構成要素間の「同値関係」の「本質」としての位置づけ

本研究では，数学的対象の美的性質を，数学的対象の構成要素間の「同値関係」及び「擬同値関係」という「形式」，関連する複数の数学的対象間に共通する性質として見出されたり選択されたりする「本質」と，「本質」が成立する範囲として捉えられる「全体」，数学的対象の「全体」が広がることに基づいて実感される，広がりや深まりといった何らかの意味での広大さを意味する「発展性」の４観点で捉えている。これらの観点は，本研究の理論的基盤である竹内（1979）から導出したものである。

一方，第１節で分析したシンクレアによる例を参照すると，対称性という構成要素間の「同値関係」が，三角形の辺上の図形が正方形ではない場合という「全体」で成立する「本質」としての役割も果たしていた。

数学では，ポアンカレが「数学はいろいろの異なるものに同じ名前を与える芸術である」（Poincaré, 1908/2003, p.34）と述べたように，繰り返し現れるものを重要視して，同じ名前をつけることで同一視することに価値が置かれる。構成要素間の「同値関係」は，スティーンが「数学の体系の根源をなすもの」（Steen, 1990, p.3）として挙げたものの中に多く含まれていたように，多様な数学の領域にまたがって現れる数学的概念である。したがって，見いだされた「同値関係」を重要視して保存して，対象を拡張するような考察がしばしば見られる。中島（1974）が「形式不易の原理」（中島，1974，p.126）と呼んだ考えも，この「同値関係」を保存した拡張と同様なものであると考えられる。

本研究で数学的対象の美的性質を捉える観点が４観点であることは，竹内（1979）に基づく議論によるものであり，一般には「形式」と「美的静観」で直観される本質は同一のものではない。知覚対象を数学的対象とする本研究においても，第２章で「本質」について検討する際に参照した杉山（1986）による「７の倍数の判定法」に関する本質のように，保存される「本質」が「形式」ではない場合も想定される。しかしながら，特殊な場合においては，「形式」が「本質」としても位置づくということは，本研究における数学的対象の美的性質の感得過程の重要な特徴であると言える。

第３節　数学的対象の美的性質の感得過程のモデル

本節では前節までの分析結果に基づいて，数学的対象の美的性質の感得過程のモデルを得る。このモデルは数学者等による問題解決過程についての事例から得られたものであり，異なる数学者等による同様な問題解決過程の事例を用いて「追試」されるべきものである（Yin, 2014）。しかしながら上述のように，そのような事例は蓄積されていない。そこでこの「追試」は今後の課題として本研究ではこのモデルを仮設的に用いることとし，このモデルを学習者による数学的対象の美的性質の感得過程として転用することによって，次章以降

の学習者を対象とする調査によって得られる経験的データに基づく考察によって修正・補填の対象となる理論的仮説として位置づけることとする。

第１項　４局面モデル

第２節で抽出した特徴を踏まえ，本研究における数学的対象の美的性質の感得過程についての第１のモデルとして次の４局面からなる過程を抽出し，理論的仮説として同定する。

第１の局面は，数学的対象の「形式」を同定する局面である。ここで「形式」とは，構成要素間の「同値関係」と，構成要素間の「擬同値関係」のいずれの場合も考えうる[3]。この「形式」は, 構成要素間に成立する何らかの意味での「同じ」と見なされる関係であるので, 構成要素の間の関係を吟味することで同定されるものとする。例えば，中島（1982）が「関数の考え」の説明で㋐として挙げた変数間の対応の検討や，シンクレア（Sinclair，2006）が「the kissing angle」の探究において三角形の辺上に正方形を構成した場合に成立した対称性が他の正多角形を構成した場合にも成立するかどうかを検討したような「What-If-Not 方略」(Brown & Walter, 2005）を用いた検討をとおして,「形式」が同定されると考えられる。

第２の局面は，数学的対象の「本質」を直観する局面である。この「本質」は，ある数学的対象についての性質の原理となっており, 類似する数学的対象及びその性質と共通している数学的概念であるので，性質の原理の追究や，類似する数学的対象等との比較によって直観されるものとする。例えば, 第１節のメイソンらのように得られた結果を整理することや, ポリアのように類推することのほか，より詳細な過程としては，第２章で参照した，杉山（1986）が「７の倍数の判定法」の考察の中で形式的証明の構成をとおして事柄が成り立つ根拠や条件としての「本質」を同定した公理的方法の「根拠を探る」過程や，ブラウンとワルターがピタゴラスの定理において加法的な図形を見いだした What-If-Not 方略による検討をとおして，「本質」が直観されると考えられる。ただし，この「本質」の直観には数学的対象の美的性質のもつ「無用性」という特性が反映される必要がある。したがって，美的性質の感得が数学の問題解決の文脈においてなされる場合には，問題の解や解決の見通しが得られてから「本質」が直観されるものとする。

第３の局面は，数学的対象の「全体」を直観する局面である。数学的対象の「全体」を直観することは，その数学的対象の「本質」が及ぶ範囲を同定することなので，第２章でも検討したように，杉山（1986）による公理的方法の「仮設をおいて考える」過程や，ブラウンとワルターによる What-If-Not 方略による検討のように，「本質」として選択した数学的概

[3] ここまでの議論では，同定される「形式」の個数についての限定や,「同値関係」と「擬同値関係」のいずれか一方になるといった限定は確認されていない。したがって，理論的仮説としてはこれらの制限を設けないモデルを同定することとする。

念（数学的対象の属性の一部）を固定して，その他の条件を変更した場合の帰結を調べることなどをとおして，「全体」が直観されると考えられる。

第４の局面は，数学的対象の「発展性」を実感する局面である。数学的対象の「発展性」は，数学的対象の「全体」が広がることに基づいて実感される，広がりや深まりといった何らかの意味での広大さである。したがって，「本質」や「全体」が直観される以前の数学的対象と，直観後の数学的対象との比較によって，この「発展性」は実感されるものとする。シンクレア（Sinclair，2006）が「the kissing angle」の探究で三角形の辺上に正方形を構成した場合についての二つの証明，すなわち三角形の合同を指摘する証明と対称性を利用する証明を比較したことは，数学的対象の「発展性」の実感過程の例である。

なお，これらの４局面は，この順に遂行される「段階」ではない。前章の第３節第５項で考察したように，数学的対象の「形式」の同定は，数学的対象の「本質」や「全体」の直観，「発展性」の実感に先立つこともあれば，これらの過程で行われることも考えられる。

第２項　３局面モデル

数学的対象の美的性質の感得過程についての第２のモデルは，前項の４局面モデルにおける数学的対象の「形式」の同定と「本質」を直観の２局面が重なった，３局面モデルである。第２章で参照した，中島（1974）が乗数が分数で表されている場合の乗法の考察過程で比例を保存して演算方法を拡張した例や，ブラウンとワルター（Brown & Walter, 2005）がピタゴラスの定理において加法的な図形は互いに相似であることを見いだした例のように，構成要素間の「同値関係」が拡張の際に保存する「本質」として選択されたり見いだされたりすることは，数学における探究過程では珍しいことではない。このような３局面からなる数学的対象の美的性質の感得過程を，理論的仮説として次のように同定する。

第１の局面は，数学的対象の構成要素間の「同値関係」を同定するとともに，その「同値関係」を異なる数学的対象間の共通点，すなわち「本質」として直観する局面である。４局面モデルの説明で述べたように，構成要素間の「同値関係」の同定は，構成要素間の関係をWhat-If-Not 方略などによって検討することでなされる。一方で，このような「そうでないもの」との比較では，最初に検討していた数学的対象とは異なる数学的対象においても同様な「同値関係」が成立していることに気づくことがある。すなわち，ある数学的対象 A の構成要素 x と y の比較に加えて，異なる数学的対象 B 及びその構成要素 x’と y’とも比較することによって，数学的対象の「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観がなされるものとする。この「本質」としての直観については，４局面モデルと同様に，美的性質の感得が数学の問題解決の文脈においてなされる場合には，問題の解や解決の見通しが得られてから「本質」が直観されるものとする。

第２の局面は数学的対象の「全体」を直観する局面であり，第３の局面は数学的対象の「発展性」を実感する局面である。この第２，第３の局面については，４局面モデルの第３，第４の局面と同一のものとして捉えることとする。

第３章のまとめ

本章では，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法の検討に先立って，第２章で構築した本研究の理論的枠組みと，先行研究で記述された数学的対象の美的性質の感得に関する問題解決過程に基づいて，数学的対象の美的性質の感得過程についてのモデルを，本研究の理論的仮説として同定することを目的とした考察を行なった。

この目的を達成するために，第１節では先行研究で記述された数学的対象の美的性質の感得に関する問題解決過程を記述し，本研究の理論的枠組みに基づいてそれぞれ捉えなおした。

第２節では，第１節で数学的対象の美的性質の感得過程として捉え直した問題解決過程を比較することによって，数学的対象の美的性質の感得過程の特徴を二つ指摘した。第１に，竹内（1979）によって説明された一般的な知覚対象の美的性質とは異なり，竹内による「合法則的形式」の対応概念である「同値関係」に基づく美的性質と，竹内による「個性化的形式」の対応概念である「擬同値関係」に基づく美的性質が，ともに簡潔性や一般性などの数学的価値によって特徴づけられることである。このことは，知覚対象が数学的対象であり，「形式」を個性化する集団を数学者集団とする，本研究の前提条件に基づく特殊性である。第２に，竹内による形式や本質の説明では言及されていない，「形式」と「本質」が同一のものである場合が想定できることである。このような場合は本研究においても一般的ではないことから，数学的対象の美的性質の感得過程としては「形式」と「本質」が異なる場合と同一のものである場合の双方についてモデルを導出する必要性が確認された。

第３節では，第２節で指摘した特徴を踏まえて，数学的対象の美的性質の感得過程のモデルを，４局面モデルと３局面モデルとして二つ同定した。これらのモデルは数学者等による同様な問題解決過程の事例を用いて「追試」されるべきものであるが（Yin, 2014），そのような事例が蓄積されていないことから，本研究ではこの二つのモデルを仮設的に用いることとし，これら二つのモデルを転用した学習者による数学的対象の美的性質の感得過程のモデルを，本研究において経験的な考察によって修正・補填の対象となる理論的仮説として位置づけた。前者の４局面モデルは，(i)数学的対象の「形式」を同定する局面，(ii)数学的対象の「本質」を直観する局面，(iii)数学的対象の「全体」を直観する局面，(iv)数学的対象の「発展性」を実感する局面によって構成されているものとした。一方の３局面モデルでは，数学的対象の構成要素間の比較に加えて，異なる数学的対象とも比較をすることによって，数学的対象の「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観が１局面としてなされる場合を想定したものである。数学的対象の「全体」の直観及び「発展性」の実感は，４局面モデルと同一のものとして捉えることとした。

第４章

４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得の促進

第３章では，第２章で検討した本研究の理論的枠組みに基づく理論的仮説として，数学的対象の美的性質の感得過程の二つのモデルを同定した。すなわち，(i)数学的対象の「形式」を同定する局面，(ii)数学的対象の「本質」を直観する局面，(iii)数学的対象の「全体」を直観する局面，(iv)数学的対象の「発展性」を実感する局面の４局面からなるモデルと，この(i)と(ii)の局面が重なった３局面モデルである。

本章では上記の二つのモデルのうち，４局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法の解明を目的とした実証的な検討を行う。はじめに，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得に関する先行研究の概観をとおして，この美的性質の感得に関する日本の学習者の特異性を指摘する（第１節）。続いて，この日本の学習者の特異性を日本における特徴的な授業方法である問題解決型授業の「練り上げ」に由来するものとして捉えることの妥当性を検討する（第２節）。次に，問題解決型授業が実践されている小学校算数科の授業への参与観察と，その授業に参加する小学生に対するインタビュー調査をとおして，実際に行われている問題解決型授業の「練り上げ」が，児童にとっての数学的対象の美的性質の感得過程になっているか否かについて，実証的に検討する（第３節）。そして，実証的な検討の結果を踏まえて，問題解決型授業の「練り上げ」が，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法として十分に機能するために必要な改善案を提案する（第４節）。

第１節　４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の学習者による感得の実態

第１項　数学的対象の美的性質の感得に関する国際的な研究成果

第１章で概観したように，数学教育研究では，ポアンカレやアダマール，ハーディなどといった著名な数学者による数学的対象の美的性質の重要性への言及を受け，一般の学習者による数学的対象の美的性質の感得可能性が探究されてきた。

ドレイフスとアイゼンバーグ（Dreyfus & Eisenberg, 1986a）は，数学的対象の美的性質を，単純性や簡潔性といった主観的な性質と，構造といった数学的概念で説明し，大学生と大学院生を対象とした調査を実施することで，問題解決過程における非数学者による数学的対象の美的性質に対する反応を明らかにすることを試みた。その結果，学生たちはエレガントな解を得ることができなかっただけでなく，エレガントな解を提示された際にも「両方の解法を理解できるのにも関わらず，彼ら自身で見出した解よりも魅力的であるとはわからなかった。彼らはその美的な優位性をつかみ損ねた」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.7）。ドレイフスとアイゼンバーグは，学生たちの典型的な反応が「それはあなたの方法ですよね。それがどうしましたか！私の方法も機能していますよ。」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.7）といったものであったことも踏まえ，「彼らは彼らの決定を美的な価値に基づいて行っておらず，実用的（practical）な価値に基づいて行っている」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.7）とまとめた。また，ドレイフスとアイゼンバーグは，数学者を対象とした「$\sqrt{2}$が無理数であること」についての複数の証明についての好みを尋ねる調査の結果を踏まえて，数学者の好みには傾向があり，その基準が単純性（simplicity）と「最小の数学的背景で完璧に理解可能であるという事実」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.8）であったと報告している。

ドレイフスとアイゼンバーグによる学生および数学者を対象とした観察結果は，彼らの調査に先立って行われたクルチェツキーによる大規模な臨床的研究において，数学的な才能児のみが数学の問題の解法にエレガントさを求めたという調査結果にも現れている（クルチェツキー，1969b）。他方，チョー（Tjoe, 2016a）は，数学的対象に対する好みについて，数学者と数学的に高度に熟達した高校生を比較する調査を実施した。そして，数学者たちが単純性（simplicity）や独自性（originality）によって数学的対象の美的性質を判断しているのに対して，高校生たちは「問題を解くのに必要な時間や手順という点で効率的な（efficient）方法のみに数学のエレガントさを見出した」（Tjoe, 2016a, p.281）と報告し，この結果から，数学的に熟達した高校生が感得している数学的対象の美的性質が，数学者が感得しているものとは質的に異なることを指摘した。

以上のような国際的な数学教育研究の成果を踏まえると，非数学者である学習者は数学の問題解決において，単純性などの数学的価値に関する数学的対象の美的性質を追求しようとしておらず，また，感得することもできないと推察される。

第２項　数学的対象の美的性質の感得に関する日本の学習者の特異性

第１項の国際的な数学教育研究の成果に基づく推察とは対照的に，筆者（花園，2009）が実施した公立中学校に通う中学生を対象とした調査では，数学の問題解決過程において，より簡潔な解法を追求する中学生の姿が確認された。例えば，凸多角形の対角線の本数を求める問題に対して，多角形と対角線を実際に描いて数え上げるという最初に着手した方法でも解決できる見通しを得ながら，その本数の間の規則に着目して，図４－１のように解決を試みた中学生の姿が記述された。

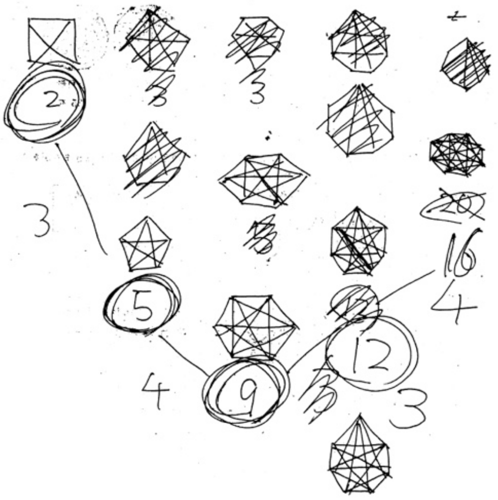


図４－１　公立中学校における中学生による問題解決（花園，2009）

この解法を選択した中学生の数学の成績は当該学年の下位に位置づいており，その意味では数学的に熟達した中学生であるとは言えない。実際，図４－１においても解決の過程で対角線の本数の数え間違えをしており，結果的に誤答を導いている。それにも関わらず，国際的な研究の成果とは異なり，この中学生の問題解決における目標は，単に答えを出すことだけではなく，簡潔な解法を得ることでもあったのである。

また，筆者（Hanazono, 2017）は，国立大学附属高等学校に通う高校生と教員養成課程の大学生を対象に，二重根号を用いて表現された数について二重根号を用いずに表現できるような条件を問う調査を行なった。その結果，数学的知識をより多く有していると考えられる大学生が厳密性を重視していたのに対し，高校生は大学生が追求しなかった条件の簡潔性や的確性などといった数学的価値を追求していた。この大学生についての結果は，美的な数学的対象に関する数学的知識を十分に有しているはずの大学生が数学的対象の美的性質

を追求しなかったというドレイフスとアイゼンバーグによる知見に対する，新たな事例研究による肯定的な「追試（replication）」（Yin, 2014）になっている。一方で，高校生が数学的価値を追求したことは，花園（2009）が報告した日本の学習者が示す国際的な研究の成果とは異なる様相に対する，新たな事例研究による肯定的な追試にもなっている。

筆者による調査結果におけるこのような日本の学習者の特異性は，日本では広く見られる様相である。例えば，全国学力・学習状況調査における質問紙調査の一項目である「算数〔数学〕の授業で問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考えますか」という設問に対して，次の図４－２に示した結果が得られている（国立教育政策研究所，2018）。

	質問番号	質問事項
小	34	算数〔数学〕の授業で問題を解くとき，もっと簡単に解く方法がないか考えますか
中	34	

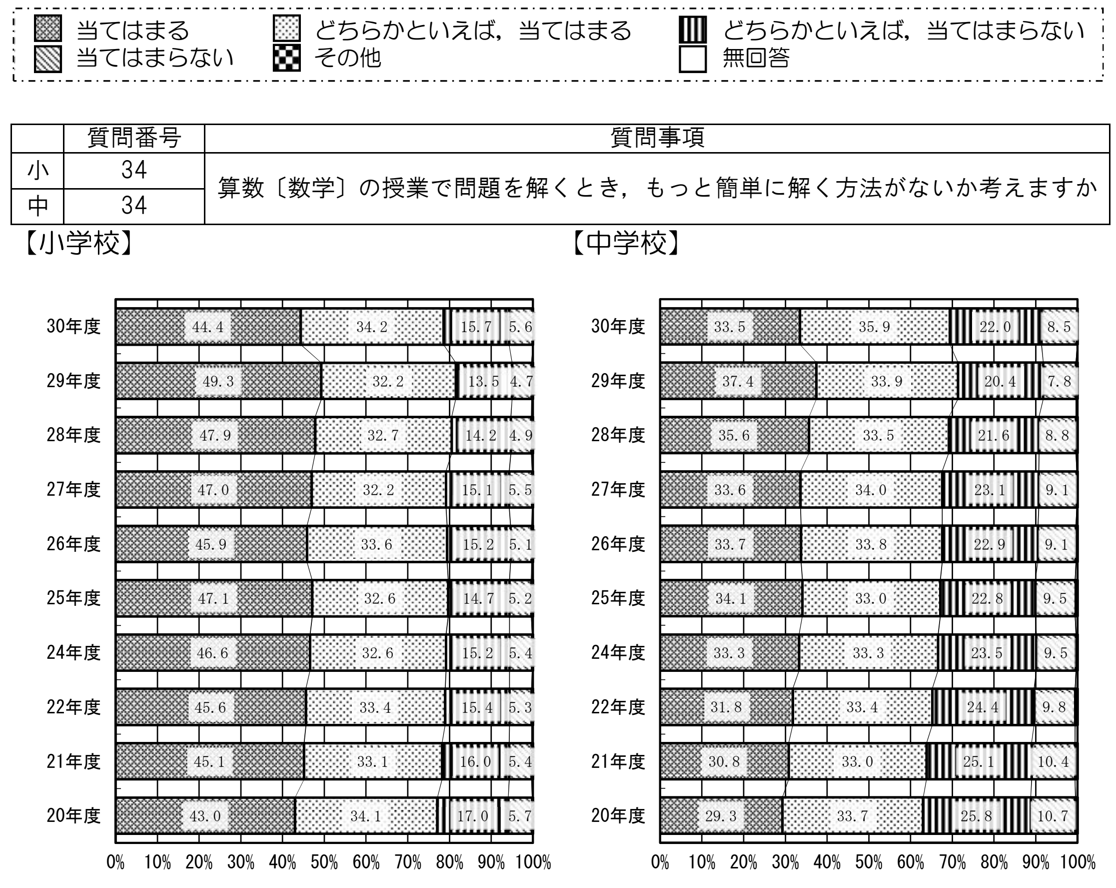


図４－２　より簡単な解法を考える日本の小・中学生の割合

（国立教育政策研究所，2018，p.93，ただし，凡例は p.89）

図４－２に示したように，平成 30 年度の調査結果では小・中学校ともにポイントを減らしてはいるものの，約 80%の小・中学生が，授業において「もっと簡単に解く方法」を考えている（「当てはまる」または「どちらかといえば，当てはまる」）と回答している。この

結果は,「もっと簡単に解く方法がないか考える」ことが教師の指示によって受動的に行なっていることであるのか，筆者が実施した調査のように直接的な介入がない環境でも自ら行なっていることであるのかについては明らかにはしないものの，日本における多くの小・中学生が学校の授業の場において,「もっと簡単に解く方法を考える」という経験をした自覚をもっていることが確認できる。すなわち，日本の学習者の多くが，算数・数学科の授業において，数学的対象の美的性質の感得過程を経験している可能性がある。

第２節　数学的対象の美的性質の感得過程を視座とする問題解決型授業における「練り上げ」の構造の評価

第１項　算数・数学科の問題解決型授業とその構成要素としての「練り上げ」の構造

(1) 日本の算数・数学科における問題解決型授業の構造

筆者による調査の結果（花園，2008；Hanazono, 2017）や，全国学力・学習状況調査に見られた日本の学習者の特異性は，日本の算数・数学科授業において広く展開されている問題解決型授業という，授業の型ともいえる特徴に着目すると必然的であると感じられる。

問題解決型授業とは,「『問題把握』→『自力解決』→『練り上げ』→『まとめ』という過程を踏まえた」（日本数学教育学会研究部小学校部会，2001，p.32）授業であり，日本数学教育学会研究部小学校部会（2001）が小学校教員 476 名を対象に実施した調査では，回答者全体の 60％に近い教員が「いつも行う」または「しばしば行う」と回答するものである（図４－３）。

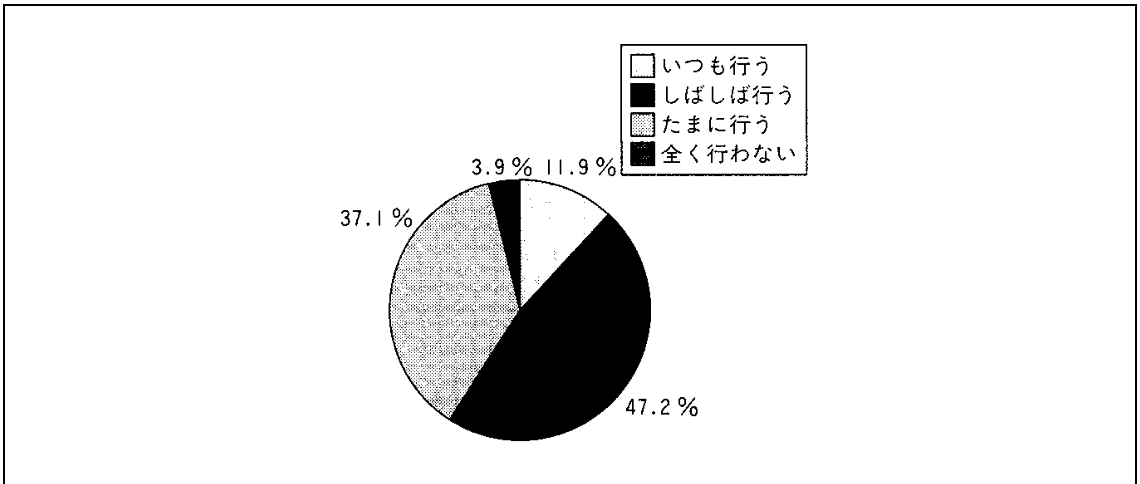


図４－３ 小学校における問題解決型授業の実施状況

（日本数学教育学会研究部小学校部会，2001，p.32）

高橋（2000）によると，この問題解決型授業は，1970 年代後半から 1980 年代後半にかけて,「アメリカの影響をうけながら広く日本の学校に浸透したものである」(高橋，2000, p.18)。高橋は，中島による言及（中島，1983）を引用しながら，ポリアの影響を受けて広がったこの授業の型について，次のように述べる。

> 中島健三氏が“「1980 年代の算数・数学教育のカリキュラムは，問題解決に焦点を置くべきだ！」という勧告が，アメリカの NCTM で出されたこともあってか，最近，数学教育界では，問題解決の指導に大きな関心が寄せられているようになってきている（中島，1983, p.1）”，と述べているように，この時期，アメリカの問題解決に関する文献が和訳され，多く引用されている．そして 60 年代から日本の算数・数学教育に影響を与えてきたポリヤの，理解，計画，実行，振り返ってみること，の問題解決の 4 区分（柿内，1954）を土台に，問題解決型の展開が算数・数学の授業に大きな影響を与えた．そして，この時期に形作られた授業展開が，今日の算数・数学の指導案の主流となっているといえよう．
>
> （高橋，2000，p.18）

このような経緯で広く展開されるようになった問題解決型授業は，上記の高橋による言及で「算数・数学」とされていることからも推察できるように，中学校数学科においても授業の型として浸透している。スティグラー（J. Stigler）とヒーバート（J. Hiebert）は，国際教育到達度評価学会（IEA）が実施した第 3 回国際数学・理科教育調査（TIMSS）に引き続き行われた中学校段階の数学の授業についての研究である TIMSS ビデオスタディの成果として，アメリカ，日本，ドイツの 3 カ国の授業の特徴を浮き彫りにした（Stigler＆Hiebert, 1999)。スティグラーとヒーバートはそこで，日本の中学校数学科授業に「構造化された問題解決」というラベルを貼り，次の各相によってその基本型を説明した（表 4 － 1）。

表 4 － 1　日本の中学校数学科授業の基本型

（Stigler & Hiebert, 1999, pp.36-41 を元に引用者作成）

・前時の授業の見直し
・今日の問題の提示
・生徒が個人またはグループで問題に取り組む
・解決方法の議論
・要点の強調とまとめ

このスティグラーとヒーバートによる各構成要素に対するラベルの付け方は，先の日本数学教育学会研究部小学校部会によるものと完全には一致していない。特に，スティグラーとヒーバートによるものでは，構成要素として「前時の授業の見直し」が最初に挙げられている。しかしながら，スティグラーとヒーバートが「基本型」と称したことからこのラベルは厳密なカテゴリーではないと捉えると，先に挙げた小学校算数科における問題解決型授業と，この TIMSS ビデオスタディで浮き彫りにされた「構造化された問題解決」と称された授業の型は，同等なものであると考えられる。

(2) 問題解決型授業における「練り上げ」の位置とその構造

問題解決型授業の構成要素のうち，「練り上げ」または「解決方法の議論」（以降，「練り上げ」で統一）は，高橋が「日本の教師たちが『練り上げ』を問題解決をとおした数学の指導の核心としてみる」（Takahashi, 2009, p.5）と述べるように，問題解決型授業における重要な位置を担っている。

この「練り上げ」では，「生徒たちのアイディアや問題解決の方法を組織化し，それらの解決を生徒たちが磨き上げることを援助することで，生徒たちが数学の内容を学習するようにすること」（Takahashi, 2009, p.5）が教師によって意図され，先立って展開される自力解決で得られた解法や解に関する多様な考えの共有と，簡潔性や一般性などを観点とする比較・検討が行われる（石田，2008）。すなわち，「練り上げ」とは，前節で述べた，日本における多くの小・中学生に「もっと簡単に解く方法を考える」という経験を提供する場であり，日本における多くの小・中学生が数学的対象の美的性質の感得過程を経験する場としての可能性をもった授業の一局面であると言える。

しかしながら，この「練り上げ」で追求されている「簡単」などの価値が，数学的対象の美的性質を特徴づける数学的価値と同質であるという保証は，本章におけるここまでの検討では確認できない。イングリスとアベルダイン（Inglis and Aberdein，2014）が数学者を対象に実施した調査の結果に見られるように，数学的対象を「つまらなく」する単純（simple）も確認されている。このことを踏まえると，「練り上げ」が数学的対象の美的性質を感得する場になっているかどうかを判断するためには，規範的な「練り上げ」の過程をより詳細に捉え，その過程と数学的対象の美的性質の感得過程との対照によって，構造的に評価する必要がある。

そこで以下では，この評価の対象となりうる規範的な「練り上げ」を構造的に捉えるために，古藤らによる児童の多様な考えの分類（古藤ら，1990）と，高橋による教科書を用いた「練り上げ」の解説（Takahashi，2009）を参照する。古藤らによる分類は，「練り上げ」に関する多くの論考で参照されており（e.g.，小池，2015；長沢，2015；高井，2010；矢部・

左野ら，1997)，その規範性が期待できる。高橋による解説は，実際の授業を記述したものではなく教科書をもとになされたものであることから，実際の授業でしばしば発生する授業内容に直接的に関わりのない事象が省かれた，理想的な過程の解説になっていると考えられる。加えて，高橋自身が国立大学附属小学校の教員経験をもつという経歴からも，高橋による「練り上げ」の解説の妥当性が期待できる。

古藤らは，「算数科の概念形成や問題解決などの授業において見られる子供の多様な考えを，指導のねらいや質に着目して」(古藤ら，1990，p.22）分類したものとして，表４－２の四つを挙げた。この表４－２の左が多様性の種類であり，コロンの右がその多様性に対する生かし方やまとめ方の指針である。そしてそれぞれを以下のように説明した。

表４－２　多様な考えの分類（古藤ら，1990，p.22）

Ⅰ．独立的な多様性	：それぞれの考えの妥当性に着目して
Ⅱ．序列化可能な多様性	：それぞれの考えの効率性に着目して
Ⅲ．統合化可能な多様性	：それぞれの考えの共通性に着目して
Ⅳ．構造化可能な多様性	：それぞれの考えの相互関係に着目して

「Ⅰ．独立的な多様性」は，子どもの発表する多様な考えが「数学的なアイデアとしては形式の上では妥当であり，かつ，互いに無関係の場合」(古藤ら, 1990, p.22）であり，「教師はそれぞれの考え方が数学的な考えとして優れている点を全員に納得させることが大切である」(古藤ら, 1990, p.26）とされる。「Ⅱ．序列化可能な多様性」は，子どもの発表する多様な考えが「数学的にみて，いちばんよい考え，次によい考え，…，というように，それのアイデアを効率性という見地から，序列化することができる場合」(古藤ら, 1990, p.26）である。「Ⅲ．統合化可能な多様性」は，「一般化や拡張の考えなどにしたがって，工夫し案出したいろいろな考えを，その方法，または結果に着目して，１つにまとめることができる場合」(古藤ら, 1990, p.28）である。古藤らは，この統合化の方法として「普遍化による統合」，「止揚化による統合」，「拡張化による統合」の三つを挙げた（表４－３)。「Ⅳ．構造化可能な多様性」は，「１つの課題に対する子供たちの解答は多様であるが，それらの考えはある観点からいくつかのグループにまとめることができ，さらに，それらのグループの間に関連性が認められ, 全体として１つの体系としてまとめることができる場合」(古藤ら, 1990, p.31）である。この場合はそれぞれの考えの関連を検討する中で「普遍化による統合」のように複数の考えを「同じもの」としてみなせる場合があるが，古藤らは，その見方が難しい場合には関連を示すに止めるのが望ましいとしている。

表４－３　統合化の方法（古藤ら, 1990, pp.28-30 を元に引用者作成）

普遍化による統合	いくつかの考えを，それらの間に共通に存在する性質に着目して，新しく別の観点を導入することによってまとめること
止揚化による統合	一見，対立し相反すると思われる２つの考えを，新しい見方を導入して１つにまとめること
拡張化による統合	いくつかの考えのうちの１つに着目して，他の考えをそれに含ませること

以上の古藤らによる分類において，「Ⅰ. 独立的な多様性」は生かすべき多様な考えの一つではあっても，これらの考えは組織されないので，その生かし方やまとめ方は「練り上げ」ではない。他方，その他の三つの多様性については，「Ⅳ. 構造化可能な多様性」の説明内でも統合が言及されているように，互いに関連のあるものであると考えられる。しかしながら，古藤らによるここでの説明は，分類されたそれぞれについて解説する形をとっているゆえに，この多様性どうしの関連を読み取ることが難しい。そこで以下では，高橋による「練り上げ」の解説を参照することで，これら三つの多様性どうしの関係を明確にする。

高橋は，小学校算数科教科書に記述された「混み具合」という具体的な教材を取り上げ，授業の流れを辿る形で，「練り上げ」及びその前後の活動ついて次のように解説している。

まず，問題場面として，図４－４が提示される。

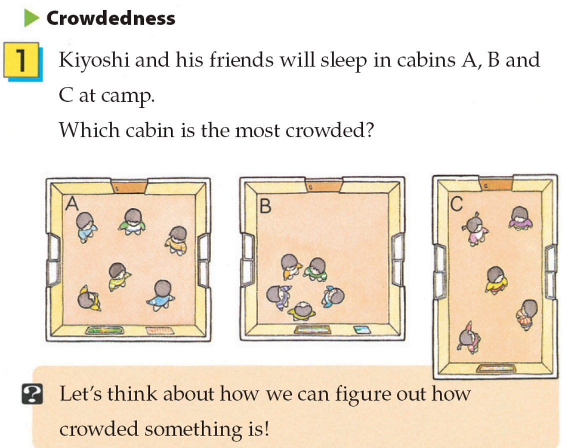


Figure 1. Which cabin is the most crowded?
Reprinted from *Mathematics for Elementary School 5B*. Tokyo, Japan: Tokyo Shoseki Co., Ltd. p.23 (Hironaka & Sugiyama, 2006)

図４－４　「単位量あたりの量」の導入における問題場面（Takahashi, 2009, p.5）

この図は，広さが等しい部屋 A と部屋 B，そして両部屋と比べると少し狭くて部屋 B と同じ人数の子どもがいる部屋 C によって構成されている。部屋 A と部屋 B、部屋 B と部屋 C はそれぞれ子どもの人数, 部屋の広さによって混み具合の比較ができる一方で, 部屋 A と部屋 C とでは一つの量による比較ができないようになっている。このように比較する量の整理に続いて，その量の具体的な値が表４－４のように示される。

表４－４　問題場面に追加される設定（Takahashi, 2009, p.5）

	Area (m^2)	Number of people
Cabin A	16	6
Cabin B	16	5
Cabin C	15	5

Table 2. Which cabin is the most crowded?
Reprinted from *Mathematics for Elementary School 5B*. Tokyo, Japan: Tokyo Shoseki Co., Ltd. p.24 (Hironaka & Sugiyama, 2006)

この問題場面及び数値設定は，児童による次のような解決を想定したものとされる。一つ目は, 人数を面積で割ることによって単位面積当たりの人数を求める方法である。二つ目は, 面積を人数で割ることによって一人当たりの面積を求める方法である。三つ目は，面積の二つの数値 16 と 15 の最小公倍数 240 を用いて，$240m^2$あたりの人数を求める方法である。四つ目は，人数の二つの数値 6 と 5 の最小公倍数 30 を用いて，30 人当たりの面積を求める方法である。

教師は，「練り上げ」に先立つ個人またはグループでの解決の時間に，児童の考えをもとにした議論の計画を立てる。また，児童に対して自分の考えの説明を促したり，児童の考えを板書することで，発表した児童以外もその考えの全てを見て理解できるようにするのを助けたりする。ただし，児童がそれぞれの解決方法に対して十分に考える機会を与えるために，答えの正誤については言及しないのが普通であるとされる。

「練り上げ」では，まず, それぞれの解決方法が比較され, 共通点や相異点が確認される。ここでは，一つ目の方法と二つ目の方法で割り算が用いられていることや，一つ目の方法と三つ目の方法がともに面積を揃えていることなどが着目される。この場面は，比較の際に比を用いることなどといった既習事項の確認や, 児童たちが自身の解決方法を正当化する場としても位置づけられている。

続いて,「練り上げ」では，それぞれの方法の利点と限界が児童たちによって確認される。具体的には，数値設定や部屋の個数が異なる問題場面などでの有効性が確認される。このこ

とをとおして，一つ目の方法や二つ目の方法のように，単位量当たりの量を考えることよさを児童たちが感得することがねらわれている。さらに，一つ目の方法と二つ目の方法を比較することによって，商が大きいほど混んでいることを示す一つ目の方法のよさも感得される。

この高橋による「練り上げ」の解説を踏まえると，古藤らが分類した多様な考えのうちの「Ⅲ．統合化可能な多様性」と「Ⅳ．構造化可能な多様性」の生かし方やまとめ方は，「練り上げ」における共通点や相異点の比較に位置づけることができる。また，「Ⅱ．序列化可能な多様性」については，「練り上げ」における利点や限界の確認に位置づけることができる。一方，このように「Ⅱ．序列化可能な多様性」に先立って「Ⅲ．統合化可能な多様性」と「Ⅳ．構造化可能な多様性」が生かされたりまとめられたりすると捉えると，「Ⅱ．序列化可能な多様性」として扱われる考えには，学習者から得られた考えそのもののみではなく，構造化や統合化によって整理された新たな考えも含まれると考えられる。このことは，高橋による例には含まれないものの，古藤らの分類に基づくと妥当な解釈であると考えられる。

以上の古藤らの分類と高橋による解説及びそれらの関連の解釈に基づき，本研究では問題解決型授業における「練り上げ」の構造を，次のように捉えることとする。まず，（N０）「練り上げ」に先立って，板書などによって共有された考えについての理解が促される。そして，（N１）その理解の上で，それぞれの考えの共通点や相異点が比較される。また，それぞれの考えの正当化もなされる。続いて，（N２）それぞれの考えの利点と限界が確認される。ここでは，より広い場面への適用などが，検討の際の着眼点となる。

第２項　数学的対象の美的性質の感得過程を視座とする「練り上げ」の構造の理論的評価

本項では，前項で整理した問題解決型授業における「練り上げ」の構造と，第３章で理論的仮説として導出した数学的対象の美的性質の感得過程を比較することで，「練り上げ」が算数・数学科授業における学習者による数学的対象の美的性質の感得を促す方法として機能しうるか否かについて，理論的に評価する。ここでは，第３章で定めた二つのモデルのうち，より一般性のある４局面モデルに基づいた考察を行う。

４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程の概要は，次のとおりであった。

(i) 数学的対象の構成要素間の関係を吟味することによって，「同値関係」または「擬同値関係」を「形式」として同定する過程。

(ii) 類似する数学的対象との比較によって，数学的対象の「本質」を直観する過程。問題解決の文脈で美的性質の感得がなされるのは，この直観に先立って問題の解や解決の見通しが得られている場合に限る。

(iii) 数学的対象の「本質」が成立する範囲を同定することによって，数学的対象の「全体」

を直観する過程。

(iv) 「本質」や「全体」が直観される以前の数学的対象と直観後の数学的対象との比較によって，数学的対象の「発展性」を実感する過程。

(i)の「形式」を同定する過程は，「練り上げ」における（N２）利点と限界の確認の過程に内包されている。(N２）において簡潔性や一般性を観点とした序列化を行うことで，数学的価値を生む「形式」が顕在化されると考えられるからである。(ii)及び(iii)の「本質」と「全体」を直観する過程は，主として「練り上げ」における（N１）数学的対象の異同の比較と，（N２）利点と限界の確認の過程に含まれる。(N１）の構造化や統合化において多様な考え等の異同を明確にすることや，（N２）の利点と限界の確認においてより広い文脈への適応性といった一般性が吟味されることによって, 異なる数学的対象間に共通する「本質」や,「本質」の成立範囲である「全体」が直観されると考えられるからである。この（N１）では数学的対象の正当性が吟味されていることから，問題解決の文脈で「問題の解や解決の見通しが得られている」という条件を満たしていると考えられる。(iv)の「発展性」を実感する過程は,「本質」や「全体」が直観された数学的対象と直観以前の数学的対象を比較することでなされるので,「練り上げ」の一連の過程を振り返ることで実現しうる。この「練り上げ」の振り返りは前項で確認した「練り上げ」自体には含まれていない。しかしながら,「練り上げ」は板書された考えを参照しながら進められること，問題解決型授業には「練り上げ」に続いて授業全体を振り返る「要点の強調とまとめ」が位置づいていることから,「練り上げ」の周辺の活動をあわせて考えることによって,「発展性」の実感も位置づけることができる。

以上を整理すると，問題解決型授業における「練り上げ」は,「要点の強調とまとめ」が続くことによって，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を学習者に促進する役割を構造的に備えるものになり得ると言える。

第３節　児童の意味づけに基づく問題解決型授業における「練り上げ」の構造の評価

第１項　調査の設計

(1) 調査の目的と方法

前節第２項で示したように，問題解決型授業における「練り上げ」は，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程を構造的に含んでいる。しかしながら，学習者にとっての「練り上げ」の構造が不明なままでは,「練り上げ」が数学的対象の美的性質の感得に寄与するか否かの判断はできない。なぜならば，学習者が捉える授業の構造が教師の捉え方と一致しているとは限らないからである（清水，2002)。そこで本研究では，学習者にとっての「練り上げ」の構造の記述を目的とした調査を実施することとする。この調査結果を用

いることで，前節までの考察で得られた「問題解決型授業における『練り上げ』は，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法である」という理論的仮説に対して，経験的な考察を行う。なお，ここでは同様に理論的仮説である４局面モデルに対する経験的考察は行わない。なぜならば，前節で確認したように問題解決型授業における「練り上げ」が４局面モデルを構造的に内包していることゆえに，学習者が４局面モデルの過程をとおした学びを実際に行なっていると想定されるからである。

学習者にとっての「練り上げ」の構造を明確にするためには，研究課題に基づいた質問項目が予め設定されつつも質問の形式や流れなどが開かれている半構造化インタビューが最適である。なぜならば，質問項目とその順序が固定される構造化インタビューや質問紙では，インタビュイーから得られた回答を掘る下げることができず，一方でインタビュイーによる自由な語りを求める非構造化インタビューでは，インタビュイーが自身にとっての「練り上げ」について詳細に語ってくれるとは限らないからである（Kvale, 2007）。

この調査では，インタビューに加えて，以下の三つの理由により，１単元についての一連の授業への参与観察を実施する。第１に，インタビュイーを選定するためである。インタビュイーには，自身にとっての「練り上げ」を語れることが求められる。授業の参与観察を行い，実際に展開された「練り上げ」に関与した学習者をインタビュイーとして選定することで，インタビュイーが語ることのできる「練り上げ」の存在を確保する。１単元の連続した授業を観察する理由は，問題解決型授業の構成要素が，１回の授業で網羅されるとは限らないからである（清水，2001）。第２に，インタビューを授業内容に基づいて具体化するためである。調査ではインタビュイーにとっての一般的な「練り上げ」の意味を問う必要がある。しかしながら一般的な質問では具体性の乏しい語りを導くことが懸念される。実際の授業に関連づけた質問からインタビューを展開することで，インタビュイーの語りを具体的で豊かなものにすることを意図している。なお，インタビューにおいては，「練り上げ」といった教授学的記述用語（清水，2018）を直接用いるのではなく，「比較」のように学習者にとっても一般的な用語を用いる。また，インタビュイーが質問内容を理解できていないと判断される場合には，適宜表現を変えて質問を繰り返すこととする。授業の参与観察を行う第３の理由は，インタビューに先立って授業の参与観察を行うことで，インタビュイーからの不信感をできる限り軽減し，より豊かな語りを引き出すためである。

なお，本研究では数学的対象の美的性質の感得過程を，学習者による認知的な営みのほか，感覚的な営みも含むものとして捉えている。このような感覚的な営みを解釈するためのデータ及びその分析方法についての議論は十分に蓄積されていない（Hannula, Pantziara, & Martino, 2018）。本研究では先行研究に倣い，言語データを主たるデータとして用いることとする（e.g., Antognazza et al., 2015）。

(2) 調査対象

調査の対象は，国立大学附属小学校第６学年１学級の児童である。この学級における授業を参与観察した上で，観察された授業における「練り上げ」に直接的に関与した児童を，インタビューイーとして選定する。国立大学附属小学校を選定した理由は，適切な「練り上げ」の確実な観察が期待できるからである。第６学年の児童を対象とする理由は，「練り上げ」についての豊かな経験を有していること及び自身の考えや感覚について説明できることを期待したからである。なお，本章第２節で確認したように，「練り上げ」が位置づいている問題解決型授業は，中学校でも行われていることが期待できる。ただし，小学校と中学校という異なる学校種の間で問題解決型授業や「練り上げ」についての異なる特徴があるという報告は管見の限りないので，本調査では代表として小学校及び小学生を調査対象にする。

(3) 観察者の役割

観察者（筆者）は，インタビューの設計，授業の参与観察，参与観察を経たインタビューの再設計と実施・分析，一連の記録を行う。参与観察では教室の後方からビデオカメラで記録するとともに，観察者は教室内を移動しながら児童の発言などをフィールドノーツに記録する。インタビューでは IC レコーダーに記録しつつ，音声データのみでの判断が難しい情報を中心にフィールドノーツにも記録する。

授業の設計に関しては，授業者に対して，「練り上げ」を観察したい旨と，数学的対象の実用性が強調されにくい「立体の体積」の単元が観察対象として望ましいことを伝えた[1]。その他の授業の設計や進行については積極的な関与はしておらず, 授業内外における児童の学習に対する積極的な介入もしていない。

(4) 半構造化インタビューの設計

本項（１）で述べた理由から，本研究では研究課題に直結する以下の３点のみを質問項目として固定した。１点目は，「練り上げ」の目的に関する質問である。これは，実用性の志向の程度を探るためのものである。ただし，「なぜいろいろな考えを比べるのか」のように直接的に目的を尋ねると，「先生に指示されたから」や「習慣だから」のような理由を返答されることが想定できる。そこで実際のインタビューでは，「比べることでどんないいことがあるのか」などのような尋ね方をすることにした。２点目は，「練り上げ」の所産に関わ

[1] 参与観察に先立つ打ち合わせにおいて，授業者からは，参与観察する授業の内容として「比例」と「立体の体積」の二つから選択できる旨を伝えられた。そこで，数学的対象の実用性が強調されやすい「比例」の単元ではなく，「立体の体積」を選択した。これは，実用性を求めることが美的性質の感得を阻害するからである。

る質問である。これは数学的対象の「本質」や「全体」の直観や,「発展性」の実感がなされているかを確認するためのものであり，この質問を皮切りに,「練り上げ」をどのような構造で捉えているかを探るためのものである。３点目は,「練り上げ」の所産の根拠に関わる質問である。これは，数学的対象の「形式」を，この根拠として捉えているかどうかを問うものである。

(5) インタビュー結果の分析方法

まず，参与観察した授業において，複数の考えが黒板等で提示された場面を特定して「練り上げ」を同定するとともに，インタビュイーを選定する。インタビュー結果の分析は,（４）に記した３点に関する児童の語りを整理することで行う。語りの解釈については，インタビュー中に直接本人に確認することで，妥当性を得る（Kvale, 2007)。また，複数名のインタビュー結果を比較することで，児童に意味づけられた「練り上げ」として記述する。

第２項　問題解決型授業における「練り上げ」についての児童による意味づけの実際

(1) 授業の概要と授業で用いられた数学的対象に関する美的性質

授業は 2017 年 9 月 20 日から 29 日の間で計 6 回実施された。単元は「立体の体積」であり,［底面積×高さ］という求め方が以下のように考察された。

まず，第１時では,「立体について調べられることは何か」という問いに対して，既習事項を確認しながら体積を求めるという問題が設定された。第２時では，直方体の体積を求めるために，単位立方体のブロックを積んで作成した直方体について，ブロックの個数の数え方が探究され（図４－５)，一つずつ数える方法の他，かけ算を用いることで一つずつは数えないでブロックの個数を求める複数の方法が，児童の考えをもとに提示された。

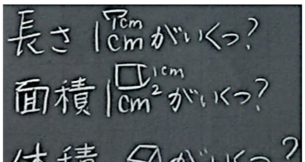


図４－５　量の求め方（板書）

第３時では,［底面積×高さ］で求める方法について，他の立体への一般化可能性が考察の対象となり，第４時では底面が平行四辺形や等脚台形，直角を内角にもつ台形の場合，第５時では一般の台形が検討され，第５時ではさらに，三角柱の体積を直方体に帰着させて求

める方法が探究された。第６時には，円柱を対象に，［底面積×高さ］によって体積が求められるかどうかが探究された。

この授業のように立方体の体積の求め方を他の柱体へと広げていく展開では，例えば次の「形式」，「本質」，「全体」及び「発展性」が特定できる。

まず「形式」については，並べられた単位立方体の一つの方向における個数と辺の長さや，１段分の単位立方体の個数と面積が，求積という場面において，それぞれ同じものとみなせるという関係である（図４－６）。これは先述の「擬同値関係」である。なぜならば，例えば「１段分の単位立方体の個数と面積」では，「１段分の単位立方体の個数」から「面積」への対応は写像になっているのに対し，面積が無理数の場合には「面積」から「１段分の単位立方体の個数」への対応が写像になっていないので，対称律が成立しないからである。

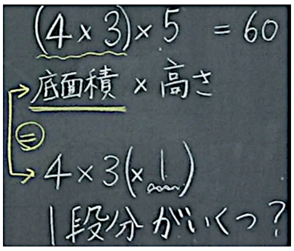


図４－６　底面積と「同じ」とみなすことの確認（板書）

また，底面の四角形を一般化する過程で用いた等積変形を可能にする面積の加法性は，変形の前後の面積の相等関係であるので，「同値関係」である。

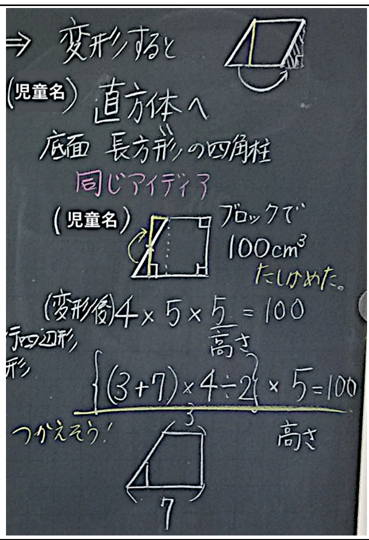


図４－７　授業で扱われた等積変形の例（板書，児童名の部分は編集した）

続いて「本質」については，n（≧2）次元の体積が n-1 次元の体積と残りの 1 次元の長さから求められることであり，特にここでは体積が面積と長さから求められることである。授業では，第２時に議論の対象となった式が第３時のはじめに教師によって（公式１）[たての長さ×横×高さ]，（公式２）[底面積×高さ] としてまとめられ，その後の考察で用いられた。

「全体」は，ここでは [底面積×高さ] という求め方が適用できる範囲である。授業では，底面が平行四辺形や台形の四角柱，三角柱，円柱の順に拡げられた。

「発展性」は，直方体を対象としていた初期の方法と，一般的な柱体に適用できることが確認された方法との比較から得られる，[底面積×高さ] という方法の広がりや深まりといった感覚である。

(2) 参与観察した授業における「練り上げ」の同定

全６回の授業において，「練り上げ」は３回同定された。１回目は第２時において，単位立方体の個数の求め方に関する多様な考えが比較・検討された場面である。はじめに，教師が指名した児童が一つずつ数える方法を提示し，続いて「数えない方法」として，別の児童が [底面積×高さ] による方法を提示した。この後者の方法については，底面積に当たる計算結果が，今回の場合には単位立方体を並べた１段分の合計個数であること，段数が高さに一致することが確認された。その後，縦・横・高さのブロックの個数に着目して掛け算を利用する複数の方法が別の一人の児童から提示され，これら三つの量がそれぞれ辺の長さに一致していること，体積をうまく求めるために，個数が長さや面積に置き換えられていることが確認された。

２回目の「練り上げ」は，第３時の開始時刻から，第６時の終了時刻に及ぶものであり，縦・横の長さと高さの積で求める方法と，[底面積×高さ] による方法が，他の立体でも使えるかという一般性という観点から比較・検討された。第３時の開始時刻から 13 分後に，三つの長さの積で求める方法は，底面が平行四辺形や台形である四角柱には適用できないことが，児童から指摘された。その後は，[底面積×高さ] による方法がどのような立体図形に適用できるかについて，一般の四角柱，三角柱，円柱という順に検討された。

３回目の「練り上げ」は，第４時において，底面が平行四辺形または直角を内角にもつ台形である四角柱の体積の求積方法が，次の二つのように統合された場面である。第１は、いずれの四角柱も等積変形を経て立方体や直方体に帰着させて求められたという観点から統合された場面である。第２は，この体積の求積方法が，一般の四角形の面積の求積方法と，等積変形を用いるという観点から統合された場面である。なお，この３回目の「練り上げ」は，２回目の「練り上げ」の過程で行われた。

(3) インタビューの実際

調査では，第２時と第４時の「練り上げ」に直接的に関与した４名の児童（C1〜C4 とする）をインタビュイーとして選定した。この二つの「練り上げ」は比較的短い時間で行われており，その構造が児童にとっても捉えやすいと考えたからである。

C1 は，第２時の「練り上げ」において，縦・横・高さのブロックの個数に着目して掛け算を利用する方法を提示した児童である。C2 は，第３時において底面が平行四辺形である場合についての着想を得ており，第４時の「練り上げ」において平行四辺形を先に考えるという指針を提示した児童である。C3 は，第４時の「練り上げ」において，等脚台形の場合を提示した児童である。C4 は，第４時の「練り上げ」において，直角を内角にもつ台形を長方形に等積変形する方法を提示した児童である。

C1 と C2 に対しては，第３時の授業終了後と一連の授業終了後，C3 と C4 に対しては，一連の授業終了後にインタビューを実施した。インタビュー時間は最短で３分 53 秒，最長で 17 分８秒であった。

(4) 調査結果の分析

C1 は，１回目のインタビューにおいて，「練り上げ」の対象となる直方体の体積を表す式のうち，一側面に面する単位立方体の個数を表す部分を括弧で囲った式について，次のようにその価値を表現した。

C1：	一つの式でまとめられた方が，改めて見たときに，ああそうだっていう感じでわかる

また，２回目のインタビューでは，計算を省略できることや見返しやすいという意味でのスマートな数学的対象を「練り上げ」の所産とした。

C2 は，２回目のインタビューで，「練り上げ」のメリットについて次のように述べた。

C2：	一人の式と，二人目の式のいいところが，組み合わせられるかもしれない

加えて，「練り上げ」ではその組み合わせた結果を応用すると説明した上で，複数の解法を探究する理由として，次を挙げた。

C2：	もっと簡単にできる方法はないかなと

C3 は,「練り上げ」の意義について,

C3：	比べると，まあ，あの，ぱっと見だと違うやり方だとか，思ったりもするんだけど，ちゃんと比べたりすると，実は一緒だったとか，似てるようでも，ちょっとやり方が違うってことも，わかるから，比べるってことは大事だと思う

と説明した。また，このような異同を観点とする比較の他に，手続きの速さを観点とする比較も行なっていると述べた。そして，この速さの根拠は，不要なステップの有無であった。

C4 は,「練り上げ」の意義について,

C4：	なんか，出してそのままだと，いい方法がどれなのかっていうのを選ばなくちゃいけないんだけど，だけどなんかこういう時にはここ，これ使った方がいいよねっていうのを授業で明確にするから，なんか，テスト問題出てきたら，じゃあこれ使おうっていうのがすぐ選べる

と説明した。また，自身で複数の考えを考案する際には，既に得られたものの欠点を見つけて直す，グレードアップを目的にしていると説明した。改善の観点としては，速さとわかりやすさを挙げた。

以上の結果に基づくと, 児童は以下のように「練り上げ」を意味づけていると解釈できる。

まず，目的に関して，その所産を得ること自体を目的として意味づける場合と，実用的な所産を得ることを目的として意味づける場合がある。前者については，既に正しい解や解法が判明している問題に対して, 全てのインタビュイーの児童が手続きの速さやわかりやすさを有する所産を得ることを「練り上げ」の目的として説明したことから判断できる。一方で,後者については，C4 がテストでの実用性を求めていることに基づいている。問題解決型の授業では,「練り上げ」をとおして教科内容が指導される（Takahashi，2008)。このことはすなわち,「練り上げ」の所産がテスト等で問われることを意味しており，問題解決型の授業が日々の授業のベースになっている学級では,「練り上げ」の所産がテストにおける実用性を有していると判断することは，C4 や他の児童に限らず，学習者にとって自然であると考えられる。

次に, 所産に関して, 速さやわかりやすさという観点から優れた数学的対象が得られるという意味づけの他，他の場面に応用できる新たな着想や，複数の考えの間の関係，そして上記のことに関連してテストで実用的な数学的対象が得られるという意味づけがなされてい

る。この点についての表現は特に多様であったが，次の所産の根拠とも関連して，数学的な内容に関する所産によって「練り上げ」を意味づける児童と，必ずしも内容とは関連づけていない，わかりやすさなどの性質を所産として「練り上げ」を意味づける場合がある。

最後に, 所産の根拠に関しては, C1 がわかりやすさの根拠を式がまとまっていることで, C3 が速さの根拠を不要なステップの有無で説明していた。特に C3 は,「練り上げ」の意義で複数の考えの異同が明確になることを挙げていたことからも,「練り上げ」の所産を数学的な根拠があるものとして意味づけていると考えられる。しかしながら，両者ともに，なんらかの意味での「同じ」と見なせる性質への言及はなかった。また，C2 と C4 については,「練り上げ」の所産の根拠を明確に捉えていることが確認できず，必ずしも数学的な根拠と関連づけて意味づけてはいないと推察できる。

第３項　児童の意味づけに基づく問題解決型授業における「練り上げ」の構造の評価

(1) 児童に意味づけられた「練り上げ」に潜在する数学的対象の美的性質の感得過程の構造

前項で記述した児童による「練り上げ」の意味づけから，児童にとっての「練り上げ」には，数学的対象の美的性質の感得過程が以下のような形で潜在していると考えられる。

はじめに，数学的対象の「形式」の同定過程は次のとおりである。参与観察をした授業では，単位立方体の個数を立体の辺の長さや面積に置き換える考えが明示されており，これが簡潔で一般的な求積方法の根拠となっていることから，数学的対象の「形式」は同定されていたようであった。同様に，３回目の「練り上げ」では児童たちが等積変形を多用しており，体積や面積がもつ「同値関係」である加法性も同定されているようであった（図４ − ７）。

それにも関わらず，児童に意味づけられた「練り上げ」には，速い方法やわかりやすい方法の根拠を同定する過程は必ずしも位置づけられていなかった。特に，本研究で「同値関係」や「擬同値関係」と称している「形式」への言及は得られなかった。すなわち，児童にとっての「練り上げ」は，数学的対象の「形式」を同定する構造を有しているとは限らない。

続いて，数学的対象の「本質」と「全体」の直観過程は次のとおりである。C2 や C3 が意味づけたように，数学的対象どうしの組合せや関係を検討する過程では，異なる数学的対象間に共通する性質が抽出されうる。この抽出された性質は，広い範囲で成立する数学的対象の性質であるので，この抽出過程は「本質」の直観過程になりうる。また，得られた「本質」を C2 のように応用していくことは，数学的対象の「全体」の直観過程になりうる。

しかしながら, 前項で記述したようなテストなどでの実用性を目的として共通する性質を抽出した場合には，これは数学的対象の美的性質の要素としての「本質」にはなり得ない。すなわち，児童にとっての「練り上げ」は，数学的対象の「本質」と「全体」の直観を促しうる構造をもつものの，その「練り上げ」の目的によっては美的性質の感得に寄与しないと

言える。

最後に，数学的対象の「発展性」の実感過程は次のとおりである。数学的対象の「発展性」の実感のためには，数学的対象の「本質」と「全体」が直観された後に，これらの直観以前の数学的対象を振り返る形で比較する必要がある。実際，参与観察した授業で［底面積×高さ］という求積方法が新たな立体に適用できるか否かを検討する過程では，元々の発想が振り返られ，安易には適用できないことが強調された。

しかしながら，このような過程が児童にとっての「練り上げ」に内在しているかどうかは確認できなかった。この結果はインタビューの方法論上の問題である可能性も考えられる。実際，関口（2013）は，「どう感じるか」といった種類の質問の意図が伝わりにくいことや，主観的になって明確になりにくいことを指摘している。ただし，どの児童からも広がりや深まりのような感覚についての言及が得られなかったのは事実であり，彼らにとっての「練り上げ」によって得られるものとして想定されにくい性質または感覚であると考えられる。すなわち，児童にとっての「練り上げ」は，数学的対象の「発展性」の実感を促す構造を有しているとは限らない。

(2) 数学的対象の美的性質の感得を促す方法としての「練り上げ」の構造の評価

上記の分析に基づくと，児童にとっての「練り上げ」は，美的性質の「無用性」に関わる認識次第で数学的対象の「本質」と「全体」の直観を促しうる構造をもつ一方で，これらの数学的根拠である「形式」の同定が十分に位置づいていないこと，数学的対象の「発展性」の実感を十分明示的に促すものではないと言える。したがって，前項で記述したような，児童によって感得されているスマートさや速さなどといった性質は，数学者が文化的に追求してきた簡潔性などの数学的価値とは異なりうる。なぜならば，学習者が感得する数学的対象の美的性質は，数学者が感得するものとは質的に異なりうるからである（Tjoe, 2016a）。このことは，学習者によって感得されている性質が，数学への学習意欲を喚起したり，発展的な考察の指針になったりするといった数学教育的価値と無関係である可能性を示唆している。

一方で，C3 のように，自身にとっての「練り上げ」を，本章第２節で定めた「練り上げ」の（N１）である数学的対象間の異同を検討する構造化や統合化によっても意味づけている児童にとっては，「練り上げ」は数学的対象の美的性質を感得する方法となりうる可能性がある。なぜならば，第３章で検討したように，数学的対象間の異同の比較は，数学的対象の構成要素間の関係の同定，すなわち「形式」の同定に繋がりうるからである。この場合には，「形式」は異なる数学的対象間の共通点，すなわち「本質」として同定されることも想定される。このように数学的対象の構成要素間の関係が「形式」として同定され，「本質」とし

て直観される場合については，第 5 章において詳細に検討する。

以上のように，問題解決型授業における「練り上げ」は，算数・数学科授業をとおして数学的対象の美的性質の感得を促す方法としては，必ずしも十分に機能するわけではないことが確認できた。一方，先行研究においては，複数の数学的対象の比較を促すことが，学習者による数学的対象の美的性質の感得の促進に寄与しうるという予想が立てられ，実践されている（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a; Tjoe, 2016a）。そして，この先行研究で採用された方法では，学習者が数学的対象の美的性質を感得しないことが確認されている。その結果と比較すると，問題解決型授業における「練り上げ」は，「形式」の同定や「発展性」の実感などに留意することで授業をとおして数学的対象の美的性質の感得を学習者に促しうるという点で，肯定的に評価することができる。すなわち，先行研究で提案されたような単純な比較による方法よりも，問題解決型授業における「練り上げ」の方が，数学的対象の美的性質の感得を促進する方法として優れた土台であることが明らかになった。

第 4 節　数学的対象の美的性質の感得を視座とする「練り上げ」の改善

児童にとっての「練り上げ」には，学習者が数学的対象の美的性質の感得を促す上で，以下の問題点があった。まず，テストなどでの実用性が強調されてしまいがちであること，次に，「形式」の同定過程が十分に位置づいていないこと，そして，「本質」や「全体」が直観された数学的対象と，直観以前の数学的対象の比較，すなわち「発展性」の実感過程が十分に位置づいていない可能性があることである。したがって，問題解決型授業における「練り上げ」をとおして学習者による数学的対象の美的性質の感得を促すためには，以下の点に留意することが重要である。

まず，実用性以外にも十分な価値をおくことである。「比例」の単元のように，問題解決の方法としての数学の価値が強調される単元では，数学的対象の美的性質が感得され難いことは予め想定されていた。一方で，本研究で参与観察した「立体の体積」の単元のように，数学を数学以外の問題に使う文脈が強調されにくい単元においても，学習者にとっては数学の実用性が強調されうることが示唆された。数学的対象の美的性質の感得を促すためには，中島（1982）が数学教育の目標を捉える観点の一つとして「創造的実践の体得と鑑賞」（中島，1982，p.29）を挙げたように，学習者にとってその時々の数学の学習自体が目的になるような授業が重要であることが再確認された。

次に，簡潔性や一般性といった数学的価値が数学的対象のどのような性質から得られたものであるか，その根拠となる「形式」の同定を明示的に行うことである。先述のように「練り上げ」では簡潔性や一般性を観点とする比較・検討が行われており，この構造は児童にとっての「練り上げ」にも位置づいていた。しかしながら，何をもって簡潔と捉えるかは，個々

の児童で様々であった。一般的な意味での簡潔性などの性質は主観的に判断されるものであるとしても，数学者たちが感得しているような美的性質を特徴づける簡潔性などの数学的価値の感得を促すためには，「同じ」と見なせる数学的対象の構成要素間の関係に根ざす数学的価値の感得を促す必要がある。ただし，このように根拠を追究することについての課題が見られたことは，調査対象が小学校算数科授業及び小学生であったことに由来する可能性がある。この可能性についての検証は今後の課題とする。

最後に，「練り上げ」の所産を元の多様な考えや既習事項と比較することである。この比較は，問題解決型授業において「練り上げ」の後に位置づく，授業全体を振り返る「要点の強調とまとめ」においてなされることが期待されたものであり，かつ，参与観察した授業においても実践されていることが確認されたものである。したがって，数学的対象の美的性質の感得を促すための方法としての「練り上げ」を改善する新たな視点ではないものの，そのための方法として不可欠な過程であると推察される。本研究で実施した調査において，児童にとっての「練り上げ」に「発展性」の実感過程が位置づいていることが確認できなかったことを踏まえると，授業では，「練り上げ」の所産を元の多様な考えや既習事項と比較し，その比較によって得られる感覚を明示的に取り上げるなどといった工夫が必要であることが示唆される。

第４章のまとめ

本章では，第３章で同定した数学的対象の美的性質の感得過程についての二つのモデルのうち４局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を解明することが目的であった。この目的を達成するために，数学的対象の美的性質の感得に関する数学教育研究において実証的に得られた知見について，国際的な研究の知見と日本の中学生や高校生を対象に行われた研究の間の差異に着目し，そのような差異の要因として日本における算数・数学科授業の特徴とされる問題解決型授業，特にその構成要素の一つである「練り上げ」に焦点を当てた理論的考察及び実証的考察を展開した。

第１節では，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得に関する先行研究の概観をとおして，この美的性質の感得に関する日本の学習者の特異性を指摘した。海外でそれぞれの国の大学生や高校生などを対象に実施された先行研究では，非数学者である学習者が，数学の問題解決において単純性などの数学的価値に関する数学的対象の美的性質を追求しようとせず，また，感得できないことが実証的に主張された。この知見に対して，筆者がこれまでに実施してきた日本の中学生や高校生を対象とした研究では，数学の問題の解決方法の簡潔性を追求する中学生の姿や，数学の問題の解の簡潔性や的確性を追求する高校生の姿が記述されていた。また，全国学力・学習状況調査の結果を参照したところ，授業中に「もっと簡単に解く方法」を考える小・中学生が回答者全体に対して８割前後の割合で存在していた。すなわち，筆者が実証的に記述したような日本の学習者の姿は，日本で広く見られる姿であり，国際的な知見と比較すると特異な特徴であることが確認できた。

第２節では，この日本の学習者の特異性を日本における特徴的な授業方法である問題解決型授業の「練り上げ」に由来するものとして捉えることの妥当性を確認した。はじめに，先行研究に基づいて問題解決型授業を構造的に捉えた上で，この授業型の構成要素の一つである「練り上げ（解決方法の議論）」に焦点を当てて，先行研究に基づいてこの「練り上げ」の構造を次のように捉えることにした。

（N０）「練り上げ」に先立つ，板書などによって共有された考えについての理解

（N１）共有された考えの共通点や相異点の比較と正当化

（N２）それぞれの考えの利点と限界の確認

続いて，数学的対象の美的性質の感得過程の４局面モデルとの対照によって，この感得過程が上記のように捉えた「練り上げ」を含む問題解決過程に構造的に含まれていることを確認した。すなわち，問題解決型授業における「練り上げ」が学習者による数学的対象の美的性質の感得を促しうることを，理論的に示した。

第３節では，「学習者が捉える授業の構造が教師の捉え方と一致しているとは限らない」

という立場にたち，学習者にとっての「練り上げ」が，数学的対象の美的性質の感得を促す構造を有しているか否かについて実証的に検討した。その結果，理想的な形で問題解決型授業が実践されている小学校算数科の授業への参与観察と，その授業に参加する児童に対するインタビュー調査をとおして記述した児童にとっての「練り上げ」は，次のような特徴をもっていた。第1に，参与観察した観察者の目からは明示的に授業で扱われていた数学的対象の「形式」について，その同定の過程が児童にとっての「練り上げ」には位置づいていないことである。このことは，児童が感得していた「スマートさ」などの性質の根拠となる数学的概念が児童によって明確に自覚されていないことから確認された。第2に,「練り上げ」をとおして新たな数学的概念を学習する問題解決型授業では, 児童がテストを想定して学習をすることがあるということである。このことは，実用性が重視される数学的内容に関する授業ではなくても，数学的対象の美的性質の感得に不可欠な「無用性」が損なわれる可能性を示唆している。第3に，参与観察した観察者の目からは明示的に授業で扱われていた数学的対象の「発展性」の実感に関する過程が，児童にとっての「練り上げ」には必ずしも位置づいていないことである。以上の分析結果を踏まえて, 問題解決型授業における「練り上げ」が，算数・数学科授業をとおして数学的対象の美的性質の感得を促す方法としては，必ずしも十分に機能するわけではないことを確認した上で，先行研究で提案されてきた方法と比べると優れた土台であることを主張した。

第4節では, 第3節までの実証的な検討の結果を踏まえて, 問題解決型授業の「練り上げ」を4局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法とするために必要な改善案として，次を提案した。第1に，数学的対象の実用性以外にも十分な価値をおき，学習者にとってその時々の数学の学習自体が目的になるような授業を展開することである。第2に，簡潔性や一般性といった数学的価値が数学的対象のどのような性質から得られたものであるか，その根拠となる「形式」の同定を明示的に行うことである。第3に，「練り上げ」の所産を元の多様な考えや既習事項と比較することである。この比較は従来の問題解決型授業においても実践されていることが想定できるが，その比較の実践に加え，比較によって得られる感覚をも授業で明示的に取り上げるなどといった工夫を施すことが, 学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する上で効果的であると考えられる。

第５章

３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得の促進

第３章では，第２章で検討した本研究の理論的枠組みに基づく理論的仮説として，数学的対象の美的性質の感得過程の二つのモデルを同定した。すなわち，(i)数学的対象の「形式」を同定する局面，(ii)数学的対象の「本質」を直観する局面，(iii)数学的対象の「全体」を直観する局面，(iv)数学的対象の「発展性」を実感する局面の４局面からなるモデルと，この(i)と(ii)の局面が重なった３局面モデルである。そして第４章では，この４局面モデルに焦点を当てた実証的な考察を行うことで，問題解決型授業における「練り上げ」をもとに，数学的対象の美的性質の感得を促す方法を提案した。

本章では３局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法の解明を目的とした実証的・実践的な検討を行う。このモデルには「形式」と「本質」が同一の数学的概念であるという限定があることから，調査方法を第４章よりも詳細に設計する必要がある。はじめに，先行研究で試された数学的対象の美的性質の感得の促進方法を批判的に検討することによって，本研究における促進方法を理論的に導出する（第１節）。続いて，この促進方法を理論的仮説とする調査を実施し，教授的介入を受けた学習者がどのように問題解決を遂行するか，特に，数学的対象の美的性質を感得するのであればどのような過程で感得するかを記述し，３局面モデルと促進方法についての二つの理論的仮説との対照を行う（第２節）。そして，この対照の結果を総合的に考察し，その結果に基づく改善案を導出することで，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得の促進方法の解明を目指す（第３節）。

第１節　３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促す方法の理論的導出

第１項　「解法の比較の促進」の限界

1970 年代後半から盛んに行われた数学の問題解決に関する研究では，数学の専門家と初学者の問題解決過程の比較をとおして数々の規範的な思考方法や態度などが浮き彫りにされた（Lester, 1994）。そしてその研究の文脈の一端として，初学者にない数学者の特徴として，問題の解や解決方法の美的性質に着目することが挙げられた（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a ; Silver & Metzger, 1989）。

数学の問題解決に関する研究では，研究者は調査対象者の問題解決過程を観察してデータを収集することに専念する場合が多く見られる一方で，その問題解決に意図的に介入してその反応をも観察する研究も行われている。数学的対象の美的性質の感得に焦点を当てた研究で，この意図的介入を先駆けて行ったものは，ドレイフスとアイゼンバーグによるものである（Dreyfus & Eisenberg, 1986a）。

ドレイフスとアイゼンバーグは，一つの問題に対する二つの解法を例示して比較することをとおして，問題解決過程で顕在化される数学的対象の美的性質を，性質とその生起順序によって次のように定めた。すなわち，「明瞭性（clarity）→単純性（simplicity）→簡潔性（brevity）→簡約性（conciseness）→構造（structure）→力強さ（power）→巧妙性（cleverness）→意外性（surprise）」（Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.4）である。そして，大学の水準の数学を学ぶ教員養成課程の３年生および大学院１年生を対象として，問題解決過程及び「美しい解法を提示して比較を促す」（以降，「解法の比較の促進」とする）という介入の結果の観察を行った。そしてその結果について次のように述べている。

> ごく稀な例外を除いて，生徒たちは美しい（elegant）解を思いつかなかっただけでなく，彼らが思いつくという期待もできなかった。彼らに美しい解が提示された際，彼らの反応は数学者による反応と同じではなかった。すなわち，生徒たちは，両方の解法が問題の解を構成することを理解していたにも関わらず，彼らが自分自身で思いついた解法以外のより魅力的な美しい解法を見つけなかった。彼らは解法の美的な優越性をつかみ損ねた。（中略）二つの適切な解法に直面した際，彼らの多くは美しい解法と平凡な解法を区別できなかった。彼らは美的な価値ではなくむしろ実用的な価値に基づいて判断をしていた。
>
> （Dreyfus & Eisenberg, 1986a, p.7，下線は引用者）

ドレイフスとアイゼンバーグは，数学者を対象としてこの調査を実施しておらず，上の引用中の「数学者による反応」は明確ではない。しかしながら，この調査によって，大学レベ

ルの数学の学生であっても，複数の解法を比較するだけでは数学的対象の美的性質を感得することができないのみならず，複数の解法を美的性質の観点から評価しないということが記述されたのである。ドレイフスとアイゼンバーグが定めた数学的対象の美的性質は，本研究における定義と完全に一致するものではないものの，氏らが交換可能性（本研究における対称性）や比例によって例示した「構造」という観点[1]は，本研究における構成要素間の「同値関係」との類似概念であると考えられる。したがって，構成要素間の「同値関係」が主要な観点に位置づけられている３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を学習者に促すにあたって，ドレイフスやアイゼンバーグが採用した「解法の比較の促進」という介入方法では不十分であると推察できる。

ドレイフスとアイゼンバーグが採用した「解法の比較の促進」という介入方法が，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促す上で不十分であることは，チョー（H. Tjoe）が行った高校生と数学者を対象とする次の調査の結果からも推察できる（Tjoe, 2016a）。

チョーは，複数の解法がある三つの数学の問題について，それらの解法を数学者に提示して「数学者にとって美しい解法」を定めた。その上でこれらの問題を数学的に熟達した才能豊かな高校生に課し，その問題解決過程を観察するとともに，「解法の比較の促進」という介入の結果の観察を行った。そしてその結果について次のように述べている。

> 生徒たちの大多数は数学者たちが最も好んだ方法を理解することが難しくないと述べていたにも関わらず，他の解法よりもその解法を好んだのはほんの数名のみであった。数学者たちによる好ましい解法の選択に同意を示した生徒たちでさえ，それらの方法の美的な価値についての適当な説明をすることはほとんどできなかった。（中略）明らかに，数学者たちが好んだ方法は，生徒たちに対して，それらの方法がもつ数学的な論の深遠な構造という意味での「美しさ（beauty）」を訴えかけなかった。（中略）３人の専門の数学者たちが「美しい」解法が同定された後でより一層の満足感を示した一方で，９人の生徒たちは一般的に，実行可能な解法がその問題に答えることが一旦証明されてしまえば，それがどんな解法であっても，問題解決過程を止めた。専門の数学者たちが数学における美（beauty）を単純性（simplicity）や独創性（originality）の包括的な

[1] ドレイフスとアイゼンバーグは，この論文の中で「構造」という語について一般的な定義を与えておらず，交換可能性や比例が例であることについても直接的には言及していない。その代わり，氏らはバーコフ（Birkhoff, 1956/2000）を参照することで，この「構造」という観点を説明している。バーコフは数学的対象の美的性質を秩序に対する複雑さの割合によって表現しており，この秩序の構成要素の実際の型として，繰り返し（repetition）や対称性などの形式を挙げている。ドレイフスとアイゼンバーグはこの「秩序の構成要素」のことを「構造」と呼んでいることから，氏らにとっての「構造」は，対称性などの形式であることが窺える。

結果として見たのとは異なり，生徒たちは数学的な美しさ（elegance）を，問題解決に要する時間や手数という面で効率的な方法のみにしか見い出さなかった。

（Tjoe, 2016a, pp.280-281）

以上のように，ドレイフスとアイゼンバーグやチョーが実施した調査においては，大学生や高校生が導出した「美しくない」数学的対象と，他者が提示した「美しい」数学的対象との比較が促されており，いずれの調査でも学習者は数学者が感得している数学的対象の美的性質を感得しないと結論づけている。また，ここでは学習者が「美しい」数学的対象が正しいことを理解していることが，美的性質の感得に寄与していないことを示唆している。

本研究の理論的枠組みにおいても，数学的対象の美的性質の感得に，「本質」と「全体」が直観される前後の数学的対象の比較による「発展性」の実感を位置づけている。すなわち，「美しくない」もの，または「美しさが顕現していない」ものと「美しい」ものとの比較を位置づけている。一方，本研究においてはこの比較される数学的対象を，学習者が教師の介入を受けながらも「考え出す」ものとしていることが先行研究と異なっている。したがってこの差異を明確に反映することを視点として，効果的な促進方法を導出することにする。

第２項　「比較対象の系統的提示」による感得の促進

本研究では，ドレイフスとアイゼンバーグ（Dreyfus & Eisenberg, 1986a）やチョー（Tjoe, 2016a）が採用した「解法の比較の促進」という数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を改善した方法として，次の四つの教授的介入によって構成される方法（以降，「比較対象の系統的提示」と呼ぶ）を定める。

第１の教授的介入（Ｍ１）は，「同値関係」を保存して条件を変更した場合，または「同値関係」が保存されないように条件を変更した場合を，考察の対象として学習者に提示することである。この教授的介入は，ブラウンとワルター（Brown & Walter, 2005）の What-If-Not 方略を以下のように意図的に方向づけた上で，学習者が行うように促すものである。

What-If-Not 方略は，考察している数学的対象の属性に対して「もしそうでなかったら」と問うことをとおして，元の数学的対象を一つの全体と捉えた上で，属性を変えてできる他の数学的対象との関係を理解する方法である（Brown & Walter, 2005)。「同値関係」が保存された他の数学的対象を考察することは，共通する「同値関係」に着目する契機になると考えられる。また，「同値関係」が保存されていない数学的対象を考察することは，元の数学的対象に「同値関係」が成立していることを際立たせることに加え，「全体」が満たす条件を明確にさせると考えられる。さらに，第２章で論じたように， What-If-Not 方略はその対象に「発展性」をもたらし得る方法であるので，このＭ１を受けた探究過程は「発展性」

の実感の素地にもなる。このように，Ｍ１は数学的対象の美的性質の感得過程の全ての局面に関して遂行の素地を与えるものである。しかしながら，この想定は，新たに与えられる数学的対象と元の数学的対象が比較されることを前提としている。そこで，そのような比較が行われない場合に，次の二つの介入を行う。

第２の教授的介入（Ｍ２）は，「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問うことである。この介入は，共通点という具体的な観点による比較を促すことで，「同値関係」の「本質」としての直観を促すものである。ただし，この介入を受けて特定される共通点は，「同値関係」には限られない。したがって，必要に応じて再度Ｍ１を行い，比較させる数学的対象を追加する。

第３の教授的介入（Ｍ３）は，「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問うことで，「全体」の直観を促すことである。この介入には，「同値関係」が成立しない範囲を問うことも含める。

第４の教授介入（Ｍ４）は，「同値関係」の同定と直観，及び，「全体」の直観がなされた数学的対象と元の数学的対象の比較を促すことである。考察対象が「全体」として広がることで，数学的対象には「発展性」が付与される。この教授的介入は，その「発展性」の実感を促すものである。なお，本研究ではこの問題解決を終えたとも捉えられる局面でなされる比較も，一連の問題解決過程に含めて捉えることとする。

以上に加え，必要に応じて解決を支援する介入も適宜行うこととする。なぜなら，本研究では数学的対象の美的性質を，問題の解や解決の見通しが得られた後に感得されるものとして捉えているからである。

第２節　高校生ペアによる数学の問題解決過程を事例とした複数事例研究の展開

第１項　　調査の設計

(1) 調査目的

第３章において理論的仮説として設定した数学的対象の美的性質の感得過程についての３局面モデル及び前節で定めたその促進方法である「比較対象の系統的提示」は，ともに理論的仮説として設定したものであった。したがって，思考過程への教授的介入であるこの「比較対象の系統的提示」を受けた学習者が実際にはどのような思考等を行うのか，そしてその実際の過程においてこの教授的介入はどのような効果を発揮するのかについては，実践的な調査をとおして吟味する必要がある。

この要請を受け，本研究では「比較対象の系統的提示」という教授的介入を受けた学習者が，どのような過程で数学の問題解決を行うか，その詳細な過程の記述を目的する調査を実施する。

(2) 調査方法

調査結果を分析することで教授的介入の効果について考察し，数学的対象の美的性質の適切な促進方法を解明するためには，問題解決過程の詳細が不問になる量的研究ではなく，事例を詳細に分析する質的研究を実施する必要がある。

このような事例研究では，その成果が一般性を有するか否かという「外的妥当性」（Yin, 2014, p.48）を得るための方法として，サンプリングについての方法論に支えられる統計的一般化ではなく，分析的一般化が採用される（Yin, 2014）。統計的一般化が母集団への一般化を目指すのに対し，この分析的一般化では事前に設定された理論との対照によって，理論への一般化が目指されるのである。

この分析的一般化は，次のような「追試の論理（replication logic）」（Yin, 2014, p.57）によって支えられている。「追試の論理」とは，同じ理論に基づく複数の事例を対象とする研究を実施することで，その理論及び理論に関する主張の外的妥当性を高めることができるというものである[2]。複数の事例は，それぞれが理論と照らし合わされ，理論を支持するか修正するかどうかが検討される。そしてそれら複数の単一事例研究の成果を総合することによって，外的妥当性を保証するのである。本研究ではイン（R. K. Yin）に倣い，このように複数の単一事例研究を総合する研究を，複数事例研究（multiple-case studies）と呼ぶことにする。

インはこの「追試の論理」を，単一事例実験の方法論について詳述した Hersen and Barlow（1976）と同様なものとして説明する。バーロー（D. H. Barlow）とノック（M. K. Nock），ハーセン（M. Hersen）（Barlow, Nock, & Hersen, 1976/2009）は，複数事例による実験の追

---

[2] イン（Yin, 2014）は，複数事例研究を実施することなしに一般化されうる単一事例研究の事例の条件として以下の五つを挙げ，逆に以下の条件を満たす事例の場合には複数事例によって研究を設計すべきでないことを注意している。

① 確かな理論に対して決定的（critical）な場合
② 極端な（extreme），または稀な（unusual）出来事である場合
③ 慣例的（common）な場合
④ 開拓的（revelatory）な場合
⑤ 長期的（longitudinal）な目的がある場合

本研究の理論的仮説には，その射程として多様な数学的対象や発達段階の学習者が含まれるため，単一事例は決定的ではない。また，数学的対象の美的性質の感得を意図的に促しているという点で，極端または稀な事例にはならないように設計している。さらに，第 1 節に記述したように，数学的対象の美的性質の感得は教授的介入なしにもなされるような慣例的なものではない。加えて，「開拓的」とは，科学的な研究の対象にはなっていないながらもよく知られた事象が研究対象である場合を指すので，④の開拓的にも該当しない。そして，本研究で扱う事例は，複数の時点の変容が捉えられるほど長期的なものではない。以上から，本研究は単一事例から分析的一般化を目指す場合に該当しない。

試を，直接的追試，系統的追試，臨床的追試の 3 段階で説明している。ここで直接的追試とは，「同一研究者または同一研究グループによって特定の状況で（例えば，病院，診療所，教室）特定の問題行動（例えば，広場恐怖症，脅迫的手洗い症）を持つ同種の被験者に対して一定の手続きを運用すること」（Barlow, Nock, & Hersen, 1976/2009, p.308）である。続く系統的追試とは，「一連の直接的追試で得られた知見に対して，状況や行動修正者や問題となる行動，あるいはそれらの組み合わせを変化させることによって，追試を試みること」（Barlow, Nock, & Hersen, 1976/2009, p.322）である。そして臨床的追試とは，複合的な問題や症状のある「通常の」患者に対する手続きを開発するために，介入手続きをパッケージ化して追試することである。この臨床的追試は，「系統的にテクニックを構築する応用研究の試みとして最終段階のものであり，数年かけて行うべきもの」(Barlow, Nock, & Hersen, 1976/2009, p.337）とされる。外的妥当性を得るための「追試」は，このように長期的な計画による複数の単一事例研究の成果の総合によってなされることが求められる。

以上のインやバーローらの方法論に基づいて複数事例研究を展開するために，本研究では次の手順によって調査と分析を行うことにする。

まず調査では，バーローらのいう直接的追試と系統的追試を想定して，複数の調査課題に対する複数の学習者による問題解決過程を詳細に記述する。具体的には，異なる三つの調査課題を用意し，3 組の高校生ペア[3]による問題解決過程を記述することとする。調査課題の詳細は後述することとし，ここでは選定した調査対象者の情報及びその選定の理由を述べる。

調査の対象とした高校生は，東京都内の国立大学附属高校に所属する第 1 学年の生徒たちである。この高校は国内で有数の進学校であり，入学にあたって選抜試験を設けていることから，在校生には中学校までの既習事項についての十分な熟達が期待できる。また，一部の中高一貫校などのように所謂「先取り」のカリキュラムを編成した学校ではないことから，学校における既習事項としてはおおよそ学習指導要領どおりであることも期待できる。すなわち，この高校の生徒たちには，日本における中学校数学までの既習事項に熟達した学習者であることが期待できるのである。この調査対象者の熟達によって，学習者の既習事項への熟達度に起因する多種多様な問題を避けられることは，数学的対象の美的性質の感得に焦点を当てる本研究にとって非常に有益である。また，第 1 学年を選定したことで，高校における学習経験による数学的な熟達の差を最小限に抑えられることを期待した。一方で，このような数学的に熟達した学習者を「一般の学習者」として選定することに対する懸念も想定できる。しかしながら，先行研究で数学者と比較される非数学者は，大学院生や大学生，

[3] 調査対象を高校生にした理由については，調査課題の説明と併せて後述する。

5000 人の応募者の 5 %しか入学できないニューヨークの進学校の生徒たちなどであったことを鑑みると，数学的対象の美的性質の感得に関する研究の文脈上，この調査対象者たちを一般の学習者とみなすことができる。

調査の環境については次のように設定し，対象者の間で調査の実施日以外の環境の差異が極力少なくなるようにする。まず，調査課題にはペアで相談しながら取り組んでもらうこととし，記述はこちらで用意したワークシートにボールペンを用いて行ってもらうことにした。これらの設定はいずれも，問題解決過程を適切に記述するためのデータとして生徒たちの発話や記述内容を利用する意図によるものであり，先行研究で採用されてきた調査環境の設定方法である（e.g., 小松，2014；清水，2007a)。また，観察者（筆者）は，生徒たちの問題解決に区切りがついたと見なせるタイミング，または問題解決が行き詰ったと見なせるタイミングに，上記の教授的介入「比較対象の系統的提示」を行うことに加え，解決を支援するための介入と学習者の行為の意図を問うインタビューを行うことにした。教授的介入下における問題解決の場として授業を選択せずにこのような調査環境を設定した理由は，授業よりもその進行に影響を与える変数が少ない環境を設定することで調査を焦点化すること，及び，観察者自身が教授的介入を適切なタイミングで行いつつ，その影響をも含む学習者の問題解決過程を詳細に記述することを意図したからである。

以上のように，本研究ではバーローらのいう直接的追試として同一の調査課題に対する調査対象者を変更した事例研究を実施することに加えて，系統的追試として調査課題のみを意図的に変更し，その他の環境や教授的介入の実践者（観察者）については極力固定する追試を実施する。この設計では，系統的追試の成果として得られる外的妥当性のある範囲は，環境や教授的介入の実践者を変更した場合と比べて小さくなる。また，バーローらのいう臨床的追試には至らない。しかしながら，先行研究から有効な教授的介入の方法が得られておらず，また，本研究で援用している竹内の理論に基づく理論的枠組みによる研究も展開されていない現状においては，このような最低限の系統的追試による詳細な検討がまずもって必要な研究課題であると判断した。

(3) データの収集及び分析の方法

本章では，同一の設計のもとで実施された調査で収集する事例に対して，一つの調査問題に対する 1 ペアによる問題解決の一部始終を事例の単位，すなわち単一事例として捉え，以下の手順でデータの収集と分析を行う。

データの収集は，ビデオカメラへの録画と IC レコーダーによる録音，ワークシートの回収，及び，観察者によるフィールドノーツの記入によって行うこととした。この複数の方法

によるデータの収集は，トライアンギュレーション（Yin, 2014）を意図したものである[4]。また，データの収集で意図しない音声等が混入することをできる限り避けるために，調査は対象者のペアと観察者１人（筆者）のみがいる空き教室にて実施することとした。ペアによる問題解決という環境には，本調査で採用した観察方法やデータの収集方法に起因して調査対象者が抱く緊張感や不安などを軽減する効果をも期待した（清水，1990）。

データの分析については，はじめに，収集したデータを用いて一連の問題解決過程において「同値関係」が同定及び直観された箇所と「全体」が直観された箇所を特定する。次に，「同値関係」の同定及び直観に至るまでの問題解決過程を記述する。この過程において，後の感得過程に対して重要な役割を担っているとみなせる場合には，その箇所も詳しく記述することにする。続いて，「発展性」の実感の有無について，一連の問題解決過程で生徒たちから発せられた発話に加え，インタビューへの回答も分析対象とし，その実感の有無を捉える。そして，これらの各観点に関する分析結果を総合し，第３章で導出した３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程との対照を行う。ここまでの一連の分析を各事例に対して実施し，最後に，外的妥当性を得るための総合的考察として，得られた分析結果間の比較を実施する[5]。この総合的考察は次節において行う。

(4) 調査課題

調査課題としては，以下で述べる三つの問題，「等長性を保つ図形」，「規則的に並ぶ図形の総個数」，「ピンの入替操作の規則」を選定した。ここではまず，これらの詳細な説明に先立ち，調査課題の選定における基本方針について説明する。

調査課題には，調査対象者がその問題を解決することで，本研究で定めた数学的対象の美的性質を感得しうることがまずもって求められる。特にこの調査では，数学的対象の構成要素の「同値関係」を同定し，その「同値関係」を視点として複数の数学的対象を統合するような過程を含みうる問題を選定する必要がある。一方で，調査課題を教材として捉え直した際に，その教材が第２章で整理した数学教育の目的や目標の達成に寄与するものであることも重要である。したがって，本研究では調査課題を，先行研究で扱われてきた調査課題や教材をもとに必要な修正を加えることで作成することにした。この方針では，調査課題や教

[4] ここでは第４章第３節第１項で述べたことと同一の理由から，言語データを分析対象の一つとして位置づけている。

[5] ここでは，事例どうしの比較によって理論を生成するグラウンデッド・セオリー・アプローチのような比較は行わない。なぜならば，事例の部分どうしを比較すること，例えば本研究では「同値関係」の同定過程のみを比較することは，本研究とは異なる研究課題や理論的枠組みに基づき，異なる事例の単位を設定する研究で行う分析方法であるからである（Yin，2014）。

材の開発における本研究の新規性は得がたくなるという欠点がある。しかしながら，第１章に整理したように，学習者による感得を促進すべき美的性質がどのようなものであるかについての合意が得られていない現状において，先行研究との関連を直接的に示すことこそ重要であると判断した。

この基本方針にしたがって，数学教育の目的論・目標論で美的性質を例示する際に用いられた教材や，実証的・実践的な研究を展開した先行研究（e.g., Dreyfus & Eisenberg, 1986a; Silver & Metzger, 1989; Sinclair, 2006）で用いられた調査課題を筆者自身が解決し，本研究の理論的枠組みと照らし合わせることで，調査課題の候補を選定する。

続いて，上記の候補の中から，同定及び直観を促す「同値関係」が重複しないように複数の調査課題を選定する。このように複数の「同値関係」を取り上げる上で，対称性や相似は学校数学においても多様な数学的対象に関連する主要な「同値関係」であることから，選定する調査課題に含めることとする。したがって，調査対象者は中学校数学が既習の高校生を選定することとし，調査課題は中学校までの既習事項を用いた解決で数学的対象の美的性質を感得しうる問題とする。その上で，問題に架空の児童・生徒である「他者」を登場させることによる効果として，質問内容が焦点化されることや収集するデータが豊かになることを期待し，問題に文脈を設定することとした（清水，2007b）。

以上のように検討した三つの調査課題の詳細は，以下の通りである。

① 「等長性を保つ図形」

タカシくんとケイコさんという登場人物が数学の問題について考えているという文脈の問題であり，最初に提示する問題は図５－１における二つの道のり A→C→B と A→P→D→Q→B が等しいことの説明を求めるものである。ただし，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ であること，△ACB の辺上の３点 $\mathrm{D},\mathrm{P},\mathrm{Q}$ は $\mathrm{AP}=\mathrm{PD},\mathrm{DQ}=\mathrm{QB}$ を満たすことが条件として与えられている。この問題は，和田（2007）が数学の美しさを説明する際に用いたものであり，また，中島（1982）が数学の創造的な活動の説明で用いたものでもある。

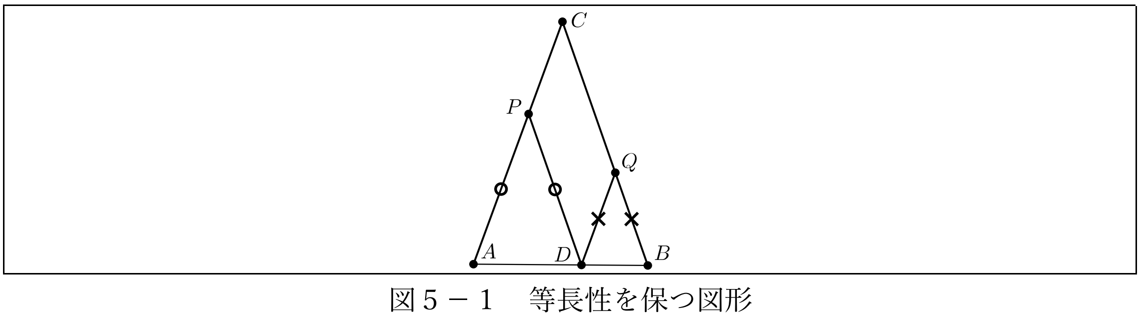


図５－１　等長性を保つ図形

この問いに対して予想される学習者による解決としては, 三つの二等辺三角形 ACB, APD, DQB の底角が全て等しいことを根拠とし，平行線の性質を用いて四角形 CPDQ が平行四辺形であることを示し，平行四辺形の対辺の長さが等しいことに基づいて二つの道のりが等しいことを説明することが考えられる。また，他の解決としては，三つの二等辺三角形 ACB，APD，DQB の底角が等しいことからこれらが互いに相似であり，対応する辺である AD，DB，AB について $\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\mathrm{AB}$ であるので，残りの二辺の和についても同様な等式

$$(\mathrm{AP}+\mathrm{PD})+(\mathrm{DQ}+\mathrm{QB})=(\mathrm{AC}+\mathrm{CB})$$

が成り立つと説明することが考えられる。これらを比較すると，前者の平行線の性質に基づいて平行四辺形に着目する方法の方が，中学校第２学年で初めて証明を学習する際から継続的に用いる方法であるという点で，第３学年以降に学習する相似に着目する後者の方法よりも学習者にとって容易であるという予想ができる。

これら二つの方法それぞれにおいて，次のように「同値関係」を「形式」として同定して「本質」として直観し, 等長性が成立する複数の数学的対象を統合することができる。まず, 前者の平行四辺形に着目する方法では，線分どうしの平行という関係が「同値関係」になっている。そしてこの「同値関係」を視点にすることによって，図５－２の二つの図形のような複数の図形を，等長性が成立する図形として統合することができる。

また，この平行四辺形に着目する方法において，平行四辺形が点対称であることを着眼点とすると，等長性の鍵になっている P→C→Q のルートと P→R→Q のルートは互いに PQ の中点を中心とする 180 度の回転対称と捉えることができる。その場合には，図５－３の二つの図形のような複数の図形を，等長性が成立する図形として統合することができる。

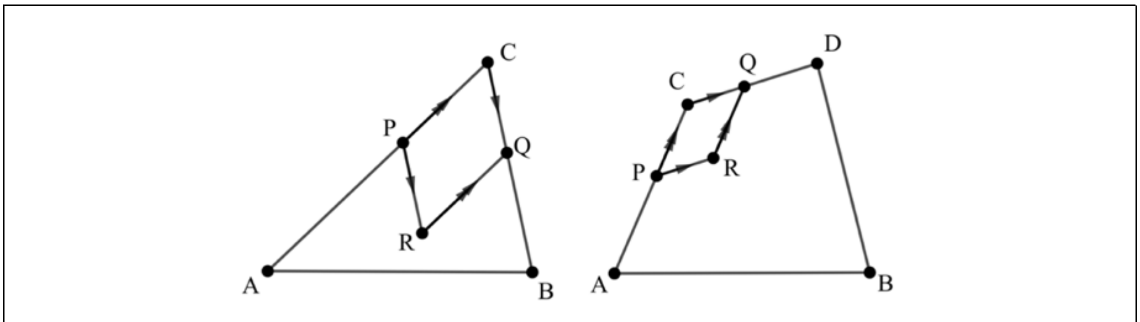


図５－２　$\mathrm{PC}\parallel\mathrm{RQ}$，$\mathrm{PR}\parallel\mathrm{CQ}$ を視点に統合された等長性が成立する図形

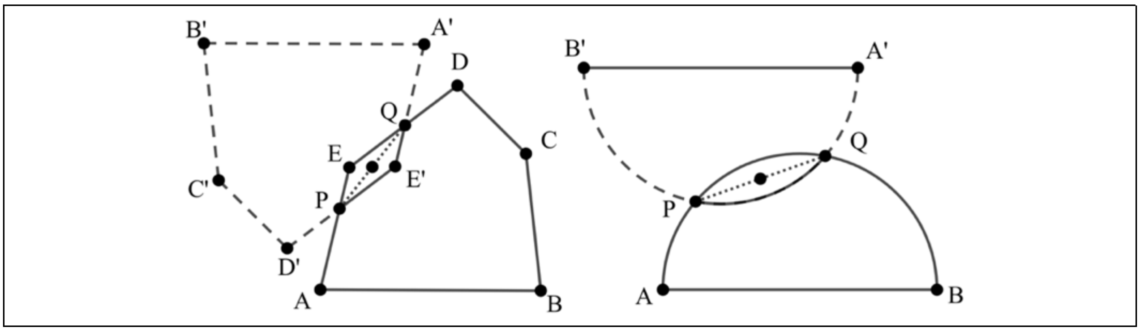


図５－３　PQ の中点を中心とする 180 度の回転対称を視点に統合された
等長性が成立する図形

次に後者の相似に着目する方法においては，三角形どうしの相似または対応する辺の長さどうしの比例が「同値関係」になっている。そしてこの「同値関係」を保存することによって，図５－４の二つの図形のような複数の図形を含む数学的対象として，等長性が成立する図形を統合することができる。

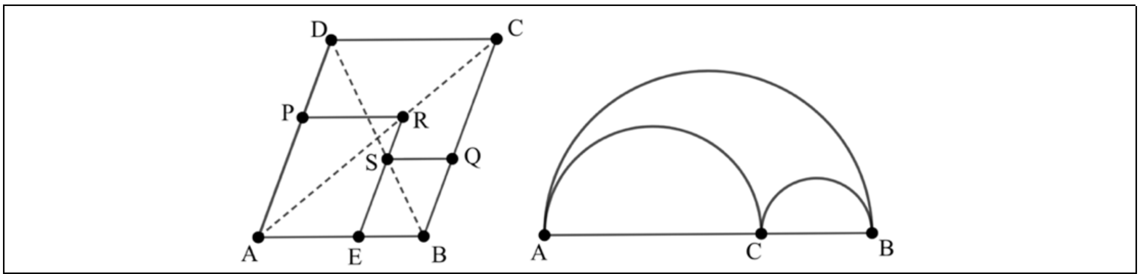


図５－４　三つの図形の相似を保存して等長性が成立する図形

調査では，はじめに，最初に与える二等辺三角形（図５－１）についての問題解決を観察し，意図的な教授的介入を受けずに学習者が数学的対象の美的性質を感得するか否かを判断する。続いて，Ｍ１として，提示される課題と同様に二等辺三角形で図形が構成されながらも「同値関係」も等長性も成立しない図形（図５－５）を提示して道のりについての考察を促し，Ｍ２として，図５－１との比較を促して相異点を尋ねることとする。

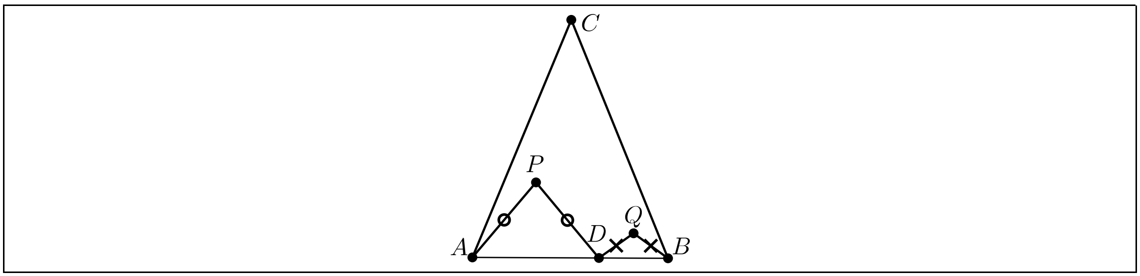


図５－５　「同値関係」も等長性も成立しない二等辺三角形

この図５－５に関する考察に引き続き，Ｍ１として，同様な等長性が成立する長方形によって構成される図形がどのような図形かを尋ねる。長方形は二等辺三角形と同様に「底角」が等しい図形である。この問いに対してどのような図形を想定するかによって，学習者が等長性及び等長性が成立する上での「本質」をどのように捉えているかを観察する。学習者が等長性の成立する図形を定められたら，Ｍ２としてその図形と図５－１との共通点を尋ね，Ｍ３として同様に等長性が成立する「全体」を尋ねる。最後に，Ｍ４として，図５－１に対して行った等長性の正当化の過程と，学習者が定めた等長性が成立する数学的対象の「全体」及び数学的対象の「全体」に対して行った等長性の正当化の過程の比較を促すこととする。

②　「規則的に並ぶ図形の総個数」

トムさんとケンジくんという登場人物が将棋をしている文脈で，トムさんによる「将棋盤はチェス盤よりも，正方形が 81 個多いね。」という発言を皮切りに，正方形の個数を数える問題である。最初に提示する問題は，図５－６を参照してトムさんの数え方を確認することを求めるものである。この問題は，第３章でも参照した，メイソンら（Mason et al., 2010）や中島（1982）によって用いられた題材をもとにしたものである。中島は５×５の格子状に分割された正方形の個数を大小含めて数える問題を用いたが，以下に詳細を述べるとおり，「同値関係」としての再帰に焦点を当てるために，分割数の異なる二つの図形における正方形の総個数を比較する問題として設定した。

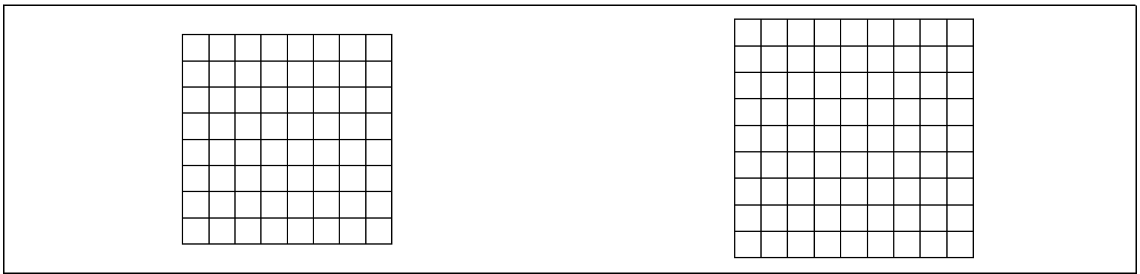


図５－６　チェス盤（左）と将棋盤（右）における格子状に分割された正方形

この問いに対する学習者による解決の予想としては，正確に数えるためにサイズごとに整理するなどの工夫をしながら双方の正方形の個数を数えることで正方形の総和を求め，その結果を比較する方法が考えられる。また，正方形の個数の差を確認するという問題設定に従って，チェス盤と将棋盤とで異なっている１行１列分が関与する正方形の個数を数える方法も考えられる。いずれの解決の場合も数え上げの際に重複がないように数え方や記録の仕方を工夫することが求められるが，その技能以外では数学的な知識や技能は特に求められない。

これら二つの方法それぞれにおいて，次のように「同値関係」を「形式」として同定し，異なる条件下で成立する「本質」として見出し，複数の数学的対象を統合することができる。まず，正方形のサイズ（縦 1，横 1 のものを 1^2 と表すこととする）と個数を次の表５－１のように整理すると，この二つの量の間の対称性が確認できる。

表５－１　チェス盤内の各サイズの正方形の個数

サイズ	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2
個数	64	49	36	25	16	9	4	1

対称性は，第２章で述べたように交換可能性として広く捉えることによって，同値律を満たす「同値関係」となる。この対称性は，元の正方形の正方形への分割数（チェス盤では 8×8，将棋盤では 9×9 のように表すこととする）がいくつであっても成立するので，これら数学的対象を，盤目状の正方形を「全体」とする数学的対象に統合することができる。

また，その他の「同値関係」として，正方形の総個数を求める式に表現される次のような再帰を同定することができる。チェス盤内の正方形の総個数は，サイズが大きいものから順に並べた和として，

$$1+4+9+16+25+36+49+64$$

と表すことができる。一方，将棋盤では，

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81$$

と表すことができる。これらを比較すると 1 から 64 までの和の部分が共通しており，入れ子状になっている。この入れ子状の構造は「自己参照」（Kilpatrick, 1985, p.3）という側面をもつことから，この二つの式で表現される総個数の関係は，第２章で確認したように，再帰といった「同値関係」になっている。この「同値関係」は，盤目状の正方形のほか，正三角形を正三角形に分割した場合にも同定することができる。ただし，この同定には分割数が異なる複数の場合を比較することが求められる。そこで，この後者の再帰を学習者が同定し

やすくなることを想定して，異なる分割数の図形を比較することを問題場面として設定した。この設定は，学習者が対称性に着目することを妨げるものではない。

調査では，はじめに，先述のトムさんという登場人物による正方形の個数への着目とケンジくんという登場人物の困惑の場面を提示し，トムさんによる数え方を学習者が確認する過程を観察することで，意図的な教授的介入を受けずに学習者が数学的対象の美的性質を感得するか否かを判断する。続いて，M１として，分割数がチェス盤や将棋盤とは異なる場合についてはどのようになるかを尋ねる。ここで，必要に応じて，各サイズの正方形の個数の総和を上述のようなサイズごとの個数の和の形式によって捉えることを促すために，登場人物であるケンジくんの考えとして，どの分割数の場合でも正方形の個数の総和が平方数の和になっていることを示すことにする。続けて，M１として正三角形の場合について探究するように促す。ただし，学習者が正三角形の場合にどのような規則が成立すると考えるかを観察するために，まずは正三角形の場合という条件のみを提示することにする。その上で，必要に応じて図５－７を提示することで，「上向き」の正三角形のみに着目することを促す。

ここまでの学習者による考察結果を踏まえて，M２として，正三角形の場合と正方形の場合との比較を促し，共通点を尋ねる。そして M３として，その共通点が成立する範囲を尋ね，最後にM４として，最初の正方形の数え方と最後の数え方の比較を促すこととする。

(3)ケンジくんとトムさんは，正方形以外でできる図形にも何か面白い性質がないか調べることにしました．ケンジくんは正三角形で出来る図３のような図形の正三角形の個数について調べましたが，特に性質を見つけることができませんでした．一方，トムさんはケンジくんと同じ図形について，上向きの正三角形（▽ではなく△）の個数について考えることで，この図形の性質に気づきました．(2)のように，正三角形の個数が少ない場合から順々に調べて，性質を見つけてください．

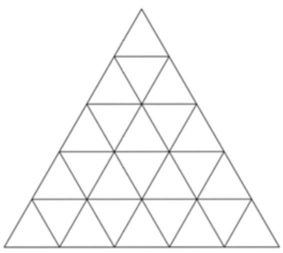


図3　正三角形でできる図形

図５－７　正三角形の正三角形への分割の場合

③　「ピンの入替操作の規則」

サトシくんとモモコさんという登場人物が図５－８に示したゲームで遊んでいるという文脈の課題であり，目標を達成するための手続きを考えるものである。この問題はメイソンら（Mason et al., 2010）が用いた「*Leapfrogs*」（Mason et al., 2010, p.52）という題材の表現を変更したものである。

白黒２色のピン 10 個が，図のように，直線上に並んだ 11 個の穴の上にあります。この黒いピンと白いピンを入れ替えたいのですが，次のルールに従わなければいけません。

＜ルール＞ピンが移動できるのは，次のいずれかである。

- 隣り合う空きの穴
- １個のピンを跳び越えた空きの穴

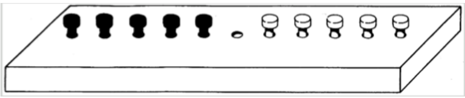


図５－８　「ピンの入替」ゲーム（図は Mason et al.,（2010）p.52 から引用）

この問題は，シンクレア（Sinclair, 2006）が学習者による数学的探究における美的判断の役割を観察するために用いた問題と同じ構造の問題である（図５－9）。ただしシンクレアは，コンピュータ上で探究ができるような環境を整え，「カエルの移動」という操作の記録を操作の回数とカエルの背景の色で表示するプログラムを実装し（図５－9 のカエルの図の下），操作全体で成立する対称性を視覚化している。

図５－９　「the Frogs problem」（Sinclair, 2006, p.101）

シンクレアはこのプログラムを利用し，対称性に気づかない学習者に対して「どのように見えるか」を問うことによって，その気づきを促している。このコンピュータ環境は，対称性を色彩も利用して視覚的に気づかせるものになっており，対称性への着目を促す上で有効なものであると言える。その一方で，操作の記録として動かしたカエルの情報のみが残ることの不自然さや，コンピュータ環境の準備の難しさといった課題も指摘できる。

そこで本研究においては，コンピュータ環境を整える代わりに，操作可能な具体物として２色のピンを用意することとした。さらに，操作の記録を残させることを意図して，「適当な図をかきながら考える」という条件を付け加えた。

この問いに対する学習者による解決の予想としては，各色５本ずつのピンがある場合の操作の困難性を実感し，ピンの本数を少なくした場合で操作を確認した上で，元の問題の条件である各色５本ずつの場合を検討することが考えられる。そしてそのピンの本数が少ない場合を試す過程で，ピンの操作の規則を捉えることに加え，操作全体で成立する対称性に着目し，ピンの本数が多い場合の考察に生かすことが考えられる。

この解決過程で同定されうる対称性は本研究における「同値関係」であり，複数の場合が想定できる。以下ではこの対称性を，ピンが各色２本ずつの場合で説明する。ただし，図５－10 における「B」は黒色のピン,「W」は白色のピンを表し，アルファベットと並んでいる正方形は,「空きの穴」を表していることとする。

1:	B	B	□	W	W
2:	B	□	B	W	W
3:	B	W	B	□	W
4:	B	W	B	W	□
5:	B	W	□	W	B
6:	□	W	B	W	B
7:	W	□	B	W	B
8:	W	W	B	□	B
9:	W	W	□	B	B

図５－10　各色２本ずつの場合の「ピンの入替」ゲームの解決の記録

まず，シンクレアが注目している対称性と同様のものとして，操作したピンの全体の記録の間の対称性がある。図５－10 の場合は，操作したピンは「B→W→W→B→B→W→W→B」の順であり，中央の「B」の間を軸に対称になっている。次に，図５－10 における５段目（４回目の操作の記録）の中央の正方形を中心とする点対称が同定できる。さらにこの点対称と関連して，ピンを動かす「距離」について，順に「１→２→１→２→２→１→２→１」となっており，最初の対称性と同様に中央の「２」の間を軸に対称になっている。これらの対称性は，２色のピンの個数が等しい他の場合だけでなく，２色のピンの個数の差が偶数の場合で成立している（図５－11)。したがって，これらの対称性が成立する数学的対象を,「２色のピンの個数の差が偶数の場合」として統合することができる。

1: B B □ W W W W
2: B B W □ W W W
3: B □ W B W W W
4: □ B W B W W W
5: W B □ B W W W
6: W B W B □ W W
7: W B W B W □ W
8: W B W □ W B W
9: W □ W B W B W
10: W W □ B W B W
11: W W W B □ B W
12: W W W B W B □
13: W W W B W □ B
14: W W W □ W B B
15: W W W W □ B B

図５－11　黒色２本，白色４本の場合の「ピンの入替」ゲームの解決の記録

調査では，はじめに，図５－８を提示して具体物として２色のピンを配り，入れ替えが可能かどうかについて適当な図をかきながら考えることを求める。ここで提示する問題を「入れ替えるときの最小の操作の回数を求めよ」といった問題にしない理由は，ピンが各色５個ずつある場合について与えられた＜ルール＞で入れ替え可能であることは，学習者にとって自明ではないと考えたからである。加えて，そのように自明ではない場合を問題場面とすることで，学習者が自らピンの個数が少ない場合について考えることを期待したからである。このようなピンの個数が少ない場合を考えることは，「本質」として対称性を直観する上で重要なプロセスになると考えられる。なお，学習者が入れ替えに成功した場合にも，入れ替えの操作に操作の回数が最小ではない場合が混在する場合も想定できる。そのような場合には，入れ替え可能な最小回数を提示することによって，そのような場合に注目するように促すこととする。この各色５個の場合の問題解決を観察し，意図的な教授的介入を受けずに学習者が数学的対象の美的性質を感得するか否かを判断する。

続いて，学習者が各色５個の場合以外で考えない場合には，Ｍ１として，各色の個数が１個の場合から３個の場合までにどうなるかを尋ねる。そして各色の個数が等しい場合の共通点に学習者が着目していない場合には，Ｍ２としてその共通点を尋ねる。そして，Ｍ３として共通点が成立する「全体」を尋ね，最後にＭ４として，最初に行った操作手順についての考え方と，最終的な考え方との比較を促すこととする。

第２項　調査結果の概要

調査は 2017 年の６月から７月にかけて実施された。調査対象となる高校生には，調査において気兼ねなく相談して協力できる関係にあるペアとして，４組が選出された。この４組は，当該高校の第１学年の教科担当の教員と相談の上で選ばれた。その後，調査日程の調整を経て，３組を対象とすることにし，本節第１項に記した三つの調査課題について，合計で７事例のデータを収集した。この３組のペアをそれぞれ A，B，C とし，ペアを構成する二人の高校生をそれぞれ S と T，P と Q，X と Y と表すこととする。各ペアが取り組んだ調査課題は，表５－２のとおりである。

表５－２　実施された調査課題

	ペア A（S と T）	ペア B（P と Q）	ペア C（X と Y）
等長性を保つ図形	○	○	○
規則的に並ぶ図形の総個数	＼	○	＼
ピンの入替操作の規則	○	○	○

結果の概要として，７事例全てにおいて，教授的介入なしでは数学的対象の美的性質が感得されたことは確認できなかった。一方で，教授的介入を受けた各ペアは，全ての事例で数学的対象の美的性質を感得した。したがって，「等長性を保つ図形」と「ピンの入替操作の規則」に関する数学的対象の美的性質に関しては，バーローら（Barlow, Nock, & Hersen, 1976/2009）のいう直接的追試として理論的仮説を支持する結果が得られており，調査全体をとおして，系統的追試として理論的仮説を支持する結果が得られている。

以下ではこの調査結果の詳細について，系統的追試の成果を明示することを意図して，「等長性を保つ図形」に対するペア A の結果，「規則的に並ぶ図形の総個数」に対するペア B の結果，「ピンの入替操作の規則」に対するペア C の結果を記述する。

第３項　理論的枠組みに基づく単一事例の分析

(1)「等長性を保つ図形」の問題解決過程の分析と考察

①　高校生ペア A による問題解決過程の分析

a.　平行という「同値関係」の「形式」としての同定及び「本質」としての直観過程

高校生のペア S と T は，図５－12 の問題を提示されて問題を確認したのち，S が T に対して，四角形 PDQC が平行四辺形であることと，平行四辺形であるから PC＝DQ，PD＝CQ であること，それゆえに二つの道のりが等しいことを確認し，T が同意した。そしてそれぞれ証明を記述した。

1 タカシくんとケイコさんは，次の二等辺三角形の性質（☆）について，一緒に考えています。

二等辺三角形の性質（☆）

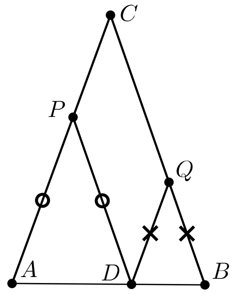


図1

図1において，$\triangle$ ABC は AC = BC の二等辺三角形である。
また，この$\triangle$ ABC の辺上にある3点 D, P, Q は，

$$\mathrm{AP} = \mathrm{PD}, \mathrm{DQ} = \mathrm{QB}$$

を満たしている。
このとき，A を出発して C を通り，B に到着するまでの道のり①と，A を出発して P → D → Q の順に通り，B に到着するまでの道のり②は等しい。

(1) この二等辺三角形の性質（☆）が成り立つことを示してください。

図５－12　「等長性を保つ図形」設問（1）

証明についての説明を観察者が求めたところ，先にＴが，四角形 PDQC が平行四辺形であることを次の順に説明した。まず，二等辺三角形の底角が等しいことに基づいて，∠CAB = ∠CBA，∠PAD = ∠PDA，∠QDB = ∠QBD とした。次に，同位角が等しいことから PC ∥ DQ，CQ ∥ PD であるので，四角形 PDQC が平行四辺形であるとした。続いてＳは，Ｔと「全く同じ」としながら同様な手順で四角形 PDQC が平行四辺形であることを示し，平行四辺形の対辺は等長であることから道のりが等しいことを説明した。観察者は Ｓ とＴの説明を受け，Ｍ１として，ＳとＴが等長性の根拠に用いていた「二等辺三角形であること」を保存した場合として，図５－13 を提示した。

(2) タカシくんは次の図2のような図を描いて，この二等辺三角形の性質（☆）は成り立たないと考えました。図1の場合と下の図2の場合とのちがいを説明してください。

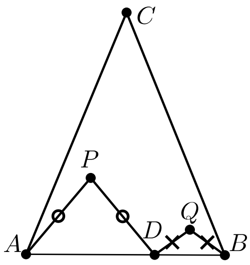


図2（タカシくんの図）

図５－13　「等長性を保つ図形」設問（2）

ＳとＴは，この図５－12 内の「図１」の図形で等長性が成立しないことについて，次のように会話をした。(20:53-21:47)

Ｓ：	ＰとＱがさ，AC と CB に接していないことからさ，同じ角度を共有して考えるって考え方ができないことから，これ，成り立たないんじゃね。
Ｔ：	［(１) のワークシートを指して］まずこの性質のところに，D，P，Q が ABC の辺上にあるって書いてある。
Ｓ：	だから，この時点で食い違ってるから駄目だよね。
Ｔ：	そうそうそう。
Ｓ：	確かにね。
Ｔ：	D だけは接してる。
Ｓ：	D だけは接してるけど，ABC は辺上に３点 D，P，Q っていう，ここでもう説明しちゃってるけど，これはそれ成り立っ，これはそれ無視しちゃってるから，その時点で，もう，いっそするまでもないっていうか。
Ｔ：	うん。
Ｓ：	守ってないから駄目。

この会話内のＳの発言「これはそれ無視しちゃってるから，その時点で」に見られるように，この時点におけるＳとＴは，問題文に示された条件は等長性が成立することの必要十分条件であるかのように認識していることが窺える。

続けて観察者は，図５－13 内の「図２」の場合には二つの道のりのどちらが長くなるかをＳとＴに確認した後に，「図１」と「図２」に見られるその他の違いについて尋ねた（以降，会話の記録のＩは観察者)。それに対して，ＳとＴは角に注目し，相似であることに言及しながら，次のように平行四辺形であることの必要性を説明した。(22:09-23:28)

Ｉ：	今言ってくれたとおり, Ｐ と Ｑ が AC とか BC 上にない以外に何か違いってある？さっき何か言ってたよね。何だっけ。
Ｓ：	あ、角を共有できない。
Ｉ：	うんうんうん，それはどういうこと？
Ｓ：	あの，さっきは，同じ，ここの，∠B ってのが，ここ［△QBD を指して］の二等辺三角形とこの［△CBA を指して］二等辺三角形で共通，共通の大きさだったんですけど，これ［(2)のワークシートを指して］はここ［∠QBD を指して］の角が全

く，その CBA ってのに共有されてないからできないんじゃないか。

I： ああそっかそっか，確かにね。そうすると，何が起きちゃうの？

S： 二等辺三角形が二等辺三角形に相似じゃない。

I： ふーん，それが，まずい？

S： まずい。

T： 平行四辺形。

S： 平行四辺形ってのが作れないから，結局，同じような長さにおけない。

T： さっきのこれ［(1)のワークシートを指して］では，その平行四辺形を，対角線で割ったときに，その割った左側と右側との辺の和が等しいっていうのを使うように，そういう感覚で，これを折り返したような感じで，同じだって説明できたんですけど，それがまず平行四辺形さえ作れないと，長さが同じだったいう説明さえ困難になる。

このようにSとTは，「図１」における三つの三角形が相似であることに言及していながら，最終的な根拠としては平行四辺形が作られることに等長性を帰着させた。以上の「図１」と「図２」の違いとしてTがまとめたものが表５－３であり，この内容についてはSも「全く同じ」として同意した。

表５－３　「図１」と「図２」の違い

- △ABC の辺上に３点 D，P，Q があるという条件に合っていない。
- 各二等辺三角形で底角の大きさが共通していない（相似でない）。
- 証明に必要となる平行四辺形をつくれない。

以上のまとめを受け，観察者は，M１として，図５－14 の問題(3)を提示した。

(3) ケイコさんは，この二等辺三角形の性質（☆）と同じような性質（★）が，<u>長方形についても</u>成り立つことに気づきました。性質（★）はどのような性質でしょうか。その性質が長方形について確かに成り立っていることも説明してください。

図５－14　等長性の問題（３）

SとTはそれぞれ長方形を描いて考え始め，次のように相談しながら等長性が成立する図形を考えた。（26:45-29:20）

S：　え，これってさ，こういうこと［図５－15 のような図を描きながら］？え，まずこういうのができるってことじゃん。

T：　今回３点だったじゃん。三角形で３点。だから４点。

S：　４点とるってこと？ちょ，待って。こういうこと？ちょ待って。まだ，想像ができなくね？

T：　うん。[8 秒考えて］平行になってる。ああ。なんかさ，そうそう。２点とってそれが，長方形の辺と平行になるって条件だったら，こういうふうに［図５－16 のような図を描きながら］。

S：　ああ。

T：　でこれ［図５－16 の矢印のルートをなぞりながら］のどれかを通る。

S：　確かに確かに確かに。［図５－16 と同じ図を描く］

T：　最短距離のやつみたいに。

S：　ああ，確かにね。

T：　でどこ通っても同じ，ああね，長さ。

（中略）

S：　いや，いやでもね。［図５－17 を作成しながら］例えばここがＡで，さっきの問題だとここがＢっておけて，これＣでＣ’として，Ｐ，どうしよ，［ＴがＤをとるのを見て］そこＤにする？じゃあここＰ’にする？Ｑにして，Ｑ’にして，わかんない。

T：　ＡからＢまでいくの？

S：　そう。あってると思う。こうやってこうやって［図５－17 のＡ→Ｃ→Ｃ’→Ｂのルートをなぞりながら］いくのと［図５－17 のＡ→Ｐ→Ｐ’→Ｑ→Ｃ’→Ｂのルートをなぞりながら］こうやっていくのと，同じじゃん。

T：　あっでもこれじゃあＤ通んない。

S：　あ，でも，同じような性質だから必ずしも記号は同じでない。

T：　ああそうか。

S：　記号はおれたちが勝手においてるだけだから，記号は別にたぶんあんま関係ないんじゃないかな。

T：　うん。

S：　同じような性質でしょ？うーん。なんか。三角形だとうまく考えられるけどさ，四角形だとなんかあんまじゃね？

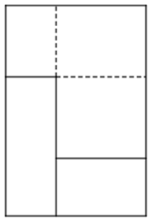


図５－15　Ｓが最初に描いた長方形
（筆者による再構成）

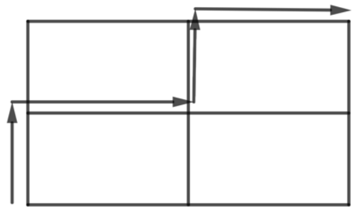


図５－16　Ｔが平行に着目した図
（筆者による再構成，矢印は加筆）

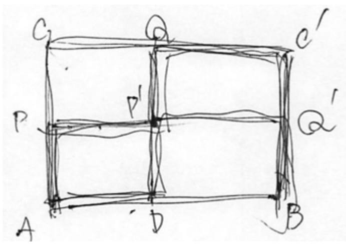


図５－17　Ｓが記号を加えて説明に用いた図

このように，Ｓがはじめに表現した図形は，観察者が展開させようと計画していた図形に類似していた。その後，Ｔによる「今回３点だったじゃん。三角形で３点。だから４点。」という図形の頂点の個数と頂点以外に与える点の個数の関係を満たす図形の提示によって，Ｓにとっての考察対象が変わっていく。Ｓはこのような過程で設定した図形を考察対象として，道のりを具体的に検討することで，二等辺三角形の場合と類似した等長性を同定しようと試みた。一方のＴは，二等辺三角形の場合の証明で用いた平行四辺形を想起し，関連づけて捉えようとした。そしてＳが検討している具体的な道のりについて検討したのち，次のようにこの平行という直線（線分）どうしの位置関係としての「同値関係」に改めて注目した。（29:53-30:03）

Ｔ：　これ［図５－16 を指して］つくってるときって，この［二等辺三角形の場合のAP=PD，DQ=QB を指して］条件じゃなくて，証明の途中で出てきた，この平行ってのを使ってこれかいてる。たぶん。

ただしこの時点では，あくまで等長な道のりを定めることが Ｓ とＴの明示的な考察目的であり，この注目以外に考察対象にはならなかった。

その後，観察者が困っていることを尋ねると，ＳとＴは道のりが同定できないことをあげ，Ｓは次のように説明した。（33:33-34:18）

S： さっきは，これ［二等辺三角形の場合の，内部を通る道のりを指して］が指定され，こういう道のりで通れってのが指定されてたんですけど，この四角形になった場合，そもそも形が変化して，要はその記号とかも使わないといけない記号っていうか，交点とかも増え，交点っていうか，まあ点？も増えるんで，結局どういう経路を通れば，いいのかっていうその問題としての何か不足が見られるなっていうか，こういう経路を，通ったときに，って書いてあるんですよ。こういう経路を通った道のり①とこういう経路を通った道のり②は等しい。でも，この［四角形の場合を指して］問題だったら，こういう経路を通ったときとこういう経路を通ったときっていうその設定がないんですよね。だからそもそも，その時点でどういうふうに考えたらいいのかっていうのにつまずいているっていうか。

ここまでの過程において，SとTが「本質」としての直観を試みた性質は，図形の頂点の個数と頂点以外に与える点の個数の関係であり，Tはそれに加えて平行線に注目していることが確認できた。しかしながらこれらは確たる直観ではなく，四角形の場合の図形を同定できなかった。つまり，二等辺三角形の場合の証明で言及された相似という「同値関係」は，二等辺三角形の場合の「形式」としての同定はされていながらも，四角形の場合にも保存される「本質」としては直観されていないということが確認できる。そこで観察者は，SとTに考察対象の図形及び道のりを同定させるために，すなわち「本質」の直観を促すために，Sが描いた図５－15 を指して次のように問うた。(34:22-35:09)

I： ちなみに，これ［図５－15 を指して］は？
S： これは，何か違うなと思って。
I： 何を考えたの？
S： えと何かこれ［二等辺三角形の場合を指して］と同じような形で一回作ってみようかなって。
I： それだとどうなってるの？どういう道のりを考えたの？
S： ［図５－18 の A，P，R，S，Q，B の道のりと A，D，C，B の道のりをたどる。］
I： これだと違うと思った？
S： これ違くないすか？だってこれこの長さ［図５－18 の AP と SR と BQ を指して］がこの長さ［図５－18 の AD と BC を指して］と一致しないすもん。
T： うん。
S： うん，ねえ。

T： 何かかえるのかな。どっちかを上にもってくれば何か。

S： ああ。

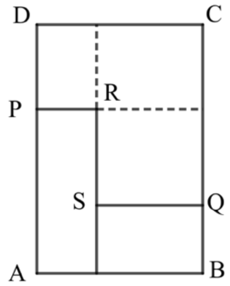


図５－18　Ｓが図５―15 の再検討に用いた図（記号は筆者による加筆）

観察者の介入を受けたＳとＴは，上記の会話をしながら図５―15 及び図５―15 を変形させた図形を対象とし，「１辺を共有する」のような内側の長方形の位置関係や,「内側の二つの長方形はそれぞれ外側の長方形と１辺を共有する」のような内側の長方形と外側の長方形の位置関係を考察し，続いて，外側の長方形の内側に描き加える線の本数を着眼点として考察した。この過程でＴによる「ここ［図５―19 の波線の円の部分を指して］に平行四辺形ができればいいんだよ。」(37:42）という発言があり，表５－４のように設問３に対する解答がまとめられた。ここで「つくる」とされた長方形は，図５―15 のような長方形の内側にある二つの長方形ではなく，図５－19 の波線の円の部分の長方形であり，長方形が平行四辺形でもあることが確認されている。

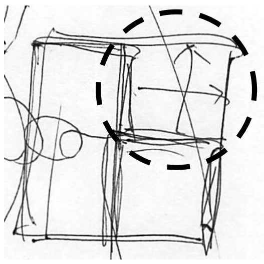


図５―19　平行四辺形への着目（波線の円は筆者による加筆）

表５－４　設問３に対するこの時点での解答のまとめ

・　つくるのは長方形。
・　一番大きい長方形の線上に交点をもつ２本の新しい２線を内部にたし，内部に新しい長方形を一つつくることで，この性質は成り立つ。

さらにSとTは，この表５－４の解答への反例の有無を検討し，Sは自らが描いた図５－20を用いながら，最終的な解答を以下のようにまとめた。(53:42-55:22)

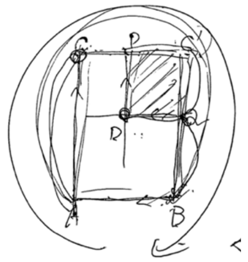


図５－20　設問３に対する解答のまとめに用いた図

S：　CかC’を，あ反時計回りじゃない時計回りか，CかC’を必ず共有する，CかC’を必ず共有するように，内部に２本の，ABと，平行と，ACと平行，の直線を描いて，その交点をDとしたときに，時計回りとなるように，

T：　そこに番号，記号P，Qをおく

S：　時計回りとしたときに最初に来る方を，なんか最初に来る方って言い方もなんか

T：　抽象的だね。

S：　抽象的だよね。［８秒沈黙の後で］Aに近い方だ。

T：　AからBに行くときに，

S：　あ，AからBに行くときに，最初に通る方

T：　待って。辺ABを通らなくて，辺ABを通らなくて，

S：　辺ABを通らずに，

T：　AからBに行くときに，最初に来る方をP，後に来る方をQ。

S：　ABじゃなくて，最初に来る方を，P，

T：　最短距離で行くとき。

S：　最短距離で行くときに，最初に来る方をP，の次にと，くるところをQと，したときに，この性質は成り立つ。P，Qとして，したときに，Aからビ，Cを通ってA，C，C’，Bっていう道のり１と，A，P，D，Q，Bっていう道のり２は等しい。あ。

T：　ふふふふ。解決。

S：　解決。

I：　まとまった？

S：　まとまりました。

このまとめを受け，観察者が M２として，このまとめと二等辺三角形の場合の共通点を尋ねたところ，S と T は次のように平行四辺形を着眼点として説明した。すなわち，S と T にとっての「本質」は，二組の辺が平行であることであった。(55:23-55:56)

I：	えっと確認したいのは，この二等辺三角形のと，どの点で同じって考えたかっていうことだけど，さっき説明してくれたのが，なんだっけ。
S：	ええと，必ず，一つ，あの，
T：	平行四辺形。
S：	平行四辺形をつくる。
I：	ふんふんふん。その図形ならいいってことかな。
S：	その図形なら，PDQC'が，平あの，平行四辺形なので，はい。
I：	そこを同じと考えたと。

b.　相似の「形式」としての同定及び「本質」としての直観過程と「全体」の直観過程

観察者は，S と T による平行への着目を肯定しつつ，「ケイコさんが考えた図形」として用意したものがあることを伝え，その図形についても考察してほしい旨を伝えて M１として図５－21 を提示した上で，M２として，二等辺三角形の場合との共通点を問うた。

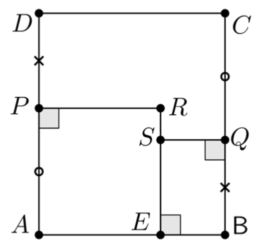


図５－21　「ケイコさんが考えた図形」として提示した図形

この問いに対し，S と T が道のりを同定できずにいたので，観察者がより具体的に二等辺三角形の類似性について問うたところ，S と T は等長になる二つの道のりを次のように同定した。(59:44-60:33)

I：	こっち［二等辺三角形の場合を指して］でいうところの，経路，道のり①に対応しそうなのはどんな道のり？
S：	道のり①は，［次の T の発言と同時に，図５―21 の A→D→C→B をなぞりながら］

普通にこう。

T：　［Sの上記の発言と重なって］A，D，C。

I：　ふんふんふん。で，道のり②に対応するのがどんなのかなって感じ？いま。

S：　もし，同じ道を2回通って，いいんだとしたら，○［APを指して］，トントントントントントン［PR，RE，ES，SQ，QBを指して］。

I：　そうすると？

S：　○と○と，×と×と，こことここ［PRとSQを指して］でこっち［DCを指して］になるんですけど，

I：　等しくなる

S：　これはさっきから，いや絶対2回通っちゃだめだろみたいな。だって接してるやんみたいな。あでも，あでも，あ？

T：　これ，［二等辺三角形の場合の］PとQが合体してる。

S：　そう。

T：　あ，合体はしてない。

S：　合体っていうか，

T：　同じ辺上にある。

S：　そう。何か。

T：　それなら納得いくけどね。

Sはこの会話の後も同じ辺を2回通ることについて，自分の好みではないことを表明していたが，同じ辺を通ることを許した場合には二つの道のりが等長になることを確信していた。その一方で，ここで提示していた図5－21は「同値関係」が保存されないながら等長性が保たれている場合であったこともあり，この時点でのSとTによる「同値関係」の同定や直観は確認できなかった。そこで，二等辺三角形の場合に「二等辺三角形でも等長性が成り立たない場合」を確認したのと同様に，長方形でも等長性が成り立たない場合があることを，図5－22を用いて確認した。

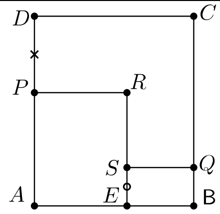


図5－22　長方形で構成された等長性が成立するとは限らない場合の図

その上で，M３として，どのような場合に長方形で等長性が成り立つのかを問うたところ，次のように，Ｓによる外側の図形と内側の図形が角を共有していることへの着目を経て，ＳとＴは共に等長な構成要素に着目していった。(65:38-67:07)

Ｉ： じゃあ結局，うまくいくときっていうのは，両方に共通する考え方で言うと，どんなときなの？

Ｓ： まず接してるっていう，あ，さっきの二等辺三角形のやつからも，まずこれ［「図２」を指して］，まずこれから，接していないといけないってことがわかって。

Ｉ： 接しているってのはどういうことだっけ？

Ｓ： これの，角，角を共有しているっていう。

Ｉ： 角を共有している。うんうんうん。

Ｓ： あの，［図５－13 内の「図２」を指して］QB，QBA と，CBA が共有してないと，うまくその，平行四辺形が作れないように，とりあえずまずこの［図５－21 を指して］QB っていうのも，こんなとこに作るんじゃなくて，必ず CB 上の辺にないといけないってのがまず絶対の条件。

Ｉ： ふんふんふん。

Ｓ： であって，長さ？

Ｔ： うん，だいまその，これ［長方形の場合を指して］でさえ平行四辺形の形ではないけれども，二組の辺の長さっていうのを，二組の辺をとったときに長さが同じ辺っていうのを絶対に作れるっていうのが，

Ｉ： 長さが同じ辺が作れる。うん。

Ｔ： 平行四辺形は，なんかこの空間［図５－21 の凹６角形 DPRSQC 及びその内部を指して］にはないけれども，まあ平行四辺形の性質としての二組の辺は等しいっていうのをこれ［図５－12 内の「図１」を指して］は使ってて，それは別に平行四辺形じゃなくても，全然違うような形でも，とりあえず，なんか，同じ長さの辺が二組あれば，成り立つんじゃないかなって。

この会話に続いて，ＳとＴは等長な辺が二等辺三角形の場合や長方形の場合でどのように位置づいているかについて改めて確認し続けた。しかしながらこの考察は，等長性で等長性を説明することになっており，循環論法に陥ることが想定された。

そこで観察者は，改めてどのような場合に等長な辺が存在することになるのかについて問うたが，その意図が通じなかったので，より具体的に，M１として，正方形の場合にも等

長性が成立するかどうかを問うた。

この問いに対し，Tは外側の図形のみを正方形として考えていたことで等長性が成り立たない場合があると答えた。一方，Sははじめに図を描きながら等長にならない場合があると答えたものの，複数の正方形の場合の図を描きながら，正方形の場合には常に等長になることを確信していった。TはSの描いた図を見て，内側の二つの四角形も正方形の場合には成り立つと答えた。この答えの説明を求めたところ，SとTは内側の二つの正方形の１辺の長さをそれぞれ文字でおき，文字式を用いて等長性が成立することを説明した。

観察者は，上記の説明を受け，改めて正方形の場合にはいつでも等長性が成立することを確認した上で，M３として，等長性が成り立つ図形の範囲を問うたところ，次のように平行四辺形と五角形を考えた上で，いつでも等長性が成立する図形としてひし形が考察対象になった。(74:53-76:24)

I： 他にどんな図形，例えば正方形 O.K.だったよね？

S： はい。

I： 他の図形考えてみようよ。

T： 平行四辺形。

I： 平行四辺形。

S： 五角形やる。

（中略）［SとTは五角形について図を描いて考えようとするものの，正五角形のような図形を描こうとし，内角が鈍角であることを理由に内側の二つの図形が重なる部分をうまく描けないことで，諦める］

S： やめようぜ五角形。平行四辺形にしようぜ。

（中略）［SとTは平行四辺形を描き，成り立つ場合があることを確認する。］

T： いつでも成り立ってるわけではない。

I： 成り立つわけではない。

T： あ。

I： ん？

T： ひし形なら成り立つよ。

I： ひし形やってみて。

S： ひし形だって同じだもん，全部の辺の長さ。

この五角形を描く上での困難から，この時点では相似には着目していないことが改めて

確認できる。この経緯でひし形に着目したＳとＴは，Ｔによる等長性が成り立つ場合の内側の図形についての規則への気づきを経て，Ｓが次のように相似に再度着目した。（76:48-78:17）

Ｔ：	だから今その，１個目の内部描いた時点でもう１個の形が確定されちゃうような，場合だと，いつでも成り立つ。
Ｉ：	ひし形だと，
Ｔ：	ひし形なら，
Ｓ：	ひし形ならそうだね。
Ｔ：	１個目つくった時点でもう１個の方の１辺の長さがこれ［図５－23 の線分 AB を指しながら］だって確定されちゃう。まあ正方形でも同じなんだけど。
Ｓ：	正方，あそうだね。
Ｔ：	それだと，形が一つに限定されてしまって，で結局それをやると，
Ｓ：	形が一つに限定できる，もの，だから要は，辺の長さが，全部等しいものだったら，２辺がわかってれば絶対そのあとの２辺もわかって必ず同じ長さってわかるから，いいんじゃねみたいな。
Ｔ：	さっきのこれも［図５－12 内の「図１」を指して］，１個これ［内部の二等辺三角形を指して］をつくったらＤって点が作れちゃって，でこのＤを通るようにまた同じように三角，二等辺三角形はこの一つしか考えられない。
Ｓ：	あれ，なんか［長方形で等長な場合と「図１」を見比べながら］，相似？
Ｔ：	相似？
Ｓ：	いや，なんでもない，おれバカだから。
Ｔ：	いやいや
Ｓ：	四角形の相似って証明するの面倒くさいな
Ｔ：	どれが相似
Ｓ：	いや違う。おれはちょっと思ったんだよ何か。いやいやいやいや。たぶん D ってのを決めればさ，同じ二等辺三角形，ふーそっか，いや何でもない。

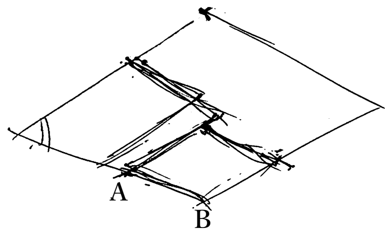


図５－23　ひし形で構成された等長性が成り立つ図（記号 A，B は筆者による加筆）

このＳによる「四角形の相似って証明するの面倒くさいな」の意図を観察者が尋ねたところ，Ｓは相似条件が明確になっている三角形の場合と比較し，四角形では条件が明確でないということを説明した。このＳにとっても不明確さは，相似に着目した上で次のように他の四角形について考察する際にも影響が見られた。（79:52-80:19）

Ｉ：	他のは？成り立ってた他のやつ見てみるとどう？正方形とかはどう？
Ｓ：	正方形って絶対相似じゃないすか。相似じゃねえか。正方形ってどれも絶対相似だよね？
Ｔ：	うん。
Ｓ：	そうなんだよ。だって，ひし形だってどれも絶対相似じゃん。
Ｔ：	いや，ひし形は，だって角の大きさが違う。

このように，ＳとＴは，Ｓが注目した相似という「同値関係」を視点として，これまでの図形を見直した。その過程で，ひし形については，暗黙のうちに外側のひし形と内側の二つのひし形の鋭角を同じ大きさとして考えており，ひし形では常に相似になると判断した。さらに，二等辺三角形でありながら等長性が成立しなかった図５－13 内の「図２」については相似ではないことを確認し，「ケイコさんが考えた図形」である図５－21 ではどうかを考えた。

観察者は，ＳとＴが「全体」をより明確に直観することを意図し，Ｍ３として，相似という条件が十分条件であるか否かについて尋ねたところ，Ｓ と Ｔ は二等辺三角形の場合は十分条件ではないと判断した後にこの考えを改め，相似であることが等長性が成立するための十分条件であると述べた。観察者がこの判断を受けて復唱したところ，Ｓと Ｔ は改めて具体的な図形について次の順に調べ直した。

まず，長方形の場合について，Ｓが内側の長方形の相似比が１：１の場合と２：１の場合を描き，Ｔと観察者に等長になっていることを示した上で，長方形の場合には相似であれば

等長になると主張した。続いて観察者が三角形の場合について尋ねると，Ｓと Ｔ は直角三角形の場合を確認した後に一般の三角形についても調べ，相似であれば平行四辺形ができるということを根拠に，等長性が成立することを説明した。さらに観察者が他の図形の場合を尋ねると，Ｓと Ｔ は五角形の場合を再考し，Ｔが内側の五角形を重ねて描く方法に気づき，正五角形の場合に内側の二つの五角形の一辺の長さをそれぞれ a と b で表した上で，外側の五角形の辺上を通る道のりも内側の五角形の辺上を通る道のりも $4(a+b)$ と表せることを説明した。

この一連の説明を受け，観察者がさらに他の場合について尋ねたところ，Ｓは次のように自身による「全体」の直観について説明した。(89:58-90:12)

Ｉ：	じゃあ正方形じゃなくても，いいってこと？
Ｓ：	あっ，てかどんな図，おれもう，わかる，何ていうんすか。絶対そうなると思うんすけど，たぶん，もとの図形に対して相似だったら，全部成り立つと思うんですよ。
Ｉ：	あ本当。
Ｓ：	はい。

観察者がこのＳによる発言を受けて他の例を尋ねたところ，Ｓ と Ｔ は円を選択し，Ｓは半円（図５－24)，Ｔは円（図５－25）の図を描き，等長性が成立することを説明した。なお，Ｔは外側の円の半径と内側の二つの円の半径の和が等しいことを図５－25 を使って説明する過程で，観察者とＳが内側の図形が小さいことを指摘したことを受けて，説明と図が不整合であることを確認した。

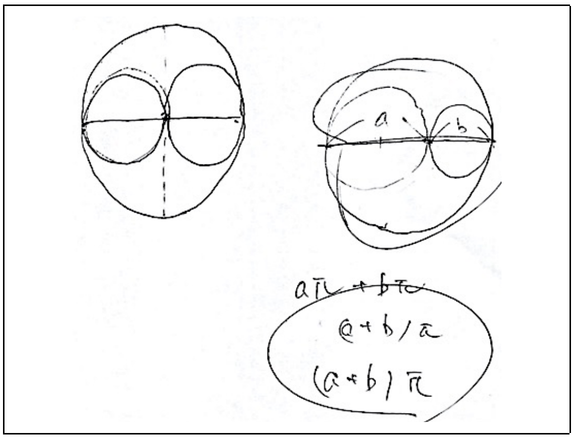


図５－24　Ｓによる半円の場合の図と説明

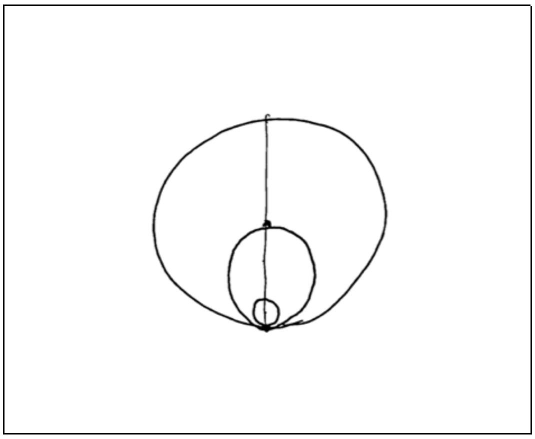


図５－25　Ｔによる円の場合の図

c.　実感した「発展性」についての説明

ＳとＴによる具体例の説明を受け，観察者はＭ４として全体の振り返りを促した上で，ＳとＴに感想を求めた。その結果は次の表５－５のとおりである。生徒Ｓは他の図形についても探究したことを「深く」と表現している。また，生徒Ｔは,「発展」させたことから「達成感」を得ており，また，二等辺三角形に「とらわれず」という発言や「いろんなところに応用」という発言から，最初に考えていた二等辺三角形で構成される数学的対象に対する広がりを実感していると考えられる。

表５－５　ＳとＴの問題解決の感想

生徒	感想
S	なんか，今まで，そんな，例えばやってきたとしても，(1)のこの問題くらいで，ここから更に発展させて四角形とか円とかまで考えてみるってことあんまなくて，まあどういう場合に成り立つのかってこと，もその深く探究できたことによって，まその，一つの場合，一つのその問題に対しても，じゃあこういう場合はどうなのかっていうその，なんていうか興味が湧いたっていうか，そういうこと知れてよかったなと思います。
T	今までこういう問題［二等辺三角形についての（1)］もまたこういう問題［Ｓが描いた半円の場合の等長性についての問題］も解いたことがあるっていう中で，これ［二等辺三角形についての（1)］から発展させてここ［Ｓが描いた半円の場合の等長性についての問題］までできたっていうのが何か，すごい達成感があるっていうか，ある性質をもってしても，例えそれが直線でも，曲線だったとしても，角の数が何個あっても，まあ，円なんか角がないようなものですけど，それでも，その，ある共通の部分ってのを見つければ，まあ，共通する性質をその中から見つければ,（Ｉ：今で言うとなんだっけ？）今で言うと相似っていうところを，二等辺三角形っていうのにとらわれず，見つけることができれば，いろんなとこに応用できていくのかってのが分かったのが面白かったです。

②　本事例に基づく分析的一般化と経験的な補填

a. 本事例に基づく分析的一般化

本章では，第３章で定めた数学的対象の美的性質の感得過程のうち，(i)数学的対象の「同値関係」を「形式」として同定するとともに「本質」として直観する局面，(ii)数学的対象の「全体」を直観する局面，(iii)数学的対象の「発展性」を実感する局面の三つの局面をと

おして数学的対象の美的性質を感得する，３局面モデルに焦点を当てている。そしてこの３局面モデルに基づき，(i)の局面での考察を促すこと，(ii)の考察における素材を提供すること，及び，(iii)の局面の素地となる過程を設けることを意図した教授的介入として，「『同値関係』を保存して条件を変更した場合，または逆に『同値関係』が保存されないように条件を変更した場合を，考察の対象として学習者に提示する」Ｍ１を設定し，(i)から(iii)までの各局面での考察等を直接的に促す教授的介入として，「『同値関係』が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う」Ｍ２，「『同値関係』の成立する数学的対象の範囲を問う」Ｍ３，「『同値関係』の同定と直観，及び，『全体』の直観がなされた数学的対象と元の数学的対象の比較を促す」Ｍ４を設定している。すなわち，教授的介入なしに学習者が３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程を遂行しない場合には，これら Ｍ１から Ｍ４までの教授的介入がその過程に入り込むことによって，この数学的対象の美的性質の感得過程が遂行されるという理論的仮説を立てている。

この「同値関係」として相似に焦点を当てた本事例では，生徒たちは最初に提示された問題に対して解決することができていたが, 教授的介入なしでは数学的対象の美的性質を感得している様子は確認できなかった。一方で，この生徒たちは一連の教授的介入を受け，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程を遂行することができた。このことは，本事例が上述の理論的仮説を支持する事例になったことを意味する。

教授的介入の Ｍ１のうち，等長性が成り立たない二等辺三角形で構成された図形が提示された際には，生徒たちは相似に着目したものの，次の Ｍ１で長方形の場合についての考察が促された際には着目が見られなくなった。その一方で，二等辺三角形の場合との比較をとおして，図形の「右上」に平行四辺形をつくるような平行線によって図形を構成することに着目し，改めてここまでの考察を終えている。この平行という関係は，本節第１項において調査課題を検討した際に示したように，学習者からの着目が想定された「同値関係」であった。この調査ではこの時点で「全体」の直観や「発展性」の実感の有無を確認していないものの，この時点でも数学的対象の美的性質を感得していた可能性がある。そしてその感得の可能性は，明らかにＭ１を受けたことで始まった考察からもたらされている。

また，生徒たちが相似に着目するまでになされた教授的介入のうち，正方形を考察対象として提案した教授的介入Ｍ１と，「本質」が明確ではない中で「全体」を問うＭ３を行なったことが，等長性が成立する多様な図形の考察と比較に繋がり，その結果として生徒 Ｓ が再度相似に着目することになった。この間，長方形によって図形が構成される場合を考察対象として提案する Ｍ１や，二等辺三角形によって構成される場合と比較する Ｍ２を行なっているものの，これらは相似への着目に影響していないようであった。相似が成立している状態で等長性が成り立っている図形をＭ１として提案することの効果が確認できる。

この時点で既に多様な数学的対象を考察対象としていた生徒たちは，相似に着目することによって，他の多角形によって構成される図形の場合や，円によって構成される場合なども含めた「全体」を直観している。この直観は，「全体」を尋ねるＭ３から明らかにされたものの，生徒たちが自ら他の多角形によって構成される図形の場合を考察した結果によるものと見ることができる。すなわち，「全体」の直観は「全体」について生徒が説明する直前の Ｍ３以前に，相似であることが十分条件として確信された際にはなされていたと言える。この十分条件としての確信の過程には相似でない二等辺三角形によって構成される図形の場合の比較が行われており，Ｍ１の一部が「全体」の直観に寄与しうることも確認された。

このＭ３と同様に，Ｍ４についても，この教授的介入が生徒たちによる「発展性」の実感を直接的に促したのか，実感した「発展性」の表明を促したのかどうかは判断できない。しかしながら，この表明によって実感した「発展性」を明確にしたことは期待できる。

以上のように，この事例において，「比較対象の系統的提示」という教授的介入の一部は，生徒たちによる数学的対象の美的性質の感得過程において不可欠な役割を果たしていた。

b. 本事例による理論的仮説への経験的な補填

本事例において，教授的介入が重要な役割を果たして生徒たちによる数学的対象の美的性質の感得がなされたことは上で述べたが，この一連の過程ではここで用いた調査課題に起因すると思われる特殊な場面が確認された。それは，生徒たちが問題解決過程の初期には既に着目していた相似よりも，平行に焦点化した考察を行なった場面である。

学習指導要領では，中学校第２学年の教科内容として，図形領域に形式的証明が位置づいている。この教科内容の初期には通常平行線の性質が題材として含まれており，その後の図形の性質に関する証明においても，この平行線の性質が頻繁に用いられる事になる。したがって，多くの日本の学習者にとって，図形の性質についての証明を求められたときに平行線に注目することは，カリキュラムを踏まえると自然なことであると考えられる。

一方，四角形で構成される図形を考察する際に相似が着目されなかったことや，生徒Ｓが 76:48 からの考察において相似に着目することに困惑している様子であったことについても，カリキュラムから説明することができる。学習指導要領では，小学校算数科における相似に直結する教科内容として，第６学年で拡大・縮小が扱われる。そして，中学校数学科では，第３学年において，二つの図形の対応する点を結ぶ直線がすべて１点で交わるときに二つの図形が相似であるということが再び扱われる。しかしながら，このような一般的な相似の定義を確認して三角形の相似の定義を扱った後では，相似条件を満たす三角形の組を特定することが求められる証明問題が多く教材として用いられる。したがって，本事例のＳと同様に，多くの日本の学習者にとって，相似の概念と三角形の相似条件は強く結びつてい

ると考えられる。それゆえ，三角形以外の図形を考える際に相似が視点として十分に機能しないと考えられるのである。

本研究では，理論的仮説として設定された教授的介入は，知覚対象が数学的対象であるという範囲の中では，いわば「コンテンツ・フリー」の一般的な介入として定められたものであった。しかしながらこの事例を踏まえると，教材に関連するカリキュラムを詳細に分析し，M１として提示する数学的対象の提案の順序などに反映させることによって，教師の立場にいる者が想定している数学的対象の美的性質の感得をより「スムーズに」[6]促進することも可能であると考えられる。

また，上述のカリキュラムに関する考察とは異なり，この調査課題に特化した示唆として，M１として提示する数学的対象に関して次のようなことが考えられる。本事例では，M１として長方形によって構成される図形の場合の考察を提案した際，提示した図形は相似ではない図形によって構成されているものであった。この図形が相似への着目を促さなかったように見えた一方で，正方形によって構成されている図形についての提案は，相似への着目につながる考察につながっていた。また，相似への着目がなされたのは，生徒たちによってひし形によって構成される図形が考察されていた際であった。図形の内部にある二つのひし形が図形の外部にあたるひし形に内接するように構成することで，三つのひし形は互いに相似になる。したがって，ひし形によって構成されている場合には構成する図形どうしが相似になる場合が扱いやすくなっている。また，正方形で構成されている場合には常に相似が成立している。このように相似に着目しやすい図形を考察対象として提案することで，二つの等長な道のりをもつ二等辺三角形との共通点として，相似への着目を促すと考えられる。

(2) 「規則的に並ぶ図形の総個数」の問題解決過程の分析と考察

① 高校生ペア B による問題解決過程の分析

a. 教授的介入以前の問題解決過程

高校生のペアＰとＱは，図５－26 の問題を提示され，サイズの異なる正方形の個数をそれぞれ次の方法で数え始めた。

[6] このスムーズさが有益であるか否かについては，数学的対象の美的性質の感得に関する学習者の経験などを踏まえて判断することであると考える。学習者が不慣れな場合には不自然にならない程度にスムーズな促進を行うことが，学習者の感得への動機付けを高めることになると思われる。一方で，ある程度の経験がある場合には，スムーズさへの配慮は不要になるとも思われる。いずれにしてもこの検討は本研究にとっては今後の課題であり，ここでは議論しない。

チェス盤　　　　　　　　　　　　将棋盤

トムさんはケンジくんに将棋を教わっています。トムさんは，チェス盤と将棋盤を上から見て比べて，「将棋盤はチェス盤よりも，正方形が81個多いね。」と言いました。

(1) ケンジくんは，将棋盤の正方形の個数を 9 × 9 = 81 個，チェス盤の正方形の個数を 8 × 8 = 64 個と数えたため，トムさんがどのように正方形を数えたのかわかりませんでした。トムさんは正方形の個数をどのように数えたのでしょうか。実際に数えて確認してください。

図５－26　「規則的に並ぶ図形の総個数」の問題提示と設問（１）

Ｐは，将棋盤をチェス盤と比較して，チェス盤より大きい部分が関与する正方形の個数を調べた。具体的には，図５－27 において，①～⑧に右上の部分が重なる正方形を 44 個，A～H に左下の部分が重なる正方形を 44 個と数え，重複を処理することで数え上げようとした。ただし，重複の処理に誤りがあり，合計が 81 個であることは確認できなかった。一方のＱは，チェス盤と将棋盤のそれぞれについて，正方形のサイズごとの個数を調べた。

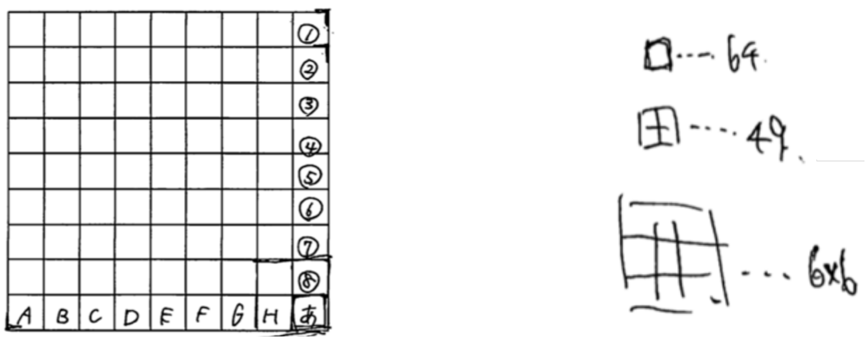


図５－27　Ｐの数え方（左）とＱの数え方（右）

ＰとＱは，Ｐが数え上げの結果が 81 にならないことをＱに告げることを契機に，各々の方法を説明した。はじめにＰが自身の方法を説明した後，次のようにＱが自身の方法を説明し，Ｐ はＱ の方法を自身の方法より望ましい方法として価値づけた。(6:21–6:45)

Q：	これ［サイズ 1^2 の正方形を指す］が８の２乗で［サイズ 2^2 の正方形を指す］７の２乗，［サイズ 3^2 の正方形を指す］６の２乗ってなってるから，［サイズ　8^2 の正方形を指す］8^2 で１の２乗だから，はらわれて[7]，81
Ｐ：	ああそっか，そうやってやればよかった。なんか実際に多くなった分だけを数えちゃったから，面倒くさかったなあって。

この後，観察者はＰの方法の説明を改めて求め，Ｐは自身の方法でも正しく 81 を求められることを確認した。そしてその確認を受け，観察者は生徒どうしの相互理解のために２人の方法の比較を促そうと試みた。その際，Ｑが「これの［Ｐの方法を指して］やり方がまだよくわかってないんだけど」（8:07–8:10）と発言した。そこでＰがおよそ１分 30 秒をかけて自身の方法を再度説明し，Ｑもこの方法に納得した。この時点で，２人の生徒は与えられた問題である「個数の差が 81 になる正方形の数え方」に対する解を，確かに得ていた。

２人の生徒のうち，Ｑについては「同値関係」である再帰を同定して問題を解決したようにも捉えられるが，それはここまでの観察だけでは明確ではなかった。また，この再帰を「本質」として直観して，新たな数学的対象を定めて統合する様子も確認できなかった。すなわち，この教授的介入を行う以前の時点では，２人の生徒ともに数学的対象の美的性質を感得しているとは判断できない状態であった。

b.　「同値関係」の「形式」としての同定及び「本質」としての直観過程

観察者が２人の方法の比較を改めて促したところ，ＰはＱの方法について「こっち［Ｑの方法を指して］の方が楽」「計算がすごい楽」のように，その方法の簡潔さに言及した。一方，Ｑは自身の方法に「規則があった」と述べ，その規則を次のように説明した。（10:03–10:15）

Q：	えっと，大きさでこう分類していくと，８の２乗，７の２乗って段階の２乗になっていって。

ここで「段階」とは，正方形のサイズを変えることに伴って，２乗する自然数が段階的に

[7] ここで「はらわれて」とは，将棋盤においてサイズが 1^2 から 8^2 までの正方形の個数が,

$$8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$$

で表せるのと，チェス盤においてサイズが 1^2 から 9^2 までの正方形の個数が,

$$9^2+8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$$

で表せるのを比較し,「$8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$」の部分が重複しているので相殺できるということを意味している。

変わっていくことを意味していた。そこで観察者は，M１として，分割数が 10×10 の場合には正方形の総数がいくつ増えるかを尋ねると，Qは「あはい，たぶん，それは 100 個です。」（10:28–10:32）と即答した。

観察者は，この考え方が適切かどうかを確認して欲しい旨を伝え，M１として(2)の設問が記されたワークシートを提示した（図５－28）。

(2) ケンジくんとトムさんは，チェス盤と将棋盤の他にも，同じような図形の正方形の個数を数えることにしました。その結果は，次の表１のようになりました。ケンジくんはこの結果を見て，全ての場合で平方数（自然数を二乗した数）の和になっていることに気がつきました。このことを確認してください。

表1　正方形の個数

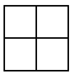
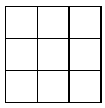
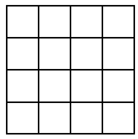
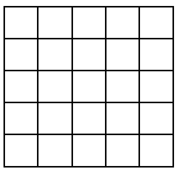
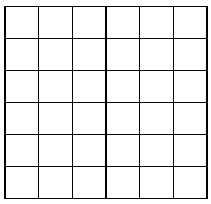
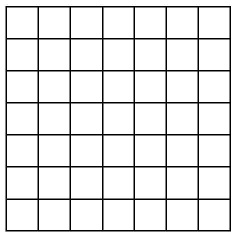
＜2 × 2の図形＞  5個	＜3 × 3の図形＞  14個	＜4 × 4の図形＞  30個
＜5 × 5の図形＞  55個	＜6 × 6の図形＞  91個	＜7 × 7の図形＞  140個

図５－28　「規則的に並ぶ図形の総個数」設問（２）

この設問（２）に対し，PとQはそれぞれ図５－29 と図５－30 のように記述して解決した。特にQは自身の解決を次のように説明しており，「連鎖的に」という語で前のものを使って処理する再帰の関係に言及している。また，この処理に関係した表記上の省略も確認できる（図５－30）。（12:08–12:28）

Q：　［５×５の図形を指して］１が５の２乗個あって，［４×４の図形を指して］ここまでが 30 って確認できてるから，55 で，６の２乗ってやると 55 まで確認できてるからって，連鎖的に，で，ここまでが 91 個で確認できてるから 49＋91 で。

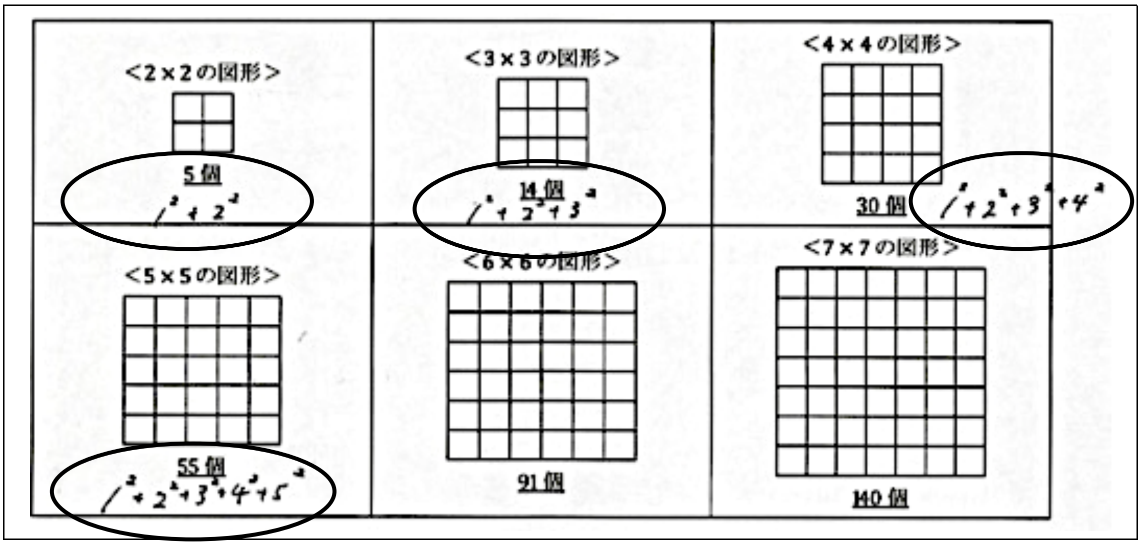


図５－29　設問（２）に対するＰの記述（楕円内）

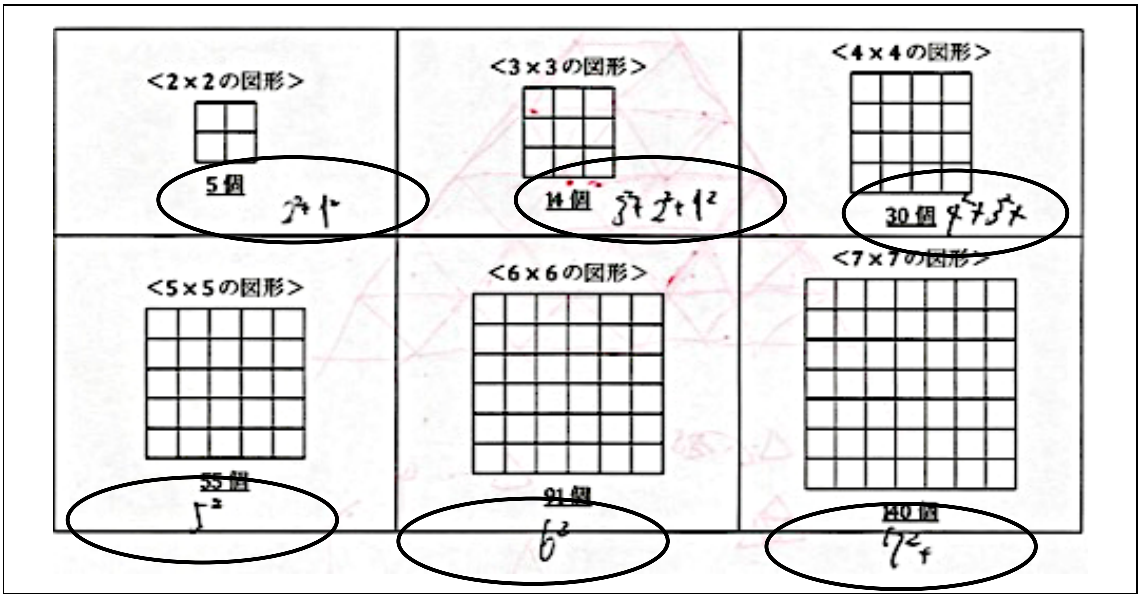


図５－30　設問（２）に対するＱの記述（楕円内，楕円は筆者による加筆）

ＰとＱはこの考察に続いて，「似たような問題」として長方形の場合を挙げ，Ｐの「ＣとかＰとかで表せないかなって思えてきた」(13:30–13:34）という長方形の場合についての学習経験に基づく発言を皮切りに，線分の組合せの総数として正方形の個数が求められないかについて考え始めた。しかしながら，長方形とは異なり縦と横の辺の長さが等しくならなくてはならないことから場合分けが必要であると判断し，

Q：　やっぱ直接だしたいね。

P：　うん。

Q：　場合分けとか，この際したくないけど。

と会話（18:05–18:11）をして「場合分けをしない」という方向性を定めた上で，さらに約 4 分間の考察を続け，「無理」と判断した。この組み合わせに関する一連の考察について，観察者が長方形の場合に組合せとして求めることができる理由を尋ねると，P は距離を考えなくていいことを説明した。このことから，正方形の場合には同様には考えられないことを論理的に確認した上で，「無理」と判断したことが窺える。

ここまでの観察及びインタビュー結果から，P と Q は「同値関係」である再帰を同定しているように思われた。そしてこの再帰を「本質」として，同様な正方形を分割した図形の「全体」に成立するものとして直観しているように思われた。

観察者はこの判断を確認するために，改めて M 1 として，正三角形の場合にどうなるかを尋ねた。Q はこの問いに対し，図 5 −31（この図形を 3 段の正三角形と呼ぶ。以下，他の段数についても同様。）における一番小さいサイズの正三角形の個数が 3^2 になっていないことを確認した上で,「おれの予想は, また, 2 乗になっていくんじゃないの。」(27:32–27:44) と述べた。この「また」という発言から，Q にとって，正方形の場合で重要であった性質は再帰よりもむしろ 2 乗であったことだと推察できる。実際，この発言に続いて，Q は図 5 − 32 における実線で描かれたサイズの正三角形が 3 段以上の図形内にいくつ含まれているかを数える際にも，平方数になるかどうかに注意を払っていた。

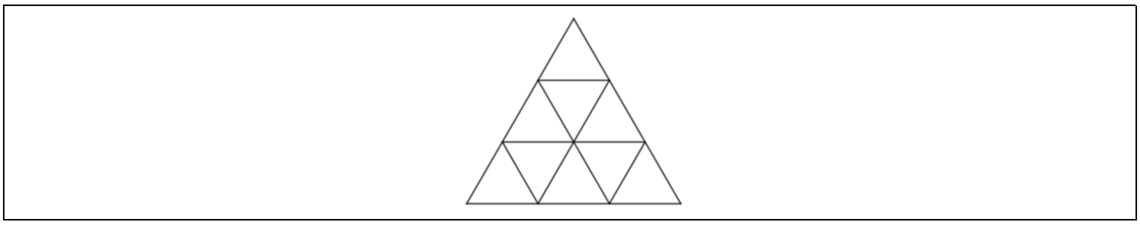


図 5 −31　 Q が予想に用いた図形

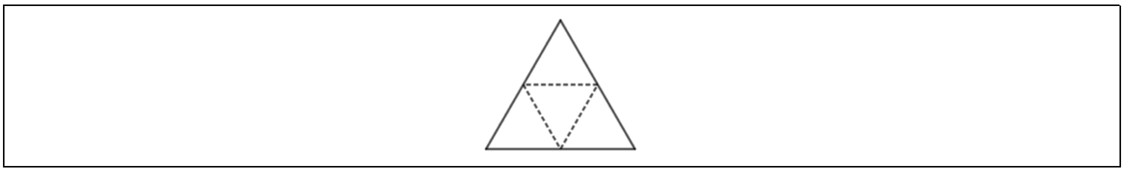


図 5 −32　Q が確認に用いた三角形のサイズ（実線部分）

そしてこの注意はＰも同様であったことが，次の発言から読み取れる。(39:55–40:07)

Ｐ：	一番小さい三角形，この最小単位の三角形だと，何かの２乗になってて，都合がいいんですけど，この次の大きさになると，よくわかんない数字になって。

ここで「何かの２乗になってて」としたのは２段の三角形内の最小の正三角形の個数が４個であったことに基づいている。さらに，「この次の大きさになると」というのは，３段の正三角形のことを指している。

また，Ｑは２乗であることに着目したことについて次のようにも説明していることから，「本質」として２乗であることに着目していることが確認できる。(30:10–30:28)

Ｑ：	それはこっち［正方形を指して］の四角形で出てきた規則が，三角形の方でも，同じような規則で，こう分類していったときに，なるっていう仮説から出てきました。

Ｑによると，２段の正三角形において，最小の正三角形の個数が 2^2 個であり，次のサイズ，すなわち最大サイズの正三角形の個数が 1^2 個であることと，分割数が $n \times n$ である正方形において，最小の正方形の個数が n^2 個，次に大きいサイズの正方形の個数が $(n-1)^2$ 個であったことから，４段の正三角形の場合には，２段分のサイズの正三角形の個数は $(4-1)^2 = 9$ 個であって欲しいと考えていた。同様に，６段の正三角形の場合には２段分のサイズの正三角形が 5^2 個含まれて欲しいと考えたが，この場合には 21 個しかないことから，次のように結論づけた。(32:10–32:14)

Ｑ：	都合が悪いから，この一番最初の例でしか成り立ってないなと思った。

ここまでの問題解決過程において，ＰとＱが規則を探ることを目的とした考察をしていたことから，観察者が他の規則が成り立っていないかどうかを問うと，ＰとＱは正三角形の総数を段数が少ないものから並べ，その階差数列を考え始めた。Ｐは５段の正三角形までを数え上げる過程で，第２階差が４，６，７となったことから規則性がないと判断した。このＰの判断に対し，Ｑは階差の調査を継続することを促し，かつ，第３階差が２，１，２となっていることを指摘した。これを受け，２人で７段の正三角形までの第３階差を次のような会話をしながら調べ，この探究を終えた。(42:41–55:44)

Ｐ：　これが１になるかな。
Ｑ：　なるでしょう。
Ｐ：　いや絶対これはもう，何か法則考えたほうがいいと思う。
Ｑ：　え，もし１がきたら一応規則でしょ？
Ｐ：　［笑う］２，１，２，１［Ｑが具体的に数え，その作業をＰが見ている］
　　　［Ｑの数えた結果が 170 個であったことを受け，Ｐが第３階差を計算し，その作業をＱが見ている］
Ｐ：　１になった［笑う］
Ｑ：　できたー！

観察者は，ここまでのＰとＱによる問題解決過程の観察を踏まえ，ＰとＱが「本質」として改めて再帰に着目することが起こり難いと判断し，さらなるＭ１として頂点が上にある正三角形のみへの着目を促し，設問(3)が記されたワークシートを提示した（図５－33)。

(3) ケンジくんとトムさんは，正方形以外でできる図形にも何か面白い性質がないか調べることにしました。ケンジくんは正三角形で出来る図３のような図形の正三角形の個数について調べましたが，特に性質を見つけることができませんでした。一方，トムさんはケンジくんと同じ図形について，上向きの正三角形（▽ではなく△）個数について考えることで，この図形の性質に気づきました．(2)のように，正三角形の個数が少ない場合から順々に調べて，性質を見つけてください。

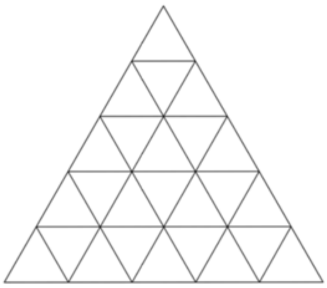


図3　正三角形でできる図形

図５—33　「規則的に並ぶ図形の総個数」設問（３）

Ｑは，５段の図形に含まれる正三角形の個数をサイズごとに数え，これらが自然数の和になっていると気づいた。そして，異なる段数の正三角形についても同様に個数を数え始めた。一方のＰは，個数を数える対象の正三角形が上向きのものに限定されたことを忘れて誤っ

た数え方をしていたが，設問（３）の提示から約５分後に誤りに気付き，正しく数え始めた。

Ｑはさらに，１段から４段までの正三角形の総個数を数え上げた結果を踏まえて，ｎ段の正三角形とｎ＋１段の正三角形の総個数の差が，１からｎ＋１までの和であるとしてまとめ，Ｐに説明した。このときＰは，計算を誤ったことにより総和が平方数になると判断していたが，Ｑとともに確認してこのミスに気がついた。観察者は，改めてＱに気がついたことの説明を求め，その内容をＰが理解していることを確認した。

この確認の前後でＰとＱが改めて正方形の場合と正三角形の場合を比較して共通点を抽出するような姿は確認できなかったので，観察者は，Ｍ２として，正方形の場合と正三角形の場合の共通点を尋ねた。この問いに対してＰは「２乗がつくかつかないか」(57:19–57:21)として正方形の場合と正三角形の場合の相異点を説明し，Ｑは「そうそう」(57:22) と同意した。そしてその直後，Ｐは「あ，こっち［正三角形を指して］は階差なのか」(57:30) と発言し，２乗であるかどうか以外の相異点に言及した。このことを受け，Ｑは，三角形では階差が等差数列であり，四角形では積なので２乗になっているとまとめた。観察者が等差数列についてどのようなものか尋ねると，Ｐは「ｎ段目だったら１からｎまでの自然数の和」(60:30–60:35) と説明した。また，観察者がＱに対して「積なので」という発言の意図を尋ねると，Ｑは「正方形って２乗かける，２乗ってイメージがあるから」(60:53–60:57) と説明した。これらの説明から，少なくともＱは図形と数を曖昧ながらも関連づけて捉えていることが窺えたが，ＰとＱのどちらも自然数の和を三角数という用語を用いて説明することはなかった。また，２乗の数に対しても，四角数という用語を用いることはなかった。

c.　「同値関係」の直観に伴う「全体」の直観過程

ＰとＱは，三角数や四角数という用語は用いていないものの，正三角形の場合が「自然数の和」の和，正方形の場合が平方数の和として，どちらも再帰の構造になっていることを同定していることが窺えた。そこで観察者は三角数と四角数という用語を説明したところ，ＰとＱは次のように反応した。(66:32–66:41)

Ｑ：	結局，図形と絡んでいるのか。
Ｐ：	じゃあ五角数も，五角数は，五角数っていうのもあるんですか。

この発言に続いて，Ｐは五角形について，Ｑは六角形について直ちに考察し始めた。しかしながら作図がうまくできずに考察が滞っていたので，観察者が作図のソフトフェアを用いて補助したところ，五角形以降の図形では同様な図形数による再帰は成立しなさそうで

あると結論づけた。つまり，この数学的対象の「全体」を，正三角形の場合と正方形の場合として直観した。

d.　解決過程の振り返りによる「発展性」の実感

観察者は，M４として，ＰとＱにここまでの考察の流れの振り返りを求めた上で，図形数の再帰を明確にする前後による数学的対象に対する感覚の差異について尋ねた。それに対してＱは，次のように自身の「広がり」に関する感覚を説明した。(86:07–86:19)

Ｑ：	今度は五角形の場合って，それが，関連性が見えることによって，五角形だったら五角数になるのかな，六角形だったら，みたいに広げやすい。

Ｐは特に発言をしなかったが，このＱの説明に対し相槌を打ち，同意しているように窺えた。

② 本事例に基づく分析的一般化と理論的仮説への経験的な補填

a.　本事例に基づく分析的一般化

「同値関係」として再帰に焦点を当てた本事例では，生徒たちは最初に提示した問題に対して解決することができていたが，教授的介入なしでは数学的対象の美的性質を感得している様子は確認できなかった。一方で，この生徒たちは一連の教授的介入を受け，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程を遂行することができた。このことは，本事例が前出の「等長性を保つ図形」の調査課題に対するペア A による事例と同様に，理論的仮説を支持する事例になったことを意味する。

本調査課題は，異なる分割数の図形を比較することで，「形式」であり「本質」である再帰が同定されることを期待して設定されたものであった。最初に提示した問題にも二つの分割数の場合が含まれていたが，そこでは提示されていない分割数の場合も考えることが再帰の同定及び直観において重要であると考え，M１として分割数が２×２から７×７までの場合を用意していた。それに対して，調査では生徒 Q が分割数の少ない場合を参考にしており，生徒 P についても Q の説明を受けることでこの結果を理解していた。その際，Q の「はらわれて」という発言から正方形の総個数を表す式が入子状になっていることを理解していることが窺え，また，同じく Q の「段階」や「連鎖」という発言から，総個数が底が１ずつ増える平方数の和の形式で表現できることを理解していることも窺えた。しかしながら M１として正三角形の分割の場合を考えることを提案した際には，Q は平方数とい

う形式に着目した探究を行い，その探究がうまくいかないことから，Ｐとともに総個数の数列の階差を確認しはじめた。このように，正三角形の場合を考察対象として提案する Ｍ１は，Ｑが直観している「本質」が平方数という形式であったことを顕在化した一方で，再帰への着目を促すことにはつながらなかった。

続いて提示した図５－33 によるＭ１としての提案は，数える対象が指定されていることもあり，Ｑは総個数が「自然数の和」の和で表現できることに気づき，Ｐも Ｑからの説明を理解していた。しかしながら，正方形の場合との比較で共通点を尋ねた Ｍ２では，生徒たちは「２乗がつくかつかないか」という，どちらも「底が自然数の数列の和」になっているという誤った認識をしていたことが明らかになった。この誤解はすぐに自分たちで改めたものの，再帰という関係は強い印象を与えていなかったことが窺えた。ただし，自然数の和に対して三角数, 平方数の別称として四角数という名称があることを知らせた後に生徒たちが他の多角形の場合を考察し始めたことから，再帰という関係自体は同定できていたことが確認できた。

このように，教授的介入のＭ１と Ｍ２は，停滞していた生徒たちの感得過程を確かに促進していたものの，ここでは三角数や四角数といった数学的概念の名称を知ることも重要な役割を果たしていた。また，この事例においては，正五角形や正六角形の場合にまで再帰が保存されるのではないかという，誤った「発展性」の実感を契機に，教授的介入の Ｍ３やＭ４を受ける前に「全体」に対する考察を生徒たちが自ら行なっていた。

以上のように，この事例において，「比較対象の系統的提示」という教授的介入は，生徒たちによる数学的対象の美的性質の感得過程を促進する役割を果たしていた。ただし，この事例では実質的に促進の役割を果たしたのはＭ１と Ｍ２であった。このように教授的介入の Ｍ２以降を必要としない場合があることは，第１節で検討したとおり，理論的仮説の範疇である。

b. 本事例による理論的仮説への経験的な補填

本事例では，生徒たちによる数学的対象の美的性質の感得過程の詳細において，理論的仮説に反するものではないものの，そこでは言及されていない事柄が以下のように確認された。

第１に，数学的対象の「同値関係」の同定過程または「本質」としての直観過程において，関係概念である「同値関係」よりも，この関係の対象概念が強い印象を与えうるということである。生徒たちは，正方形の場合の問題解決過程において平方数の和の再帰を同定して利用していた。しかしながら正三角形の場合の考察が求められた際には，「どう数えれば平方数が出てくるか」という着想のもと，複数の段数の正三角形を考察対象とする探究がなされ

た。つまり，平方数が関連することが保存されると期待し，再帰については考慮しなかった。

正三角形の場合に上向きと下向きの両方の正三角形を数えると，正方形の場合と共通する規則を見いだすことが容易ではなくなる。しかしながら，「なぜ正方形の場合に平方数の和の再帰が成立したのか」と振り返ることによって，正方形状に並んだ正方形の個数を数えていたこと，その並んだ正方形が一段ずつ増減していたということに気づくことが期待できる。そしてこのことに基づくと，正三角形の場合には正三角形状に並んだ図形を考えること，すなわち上向きの正三角形のみを数えることで，正方形の場合に見出した性質が保存できることにも気づくことが期待できる。一方，正方形の場合に平方数が関連することについて，生徒たちは，Qが「正方形は２乗のイメージがある」と述べたような「概念イメージ」（Vinner, 1991）を根拠としており，論理的な推論はなされなかった。この概念イメージに基づいた探究がなされたことが，正三角形の場合には保存して考えることができない平方数にこだわったことに繋がったと考えられる。この「本質」としての「同値関係」の直観過程についての考察を踏まえると，Ｍ１やＭ２の補助的な教授的介入として，「同値関係」が成立する根拠を明確にすることを促すことによって，「本質」として直観する数学的概念の選択をより的確なものにすることができると期待できる。

第２に，図形数の名称を知ることが，学習者にとって「全体」の探究の契機になったことである。当初の計画では，「全体」の直観を促すための教授的介入としてＭ１とＭ３を用意していた。そして，Ｍ２までの介入を行い，「同値関係」である再帰が「本質」として直観されることを促す過程で，この再帰の対象概念である図形数についてその名称を説明した。この説明の際，どちらの生徒も四角数という名称は知らず，一方の生徒については三角数という名称も知らなかった。このような状況で図形数の各名称を知った生徒たちは，図形数の名称と元の図形を関連づけて捉え，図形数がその名称に３以上の自然数を含んでいることに基づき，すでに考察した正三角形と正方形以外の場合の探究を始めたのである。

自然数の集合を独立変数の定義域として，対応する変数に成り立つ一般的な性質を見出したり証明したりすることは，数学における基本的な営みの一つであり，数学に従事する人々を強く魅了してきたものである。実際，代数方程式の解の公式のように限られた自然数のみに対して存在する数学的対象であっても，その一般化は重要なテーマとして探究されてきた。日本の学習者は，このような一般化を含む学習活動を，例えば多角形の内角の和を求める際などに経験している。したがって，本事例の生徒たちにとって，この「全体」の探究は学習経験上自然なものであったと推察できる。このように，学習者が自然に「全体」を探究したくなるような「本質」をそなえる数学的対象を教材として用いることで，数学的対象の美的性質を感得する経験が浅い学習者に対しても，感得過程の自然な経験を促せることが期待できる。

第３に，正確な「全体」の直観以前に，「発展性」の実感を契機とする探究がなされうるということである。理論的に導出された数学的対象の美的性質の感得過程では，「本質」と「全体」の直観が「発展性」の実感に先立つものと捉えていた。そして調査においても，最終的な正確な「発展性」は，「本質」と「全体」の直観後になされたと考えられる。しかしながらその過程において，生徒たちは五角形や六角形で図形数の再帰が成立するか否かの確認に先立って，教授的介入を受けずに，この五角形以降の多角形でも同様に成立する可能性，すなわち「発展性」を実感していた。つまり，「本質」の直観，「全体」の直観，「発展性」の実感という三つの過程に明確な順序性はなく，本事例のように，実感した「発展性」を確認するために「全体」の探究がなされ，直観された「全体」に応じた「発展性」が改めて実感される場合があるということが確認できた。

(3) 「ピンの入替操作の規則」の問題解決過程の分析と考察

① 高校生ペアＣによる問題解決過程の分析

a. 「同値関係」の同定及び直観と「全体」の直観の素地となる探究

本事例で提示された問題（図５－34）に対して，高校生ペアＣのＸとＹのうちＸは過去に似た問題を解いた経験があり，最初はその経験を想起しながらクリップの操作を行った。その際，操作の原理を捉えるためにピンが各色２個ずつの場合も試したが，その原理を見出せずにいた。そこで観察者は，Ｍ１として，同じく対称性が成立する各色が１～３個ずつの場合について，適当な図をかきながら考察するように求めた。

3 サトシくんとモモコさんは，図4で示された「ピンの入れ替え」ゲームで遊んでいます。

白黒2色のピン 10 個が，図のように，直線上に並んだ 11 個の穴の上にあります。この黒いピンと白いピンを入れ替えたいのですが，次のルールに従わなければいけません。

＜ルール＞ピンが移動できるのは，次のいずれかである。

・ 隣り合う空きの穴

・ １個のピンを跳び越えた空きの穴

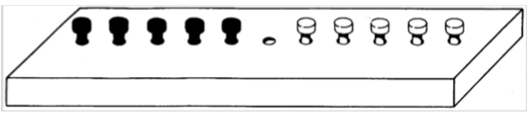


図4 「ピンの入れ替え」ゲーム

（1）2色のピンは入れ替えられるでしょうか。適当な図をかきながら考えてください。その際，用意してある道具を用いて考えても構いません。

図５－34　「ピンの入替操作の規則」の問題提示と設問（１）

一方の Y は，開始直後は<ルール>に従った操作に手間取っていたが，X の説明でルールを理解し，各色２個ずつの場合の入れ替えに成功した。そして，各色２個ずつの場合の総手数と，X が求めた各色３個ずつ，５個ずつの場合の総手数の間の規則を探し始めた。

その後，X は，ピンの個数が各色２個ずつの場合の総手数が８回，各色３個ずつの場合が 15 回であることを元に，前者が２×４，後者を３×５と読み換え，各色４個ずつの場合を４×６として予想した。そして各色５個ずつの場合についてクリップを操作して 35 回という結果を得て，ここまでの結果を Y が表にまとめた。Y はこの結果を元に規則を探ろうとしたが，結果からなる数列の階差を調べてもうまく同定できずにおり，その様子をみた X が「だから，両側 x だったら $x \times (x+2)$ じゃない？」(31:08-31:16) と発言すると，Y はそれまでに得られている結果と比較してこの規則を認めた。また，この規則がまだ調べていないピンの個数の場合に成立する保証がないことを，二人で確認した。ここで同定された各色同数の場合のピンの個数と総手数についての関係は，$x > 0$ において全単射であるという意味で「同値関係」である。ただし，生徒たちはこの x の値の範囲について言及しなかった。

続いて，観察者が M２として，この規則以外で各色１～５個ずつの場合に共通する性質がないか問うと，X と Y は空き穴の動きを視点にそれぞれの場合を比較した。そして，２手目までは全て同じ，５手目までは各色２個ずつ以上では同じ，のように，操作が変わる「区切り」を調べ，この「区切り」までの手数の間の規則を探った。観察者にこの規則についての説明を求められると，Y は各色５個ずつの場合について，空き穴の動きを「左１」のように向きと幅で記述し，規則を探った（図５－35)。この図５－35 を基に見出された規則と，その規則を見出した生徒の記号を，表５－６に示す。

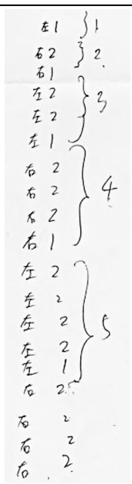


図５－35　空き穴の動き[8]

[8] この時点での記述を再現するために，探究の後の段階で生徒に加筆された箇所（下の４行）

表５－６　図５－35 から見出された規則

X	・　区切りまでの空きの穴の動きの方向が，左右交互になっている。
Y	・　方向ごとにまとめると，手数が１，２，３，４，５となっており（図５－35 の右の値），この次はたぶん６になる。 ・　方向ごとにまとめた中での空き穴の動く幅は，最後が１でそれ以外は２になっている。

b.　「同値関係」の同定及び直観過程

ＸとＹは，表５－６のＹが見出した規則を修正する形で，次の二つの対称性を同定した。

第１に対称性は，空き穴の動く方向ごとにまとめた手数の間の対称性である。表５－６に示したとおり，Ｙはピンが各色５個ずつの場合について，このまとめた手数が１ずつ増えると予想していた。この予想について，観察者がＭ２として，他のピンの個数の場合でも成り立つのかを問うと，Ｘは各色２個ずつ，３個ずつの場合について「区切り」以降も調べ，この値がそれぞれ１，２，２，２，１と，１，２，３，３，３，２，１であることを確認し，各色５個ずつの場合に１，２，３，４，５，５，５，４，３，２，１になることを予想した。一方，Ｙは図５－35 の続きを作成し（図５－36，図５－37），この値が１，２，３，４，５，５，５，４，３，２，１と並んでいることを確認し，ＸとＹは，中央の三つの５に関して「左右対称になっている」と捉えた。この時点で気づいたことについての説明を観察者から求められた生徒たちは，次のように説明した。（48:50-51:04）

Ｘ：　ていうか，ええ，動き方っていうのが，例えば２だったら，１，２，２，２，１，３だったら１，２，３，３，２，１で，１，２，３，３，３，２，１か。

Ｉ：　それって右左は書いてない

Ｘ：　右左は書いていないけど，右左は単純にこれ裏返してみれば，おんなじ事にたぶんなる。右左関係なく，２だったら１，２，２，２，１，３だったら１，２，３，３，３，２，１，になって，それはたぶん，逆の流れでも，対称になる。

Ｉ：　逆の流れってのは？

Ｘ：　逆の流れっていうのは，こう［図５－35 の上から下に向けて指でたどりながら］始めてるんすけど，こっちからこう［図５－37 の下から上に向けて指でたどりながら］流しても，

を補正している。補正前の状態，すなわち生徒の加筆後の状態は，図５－36 に示した。

Ｙ：　同じだね。

Ｘ：　おんなじ。動く，マスの数が，対称になっているから。説明しにくいな。

Ｙ：　これがさ［クリップを並べて］逆側から見ても同じ。

Ｘ：　そうなる。

Ｙ：　あの円順列みたいな。

Ｘ：　数珠順列。

Ｙ：　数珠順列。

Ｉ：　あ，ひっくり返してる，ひっくり返してみてもってことか。

Ｙ：　ここ［図５－37 の最下部をペンで指して］で終わりなんですけど，こっちからやったとしたら［図５－37 の方向の文字の隣の数を下からペンで指しながら］１，２，１，２，２，１，２，２，２，１，で，普通にやったとしても［図５－36 の方向の文字の隣の数を上からペンで指しながら］１，２，１，２，２，１，２，２，２，１ってなってる。ま，変わんないですけど。

Ｉ：　この，こっちのこの動きの，さっきこの，なんだっけ大括りの，話

Ｘ：　右左の，う，動く，だから一気に右に何個いくか左に何個いくか，だったとしても

Ｉ：　うん，そこが，対称になっている話と，今，言ってくれたのは，この［方向の文字の隣の数を指して］ここのレベルまでってこと？

Ｘ：　うん，そこのレベルまで。

Ｙ：　２隣にいくか，１隣にいくか，てのをみたら，まあ，規則性がある。

Ｉ：　ええとなんだっけ，規則性ってのは，

Ｙ：　最初は，最初は２で，最後は１，最後以外２

この会話にみられるように，第１の対称性についての X による説明に続いて，Y は括られた中の操作に関する規則に言及し始めた。この過程で，図５－35 の最下部の次がどのようになるかが再検討され，図５－36 のように「右２」と書いたものを「右１」に正した後，改めて「右２」に正した。この訂正をきっかけに，次の第２の対称性が確認された。

第２の対称性は，空き穴の動く幅の間の対称性である。表５－６や上の発話記録に示したように，Y は方向ごとにまとめた中でのこの値が「最後が１でそれ以外は２」と捉えていた。しかしながら，X と Y は，上述のように第１の対称性を同定した後に各色５個ずつの場合にこの値を調べ直し，中央のまとまり（図５－36）は全て２になっていること，このまとまり以降は最初が１で残りが２になっていることを確認した（図５－37）。さらに，この対称性が，ピンの個数が各色２個ずつの場合，３個ずつの場合にも成り立っていることを確認し，

各色 n 個ずつの場合について一般化した。そしてこの結果を受け，ピンの個数が各色 n 個の場合の総手数が n^2+2n であることを改めて導いた（図５－38)。

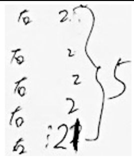


図５－36　図５－35 への加筆

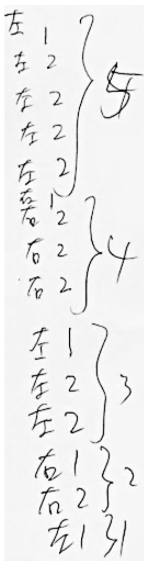


図５－37　図５－36 の続きを求めた探究の結果

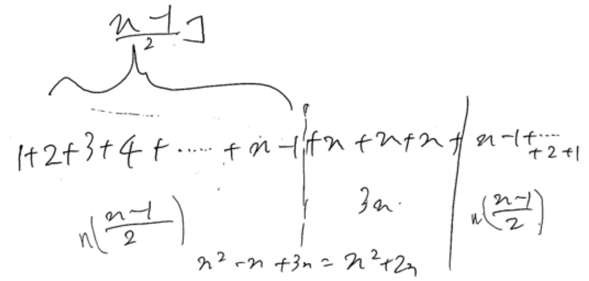


図５－38　ピンが各色 n 個の場合の総手数が n^2+2n であることの導出

c.　「同値関係」の直観に伴う「全体」の直観過程

Ｘとｙは，対称性が及ぶ「全体」を，「各色のピンが同数」という条件によって，次の過程で直観した。まず，観察者が，Ｍ３として，対称にならない場合を問うと，ＸとＹは，即

座に左右のピンの個数が異なる場合という予想を立てた。そして，各色の本数が異なる場合の操作をとおしてこの場合の総手数を調べ，図５－39 のように表にまとめた。ただしここでは結果の総手数だけを調べ，対称性の有無は確認しなかった。

図５－39　総手数の一覧

Ｘ と Ｙ はこの結果に基づいて，各色のピンの個数が異なる場合の総手数の規則を探り，操作と照合してその規則を解釈した[9]。その後，観察者がＭ３として対称性にならない場合を改めて問うと，各色のピンの個数が異なる場合として結論づけた。

d.　解決過程の振り返りによる「発展性」の実感

Ｘ と Ｙ は対称性を同定する際に，「おお」といった感嘆の声をあげた。また，観察者が，Ｍ４として，操作によって総手数を求める方法と対称性に基づく方法，すなわち「本質」と「全体」を直観する前後の比較を促すと，表５－７のように対称性に基づく方法について感想を述べた。

表５－７ 対称性に基づく方法についての感想

X	・　そっちの方が確実に楽。 ・　回り道せずに必要最低限な情報だけ集められて答えに辿り着ける。
Y	・　他の問題にも対応できる。 ・　効率が良くなる。

[9] どちらかの色のピンが１個減ることによって，その１個が動くことで増えていた手数分が減ると考え，この減るはずの手数を考えていた。その後，この手数がなくなるピンがなくなる前にどこにあったかによって変わることが確認され，なくなる１個のピンの手数ではなく，移動距離によって解釈された。このことは，どちらかの色のピンが１個減ることによってそのピンを跳び越える別の色のピンの個数＋１（空き穴も跳び越すと考える）分だけ手数が減ると解釈することもできる。この後者の解釈に基づくと，２色のピンの個数がそれぞれ a 個と b 個のときの最小の入れ替えの総手数は，$ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$ として導ける。このピンの個数と総手数の関係は「擬同値関係」である。

ここで，Y の「他の問題にも対応できる」という感想は，「今回考えた総手数以外のこともわかる」ということを意味していた。すなわち，Y は対称性を同定する方法に「応用」という観点で発展性を実感した。一方，X は発展性に関する直接的な発言はしなかった。ただし，「回り道せず」という発言から，竹内の言う「全体を一目瞭然とみわたし、みとおすことができる」（竹内，1979，p. 109）状態に至っていることが推察される。

② 本事例に基づく分析的一般化と理論的仮説への経験的な補填

a. 本事例に基づく分析的一般化

「同値関係」として対称性に焦点を当てた本事例では，生徒たちは最初に提示された問題である「入れ替えが可能かどうか」という問いの解決だけでなく，入れ替える際の最小回数を求めることもできていた。そしてその過程では，ピンが各色同個数の場合のピンの個数と総手数の間の「同値関係」が同定されていた。この「同値関係」は数え上げの結果から帰納的に予想されたものであった。そしてこの「同値関係」を直観して「全体」を広げることによる数学的対象の美的性質を感得している様子は確認できなかった。一方でこの生徒たちは一連の教授的介入を受け，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程を遂行することができた。このことは，本事例が「等長性を保つ図形」の調査問題に対するペア A，及び，「規則的に並ぶ図形の総個数」の調査課題に対するペア B による事例と同様に，理論的仮説を支持する事例になったことを意味する。

本調査課題では，本節第１項で検討したように，学習者がピンの個数が少ない場合を検討することを期待して問題の条件が設定された。そして調査ではこの期待どおりにピンの個数が少ない場合で考える姿が確認できた。しかしながら，ここではピンの個数を多様に変更してお互いの共通点を探る様子が確認できなかったので，改めて M１としてピンの個数を指定して考察対象にすることを提案した。その結果，最初の問題で問うていた「入れ替えが可能かどうか」という問題の解決や，帰納的推論による「同値関係」の同定に繋がったものの，図示を求めていた操作のプロセスへの着目が希薄だったためか，想定していた対称性という「同値関係」への着目は促せなかった。

続いて，M２として「同値関係」である全単射以外の共通点を問うことで改めて操作のプロセスへの着目を促すことができ，その着目によって確認された規則が他の場合との共通点であるのかどうかについて，M２として改めて尋ねた。その結果，生徒たちは各色５個ずつの場合に見出していた規則を他の個数の場合と対照して捉えなおし，対称性を同定した。続いて M３としてこの対称性が成立する範囲を尋ねると，各色のピンの個数が異なる場合

の検討から最初に検討していた「同値関係」に関する探究[10]が展開され，その結果として，確かな根拠を確認せずに「各色の個数が等しい場合」という回答が得られた。すなわち，「全体」の直観は確認できたものの，「全体」自体の探究は十分には展開されなかった。

また，M４によって生徒たちが実感している「発展性」を顕在化することはできたが，この実感がどのようになされたかについては詳しい情報は得られなかった。最初の事例と同様に，生徒たちに表明を促したことが，実感した「発展性」を明確にしたことは期待できる。

以上のように，この事例において，「比較対象の系統的提示」という教授的介入は，生徒たちによる数学的対象の美的性質の感得過程を促進する役割を果たしていた。特に，本事例では「規則的に並ぶ図形の総個数」の調査課題に対するペア B による事例と同様に，M１と M２が重要な役割を果たしていた。前事例から繰り返しになるが，このように教授的介入の M２以降を必要としない場合があることは，第１節で検討したとおり，理論的仮説の範疇である。

b.　本事例による理論的仮説への経験的な補填

本事例では，生徒たちによる数学的対象の美的性質の感得過程の詳細において，理論的仮説に反するものではないものの，そこでは言及されていない事柄が以下のように確認された。

第１に，「同値関係」が試行錯誤的に同定されうるということである。本事例において，M１と M２を受けた生徒たちは対称性を同定し直観した。しかしながら，その過程は次のように試行錯誤的であった。この過程を簡易的に記号を用いて説明する。

異なる対象 I，J について，I の属性を I (a, b, c, d)，J の属性を J (p, d, c, q) のように表現し，「I と J の共通点 c を探る」という行為を，「c を抽象する行為」として捉えると，本事例ではまず，空の穴の動きに着目することで，このような抽象がなされた。しかしその後は，ピンが各色５個ずつの場合のみが考察された。つまり上の記号表現では，まず I の一つの属性が抽象され，観察者の教授的介入によって，その属性が J に含まれるかどうかが確認された。この後者のような抽象は，抽象した属性が他方にも属する保証はないものの，共通する属性を直ちに抽象できない場合にも思考を進められる方法であると言える。

本事例における生徒たちは，最終的に「同値関係」を同定及び直観することができたが，全ての高校生が同様に同定できるとは限らない。上記の二つの抽象を鑑みると，「同値関係」

[10] 図５－39 の表に記された値の間の規則は，ピンの個数が様々な場合に成立する「本質」である。またこの「本質」は，本章註７に述べたように「擬同値関係」である。したがってここでペア B が行った探究は，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程になりうるものであった。

がうまく同定されない場合には，共通点に限らずに属性を抽象させることが，結果的に「同値関係」の同定につながりうることが示唆される。

第２に，「全体」を正確に直観することは，美的性質を感得する上で必ずしも重要ではないということである。本事例でＭ１とＭ３を受けた生徒たちは「全体」を直観した。しかしながら，それは不完全な「全体」であった。

調査課題における対称性は，例えば白のピンが４個，黒のピンが２個の場合にも成立する。したがって，「各色のピンの個数が等しいならば，対称になる」は真だが，この命題の裏は偽である。しかしながら，直観された「全体」が不完全であっても，元の数学的対象よりも「発展性」が付与されていれば，本事例のように「発展性」の実感を促しうると言える。

ピンの個数について，対称性が成立するための必要十分条件を正しく求めて，完全な「全体」を同定することは必ずしも容易ではない。本事例を鑑みると，この「全体」の完全性にこだわって課題解決の難易度を高めずとも，数学的対象の美的性質の感得を促しうることが示唆される。

第３節　３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得の促進

第１項　３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程

前節の三つの単一事例研究による理論的仮説への経験的補填のうち，それぞれの調査課題に特化したものを除いてまとめると，以下のようになる。

まず，数学的対象の「同値関係」の「形式」としての同定及び「本質」としての直観について，次のことが確認できた。

- 経験したカリキュラムによって，特定の数学的概念に着目しやすくなること。
- 関係概念である「同値関係」よりも，この関係の対象概念が強い印象をもちうること。そしてその強い印象が特定の数学的対象のみで成立する性質への着目につながり，数学的対象間で共通する性質である「本質」の直観の妨げになりうること。
- 複数の数学的対象間に共通する性質である「本質」を直観する際に，特定の性質を共通点として複数の数学的対象から同時的に抽象せずに，一つの数学的対象から抽象した性質が他の数学的対象においても成立するかどうかを吟味するという試行錯誤的な過程で直観することがあること。

続いて，数学的対象の「全体」の直観と「発展性」の実感について次のことが確認できた。

- 数学的対象の「全体」を正確に直観しなくとも，考察を通して元の数学的対象よりも「発展性」が付与されていれば，「発展性」を実感しうること。
- 実感した「発展性」を確認するために「全体」の探究をし，直観した「全体」に応じた「発展性」を改めて実感する場合があること。

上記の「同値関係」に関する３項目のうち，第２項目と第３項目については，特に「同値関係」を「本質」として直観する過程に関する補填である。本章で焦点を当てている３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程では，「同値関係」は「形式」と「本質」の二つの役割を担っていた。そしてこの二つの役割を担う「同値関係」の「形式」としての同定過程と「本質」としての直観過程を一つの局面として捉えていた判断は，この「同値関係」が What-If-Not 方略のような「そうではない」数学的対象との比較によって同定されるという仮説に基づくものであった。したがって，「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観をともに促すことを意図した教授的介入 M１及び M２は，条件を変更した新たな数学的対象の考察を提案したり，それらの共通点を尋ねたりするものであった。しかしながら単一事例研究の成果から，M１や M２を受けた後の探究過程においても，学習者が一つの数学的対象の構成要素間の関係のみを調べる場合があること，すなわち複数の数学的対象間に共通する「本質」としての直観と，一つの数学的対象の構成要素間の関係である「形式」としての同定とが独立しうることがわかった。

以上を踏まえて，第３章で定めた３局面モデルに基づく数学的対象の感得過程に対して，本章で検討した教授的介入と経験的補填を加味して，次のように修正する。修正箇所は下線部分である。

第１の局面は，数学的対象の構成要素間の「同値関係」を同定するとともに，その「同値関係」を異なる数学的対象間の共通点，すなわち「本質」として直観する局面である。構成要素間の「同値関係」の同定は，構成要素間の関係を What-If-Not 方略などによって検討することでなされる。一方で，このような「そうでないもの」との比較では，最初に検討していた数学的対象とは異なる数学的対象においても同様な「同値関係」が成立していることに気づくことがある。すなわち，ある数学的対象 A の構成要素 x と y の比較に加えて，異なる数学的対象 B 及びその構成要素 x'と y'とも比較することによって，数学的対象の「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観がなされることがある。ここで，学習者が経験したカリキュラムによって，特定の数学的概念が着目されやすくなることがある。「本質」としての直観については，美的性質の感得が数学の問題解決の文脈においてなされる場合には，問題の解や解決の見通しが得られてから「本質」が直観されるものとする。

この第１の局面での探究を学習者が自ら展開しない場合に，教師の立場の他者が条件を変更した数学的対象を提示して考察を提案すること（M１）や，その新たな数学的対象と元の数学的対象との共通点を尋ねること（M２）によって，数学的対象の構成要素間の「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観は促される。ただし，このような教授的介入を受けた学習者が，複数の数学的対象間の関係ではなく，一つの数学的対象の構成要素間の関係のみを調べること，すなわち「同値関係」を「形式」としてのみ同定する場合

もある。また，「本質」の直観が，特定の性質を共通点として複数の数学的対象から同時的に抽象するのではなく，一つの数学的対象から抽象した性質が他の数学的対象においても成立するかどうかを吟味するという試行錯誤的な過程でなされることもある。

第２の局面は数学的対象の「全体」を直観する局面である。数学的対象の「全体」を直観することは，その数学的対象の「本質」が及ぶ範囲を同定することなので，「本質」として選択した数学的概念（数学的対象の属性の一部）を固定して，その他の条件を変更した場合の帰結を調べることなどをとおして，「全体」が直観されると考えられる。

第３の局面は数学的対象の「発展性」を実感する局面であり，「本質」や「全体」が直観される以前の数学的対象と，直観後の数学的対象との比較によって，この「発展性」は実感される。ただし，数学的対象の「全体」を正確に直観していなくとも，考察を通して元の数学的対象よりも「発展性」が付与されていれば，「発展性」を実感しうる。また，「全体」の直観は「発展性」の実感に常に先立つのではなく，実感した「発展性」を確認するために「全体」の探究をし，直観した「全体」に応じた「発展性」を改めて実感する場合がある。

なお，上述の経験的補填は，調査対象が高校生であったことに由来する可能性がある。例えば補填として指摘した試行錯誤的な過程では，学習者は対称性を同定した後にその対称性がピンの個数が異なる場合でも成立するかを検討するという，抽象的な対象を用いた考察が行われていた。このような考察が小学生や中学生でも起こりうるのかどうかについては今後の課題とする。

第２項　３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得の促進

本章で理論的に導出した３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法である「比較対象の系統的提示」は，次のものであった。

（Ｍ１）「同値関係」を保存して条件を変更した場合，または逆に「同値関係」が保存されないように条件を変更した場合を，考察の対象として学習者に提示する。

（Ｍ２）「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う。

（Ｍ３）「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問う。

（Ｍ４）「同値関係」の同定と直観，及び，「全体」の直観がなされた数学的対象と元の数学的対象の比較を促す。

この四つの教授的介入で構成される促進方法を，前項で示した３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程の修正を踏まえて，次のように修正する。

（Ｍ１）「同値関係」を保存して条件を変更した場合，または「同値関係」が保存されないように条件を変更した場合を，考察の対象として学習者に提示する。

（Ｍ２－１）「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う。

（M２－２）M２－１を受けた学習者が複数の数学的対象間の共通点を同定できない場合には，共通点という制約なしに，一つの数学的対象の属性の抽象を促すことで，試行錯誤的に共通点を同定することを促進する。この教授的介入は必要に応じて次の M２－３と組み合わせて用いる。

（M２－３）M２－１を受けた学習者が数学的対象間に共通する関係ではなくその関係の対象概念に着目することで，数学的対象間には共通に成立しない事柄を同定している場合には，その事柄が特定の数学的対象で成立する根拠を問う。この教授的介入は必要に応じて先のM２－２と組み合わせて用いる。

（M３'）「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問う。ただし，この範囲に厳密であることは求めない。「本質」の直観以前の数学的対象よりも広がった範囲を同定できていればよいこととする。

（M４）「同値関係」の同定と直観，及び，「全体」の直観がなされた数学的対象と元の数学的対象の比較を促す。

以上のようにM２への二つの補助的な教授的介入の添加やM３の修正によって定められたそれぞれの教授的介入は，順序性を絶対視しない。すなわち，学習者の問題解決過程に応じて，M３に先立ってM４を行うなどのように介入を柔軟に適用することとする。

第５章のまとめ

本章では，第３章で同定した数学的対象の美的性質の感得過程についての二つのモデルのうち３局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を解明することが目的であった。この目的を達成するために，主としてインによる複数事例研究の方法論（Yin, 2014）に基づいて，実践的・実証的な検討を展開した。

第１節では，先行研究で試された数学的対象の美的性質の感得の促進方法を批判的に検討することによって，本研究における促進方法を理論的に導出した。まず，大学レベルの数学を専攻している学生や数学的に熟達した高校生を対象とした先行研究における調査とその結果を概観し，学習者が自ら導出した数学的解法と他者が提示した「美しい」数学的解法の比較を促す，「解法の比較の促進」と名付けた教授的介入では，学習者による数学的対象の美的性質の感得を十分に促せないことを確認した。また，先行研究のように数学的対象間の比較を美的性質の感得に位置づける本研究において，この比較対象となる数学的対象を，学習者が教師の介入を受けながらも「考え出す」ものとしている点で先行研究と異なっていることを確認した。そしてこの差異を反映させた，四つの教授的介入で構成される数学的対象の美的性質の感得の促進方法を，「比較対象の系統的提示」と称して次のように定めた。

（M１）「同値関係」を保存して条件を変更した場合，または「同値関係」が保存されないように条件を変更した場合を，考察の対象として学習者に提示する。

（M２）「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う。

（M３）「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問う。

（M４）「同値関係」の同定と直観，及び，「全体」の直観がなされた数学的対象と元の数学的対象の比較を促す。

第２節では，第１節で導出した促進方法を理論的仮説とする調査を実施し，教授的介入を受けた学習者がどのように問題解決を遂行するか，特に，数学的対象の美的性質を感得するのであればどのような過程で感得するかを記述し，理論的仮説との対照を行った。まず，この目的を達成する調査では詳細な事例の記述が必要であることを確認し，そのような調査の方法を主としてインによる複数事例研究の方法論（Yin, 2014）を参照して決定した。そして本研究の理論的枠組みと第３章で定めた３局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得過程，及び，本章第１節で定めたこの感得の促進方法を前提として，次の三つの調査課題を設定した。すなわち，「等長性を保つ図形」，「規則的に並ぶ図形の総個数」，「ピンの入替操作の規則」である。続いて，設計した調査を国立大学附属高校に所属する高校生ペア３組を対象として実施して合計７事例のデータを収集し，バーローら（Barlow, Nock, & Hersen, 1976/2009）のいう系統的追試の視座から三つの事例を詳細に記述し，分析的一般化と理論

的仮説への経験的補填を行なった。

第３節では，第２節の三つの単一事例研究の成果を総合する考察を行い，第３章で定めた３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程，及び，本章第１節で定めたこの感得の促進方法という理論的仮説に対する修正を行なった。まず，数学的対象の美的性質の感得過程の３局面のうち，第１の局面である数学的対象の構成要素間の「同値関係」を同定するとともに，その「同値関係」を異なる数学的対象間の共通点，すなわち「本質」として直観する局面に対しては，次の修正を行なった。

- この過程で学習者が着目する数学的概念は，学習者が経験したカリキュラムによって左右されうること。
- 教授的介入Ｍ１やＭ２を受けた学習者は，数学的対象の構成要素間の「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観が促される。ただし，このような教授的介入を受けた学習者が，複数の数学的対象間の関係ではなく，一つの数学的対象の構成要素間の関係のみを調べること，すなわち「同値関係」を「形式」としてのみ同定する場合もある。
- 数学的対象の「本質」の直観が，特定の性質を共通点として複数の数学的対象から同時的に抽象するのではなく，一つの数学的対象から抽象した性質が他の数学的対象においても成立するかどうかを吟味するという試行錯誤的な過程でなされることもある。

次に，第３の局面である，「本質」や「全体」の直観前後の数学的対象の比較によって数学的対象の「発展性」が実感される局面に対しては，次の修正を行なった。

- 数学的対象の「全体」を正確に直観していなくとも，考察を通して元の数学的対象よりも「発展性」が付与されていれば，「発展性」を実感しうる。
- 「全体」の直観は「発展性」の実感に常に先立つのではなく，実感した「発展性」を確認するために「全体」の探究をし，直観した「全体」に応じた「発展性」を改めて実感する場合がある。

以上の修正を踏まえて，本研究における３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法である「比較対象の系統的提示」のＭ２とＭ３を次のとおり修正した。

（Ｍ２－１）「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う。

（Ｍ２－２）Ｍ２－１を受けた学習者が複数の数学的対象間の共通点を同定できない場合には，共通点という制約なしに，一つの数学的対象の属性の抽象を促すことで，試行錯誤的に共通点を同定することを促進する。この教授的介入は必要に応じて次の Ｍ２－３と組み合わせて用いる。

（Ｍ２－３）Ｍ２－１を受けた学習者が数学的対象間に共通する関係ではなくその関係の対象概念に着目することで，数学的対象間には共通に成立しない事柄を同定している場

合には，その事柄が特定の数学的対象で成立する根拠を問う。この教授的介入は必要に応じて先のＭ２－２と組み合わせて用いる。

（Ｍ３’）「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問う。ただし，この範囲に厳密であることは求めない。「本質」の直観以前の数学的対象よりも広がった範囲を同定できていればよいこととする。

第６章

数学的対象の美的性質の感得の促進のための教材研究の方法

第４章及び第５章では，第２章で定めた本研究における数学的対象の美的性質とその感得についての理論的枠組み，及び，第３章で定めた数学的対象の美的性質の感得過程についての理論的仮説に基づいて，学習者が数学的対象の美的性質を数学の学習過程で感得することを促す方法について，実証的・実践的に議論してきた。そこで主として議論された促進方法は，児童・生徒の学習過程に対して教師の立場から直接的に介入する，いわばリアルタイムの方法であった。それに対して，第５章で行なった単一事例研究内での分析的一般化に関する考察では，調査課題に依存して顕現する感得過程の特異性も浮き彫りになっている。このことを鑑みると，美的性質をそなえる知覚対象の特性についての議論を可能にすることを念頭に構築した本研究の理論的枠組みは，その知覚対象が数学的対象であるということのみならず，この数学的対象についてのより詳細な検討を可能にするものであると言える。またそれと同時に，学習者による感得を適切に促すためには，数学的対象について詳細に検討する必要性があることが示唆される。

本章では，第４章と第５章における実証的・実践的な考察を踏まえて，第３章で定めた数学的対象の美的性質の感得過程のモデルに応じた教材研究の方法について議論する。はじめに，４局面モデルによって学習者が数学的対象の美的性質を感得することを想定した教材について，そのような教材の一般的な特徴を第４章における考察を踏まえて定める。そしてその特徴を視点とした教材研究の方法について議論する（第１節)。続いて，３局面モデルについても同様に，第５章における結果を踏まえて，教材の特徴及び教材研究の方法について議論する（第２節)。

第１節　４局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得を想定した教材研究の方法

第１項　４局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得を想定した教材の特徴

第４章で記述した授業で扱われた単元は「立体の体積」であり，立方体の体積の求め方を他の立体に適用できるように捉え直すことで，求積方法が単位立方体の個数を数え上げる方法から［底面積×高さ］を計算する方法へ発展していった。この過程では，少なくとも観察者の立場からは，例えば次のような「形式」,「本質」,「全体」及び「発展性」が特定できた。すなわち,「形式」は，並べられた単位立方体の一つの方向における個数と辺の長さや，１段分の単位立方体の個数と面積が，求積という場面において，それぞれ同じものとみなせるという「擬同値関係」である。「本質」は，n（≧2）次元の体積が n-1 次元の体積と残りの 1 次元の長さから求められることであり，特にここでは体積が面積と長さから求められることである。「全体」は，［底面積×高さ］という求め方が適用できる範囲である。授業で実際に扱った図形で述べると，底面が平行四辺形や台形の四角柱，及び，三角柱，円柱の集合である。「発展性」は，直方体を対象としていた単位立方体の個数を数え上げる方法と，一般的な柱体に適用できることが確認された［底面積×高さ］との比較から得られる，この後者の方法の広がりや深まりといった感覚である。

観察者はあらかじめ，この授業が「練り上げ」を含む問題解決型授業で展開されることと，「立体の体積」の単元を扱うことを期待していた。前者の期待は，理想的な問題解決型授業における「練り上げ」が，理論的には数学的対象の美的性質の感得過程の４局面モデルを構造的に含んでいたからであり，後者の期待は別の候補であった「比例」の単元と比較して，数学的対象の美的性質の「無用性」という感得する上での必要条件が満たされると考えたからである。

観察した授業では，求積方法を児童が考え出すことや，多様な図形への適用可能性の吟味が操作的活動などもとおして丁寧に扱われていたが，この立方体の求積方法を元に他の柱体の体積の求積方法を導入する流れは，概ね教科書と同様である（e.g., 藤井ら，2020）。このように既習事項に基づいてより一般的な概念を導入する展開は，現在の日本の算数･数学科カリキュラムの構成に基づくものであり，この構成は統合・発展型などと呼ばれている（e.g., 礒田・中村，2010）。例えば，算数科では同数累加によって意味づけられる乗法は，有理数を乗数とする場合に適用することを目的として，比例という関係が抽出され保存されることによって，より一般的な意味へと拡張・統合される。中学校数学科においても比例の後に一次関数が扱われ，高等学校数学科では三角比の後に三角関数が扱われており，既習事項を具体とみて，より一般的な概念を扱う流れでカリキュラムが構成されている。したがって，本研究で観察した算数科の「立体の体積」という教材がもつ「本質」を保存して「全体」を拡大する展開が可能であるという特徴は，この教材に限らず，日本の算数・数学科の

カリキュラムにおける様々な教材に共通する特徴であると言える。換言すると，数学的対象の美的性質を捉える観点のうち，「本質」と「全体」，「発展性」については様々な教材で強調しやすい条件が整っていると言える。ただし，このような展開の詳細を教科書に基づいて判断する限り，特に中学校及び高等学校数学科においては，必ずしも「本質」を保存して「全体」を拡大する展開にはなっていない。このことについては次項で詳細に検討する。

数学的対象の美的性質を捉える観点のもう一つである「形式」について，この「立体の体積」において特定された「擬同値関係」については，教科書にも明記されている（図６－１）。

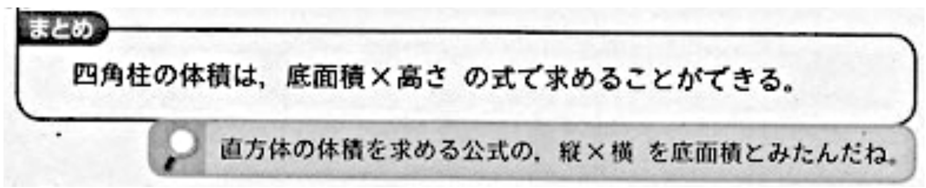

まとめ
四角柱の体積は，底面積×高さ の式で求めることができる。
直方体の体積を求める公式の，縦×横 を底面積とみたんだね。

図６－１　「立体の体積」における「擬同値関係」の明示（藤井ら，2020，p.122）

しかしながらこの「形式」という観点は，他の観点とは異なり，算数・数学科のカリキュラムの至る所で明確になっているものではない。したがって，教材研究においては「形式」が同定できるか否か，できるとしたらどのような関係かについて分析する必要がある。ただし，算数科の「図形」領域では，学年進行に伴い図形の着眼点を増やすようなカリキュラムが従前から構成されており，例えば第６学年では相似（拡大・縮小）や対称といった関係が新たに導入され，これらに着目して既習の図形を捉えなおすことになっている。また，このような着眼点は，平成 29 年改訂の小学校及び中学校学習指導要領，平成 30 年改訂の高等学校学習指導要領においては，「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」（文部科学省，2018a，p.22）である「数学的な見方」として目標に位置づけられた鍵概念で強調されている。この「数学的な見方」の強調によってどのような「形式」が扱われることになるかは明確ではないものの，先の「本質」と「全体」，「発展性」と同様に，「形式」についても教科のカリキュラムに基づいてその扱いが強調されることを期待される。

以上のように，本研究の第４章で記述した授業で扱われた教材が（少なくとも観察者の立場から見る限り）備えていた「形式」，「本質」，「全体」，「発展性」について，「形式」については具体的な教材ごとに教材分析をとおして明確にする必要がある特徴であり，後者三つについては教材に応じて特定したり，付与したりする必要のある特徴であると言える。

第２項　４局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得を想定した教材研究の方法

(1) 問題解決型授業を想定した一般的な教材研究

前項では言及していないものの，第４章における考察の成果を生かすためには授業が問題解決型で展開される必要があり，したがってその展開を志向した教材研究を行う必要がある。

日本の算数科・数学科授業の特徴的な構造である問題解決型授業については，その構造について言及する文献が多数存在する（e.g., Stigler & Hiebert, 1999）。また，算数・数学教育における教材研究の方法について言及する文献も存在する（e.g.，杉山，1990）。一方で，問題解決型による授業展開を明確に意図した教材研究の方法については，あまり知られていないように思われる。その状況において，藤井（2014）は，授業研究における学習指導案の検討過程についての事例研究を展開し，問題解決型授業を志向した教材研究の実際を記述するとともに，その過程を価値づけている。その概要は，次のようにまとめられている。

① 学習指導要領によって課題の教育課程上の位置付けが明確にされ，それが課題設計の指針となっている
② 課題に対する複数の解法を予想することで，それらの背後にある数学的価値を明確に特定している
③ 比較検討場面を検討することで，授業目標の着実な実現が志向されている
④ 課題の評価と再設計への示唆が研究協議会でなされている

（藤井，2014，p.12）

①については，目標に対する授業の課題の適切性が，学習指導要領やその解説に基づく価値判断や，扱われる数学的概念の条件などに関する数学的観点からの吟味によって検討される。藤井は，ここで学習指導要領を参照することについて，既習事項や先の学習との関連を明確にする意義があると指摘している。②については，提示する課題に対する子どもたちの反応の全体的な傾向のほか，遅れがちな子どもの反応や進みがちな子どもの反応が予想されるとともに，その反応への支援や対応などが検討される。そしてその結果は①の課題の再検討に生かされることによって，目標と照らし合わせて価値のある考えを子どもたちから引き出せるような課題の設計に寄与することになる。藤井はこのような子どもたちの反応に対する予想に対して，「課題に対する複数の解法を予想して，それらの背後にある数学的価値を明確に特定するだけでなく，解法の出現の傾向までも予想することで，価値の実現を着実に目指している」（藤井，2014，p.11）と指摘している。③については，自力解決の結果として得られた解法を比較検討して数学的見方・考え方の視点から高めるために，発問のあり

方の詳細や課題が検討される。藤井は，自力解決の結果として得られる子どもたちそれぞれのレベルを引き上げ，考えを深める場としてこの比較検討場面を捉えており，比較検討場面の検討に対して，②の反応予想によって比較検討の価値がある解法の出現についての吟味に加えて，「解法同士の対比の仕方，比較の仕方を具体的に検討しておくことで，授業目標達成の道筋を明確にしておく」（藤井，2014，p.11）意義があると指摘している。④は，授業研究のサイクルにおいて研究授業の後ろに位置づく研究協議会について言及するものであり，その点において①〜③とは異なっている。ここでは，授業で実際に見られた子どもの反応に基づいて授業課題の再検討が行われており，「事前検討会で見落としていた論点や議論の質が研究協議会で顕在化」（藤井，2014，p.12）される。教材研究というと授業の準備として行われる印象が強いように思われるが，藤井が指摘したような事後的な検討は実際の反応に基づいた議論を可能にする点で有益である。宮本（2013）はこのように実際の授業で使用した教材について評価・改善する営みを教材活用と呼び，教材開発または教材構成と並ぶ局面として教材研究に位置づけている。この教材活用という営みは，ここで意図している問題解決型授業を実現するための教材研究に限られるものではないが，本研究においても教材研究の重要な一局面として位置づけることとする。

(2) 教材となる数学的対象のもつ「形式」を視点とした教材分析

前項で述べたように，数学的対象の美的性質を捉える１観点である「形式」が当該の教材に備わっているか否か，備わっているとしたらどのようなものであるかについては，教材の分析をとおして同定する必要がある。

「形式」は数学的対象の構成要素間の「同値関係」，または同値律全ては満たさないながら何らかの意味で数学的に「同じ」と見なせる関係である「擬同値関係」であった。そしてこの「形式」を同定するための方法の一つとして，第３章では，「What-If-Not 方略」（Brown & Walter, 2005）を挙げた。数学的対象の特定の属性を変数と捉え直して変更し，その変更による帰結において何らかの「同じ」と見なせる関係が崩れるか否かという視点から考察することによって，潜在的になっている「形式」を同定することが可能であると考える。

例えば，高等学校数学科における等式の証明の教材としてしばしば用いられる，次の命題１とその証明１について考えてみる（図６－２）。

（命題１）

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ のとき，} \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

（証明１）

$$\frac{a-b}{a+b}-\frac{c-d}{c+d}=\frac{(a-b)(c+d)-(a+b)(c-d)}{(a+b)(c+d)}$$

$$=\frac{2(ad-bc)}{(a+b)(c+d)}$$

ここで，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なので，

$$ad-bc=0$$

したがって，

$$\frac{a-b}{a+b}-\frac{c-d}{c+d}=0$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d} \quad \blacksquare$$

図６－２　等式とその証明１

この証明１からは，仮定として定められた等式と証明した等式とが分母が０にならない条件下では互いに同値であることが確認できるものの，この仮定から後者の等式が得られる理由は形式的にしか読み取れない。そこで証明の対象とした等式を変更し，同様な証明を試みてみる（図６－３）。

この図６－３のように自明な場合を除いて，この仮定とした等式と証明の対象とした等式との間の同値関係は崩れることになる。そこで改めて命題１と命題２を比較すると，命題１の仮定とした等式と証明の対象とした等式では，どちらも「a と b の関係と，c と d の関係が等しい」という関係についての相等関係を同定することができ，この相等関係が命題２では成立していないことが確認できる。この相等関係を比が一定という関係に着目して比例として捉えなおし，この一定な比を k と置くと，命題１に対して次の図６－４のような証明を構成することができる。

（命題２）

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \text{のとき，}\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c-d}{c+d}$$

（証明２）

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{c-d}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)}{(a-b)(c+d)}$$

$$=\frac{2(ad+bc)}{(a-b)(c+d)}$$

ここで，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なので，

$$ad=bc$$

したがって，

$$\frac{2(ad+bc)}{(a-b)(c+d)}=\frac{4ad}{(a-b)(c+d)}$$

証明しようとしている等式が成り立つのは，$a=0$ の場合。

したがって，$c=0$ 。

つまり，証明しようとしている等式が，

$$\frac{b}{-b}=\frac{-d}{d}$$

の場合のみ，この等式は成立する。

図６－３　変形した等式による命題２とその証明２

この証明３では，仮定とした等式から確認できる比例という「形式」が明確になっており，証明の対象とした等式の両辺が確かに等しいことが明瞭になっている。なお，この証明３はこの題材が用いられる際にしばしば構成されるものである。そして学習者の中には，この証明３が正しい証明であることは理解できても，この１行目のような着想の起源を理解できない者が少なくないように思われる。すなわち，この証明３を提示するだけで，学習者によって「形式」が同定されるとは限らないと思われる。本章の「教材研究の方法」という文脈とは異なることであるが，授業などの学習の場においてこの証明３の論理性を確認するだけではなく，学習者によるこの証明３の美的性質の感得をも達成することによって，第１章で整理したように，この証明３に対するより豊な理解を達成できると考えられる。

（命題１）

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ のとき，} \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

（証明３）

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ と置くと，$a=bk, c=dk$

これを証明しようとしている等式の両辺にそれぞれ代入すると，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{bk-b}{bk+b}=\frac{b(k-1)}{b(k+1)}=\frac{k-1}{k+1}$$

$$\frac{c-d}{c+d}=\frac{dk-d}{dk+d}=\frac{d(k-1)}{d(k+1)}=\frac{k-1}{k+1}$$

したがって，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d} \quad \blacksquare$$

図６－４　命題１の別証明

以上のように構成要素間の関係を分析する直接的な方法とは別に，数学的価値から遡及的に分析することで，数学的対象の「形式」を同定できる場合がある。第２章及び第３章で検討したように，「形式」は簡潔性などの数学的価値が数学的対象に付与される根拠としても機能していた。したがって，簡潔性を感じる数学的対象に対してその根拠を分析することによっても，「形式」を同定できると考えられる。ただし，先行研究で指摘されたように，簡潔性の捉え方は人によって異なっている場合がある（e.g., Inglis & Aberdein, 2014）。したがって，教材研究において自身が捉えた簡潔性が数学的対象の「形式」に基づかないものである場合も考えられることに注意する必要がある。

以上のように「形式」を同定する教材分析に加えて，同定した「形式」を視点としたカリキュラムを対象とする分析も重要である。第５章における考察から，学習者による「形式」への着目のしやすさに，その学習者が経験したカリキュラムが影響することが示唆されている。「形式」は数学的対象に対して一意に定まるものではないことから，対象とする学習者の経験したカリキュラムを踏まえて，その学習者が着目しやすい「形式」を特定するとともに，その特定された「形式」のもつ数学教育的価値を感得を促したい美的性質との対照で判断し，必要に応じて特定の「形式」への着目を促す手立てを講じることも必要である。

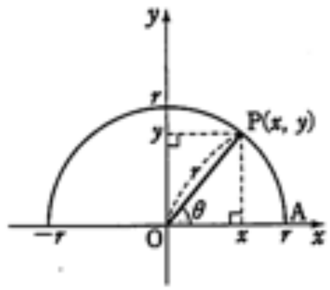
(3) 「本質」と「全体」を視点とした教材構成：「発展性」の実感を視野に入れて

前項で述べたように，統合・発展型などと呼ばれる日本の算数・数学科カリキュラムにおいても，大きな流れとしては「具体から一般」になっていながらも，その詳細では一般化する着想が唐突に提示され，実際には「一般から特殊」になっていることがしばしばある。例えば，高等学校数学科における三角比の定義域の拡張における三角比の再定義の場面が挙げられる。現在，三角比はその導入場面において，直角三角形の１鋭角と辺の比によって定義されることが一般的である。そしてこの定義は，三角比を用いた考察の対象を鈍角三角形を含む三角形へと拡張する際に，しばしば図６－５のように座標平面によって改められる。

座標平面上に，右の図のように，原点O を中心とする半径 r の半円をかき，この半円と x 軸の正の部分の交点を A とする。

半円周上に　$\angle AOP=\theta$

となる点 $P(x, y)$ をとると，θ が鋭角のときは，鋭角の三角比の定義から，次の等式が成り立つ。



$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ である角 θ に対しても，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を，上の３つの式で定義する。

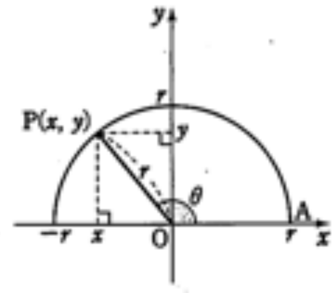


図６－５　三角比の再定義（大島ら，2011，p.128）

ここでは θ に対する三角比の定義域を $0° < \theta < 90°$ から $0° \leqq \theta \leqq 180°$ へと拡張するにあたって，座標平面や円周上の点の座標を用いるアイディアが脈絡なく提示されており，この定義の提示以降では以前の定義から導かれた性質がこの新たな定義からも導けることが確認される[1]。

[1] 鋭角に対する三角比の定義を参照し，「本質」を保存する流れで再定義する教科書もある（e.g., 保野，2017）。また，座標平面や座標を用いずに，三角形の面積の公式や余弦定理の拡張に基づいて鈍角の三角比を定義する指導も提案されている（e.g., 磯脇，1981；長岡，2003）。

以上のような教科書における数学的対象の扱いを元に教材研究を行う場合には，当該の数学的概念の特殊を特定し，両者に共通する「本質」を同定するとともに，この一般化による「全体」の変化を同定する必要がある。このような分析の方法として，第３章では杉山（1986）が公理的方法に位置づけた「根拠を探る」という方法や,「What-If-Not 方略」(Brown & Walter, 2005）を挙げている。

以上のような方法で同定した「本質」と「全体」に対して，授業などにおける学習がこの「本質」を保存して「全体」を拡大するような展開になるようにするために，教材を構成する必要がある。特に問題解決型授業を想定すると,「本質」が成立する多様な数学的対象が学習者によって考案されるように授業の最初に提示する課題を構成したり,「練り上げ」の過程で新たな比較対象として提案する数学的対象を特定したりする必要がある。このような教材構成の方法は，本項で先述した問題解決型授業を想定した一般的な教材研究における②や③の過程を,「本質」と「全体」を視点として遂行することである。このような展開を志向した教材構成を行うことは，結果的に，学習者が数学的対象の「発展性」を実感することを視野に入れた教材構成にもなっている。

第２節　３局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得を想定した教材研究の方法

第１項　３局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得を想定した教材の特徴

第５章では，学習者が数学的対象の美的性質を感得する過程を記述することを目的とした調査を実施するために, そこで用いる調査課題を次の基本方針に基づいて設定した。まず,前提として，調査対象者がその問題を解決することで，本研究で定めた数学的対象の美的性質を感得しうることである。すなわち，想定される問題解決過程において,「形式」の同定,「本質」と「全体」の直観,「発展性」の実感が含まれていなければならない。特にこの調査では「同値関係」が「形式」として同定されるとともに「本質」として直観される３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程を前提としていたので，同定した「同値関係」を視点として複数の数学的対象を統合するような過程を含みうる課題を選定する必要があった。

その一方で，調査で用いる問題を教材として転用することを想定し，その教材が第２章で整理した数学教育の目的や目標の達成に寄与するものであることを直接的に明示するために，先行研究で扱われてきた調査課題や教材をもとに必要な修正を加えることで調査課題を設定した。

以上の基本方針に対して，後者は研究方法論上の方針であり，学習者による数学的対象の美的性質の感得を様々な学習場面で促すためには不要なものである。したがって，ここでは教材の特徴として，前者の基本方針に基づく次の２点を挙げる。

・　想定される問題解決過程において,「形式」の同定,「本質」と「全体」の直観,「発展性」の実感が含まれていること。
・　想定される問題解決過程において，同定した「同値関係」を視点として複数の数学的対象を統合するような過程が含まれていること。

第２項　３局面モデルによる数学的対象の美的性質の感得を想定した教材研究の方法

(1) 教材となる数学的対象のもつ「同値関係」を視点とした教材分析

具体的な教材に含まれる数学的対象の「同値関係」を同定するための教材分析の方法や「同値関係」を視点としたカリキュラムの分析の必要性は，前節と同様である。ここでは同定した「同値関係」が「本質」として保存できるものであるかどうか，また，保存することによって数学教育的価値が付与されるものであるかどうかについて吟味することについて説明する。

例えば, 四角形の各辺の中点を結んでできる四角形について，この四角形が長方形になる条件を考えるという題材を分析する。すぐに気づくことが想定できる条件として，元の四角形が正方形，またはひし形の場合が考えられる（図６－６）。

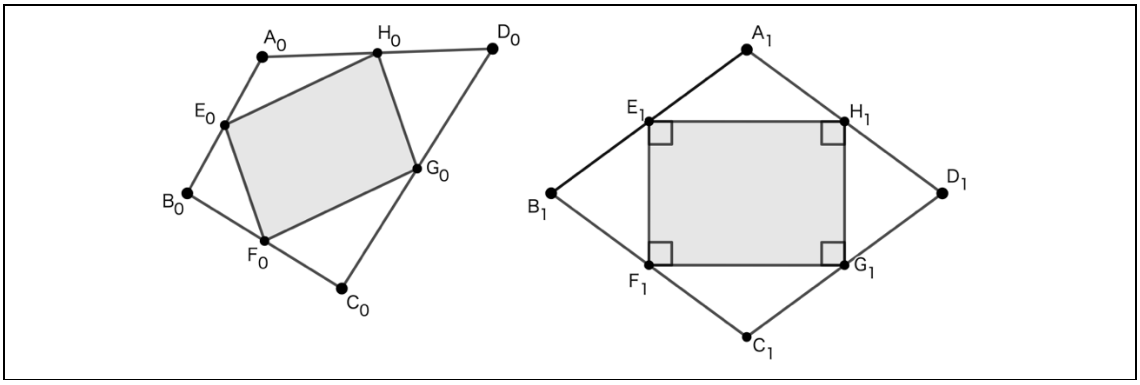


図６－６　各辺の中点を結んでできる四角形

この図６－６の四角形 $E_1F_1G_1H_1$ が長方形であることは，四角形 $A_1B_1C_1D_1$ の対角線 A_1C_1 及び B_1D_1 に対して中点連結定理から $E_1F_1 \parallel A_1C_1 \parallel H_1G_1$，$E_1H_1 \parallel B_1D_1 \parallel F_1G_1$ であり，四角形 $A_1B_1C_1D_1$ がひし形であることから $A_1C_1 \perp B_1D_1$ であるので, 四角形 $E_1F_1G_1H_1$ の内角が全て直角であるとわかり，証明できる。また，この証明から，このように構成する四角形が長方形になるような元の四角形の必要十分条件は，その四角形の対角線が直交することであることがわかる。また，元の四角形の対角線が直交する場合において，各辺の中点として取った四つの点が中点ではなくても，

$$E_2F_2 \parallel A_2C_2 \parallel H_2G_2,\quad E_2H_2 \parallel B_2D_2 \parallel F_2G_2$$

が成り立つように取ることで，構成される四角形が長方形になることがわかる。したがって，これら４点について

$$A_2E_2 : E_2B_2 = C_2F_2 : F_2B_2 = C_2G_2 : G_2D_2 = A_2H_2 : H_2D_2$$

であることが，元の四角形の対角線が直交する場合に内部に構成する四角形が長方形であるための必要十分条件である。（図６－７）。

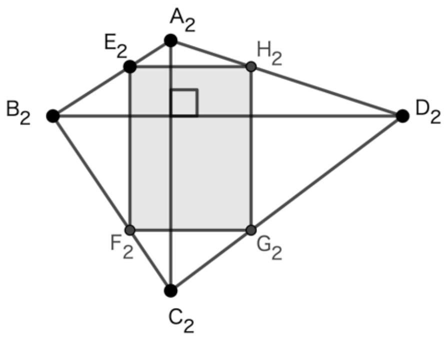


図６－７　長方形を構成する四角形の一般化

この図６－７のように一般化された図形では，図６－６の右側のひし形を元にする場合に辺上に取る点が対角線に関して対称（例えば，対角線A_1C_1に関して点E_1とH_1，F_1とG_1がそれぞれ対称）であったのに対し，この対称性が成立していない。すなわち，この対称性はこのような展開では「本質」として保存することができない「同値関係」である。

一方，先に挙げたこの辺上の４点の取り方に関する比の間には，対角線に関する対称性が成立している（例えば，対角線A_1C_1に関して$A_2E_2 : E_2B_2 = A_2H_2 : H_2D_2$かつ$C_2F_2 : F_2B_2 = C_2G_2 : G_2D_2$）[2]。この４点の取り方についての対称性を視点として改めて図６－６の二つの図形を見直すと，この対称性はこの二つのどちらの図形においても成立していることがわかる。すなわちこの後者の対称性は，この展開において異なる数学的対象間で共通する「本質」になっている。この「本質」は，図６－６の左側の図形，すなわち，辺上の点で構成される四角形が長方形ではない平行四辺形である場合でも成立していることから，この左側の図形を元に別の探究を行う場合，例えばひし形を構成する場合にも視点として用いることができる性質である。

第５章において調査課題として設定した「規則的に並ぶ図形の総個数」のように，保存することによって「全体」を拡大できる「同値関係」が複数同定できる場合には，その「同値

[2] 比が一定であることから点の位置関係を比例として同定したり，三角形の相似を同定したりすることもできる。

関係」を保存した場合の帰結を考察することによって価値を吟味する必要がある。

例えば，２円の共有点を通る直線について，この２円が共有点をもたないような場合を考えるという題材を分析する。具体的に，次の方程式で定義される２円と直線について考えることとする。この定義によって一般性は失われない。

$$x^2+y^2=a^2$$

$$(x-c)^2+y^2=b^2$$

$$x^2+y^2-a^2-\{(x-c)^2+y^2-b^2\}=0$$

この方程式で定義される２円において，２円の中心間の距離である $|c|$ に対して半径 a と b が十分に小さい場合や，一方の円が他方の円に含まれるような場合には，２円は共有点をもたない。そしてそのような場合においても，２円の共有点を求める方程式によって定義される上記の直線が存在する場合がある（図６－８）。

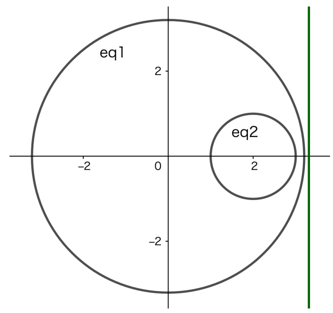


図６－８　共有点をもたない２円に対して直線が存在する場合

このような場合にこの直線を再定義するにあたって，直線が存在する様々な場合に共通する「本質」としての「同値関係」として，次の二つが同定できる。第１に，方べきの定理に含まれる「べき」が等しいという相等関係であり，第２に，この図形全体を３次元の図形の射影として捉えることによる再帰という関係である。

前者の相等関係は，次のものである。まず，二つの共有点をもつ２円において，その共有点を通る直線上の点から２円にひいた接線の長さは等しい（図６－９）。この「接線の長さが等しい」という性質を「べきが等しい」と捉え直すと，この直線を根軸と呼ばれる直線と見なすことができ，この直線は２円が二つの共有点をもたなくても存在することになる（図６－10）。なお，この直線は２円の半径が０の場合，すなわち２円が点の場合には，２点を端点とする線分の垂直二等分線になる。

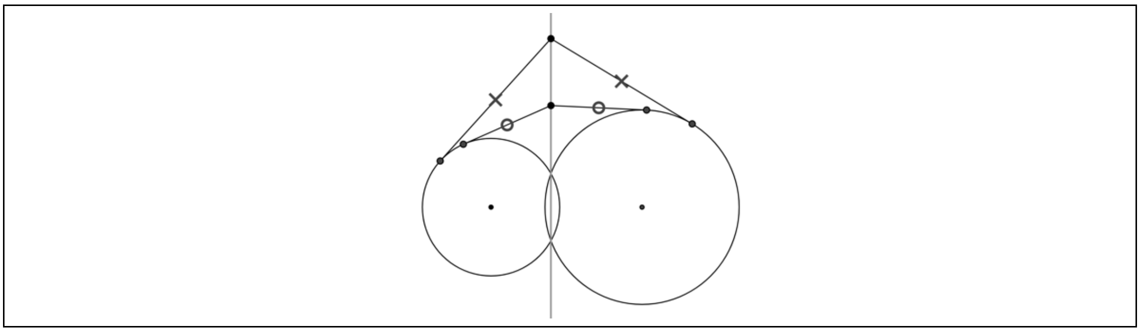


図６－９　２円が二つの共有点をもつ場合

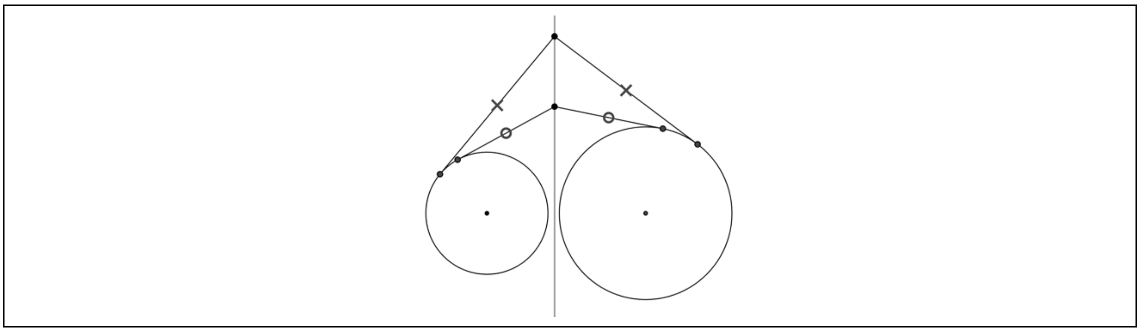


図６－10　２円が共有点をもたない場合

この相等関係を「２円にひいた接線の長さの比が等しい」と捉えなおすと，２円の共有点を通る円についても共通して成立する「本質」になる（図６－11）。この図６－11 においても２円の半径が０の場合を考えると，この得られる円は２円からの距離の比が一定である点の軌跡であり，いわゆるアポロニウスの円である。

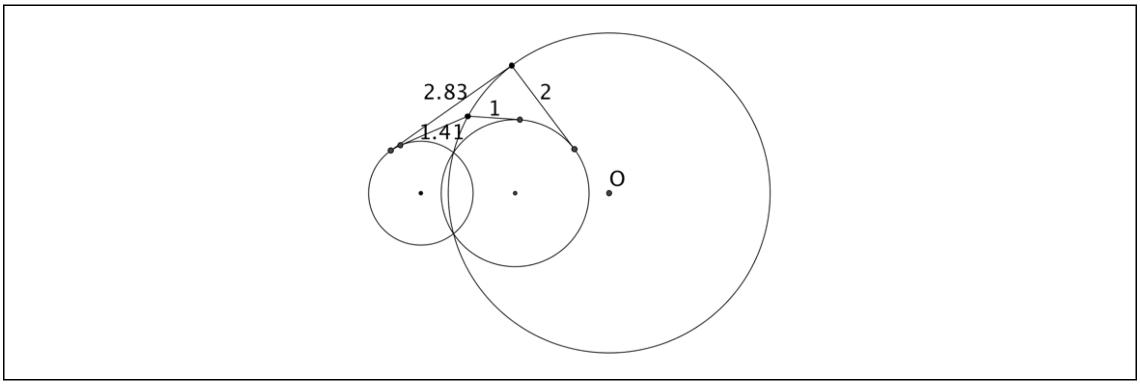


図６－11　２円の共有点を通る円と接線の長さ

後者の再帰は，次のものである。まず，この２円を次の方程式で表される球の射影として考える。

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$(x - c)^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

この変数 z に対して，いくつかの値を代入して得られる図形，すなわち平面 $z = k$ による断面を全て xy 平面に射影として表すと，図６－12 のようになる[3]。

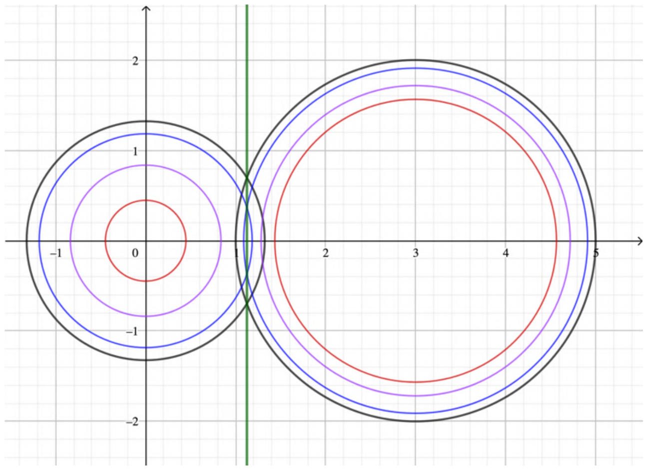


図６－12　平面 $z = k$ による断面のxy 平面への射影

また，空間図形として表すと，図６－13 のようになる。

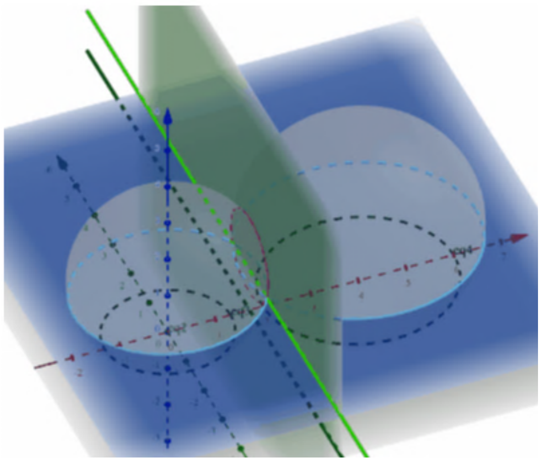


図６－13　空間図形としての表現

この場合，２円を通る直線として定義されていた直線は，２球の共有円を通る平面の xy

[3] この数学的対象を射影として捉える捉え方は，東京学芸大学附属高等学校の数学科の先生方からご教示いただいたものである。

平面への射影として，次のように定義できる。

$$x^2+y^2+z^2-a^2-\{(x-c)^2+y^2+z^2-b^2\}=0$$

この方程式を変形すると，

$$2cx-a^2+b^2-c^2=0$$

となるので，$c\neq 0$ の場合にこの図形が平面またはその射影である直線として存在することがわかる。

一方，この射影としての解釈は，２球が共有点をもたない場合には平面のみで考えていたのと同様の困難性をもつことになる。その場合には，さらに変数を増やし，４次元円の射影として捉えなおすことで解釈することができる。すなわち，n 次元で解釈不能な場合には $n+1$ 次元の射影によって定義するという再帰の関係を同定することができる。この射影や再帰による解釈は，考察対象が「２直線とその共有点を通る直線」の場合においても可能である。

以上の二つの「同値関係」は，どちらもそれぞれ拡大される「全体」を導くことができるものであり，本研究の理論的枠組みによってはその優越の判断はできない。一方，前者の根軸としての解釈では方べきの定理を知識として有している必要があるのに対して，後者の射影としての解釈は射影を知識として有している必要がある。この射影は投影図などとして中学校数学科においても扱われるものであるが，根軸と比較すると理解が難しい数学的知識ではないだろうか。主たる対象とする「同値関係」の選択に当たっては，学習者を想定した判断も必要であると言える。

(2) 「比較対象の系統的提示」による促進を想定した教材構成

第５章では，理論的に導出した学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法である「比較対象の系統的提示」に，条件を変更した数学的対象を比較対象として提示することを教授的介入Ｍ１として位置づけた。このＭ１に関連する一連の問題解決過程を教材という視点で捉え直すと，「比較対象の系統的提示」による促進を想定した教材は，最初に与える課題だけではなく，複数の数学的対象や関連する発問によって構成される，いわば問題群であると言える。

調査では，最初に与えた課題における数学的対象の条件の変更によって「本質」である「同値関係」が失われない場合だけでなく，「同値関係」が成立しなくなる場合も，Ｍ１として提示した。具体的には，「等長性を保つ図形」を用いた事例では「同値関係」である相似が成立しない二等辺三角形（図５－13）の提示，相似かどうかが指定されていない長方形を考察対象とする提案，相似ではない長方形（図５－21）の提示に続いて，相似が成立する正方形を考察対象とすることを提案した。「規則的に並ぶ図形の総個数」を用いた事例では，「同

値関係」である再帰が成立する分割数が異なる場合（図５－28）の提示に続いて，再帰が明示的でない正三角形によって構成される場合を考察対象とすることを提案し，さらに再び再帰が成立する「上向き」の正三角形で構成される場合を提示した。この事例では，生徒たちが自ら分割数が異なる場合を探究していた。そして，「ピンの入替の規則」を用いた事例では，「同値関係」である対称性が成り立つ場合のみを提示した。この事例においても，生徒たちが自らピンの個数が与えられた場合よりも少ない場合について探究していた。

この手順による教授的介入Ｍ１を受けた生徒たちは，「等長性を保つ図形」と「規則的に並ぶ図形の総個数」の事例において，まずは観察者が意図していた「同値関係」とは異なる数学的対象に着目した。すなわち，Ｍ１として提示する数学的対象における「同値関係」の成立・不成立に関する順序性が，生徒たちによる「同値関係」の着目に影響を与えた証拠は確認できていない。実際，この結果は，「等長性を保つ図形」の事例については生徒たちが経験したカリキュラムに，「規則的に並ぶ図形の総個数」の事例については「同値関係」が関係概念であるが故の着目の難しさに起因すると解釈することができた。したがって，第５章における考察結果に基づくと，教材を構成する問題群において，「同値関係」の成立・不成立に関する順序性については不問であると言える。

一方，「等長性を保つ図形」についての事例で用いられた相似かどうかが指定されていない長方形を考察対象とする提案や，「規則的に並ぶ図形の総個数」についての事例で用いられた再帰が明示的でない正三角形によって構成される場合を考察対象とする提案は，調査において生徒たちの思考を顕在化させたという効果だけでなく，具体的で直接的に「同値関係」への着目を促すための数学的対象の提示に先立つ問いとして，教材としての価値がある。なぜならば，第２章で整理したように，数学的対象の「本質」と「全体」は学習者による認知的な営みによって直観されるものであり，限られた数学的対象から直観される「本質」や「全体」は学習者のもつ数学的な背景によって様々であると考えられるからである。

中島（1982）は，第２章における理論的枠組みの構築過程で参照した「算数・数学にふさわしい創造的な活動」または「創造的活動」による指導について，「いかにも自分で考え出したかのような感激をもつことができるようにする」（中島，1982，p.70）学習指導であると説明している。このことを踏まえると，直観する「本質」を学習者が判断できる余地は，できる限り保障されるべきである。したがって，ここで挙げたような直接的ではない問いは，「比較対象の系統的提示」に不可欠な要素として含めることが重要である。その上で，このような問いによって「本質」や「全体」を直観できない学習者に対して，より直接的で「同値関係」が明示的になると期待できる数学的対象との比較を提案するように教材を構成することで，学習者による数学的対象の美的性質の感得の促進に寄与すると考えられる。

第６章のまとめ

本章では，第４章と第５章における実証的・実践的な考察を踏まえて，第３章で定めた数学的対象の美的性質の感得過程のモデルに応じた教材研究の方法を解明するための考察を行なった。

第１節では，４局面モデルによって学習者が数学的対象の美的性質を感得することを想定した教材を構成するための教材研究の方法を明らかにするために，第４章で記述した小学校算数科の授業で用いられた教材である「立体の体積」について，その特徴を分析した。その結果，少なくとも観察者の立場から見る限りにおいてこの教材が備えていた「形式」，「本質」，「全体」，「発展性」について，「形式」については具体的な教材ごとに教材分析をとおして明確にする必要がある特徴であり，後者三つについては教材に応じて特定したり，付与したりする必要のある特徴であることが確認できた。そしてその特徴を視点とした，問題解決型授業で用いることを想定した教材を構成するための教材研究の方法として，問題解決型授業を想定した一般的な教材研究の方法，教材となる数学的対象のもつ「形式」を視点とした教材分析の方法，「本質」と「全体」を視点とし，学習者による「発展性」の実感を視野に入れた教材構成を提案した。

第２節では，３局面モデルによって学習者が数学的対象の美的性質を感得することを想定した教材を構成するための教材研究の方法を明らかにするために，第５章で示した調査で用いた調査課題を分析した。その結果，調査課題の設定の方針のうち，調査の目的を達成するための方法論的な理由に基づく方針を除き，次の二つを調査課題の特徴として確認した。

- 想定される問題解決過程において，「形式」の同定，「本質」と「全体」の直観，「発展性」の実感が含まれていること。
- 想定される問題解決過程において，同定した「同値関係」を視点として複数の数学的対象を統合するような過程が含まれていること。

そしてこれらの特徴を視点とした教材研究の方法として，教材となる数学的対象のもつ「同値関係」を視点とした教材分析と，「比較対象の系統的提示」による促進を想定した教材構成を提案した。

終章

本研究の総括と今後の課題

本研究の目的は，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」の感得を，学習者に促進する方法を解明することであった。本章では，このことを目的とする研究を展開して得た結論と残された課題について整理する。はじめに，本研究の結論を，設定した課題ごとに述べる（第１節）。次に，本研究の結論の意義と限界について述べる（第２節）。最後に，残された課題について述べる（第３節）。

第１節　本研究の結論

本研究の目的は，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」の感得を，学習者に促進する方法を解明することであった。そしてこの目的を達成するために次の二つの研究課題を設定した。すなわち，第１の研究課題は，学習者による感得を促進すべき，数学らしさを反映した数学的対象の「美しさ」を定めた上で，その「美しさ」の感得を促す方法を理論的に導出することである。第２の研究課題は，第１の研究課題を達成することで定めた数学的対象の「美しさ」が，学習者にとって感得可能なものであることを実証的に示すこと，及び，その感得を促す方法を経験的データに基づいて解明することである。そして，第１の研究課題に対する考察は第１章から第３章，及び，第４章と第５章の冒頭で行った。また，第２の研究課題に対する考察は，第４章から第６章にかけて行った。

以下では，本研究の結論を，設定した課題ごとに述べることとする。

第１項　学習者による感得を促進すべき数学的対象の「美しさ」と学習者によるその「美しさ」の感得を促す方法

第１章では，まず，数学者たちが数学の魅力を語る際にしばしば言及する数学的対象の「美しさ」が，数学教育における重要な目標を達成し，積年の課題を解決する上での鍵概念であることを主張した。まず，著名な数学者たちによる数学的対象の「美しさ」への言及を概観し，数学的対象の「美しさ」と数学の研究との関わりを次の三つに整理した。すなわち，第１に，数学の研究課題を選択する際の判断基準や課題設定の方向づけの道標または動機づけの誘因になること，第２に，数学の研究課題の解決の機序の一端としての「無意識による選択」の基準になること，第３に，数学の研究成果の価値の基準になることである。そしてこれらを数学教育における目的論・目標論と関連づけることで，学習者が数学的対象の「美しさ」を感得することの数学教育的価値として，次の三つを特定した。すなわち，第１に，しばしば数学教育における学習者による理解に関する研究で指摘される，「なぜそのようなことを考えるのか」や「なぜそのように考えるのか」といったことの理解につながりうること，第２に，児童・生徒が算数・数学を発展的なものと捉えられるようになることや，発展的に考えられるようになるという，日本の算数・数学教育の積年の課題に根差す教育目標を達成しうること，第３に，日本おいて積年の課題であり，国際的にも改善が望まれている，算数・数学の学習への動機の低い水準の解消に寄与しうることである。このように，数学者によって感得されている数学的対象の「美しさ」が，学習者に対して感得を促すべき性質であることが確認できた。

続いて，この数学的対象の「美しさ」を学習者が感得することを目指す研究によって得られた知見を整理し，それらの研究によって未解決となっている課題を次のように指摘した。

研究の主たる成果としては，第 1 に，数学的対象の「美しさ」を感得できることが数学的熟達性の一側面としてみなせること，第 2 に，数学的対象の「美しさ」が数学の研究で担っていた役割が，より短時間で行われる数学の問題設定や問題解決という探究においても機能すること，第 3 に，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を促す方法についての仮説が得られていることが指摘できた。そして，研究の課題としては，第 1 に，学習者による数学的対象の「美しさ」の感得を目的とする研究を展開するためには，実証的・実践的な研究に先立って，「美しさ」について数学者による言及外の事柄についての議論も可能にするような，理論的枠組みを構築する必要があること，第 2 に学習者による数学的対象の「美しさ」の感得の促進方法について，上記で指摘したような理論的枠組みに基づく理論的根拠のある方法を導出した上で，実証的・実践的な検討を経て評価する必要があることを指摘した。

第 2 章では，本研究における数学的対象の「美しさ」の捉え方について，美学者・竹内敏雄による理論を本研究の理論的基盤とすることの妥当性と価値を主張するとともに，竹内による理論に基づいて，本研究における数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを構築することを目的としていた。まず，知覚の主体と知覚対象の両面に基づいて「美しさ」を捉える，「多様における統一」という竹内による理論の原理となっている観点の美学上の重要性を確認し，数学との関連についての示唆を得た。続いて，竹内による理論を視点として，数学者による数学的対象の「美しさ」についての言及や関連する数学教育研究を捉えなおすことで，竹内による理論によって数学者たちによる「美しさ」への言及を説明できること，断片的に語られてきた数学者たちによる数学的対象の「美しさ」についての言及を補い，関連づけて捉えることができることという，竹内による理論を本研究の理論的基盤とすることの妥当性と価値を主張した。また，数学を文化として捉える立場（Wilder, 1968）を参照することで，本研究で数学者を一つの集団として同一視する立場をとることの妥当性を確認した。そして，竹内による理論と数学教育学における知見を照らし合わせ，竹内による理論における基本的な概念への本研究における対応概念を定めるとともに，その対応概念間の関係を整理することによって，本研究における数学的対象の「美しさ」に関する理論的枠組みを，「美しさ」の多様性や主観性を認める美的性質という概念を用いて，次の 3 軸及び 4 観点もつ枠組みとして構築した。すなわち，第 1 の軸である数学的対象そのものについての観点としての，数学的対象の構成要素間の「同値関係」及び「擬同値関係」という「形式」，第 2 の軸である知覚者の認知的な営みとその結果についての 2 観点としての，関連する複数の数学的対象間に共通する性質として見出されたり選択されたりする「本質」と，「本質」が成立する範囲として捉えられる「全体」，第 3 の軸である知覚者の感覚的な営みとその結果についての観点としての，数学的対象の「全体」が広がることに基づいて実感される，広がりや深まりといった何らかの意味での広大さを意味する「発展性」である。

第３章では，第２章で構築した本研究の理論的枠組みに基づいて数学教育における先行研究で記述された数学者等による数学の問題解決過程を分析することで数学的対象の美的性質を感得する過程のモデルを二つ抽出し，学習者による感得過程として転用することで学習者を対象とする調査で得られたデータに基づく経験的な考察によって修正・補填が可能な理論的仮説として位置づけた。第１のモデルは，(i)数学的対象の「形式」を同定する局面，(ii)数学的対象の「本質」を直観する局面，(iii)数学的対象の「全体」を直観する局面，(iv)数学的対象の「発展性」を実感する局面によって構成されている，４局面モデルである。第２のモデルは，「形式」が「本質」としても位置づくことで(i)の局面と(ii)の局面が重なった３局面モデルである。

第４章では，第３章で仮説とした数学的対象の美的性質の感得過程についての二つのモデルのうち４局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を解明することを目的とした考察を行なった。この考察の前半では，第１の研究課題に対する考察として，４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を理論的に検討した。まず，先行研究の概観をとおして，この美的性質の感得に関する日本の学習者の特異性として，数学の問題解決や授業において簡潔性などの数学的価値を追求することを指摘した。次に，この日本の学習者の特異性が日本における特徴的な授業方法である問題解決型授業の「練り上げ」に由来するという予想のもと，この「練り上げ」の構造を抽出して４局面モデルと比較することをとおして，この感得過程が「練り上げ」を含む問題解決型授業の展開に構造的に含まれていることを確認した。すなわち，問題解決型授業における「練り上げ」が学習者による数学的対象の美的性質の感得を促す方法になりうることを，理論的仮説として示した。

第５章では，３局面モデルに焦点を当てて，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を解明すること目的とした考察を行なった。この考察の前半では，第１の研究課題に対する考察として，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法を理論的に検討した。まず，先行研究で試された数学的対象の美的性質の感得の促進方法を批判的に検討することによって，学習者が自ら導出した数学的解法と他者が提示した「美しい」数学的解法の比較を促す「解法の比較の促進」という方法では，学習者による数学的対象の美的性質の感得を十分に促さないことを指摘した。そして，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法として，次の四つの教授的介入で構成される「比較対象の系統的提示」を理論的仮説として導出した。

（M１）「同値関係」を保存して条件を変更した場合，または「同値関係」が保存されないように条件を変更した場合を，考察の対象として学習者に提示する。

（M２）「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う。

（M３）「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問う。

（M４）「同値関係」の同定と直観，及び，「全体」の直観がなされた数学的対象と元の数学的対象の比較を促す。

第２項　学習者による数学的対象の「美しさ」の感得過程及び教師の立場からのその過程の促進方法

第４章の後半では，前半の考察で４局面モデルに基づいた学習者による数学的対象の美的性質の感得を促す方法として捉え直した問題解決型授業における「練り上げ」に対して，「学習者が捉える授業の構造が教師の捉え方と一致しているとは限らない」という立場にたち，学習者にとっての「練り上げ」が，数学的対象の美的性質の感得を促す構造を有しているか否かについて実証的に検討した。その結果，理想的な形で問題解決型授業が実践されている小学校算数科の授業への参与観察と，その授業に参加する児童に対するインタビュー調査をとおして記述した児童にとっての「練り上げ」は，次のような特徴をもっていた。第１に，参与観察した観察者の目からは明示的に授業で扱われていた数学的対象の「形式」について，その同定の過程が児童にとっての「練り上げ」には位置づいていないことである。第２に，「練り上げ」をとおして新たな数学的概念を学習する問題解決型授業では，児童がテストを想定して学習をすることがあり，そのことによって数学的対象の美的性質の感得に不可欠な「無用性」が損なわれる可能性があるということである。第３に，参与観察した観察者の目からは明示的に授業で扱われていた数学的対象の「発展性」の実感に関する過程が，児童にとっての「練り上げ」には必ずしも位置づいていないことである。観察者の目からは，参与観察した実際の授業にも４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程が位置づいているように捉えられたことを踏まえると，この問題解決型授業における「練り上げ」という方法が算数・数学の授業をとおして数学的対象の美的性質の感得を促す有力な方法であるという示唆は得られたものの，必ずしも十分に機能するわけではないことが確認できた。そこで，調査で得られた経験的なデータを踏まえて，この問題解決型授業の「練り上げ」の改善案として，次を提案した。

(i)　数学的対象の実用性以外にも十分な価値をおき，学習者にとってその時々の数学の学習自体が目的になるような授業を展開すること。

(ii)　簡潔性や一般性といった数学的価値が数学的対象のどのような性質から得られたものであるか，その根拠となる「形式」の同定を明示的に行うこと。

(iii)　「練り上げ」の所産を元の多様な考えや既習事項と比較すること。

(ⅲ)の比較は従来の問題解決型授業においても実践されていることが想定できるが，比較によって得られる感覚をも授業で明示的に取り上げるなどといった工夫を施すことが，学習者

による数学的対象の美的性質の感得を促進する上で効果的であると考えた。

第５章の後半では，前半の考察で３局面モデルに基づいた学習者による数学的対象の美的性質の感得を促す方法として導出した「比較対象の系統的提示」という促進方法を理論的仮説とする調査を実施することで，教授的介入を受けた学習者がどのように問題解決を遂行するか，特に，数学的対象の美的性質を感得するのであればどのような過程で感得するかを記述し，理論的仮説との対照を行った。国立大学附属高校に所属する高校生ペア３組を対象として実施することで得た合計７事例のデータのうち，３事例を選出して調査結果の詳細を記述し，それぞれを単一事例研究の方法論に則って理論的仮説と対照することで，分析的一般化と理論的仮説への経験的補填を行なった。

続いて，複数事例研究の方法論に則って三つの単一事例研究の結果を総合的に考察し，その結果に基づく改善案を導出することで，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程に対する次の５点の経験的補填を行なった。

- 「同値関係」を同定する過程で学習者が着目する数学的概念は，学習者が経験したカリキュラムによって左右されうること。
- 教授的介入Ｍ１やＭ２を受けた学習者は，数学的対象の構成要素間の「同値関係」の「形式」としての同定と「本質」としての直観が促される。ただし，このような教授的介入を受けた学習者が，複数の数学的対象間の関係ではなく，一つの数学的対象の構成要素間の関係のみを調べること，すなわち「同値関係」を「形式」としてのみ同定する場合もある。
- 数学的対象の「本質」の直観が，特定の性質を共通点として複数の数学的対象から同時的に抽象するのではなく，一つの数学的対象から抽象した性質が他の数学的対象においても成立するかどうかを吟味するという試行錯誤的な過程でなされることもある。
- 数学的対象の「全体」を正確に直観していなくとも，考察を通して元の数学的対象よりも「発展性」が付与されていれば，「発展性」を実感しうる。
- 「全体」の直観は「発展性」の実感に常に先立つのではなく，実感した「発展性」を確認するために「全体」の探究をし，直観した「全体」に応じた「発展性」を改めて実感する場合がある。

以上の経験的補填を踏まえて，本研究における３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促進する方法である「比較対象の系統的提示」のＭ２とＭ３を次のとおり修正した。

（Ｍ２－１）「同値関係」が保存された他の数学的対象と元の数学的対象の共通点を問う。

（Ｍ２－２）Ｍ２－１を受けた学習者が複数の数学的対象間の共通点を同定できない場合

には，共通点という制約なしに，一つの数学的対象の属性の抽象を促すことで，試行錯誤的に共通点を同定することを促進する。この教授的介入は必要に応じて次のＭ２－３と組み合わせて用いる。

（Ｍ２－３）Ｍ２－１を受けた学習者が数学的対象間に共通する関係ではなくその関係の対象概念に着目することで，数学的対象間には共通に成立しない事柄を同定している場合には，その事柄が特定の数学的対象で成立する根拠を問う。この教授的介入は必要に応じて先のＭ２－２と組み合わせて用いる。

（Ｍ３’）「同値関係」の成立する数学的対象の範囲を問う。ただし，この範囲に厳密であることは求めない。「本質」の直観以前の数学的対象よりも広がった範囲を同定できていればよいこととする。

第６章では，第４章と第５章における実証的・実践的な考察を踏まえて，第３章で定めた数学的対象の美的性質の感得過程のモデルに応じた教材研究の方法について検討した。まず，４局面モデルによって学習者が数学的対象の美的性質を感得することを想定した教材について，第４章で記述した授業で用いられていた「立体の体積」という教材において，少なくとも観察者の立場から見る限りにおいてこの教材に備わっていた「形式」,「本質」,「全体」,「発展性」のうち，「形式」については具体的な教材ごとに教材分析をとおして明確にする必要がある特徴であることがわかった。一方，後者三つについては教材に応じて特定したり，付与したりする必要のある特徴であることが確認できた。この特徴を踏まえ，問題解決型授業で用いることを想定した教材を構成するための教材研究の方法として，(i)問題解決型授業を想定した一般的な教材研究の方法，(ii)教材となる数学的対象のもつ「形式」を視点とした教材分析の方法，(iii)「本質」と「全体」を視点とし，学習者による「発展性」の実感を視野に入れた教材構成を提案した。

次に，３局面モデルによって学習者が数学的対象の美的性質を感得することを想定した教材について，第５章で示した調査課題の特徴として，調査の目的を達成するための方法論的な理由に基づく特徴を除いて，次の二つを確認した。

・ 想定される問題解決過程において，「形式」の同定，「本質」と「全体」の直観，「発展性」の実感が含まれていること。
・ 想定される問題解決過程において，同定した「同値関係」を視点として複数の数学的対象を統合するような過程が含まれていること。

そしてこれらの特徴を視点とした教材研究の方法として，(i)教材となる数学的対象のもつ「同値関係」を視点とした教材分析と，(ii)「比較対象の系統的提示」による促進を想定した教材構成を提案した。

第２節　研究成果の意義と限界

第１項　研究成果の意義

序章において，本研究で設定した二つの研究課題の意義として，次の５点を挙げた。第１に，学習者による感得を促す美的性質が，確かに数学者たちが感得する美的性質であるという保証が得られることである。第２に，学習者による感得を促進すべき数学的対象の美的性質に関する教材研究を可能にすることである。第３に，妥当性が議論された，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法の提案という，先行研究にはない研究成果を得ることができることである。第４に，理論的枠組みに基づいて設計された調査によって学習者による数学的対象の美的性質の感得過程の一部始終が記述されることである。第５に，実証的・実践的考察に基づいた議論によって教材研究の方法を提案できることである。

本研究では，少数の数学者による数学的対象の美的性質への言及に有機的なつながりをもたせ，断片的な言及を補うために，美学における竹内による理論を援用して理論的枠組みを構築した。そしてこの竹内による理論の選定にあたっては，この理論が数学者による数学的対象の美的性質についての言及を説明できるものであることを確認した。本研究と同様に，竹内による理論を援用した数学教育研究は管見の限りない。それどころか，美学における理論を援用している先行研究においても，その理論が数学者による言及と整合することを明示的に確認した研究も，管見の限りない。第１の研究課題に対する考察として，数学者による数学的対象の美的性質についての言及に整合する美学における理論を同定したことは，先行研究にはない本研究の意義である。

また，竹内による理論を援用することで構築した理論的枠組みは，第５章の調査課題の設定や第６章で用いられたように，確かに教材研究を可能にするものであった。そして，この理論的枠組みは数学的対象の美的性質の感得過程のモデルを抽出するための視点となることによって，このモデルに基づいた調査を設計することを可能とし，学習者による数学的対象の美的性質に関する認識の記述や，数学的対象の美的性質の一連の感得過程の記述を実現することができた。このような理論的な根拠をもつ実証的・実践的な研究を展開して記述された学習者の認識や感得過程は，先行研究からは得られないものである。関連して，本研究の結論である，教材研究の方法を含む，学習者による数学的対象の美的性質の感得を促進する方法が，経験的データに基づく考察を経ていることは，先行研究にはない研究上の進展である。

第４章において４局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得を促す方法として着目した問題解決型授業における「練り上げ」は，Stigler＆Hiebert（1999）によって日本の優れた授業実践が認知されたことで，国内外でその価値が主張されるようになった（e.g., Takahashi, 2009）。この問題解決型授業の「練り上げ」に対し，数学的対象の美的性質の感

得を促す方法という視点から理論的・実証的に評価して改善案を提案したことは，問題解決型授業に関する数学教育研究の文脈においても，新たな知見になっている。

第２項　研究成果の限界

前項で確認した意義をもつ本研究の成果は，それを得るための方法の選択という方法論上の理由から，次の限界がある。

第１に，参照した数学者が活躍した時代に関する限界である。本研究で参照したポアンカレやハーディといった数学者たちは，歴史に名を残す著名な数学者である一方で，その活躍した時代は 19 世紀から 20 世紀にかけてであった。デービスとハーシュ（Davis & Hersh, 1981）は，19 世紀の後半に 38 個の細分類をもっていた数学が，20 世紀の後半にはおよそ 3400 個の細分類をもつようになったと述べている。すなわち，本研究で参照した数学者が活躍した後の時代において，数学は爆発的な広がりを見せたことになる。このように数学の変容に伴って数学的対象の美的性質にも変化があったかどうかについては，本研究では検討していない。すなわち，本研究で扱っている数学的対象の美的性質には，20 世紀後半以降の数学は反映されていない。また，19 世紀以前の数学についても，当時の数学者個人の思想などは反映されていない。

第２に，第２章で定めた理論的枠組みについて，二つの限界がある。一つ目は，援用した美学の理論に関する限界である。本研究では美学者・竹内敏雄による「多様における統一」を原理とする理論を援用したが，このことは美学における他の理論が数学者による数学的対象の美的性質についての言及に整合しないことを主張するものではない。すなわち，理論的な基盤としては，美学における他の理論も選択しうる。本研究で調査した限りでは本研究の目的に適応する美学における理論は竹内によるものだけであったが，広範で入念な調査によって美学における別の理論を同定できる可能性は残されている。二つ目は，この理論的枠組みによって捉える美的性質に「数学らしさ」が反映されていることが検証されていないことである。第２章では，数学者集団が共通の美的性質を追求する文化の担い手であるという Wilder（1968）に依拠し，数学者集団の代表となりうるような著名な数学者による数学的対象の美的性質についての言及に基づき，かつ，竹内（1979）を援用することで数学者たちによる言及を有機的に捉えることで，本研究で捉える美的性質に数学らしさが反映されることを図った。この試み及びその結果については，数学者の共同体を母集団とした統計的手法でその文化的側面を浮き彫りにすることなどによって，経験的な検証が可能であると考える。

第３に，本研究で実施した調査及びデータ分析について，三つの限界がある。一つ目は，得られた事例の個数に関する限界である。序章で述べたように，本研究では数学的対象の美

的性質に関する学習者の認識や学習者による感得過程について詳細な記述を行う必要があったがゆえに，少数の事例による事例研究を展開し，得られたデータを質的研究の方法論に則って分析した。ここでは分析的一般化を行うことで，本研究では調査していない学習者や数学的内容に対しても考察結果を適用する外的妥当性を主張したものの，更なる追試が必要である。二つ目は，収集したデータ及びその分析方法についての限界である。本研究では数学的対象の美的性質の感得を，知覚者による認知的な営みと感覚的な営みの両者に関係するものとして捉えている。この特に後者の感覚的な営みについては，分析のために適切なデータの種類や収集方法，分析方法についての議論が十分に蓄積されていない。本研究ではこのような方法論上の課題には取り組まずに，先行研究に倣ってデータの種類や収集・分析方法を選択したが，この方法論上の課題を解消することで新たな解釈が得られる可能性がある。三つ目は，調査対象者の選択による限界である。第 4 章では小学校算数科の授業及び小学生を対象とし，第 5 章では高校生を対象とした調査を実施している。したがって，第 4 章における実証的な考察で得られた「練り上げ」の課題は小学校特有のものである可能性があり，また，第 5 章における実践的な考察で得られた感得過程についての経験的補填は，高校生特有のものである可能性がある。

最後に，第 5 章で検討した 3 局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得方法について，実践的考察のために実施した調査の環境に関する限界である。この調査は，一般的な授業の形態による教授・学習の環境ではなく，ペアによる問題解決に観察者が介入するという環境で実施された。また，生徒たちが問題解決にかけられる時間は，一般的な授業と比較すると遥かに長かった。したがって，第 5 章における考察によって得られた結論を授業の形態による教授・学習過程に応用するためには，更なる検討が必要である。

第 3 節　今後の課題

本研究の今後の課題は次の三つである。第 1 に，実践的・実証的な研究をとおして経験的に補填した数学的対象の美的性質の感得過程及びその促進方法の理論的仮説について，新たな複数事例研究を展開して内的及び外的妥当性を確認することである。

第 2 に，本研究では焦点化しなかった算数・数学の教育内容と数学的対象の美的性質の感得過程及びその促進方法との関連を主題とする研究を展開することである。本研究で構築した理論的枠組みは，知覚対象が数学的対象に特化されていたものの，数学的対象の特性について詳細に議論する視点を与えなかった。例えば，数学的対象が数であるのか図形であるのか，または証明のような数学の多様な領域を貫く活動やその成果であるのかについては不問としていた。このような，美的性質の感得が促される数学的対象として選択される教育内容によって，その美的性質の感得過程及びその促進方法に差異が生じるか否かについて

は，上記の第１の課題と関連して新たな複数事例研究を展開することで検討する必要がある。

第３に，実践研究の環境として教育実践上の主たる教授・学習の場である授業を選択し，実践上の課題を特定しかつその解決策を講じることである。前節で述べたように，第５章の考察結果をそのまま授業の形態による教授・学習過程に応用することはできない。この応用のためには，本研究では採用していない視点からも第４章と第５章の結果を総合的に考察するとともに，３局面モデルに基づく数学的対象の美的性質の感得過程とその促進に関する調査の追試を広く展開する必要がある。加えて，授業による実践研究を展開することによって，第６章では十分に議論できていない教材の実践的な評価である教材活用の方法について，詳細に検討する必要がある。

引用・参考文献

和文

アダマール，J.（伏見康治・尾崎辰之助・大塚益比古訳）(1990).『数学における発明の心理』. 東京：みすず書房.

アルバース，D. J. ・アレクサンダーソン，G. L. （編）（一松信監訳）(1987).『数学人群像：プロフィルとインタビュー』. 東京：近代科学社.（原著：Mathematical people: Profiles and interviews, 1985, Boston: Birkhäuser）.

池田敏和・奥村利香・小山健仁・岩立忠・純岡尚史・関口慎吾・前田正男・馬場裕・橋本吉彦 (2011).「算数・数学科における図形についての美しさを感得させる教材開発とその指導」. 横浜国立大学教育人間科学部紀要，Ⅰ，教育科学 13，17-39.

石田淳一 (2008).『算数科における「パターン発見」方略の指導に関する実証的研究－問題解決指導の充実・発展のために－』. 岡山：大学教育出版.

礒田正美・中村享史 (2010).「統合・発展型指導系統を支える教材理論」. 日本数学教育学会誌，92(12)，47.

磯脇一男 (1981).「三角比の鈍角への拡張の指導」. 日本数学教育学会誌，63(11)，14-15.

イン，R. K. （近藤公彦訳）(2011).『新装版　ケース・スタディの方法［第２版］』. 東京：千倉書房.

大島利雄ら (2011).『数学Ⅰ』. 東京：数研出版.

クルチェツキー，V. A. （駒林邦男訳）(1969a).『数学的能力の構造 上』. 東京：明治図書.

クルチェツキー，V. A. （駒林邦男訳）(1969b).『数学的能力の構造 下』. 東京：明治図書.

クヴァール，S .（能智正博・徳田治子訳）(2016).『SAGE 質的研究キット２　質的研究のための「インター・ビュー」』. 東京：新曜社.

クック，M .（冨永星訳）(2019).『Mathematician』. 東京：森北出版.

クライン，M.（中山茂訳）(2011).『数学の文化史』. 東京：河出書房新社.

小池嘉志 (2015).「算数・数学の授業における練り上げの重要性とその在り方に関する一考察」. 日本科学教育学会研究会研究報告，29(9)，59-64.

国立教育政策研究所（編）(2013).『生きるための知識と技能５ OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2012 年調査国際結果報告書』. 東京：明石書店.

古藤怜・新潟算数教育研究会 (1990).『算数科 多様な考えの生かし方まとめ方』. 東京：東洋館出版社.

小松孝太郎 (2014).『算数・数学教育における証明指導の改善』. 東京：東洋館出版社.

斎藤憲・三浦伸夫 (2008).『エウクレイデス全集　第１巻　「原論」Ⅰ-Ⅵ』. 東京：東京大

学出版会.
斎藤範雄（1990).「数学の美しさを感得できる授業のあり方」. 日本数学教育学会誌, 72(9), 11-20.
櫻井茂男 (2009).『自ら学ぶ意欲の心理学―キャリア発達の視点を加えて』. 東京：有斐閣.
佐々木健一（1995).『美学辞典』. 東京：東京大学出版会.
関口靖広（2013).『教育研究のための質的研究法講座』. 京都：北大路書房.
清水静海（1995).『子供を伸ばす算数 学ぶ意欲と算数のよさ』. 東京：小学館.
清水静海・笠井健一・島田功・細水保宏・日野圭子・齋藤一弥（2021).「600 号記念座談会 戦後学習指導要領改訂の流れ及び改訂のポイント part2」. 新しい算数研究, 601, 99-120.
清水美憲（1990).「ペアによる数学的問題解決のプロトコール分析について」. 筑波大学教育学系論集, 14(2), 183-195.
清水美憲（2001).「数学科授業にみられる『文化的スクリプト』に関する一考察－国際比較を通してみる日本の授業の特徴の解明－」. 第 34 回数学教育論文発表会論文集, 499-504.
清水美憲（2002).「数学科授業の構造に関する授業者と学習者の知覚について－再生刺激インタビューによる分析－」. 日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会論文集, 557-562.
清水美憲（2007a).『算数・数学教育における思考指導の方法』. 東京：東洋館出版社.
清水美憲（2007b).「算数・数学科の評価問題における『他者』の使用の意義」. 筑波数学教育研究, 26, 1-10.
清水美憲（2018).「数学授業に関するレキシコンの構成－教授学的記述用語の分析を中心に－」. 日本数学教育学会第 51 回秋期研究大会発表集録, 279-282.
新算数教育研究会（2014).『新しい算数研究　1 月号　No.516』. 東京：東洋館出版社.
杉山吉茂（1986）．『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』．東京：東洋館出版社.
杉山吉茂（1990）．『力がつく算数科教材研究法』．東京：明治図書.
杉山吉茂（1992）．「直観と論理の役割について」．学芸大学数学教育研究, 4, 35-44.
杉山吉茂（2009）．『中等科数学科教育学序説』．東京：東洋館出版社.
杉山吉茂（2012）．「論説 『数学する心』を育てる」.杉山吉茂先生喜寿記念論文集編集委員会（編）『続・新しい算数数学教育の実践をめざして―杉山吉茂先生喜寿記念論文集』（pp.13-19）．東京：東洋館出版社.
ソーヤー, W.W.（宮本敏雄・田中勇訳）（1978）．『数学へのプレリュード』．東京：みすず書房.

髙井五朗（2010）．「数学的問題解決授業における個人及び集団的観点を用いた指導の研究（Ⅳ）－メタ認知の視座からみた規範の形成－」. 第 43 回数学教育論文発表会論文集, 501-506.
高橋昭彦（2000）．「日米授業研究の現状と課題－アメリカで注目されている日本の授業研究－」．日本数学教育学会誌，82(12)，15-21.
竹内敏雄（1979).『美学総論』. 東京：弘文堂.
デービス，F. P.・ヘルシュ，R.（柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕訳）(1986).『数学的経験』. 東京：森北出版.
利光功（1970).「形式」. 竹内敏雄（編）　『美学事典』(pp. 194-196）. 東京: 弘文堂.
直江俊雄（2018).「創造的な美術鑑賞を目指して」. 神林恒道・ふじえみつる（監修)『美術教育ハンドブック』(pp. 157-165). 東京：三元社.
中島健三（1982).『算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察（第二版)』. 東京：金子書房.
中島健三・大野清四郎（編著）(1974).『現代教科教育学大系　第 4 巻　数学と思考』. 東京：第一法規.
中島健三・杉山吉茂（1974).「代数的構造の指導とその活用についての実験研究：群を例として」. 日本数学教育学会誌，数学教育学論究，25・26，1-34.
長岡耕一（2003).「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」. 日本数学教育学会誌，85(9)，32-37.
長沢圭祐（2015).「Argumentation を視点とした算数教育における練り上げに関する研究」. 日本数学教育学会誌，97，数学教育学論究，臨時増刊，137-144.
新村出（編）(2018).『広辞苑　第七版』. 東京：岩波書店.
日本数学教育学会研究部小学校部会（2001).「算数授業の方法に関する調査の結果」. 日本数学教育学会誌，83(2)，31-42.
バーロー，D. H.，ハーセン，M.（高木俊一郎・佐久間徹監訳）(1993).『一事例の実験デザイン：ケーススタディの基本と応用』. 東京：二瓶社.
長谷川榮（2013).「教材の構成」. 日本教材学会（編)『教材事典：教材研究の理論と実践』(pp. 28-30). 東京：東京堂出版.
平岡忠（1987).「算数・数学の美しさを味わわせる指導」. 茨城大学教育学部教育研究紀要，19，217-224.
藤井斉亮（2010）．「日本の授業における『集団思考』の様相」．清水美憲（編）『授業を科学する－数学の授業への新しいアプローチ－』（pp. 157-181）．東京：学文社.
藤井斉亮（2014）．「授業研究における学習指導案の検討過程に関する一考察」．日本数学

教育学会誌，96(10)，2-13.
藤井斉亮ら（2020）．『新しい算数６　数学へジャンプ』．東京：東京書籍.
ポアンカレ，H. （吉田洋一訳）（1953）『改訳　科学と方法』．東京：岩波書店.
俣野博ら（2017）．『数学Ⅰ　Advanced』．東京：東京書籍.
松尾七重（1999）．「算数数学の美しさを感得するための方法」．千葉大学教育学部研究紀要，47，Ⅰ：教育科学編，71-79.
見田宗介（1996）．『価値意識の理論』．東京：弘文堂.
宮本友弘（2013）．「教材研究」．日本教材学会（編）『教材事典　教材研究の理論と実践』．東京：東京堂出版.
文部科学省（2008）．『小学校学習指導要領解説　算数編』．東京：東洋館出版社.
文部科学省（2018a）．『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　算数編』．大阪：日本文教出版.
文部科学省（2018b）．『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編』．大阪：日本文教出版.
文部科学省（2019）．『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』．東京：学校図書.
矢部敏昭・左野博道ら（1997）．「創造的に思考し表現する授業の創造－思考の連続性と練り上げ場面の充実－」．日本数学教育学会誌，79(10)，302-309.
兪在真（2005）．「堀辰雄におけるアンリ・ポアンカレ受容：『芸術のための芸術について』を中心に」．日本語と日本文学，40，42-57.
ル・リヨネ，F. （編著）（飯塚勝久ら訳）（1988）．『数学思想の流れ　下』．東京：東京都書.
ワイルダー，R. L. （好田順治訳）（1980）．『数学の文化人類学』．東京：海鳴社.
和田義信（2007).「第３章　数学教育の現代化の時代」．和田義信 著作・講演集刊行会（編）『和田義信 著作・講演集２ 論文集（軽装版）』（pp. 237-310）．東京：東洋館出版社.
和田義信（2007).「第１章　なぜ算数・数学を教えるのか」．和田義信 著作・講演集刊行会（編）『和田義信 著作・講演集３ 講演集（1）　数学と数学教育（軽装版）』（pp. 5-86）．東京：東洋館出版社.

欧文

Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2018). *Proofs from THE BOOK.* Berlin: Springer.

Antognazza, D., Di Martino, P., Pellandini, A., & Sbaragli, S. (2015). The flow of emotions in primary school problem solving. In K. Krainer, & N. Vondravá (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9, February 4 – 8, 2015) (pp. 1116－1122). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Barlow, D. H., Nock, M. K., & Hersen, M. (1976/2009). *Single case experimental designs: Strategies for studying behavior change*. Boston: Person Education, Inc.

Byers, V., & Erlwanger, S. (1984). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 259-274.

Brown, S. I. (1973). Mathematics and humanistic themes: Sum considerations. *Educational Theory, 23*(3), 191–214.

Brown, S. I. (1974). Musing on multiplication. *Mathematics Teaching, 61*, 26-30.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1969). What if not? *Mathematics Teaching, 46*, 38-45.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Burton, L. (1999). Why is intuition so important to mathematicians but missing form mathematics education? *For the Learning of Mathematics,19*(3), 27-32.

Cook, M. (2009/2018). *Mathematician: an outer view of the inner world.* Rhode Island: American Mathematical Society.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Davis, P.J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986a). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics 6*(1), 2-10.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986b). Two letters II. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 40-41.

Ernest, P. (2015). Mathematics and beauty. *Mathematics Teaching, 248*, 23-27.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. In E. Cohors-Fresenborg, & I. Wachsmuth (Eds.) *Proceedings of the Second Conference of the International Group for* *the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148-176). Osnabruck, Germany: PME.

Goldenberg, P. (1989). Seeing beauty in mathematics: Using fractal geometry to build a spirit of mathematical inquiry. *Journal of Mathematical Behavior, 8*, 169-204.

Hadamard, J. (1954). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications, Inc.

Hannula, M. S., Pantziara, M., & Di Martino, P. (2018). Affect and mathematical thinking: Exploring developments, trends, and future directions. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education : Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp.128-141). Lontoo: Routledge.

Hardy, G. H. (1956/1992). *A mathematician's apology*. New York : Cambridge University Press.

Inglis, M., & Aberdein, A. (2014). Beauty is not simplicity: An analysis of mathematician's proof appraisals. *Philosophia Mathematica, 23*, 87-109.

Inglis, M., & Aberdein, A. (2020). Are aesthetic judgements purely aesthetic? Testing the social conformity account. *ZDM, 53*, 1127-1136.

Karp, A. (2008). Which problem do teachers consider beautiful? *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 36-43.

Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 1-26.

Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York: Oxford University Press.

Krull, W. (1987). The aesthetic viewpoint in mathematics. *The Mathematical Intelligencer 9*(1), 48-52.

Kvale, S. (2007). *Doing interviews*. Los Angeles: SAGE Publications.

Le Lionnais, F. (1971). Beauty in mathematics C. Pinter, & H. Kline (Trans.). In F. Le Lionnais (Ed.), *Great currents of mathematical thought volume II mathematics in the arts and sciences* (pp. 121-158). New York: Dover Publications Inc.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010) *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson Education Limited.

National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Papert, S. (1978/1993) . The mathematical unconscious. In S. Papert, *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas* (pp.190-207). New York: Basic Books.

Papert, S. (1993). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic

Books.

Poincaré, H. (1908/2003). *Science and method.* New York: Dover Publications, Inq.

Polya, G. (1988/2004). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Raman-Sundström, M., Öhman, L. (2018). Mathematical fit: A case study. *Philosophia Mathematica, 26*(2), 184-210.

Raman-Sundström, M., Öhman, L., & Sinclair, N. (2016). The nature and experience of mathematical beauty. *Journal of Humanistic Mathematics, 6*(1), 3-7.

Shaw, J. B. (1967). Mathematics as a fine art. *The Mathematics Teacher, 60*(7), 738-747.

Silver, E., & Metzger, W. (1989). Aesthetic influences on expert mathematical problem solving. In D. B. McLeod, & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective* (pp.59-74). New York: Springer-Verlag.

Sinclair, N. (2001). The aesthetic is relevant. *For the Learning of Mathematics, 21*(1), 25-32.

N. Sinclair (2003). Aesthetic values in mathematics: A value-oriented epistemology. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the conference for Psychology of Mathematics Education* (4, pp.199-205), Hawaii, U.S.A.: PME.

Sinclair, N. (2004). The role of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(3), 261-284.

Sinclair, N. (2006). *Mathematics and beauty: Aesthetic approaches to teaching children.* New York: Teachers College Press.

Sinclair, N. (2008). Attending to the aesthetic in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 29-35.

Sinclair, N. (2009). Aesthetics as a liberating force in mathematics education? *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41*(1), 45-60.

Sinclair, N. (2011). Aesthetic considerations in mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics, 1*(1), 2-32.

Sinclair, N. (2018a). Aesthetic as philosophy for mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 38*(2), 21-23.

Sinclair, N. (2018b). An aesthetic turn in mathematics education. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 51-66). Umeå, Sweden: PME.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

Sierpsinka, A. (2002). Reflections on education studies in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 251-257.

Steen, L. A. (Ed.). *On the shoulder of the giants: New approaches to numeracy.* Washington, D. C.: National Academy Press.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

Takahashi, A. (2008). Beyond show and tell: *Neriage* for teaching through problem-solving: idea from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Akihiko_Takahashi5 （2021.5.31 最終確認）

Thompson, P. W. (1979, March). *The constructivist teaching experiment in mathematics education research*. Paper presented at the Research Reporting Session, Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston.

Tjoe, H. (2016a). When is a problem really solved? Differences in the pursuit of mathematical aesthetics. In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.) *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4, pp. 275-282). Szeged, Hungary: PME.

Tjoe, H. (2016b). Aesthetics in school mathematics: A potential model and possible lesson. *The Mathematics Enthusiast, 13*(3), 279-302.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91-106.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wells, D. (1986). Two letters I. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 39-40.

Wells, D. (1988). Which is the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer, 10*(4), 30-31.

Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer, 12*(3), 37-41.

Wilder, R. L. (1968). *Evolution of mathematical concepts*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentations and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-470.

Young, J. W. A. (1924). *Teaching of mathematics in the elementary and the secondary school.* New York：Longmans, Green and Co.

Yin, R. K. (2014). *Case study research.* Washington D.C.: SAGE Publications, Inq.

本論文に関係する筆者の主要な論文

花園隼人 (2009).「数学的問題解決における簡潔さに関する価値観の影響：中学生の問題解決過程の分析」. 筑波大学大学院修士論文（未刊行）.

花園隼人（2014).「学校数学における『美しさ』をとらえる枠組みの構築：数学における『美しさ』の特色の分析を通して」. 筑波大学人間総合科学研究科学校教育専攻学校教育学研究紀要，7，105-125.

花園隼人（2016).「数学教育における数学的解法の美的性質の分析：教材分析の視点の導出」. 筑波大学教育学系論集，41(1)，53-66.

花園隼人（2017a).「数学的対象の美的性質を捉える方法に関する研究：『多様における統一』原理に基づく理論的考察」. 筑波大学教育学系論集，41(2)，77-91.

花園隼人（2017b).「数学的対象の美的性質の感得を促す方法に関する事例研究：高校生ペアによる問題解決過程の分析を通して」. 日本数学教育学会誌，99，数学教育学論究，臨時増刊，33-40.

Hanazono, H. (2017). The qualitative differences in generative characteristic of the aesthetic sensibility: Analysis of learners' problem solving. In Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1-5, 2017) (pp.1090–1097). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

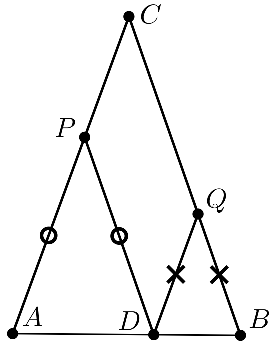
花園隼人 (2019).「算数科授業における数学的対象の美的性質の感得過程：児童に意味づけられた『練り上げ』に焦点を当てて」. 日本数学教育学会誌, 100, 数学教育学論究, 112, 3–14.

花園隼人（2019).「数学教育における数え上げに関する数学的対象の美的性質の感得の促進方法に関する事例研究：高校生ペアによる問題解決過程の分析」. 科学教育研究，43(4)，423-437.

Hanazono, H. (2021). Facilitating learners' appreciation of the aesthetic qualities of mathematical objects: A case study on the learners problem solving. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (3, pp. 24-31). Khon Kaen, Thailand: PME.

資料１　第５章に記述した調査の調査課題と解答用紙

$\boxed{1}$ タカシくんとケイコさんは，次の二等辺三角形の性質（☆）について，一緒に考えています。

二等辺三角形の性質（☆）	
 **図1**	図1において，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形である。 また，この $\triangle\mathrm{ABC}$ の辺上にある3点 $\mathrm{D},\mathrm{P},\mathrm{Q}$ は， $\mathrm{AP}=\mathrm{PD},\mathrm{DQ}=\mathrm{QB}$ を満たしている。 このとき，A を出発して C を通り，B に到着するまでの道のり①と，A を出発して $\mathrm{P}\to\mathrm{D}\to\mathrm{Q}$ の順に通り，B に到着するまでの道のり②は等しい。

(1) この二等辺三角形の性質（☆）が成り立つことを示してください。

(2) タカシくんは次の図2のような図を描いて，<u>この二等辺三角形の性質（☆） は成り立たない</u>と考えました。<u>図1の場合と下の図2の場合とのちがい</u>を説明してください。

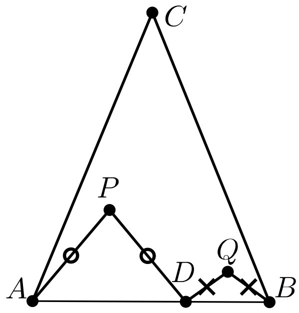


図2（タカシくんの図）

(3) ケイコさんは，この二等辺三角形の性質（☆）と同じような性質（★）が，長方形についても成り立つことに気づきました。性質（★）はどのような性質でしょうか。その性質が長方形について確かに成り立っていることも説明してください。

$\boxed{2}$ トムさんはケンジくんに将棋を教わっています。トムさんは，チェス盤（図1）と将棋盤（図2）を上から見て比べて，「将棋盤はチェス盤よりも，正方形が 81 個多いね。」と言いました。

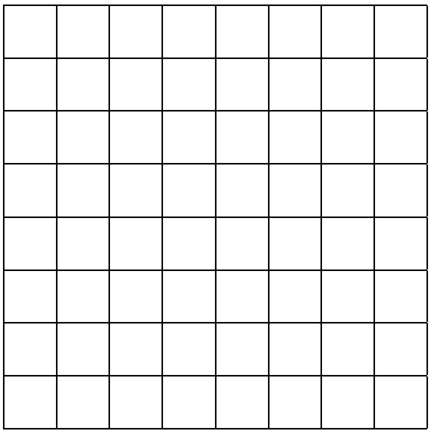


図1　チェス盤

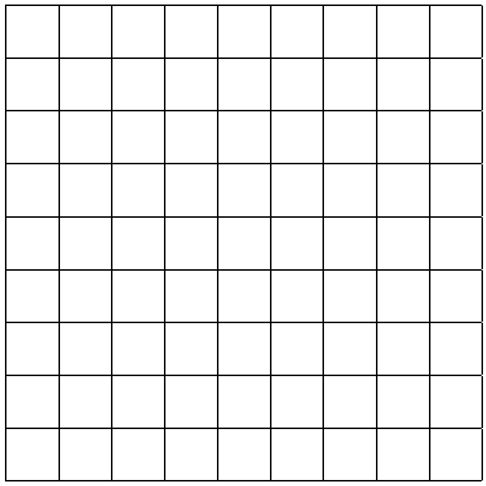


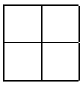
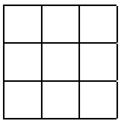
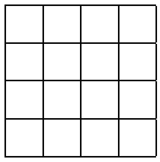
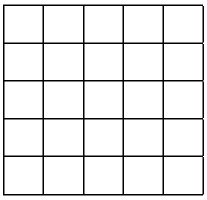
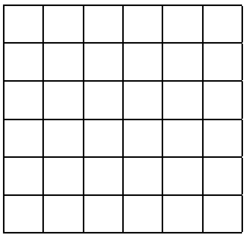
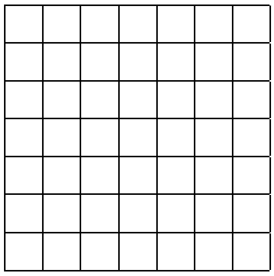
図2　将棋盤

(1) ケンジくんは，将棋盤の正方形の個数を $9 \times 9 = 81$ 個，チェス盤の正方形の個数を $8 \times 8 = 64$ 個と数えたため，トムさんがどのように正方形を数えたのかわかりませんでした。

トムさんは正方形の個数をどのように数えたのでしょうか。<u>実際に数えて</u>確認してください。

(2) ケンジくんとトムさんは，チェス盤と将棋盤の他にも，同じような図形の正方形の個数を数えることにしました。その結果は，次の表1のようになりました。ケンジくんはこの結果を見て，全ての場合で平方数（自然数を二乗した数）の和になっていることに気づきました。このことを確認してください。

表1　正方形の個数

＜2 × 2の図形＞  5個	＜3 × 3の図形＞  14個	＜4 × 4の図形＞  30個
＜5 × 5の図形＞  55個	＜6 × 6の図形＞  91個	＜7 × 7の図形＞  140個

(3) ケンジくんとトムさんは，正方形以外でできる図形にも何か面白い性質がないか調べることにしました。

ケンジくんは正三角形でできる図3のような図形の正三角形の個数ついて調べましたが，特に性質を見つけることができませんでした。一方，トムさんはケンジくんと同じ図形について，上向きの正三角形（▽ではなく△）の個数について考えることで，この図形の性質に気づきました。

(2)のように，正三角形の個数が少ない場合から順々に調べて，性質を見つけてください。

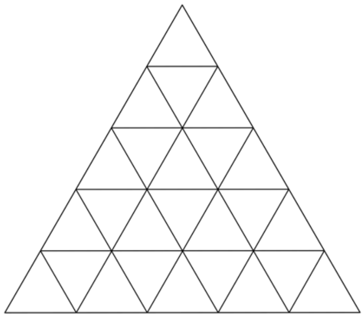


図3　正三角形でできる図形

(4) ケンジくんは、トムさんが見つけた性質についての説明を聞いて,「それだったら正方形のときの性質と同じだね。それに他の図形についても考えられるよ。」と言いました。ケンジくんはどのようなことに気づいたのでしょうか。説明してください。

3 サトシくんとモモコさんは，図4で示された「ピンの入れ替え」ゲームで遊んでいます。

白黒2色のピン 10 個が，図のように，直線上に並んだ 11 個の穴の上にあります。この黒いピンと白いピンを入れ替えたいのですが，次のルールに従わなければいけません。

＜ルール＞ピンが移動できるのは，次のいずれかである。

- 隣り合う空きの穴
- 1個のピンを跳び越えた空きの穴

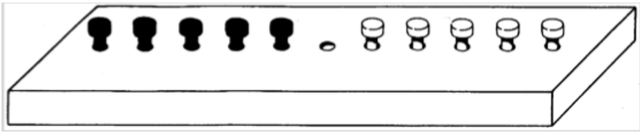


図4 「ピンの入れ替え」ゲーム

（1）2色のピンは入れ替えられるでしょうか。適当な図をかきながら考えてください。その際，用意してある道具を用いて考えても構いません。

(2) サトシくんはうまく入れ替えることができず，穴とピンがもっと少ない場合で試してみることにしました。サトシくんと同じように，ピンが各色1個ずつの場合，2個ずつの場合，3個ずつの場合について考えて下さい。

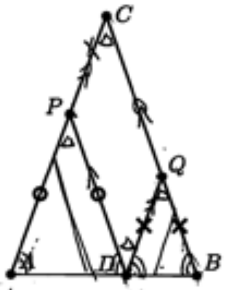
(3) モモコさんはうまく入れ替えることができたので，今度は元の状態に戻すことにしました。しかし，どのように入れ替えたのかを覚えていなかったので，困ってしまいました。2色のピンを入れ替えられたとして，元の状態に戻して下さい。

資料２　第５章に記述した調査の調査結果

pp.261-272：ペア A
pp.273-283：ペア B
pp.284-291：ペア C

※ 資料１の解答用紙はペアを組んでいる二人の生徒に１枚ずつ配布している。ただし，解決を進めるにあたって解答用紙は個人のものではなくなっているので，ここでは解答者については明記しない。

1 タカシくんとケイコさんは，次の二等辺三角形の性質（☆）について，一緒に考えています。

二等辺三角形の性質（☆）	
 図1	図1において，△ABC は AC = BC の二等辺三角形である。 また，この△ABC の辺上にある3点 D, P, Q は， AP = PD, DQ = QB を満たしている。 このとき，A を出発して C を通り，B に到着するまでの道のり①と，A を出発して P → D → Q の順に通り，B に到着するまでの道のり②は等しい。

(1) この二等辺三角形の性質（☆）が成り立つことを示してください。

[証明] △APDにおいて
仮定より
AP=PD …①
①より △APDは二等辺三角形
したがって
∠PAD=∠PDA …②
また，仮定より △ABCも AC=BCの二等辺三角形であるから
∠CAB=∠CBA …③
△BQDについても同様に
∠QBD=∠QDB …④
~~②,③,④より~~
~~∠PAD=∠PDA=∠QDB=∠QBD …⑤~~
また，
②,③,④より
∠PDA=∠QBD …⑤ ，∠PAD=∠QDB …⑥
⑤,⑥より 同位角が等しいから CB//PD
CA//QD

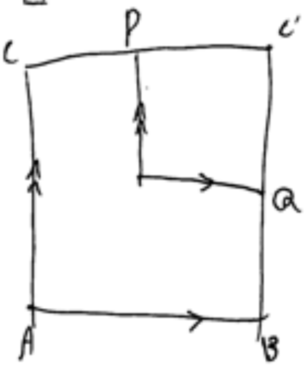
2組の対辺が平行だから，四角形PCQDは平行四辺形である。
したがって
CQ=PD …⑦
CP=QD …⑧

また，仮定より
DQ=QB …⑨

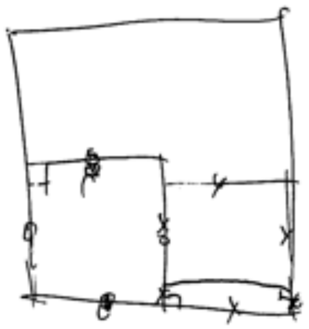
①,⑦より
AP=PD=CQ …⑩
⑧,⑨より
CP=QD=QB …⑪
A→C→Bに進むときに通る辺は AP，PC，CQ，QB
A→P→D→Q→B 〃 AP，PD，DQ，QB
この2通りの道のりにおいて⑩,⑪より
これらの長さは等しい。
したがって，この二等辺三角形の性質（☆）は成り立つ。

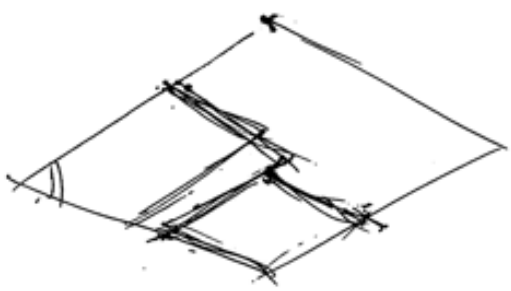
解答用紙　問題番号________　　用紙番号____

図

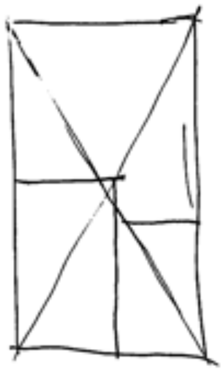


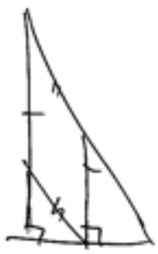
図において

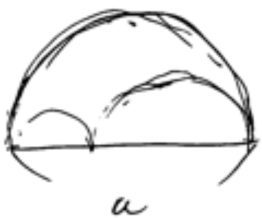




解答用紙　問題番号＿＿＿＿　用紙番号＿＿







(2) タカシくんは次の図2のような図を描いて，この二等辺三角形の性質（☆）は成り立たないと考えました。図1の場合と下の図2の場合とのちがいを説明してください。

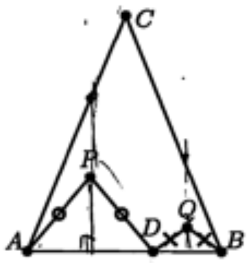


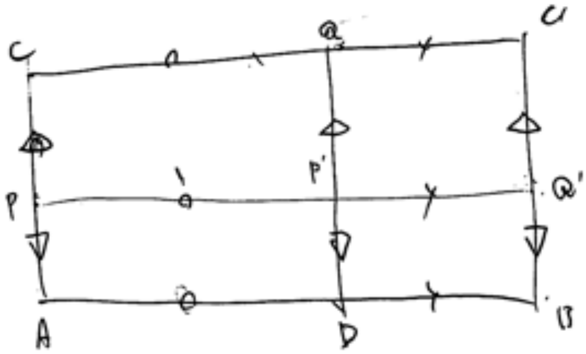
図2（タカシくんの図）

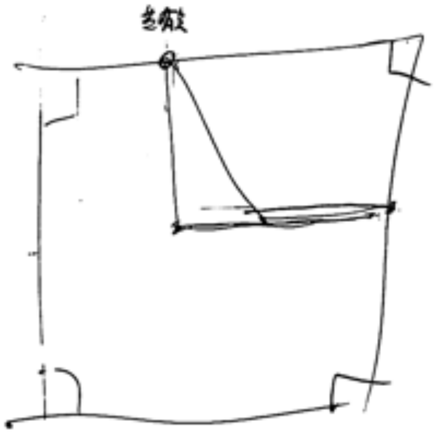
○ △ABCの辺上に3点D,P,Qがあるという条件に合っていない。

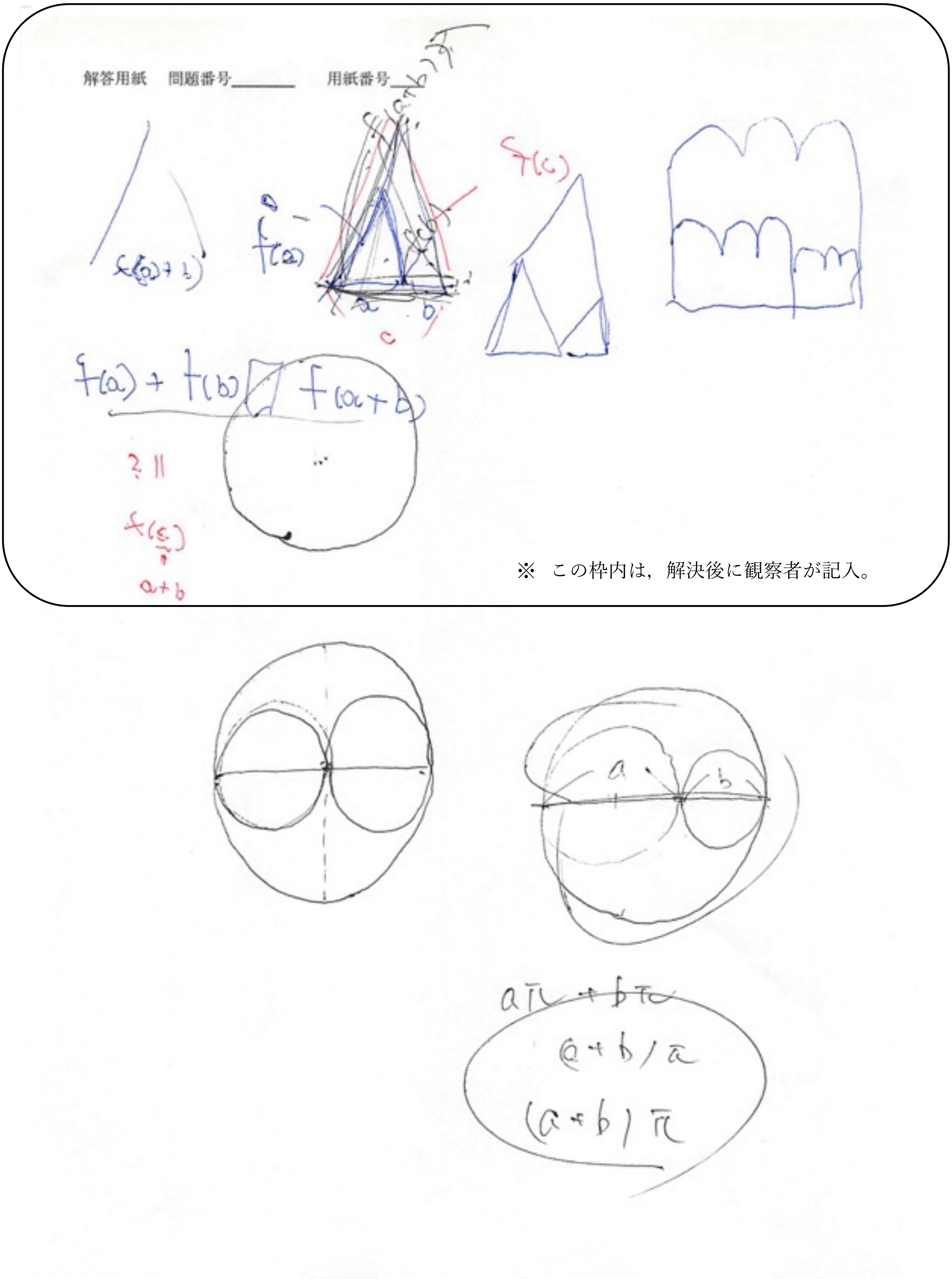
○ ~~左右~~ 各二等辺三角形で底角の大きさが共通していない（相似でない）

○ 証明に必要となる平行四辺形をつくれない。

(3) ケイコさんは，この二等辺三角形の性質（☆）と同じような性質（★）が，長方形についても成り立つことに気づきました。性質（★）はどのような性質でしょうか。その性質が長方形について確かに成り立っていることも説明してください。







※　この枠内は，解決後に観察者が記入。

1 タカシくんとケイコさんは，次の二等辺三角形の性質（☆）について，一緒に考えています。

二等辺三角形の性質(☆)

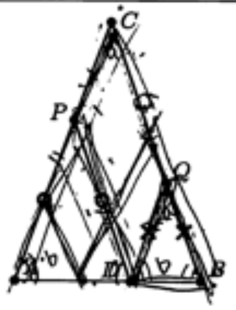


図1

図1において，△ABCはAC = BCの二等辺三角形である。
また，この△ABCの辺上にある3点D, P, Qは，

AP = PD, DQ = QB

を満たしている。
このとき，Aを出発してCを通り，Bに到着するまでの道のり①と，Aを出発してP → D → Qの順に通り，Bに到着するまでの道のり②は等しい。

(1) この二等辺三角形の性質（☆）が成り立つことを示してください。

△PADは二等辺三角形なので、
∠PAD = ∠PDA。
∠CAB = ∠CBA　〈△CABも二等辺三角形、よって
∴ ∠CBA = ∠PDA
よって PD // CB ー①
△QDBは二等辺三角形なので、
∠QDB = ∠QBD。
△CABも二等辺三角形なので、
∠CAB = ∠CBA
~~よって ∠QBD =~~
∴ ∠CAB = ∠QDB ~~ー②~~ よって、AC // QD ー②
①から、QはCB上の点なので
PD // CQ ー③
②から、PはAC上の点なので
PC // QD ー④
③、④から、2組の対辺が平行であることから
四角形PCDQは平行四辺形といえる。
すると、平行四辺形の性質から、2組の対辺の長さは等しいため、
PCはx、CQは○とおける。

解答用紙　問題番号＿＿＿　用紙番号＿＿＿

よって ①のみちのりは

$a + x + a + x = 2a + 2x$

②は

$a + a + x + x = 2a + 2x$

①と②が等しいといえる。

(2) タカシくんは次の図2のような図を描いて，この二等辺三角形の性質（☆）は成り立たないと考えました。図1の場合と下の図2の場合とのちがいを説明してください。

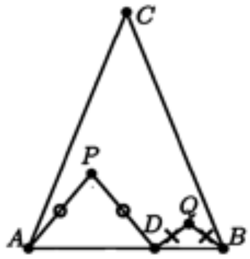


図2（タカシくんの図）

○ 前問の条件であった

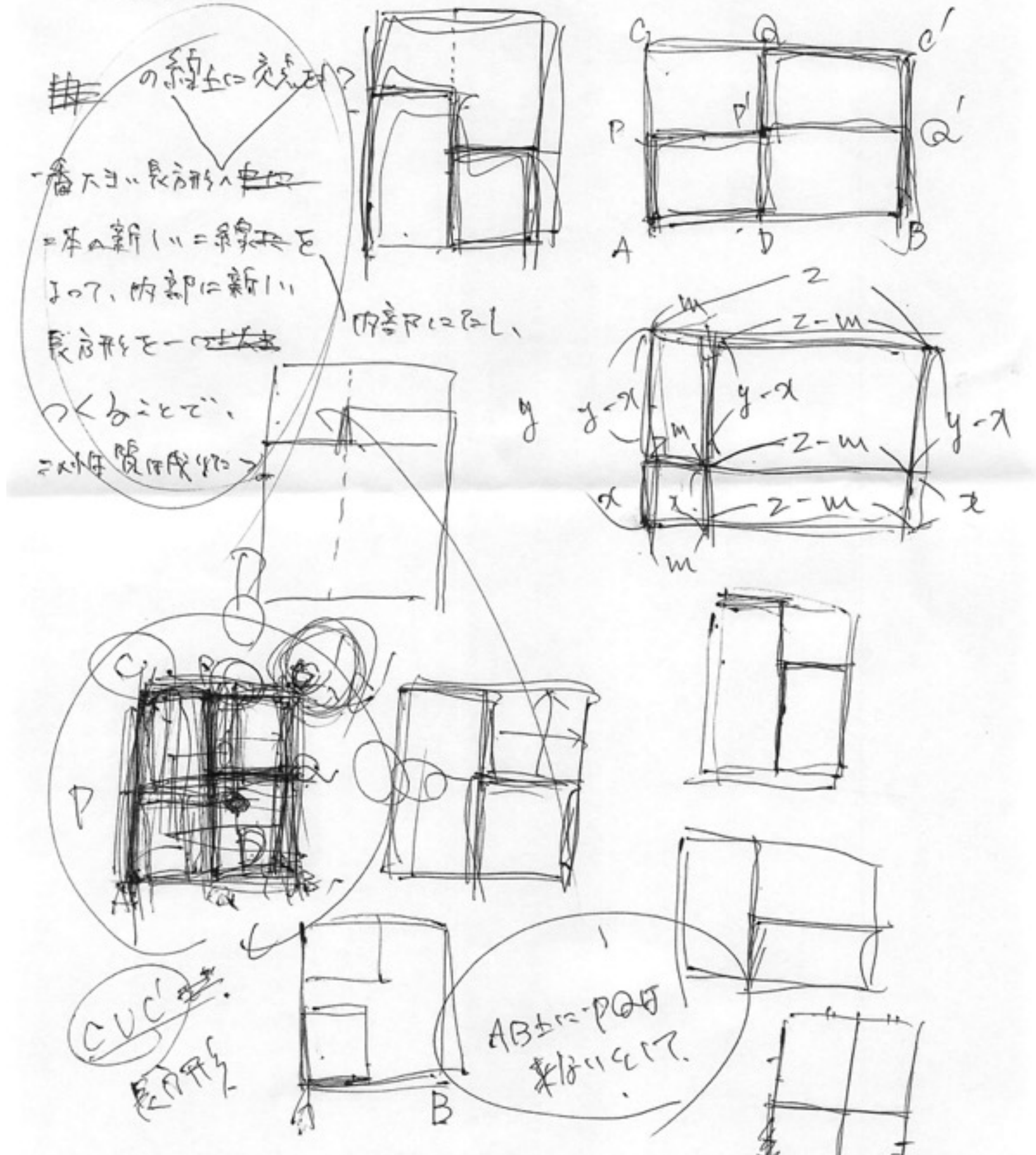
△ABCの辺上にある3点DPQはということを守っていない

○. ∠QBDが∠CBAと、また∠CABが∠PADと共通ではない。
(大きさ、) 相似ではない。

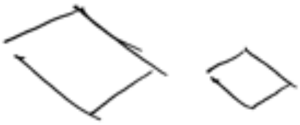
↓

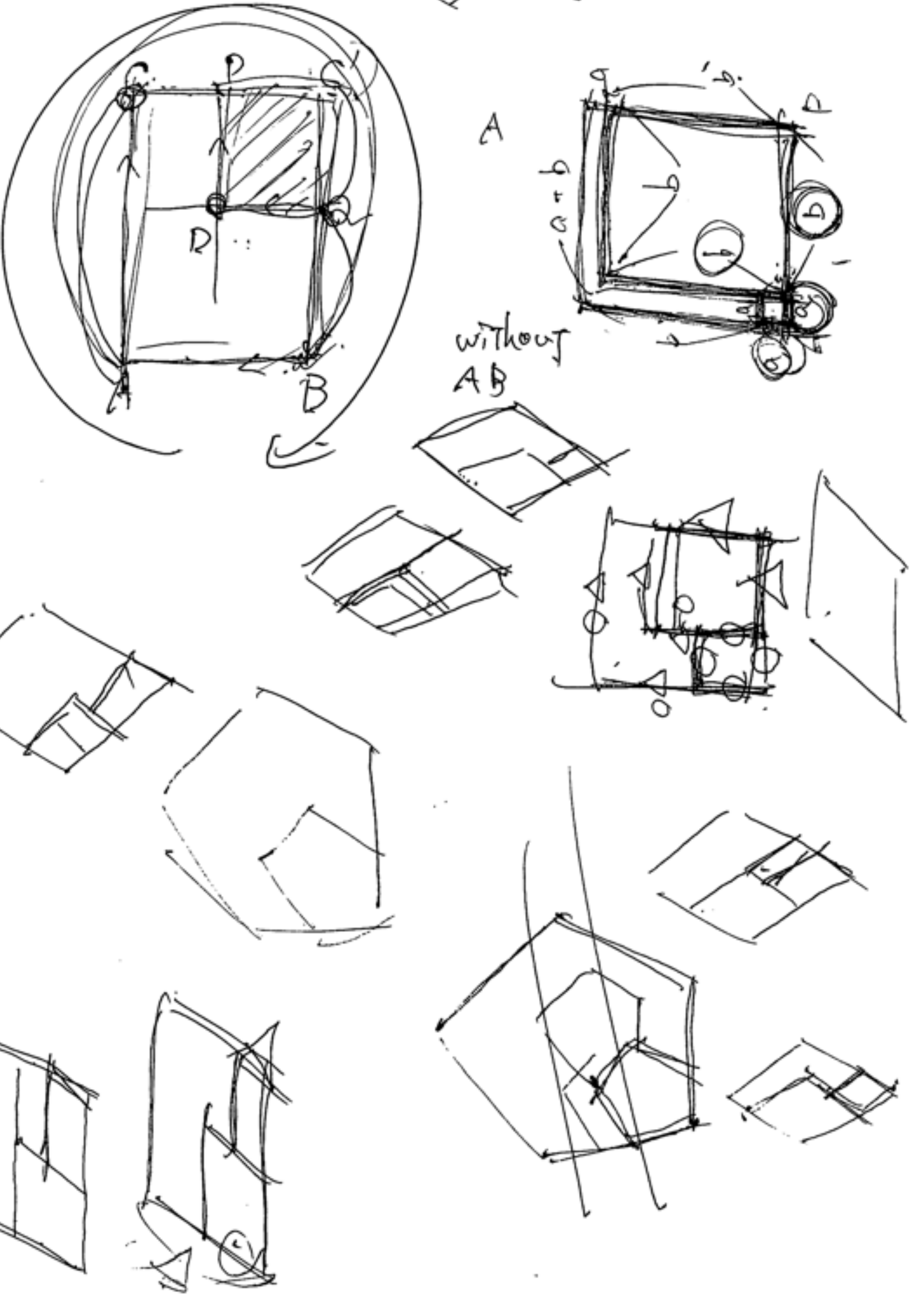
○ 平行四辺形が作れない。

(3) ケイコさんは，この二等辺三角形の性質（☆）と同じような性質（★）が，長方形についても成り立つことに気づきました。性質（★）はどのような性質でしょうか。その性質が長方形について確かに成り立っていることも説明してください。

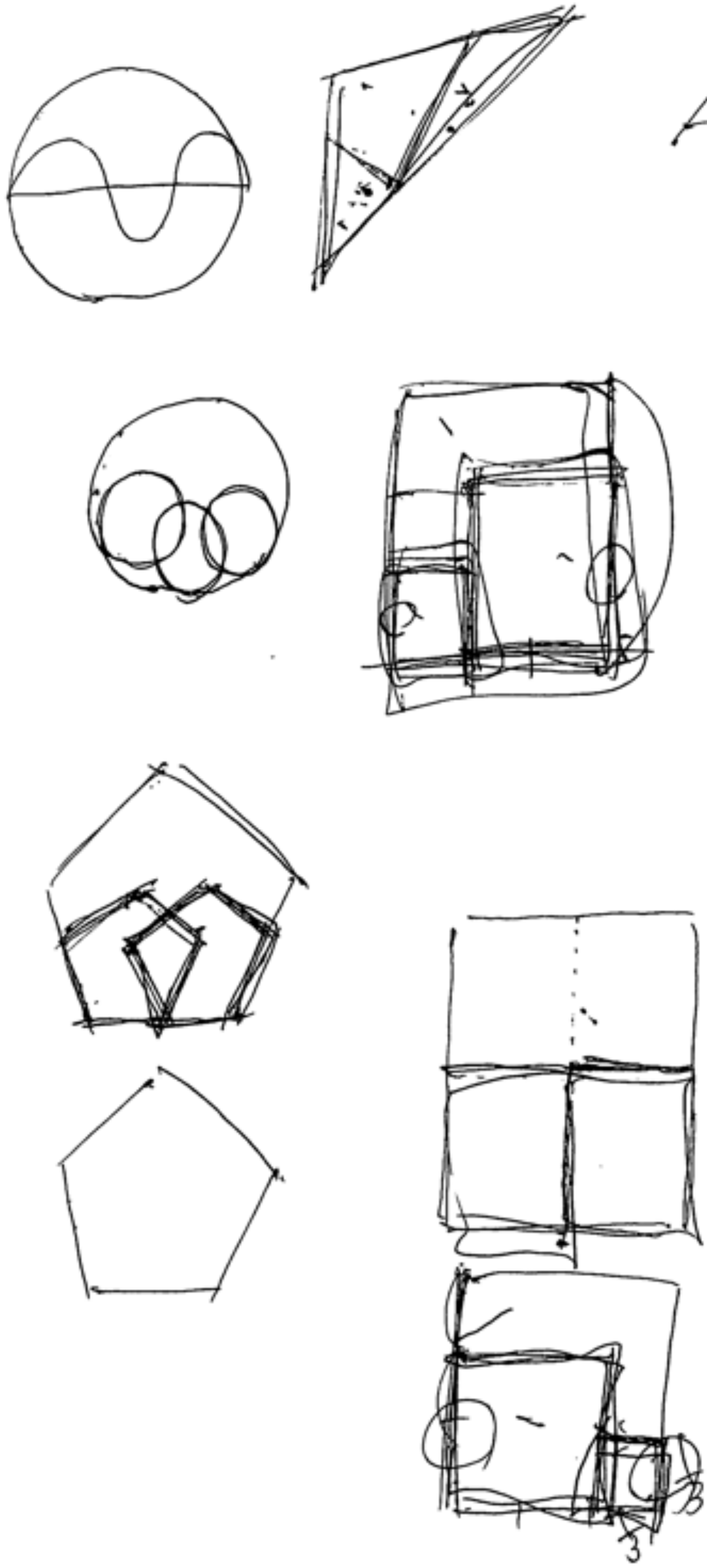


解答用紙　問題番号＿＿＿　用紙番号＿＿





解答用紙　問題番号________　　用紙番号____



2 トムさんはケンジくんに将棋を教わっています。トムさんは，チェス盤（図1）と将棋盤（図2）を上から見て比べて，「将棋盤はチェス盤よりも，正方形が 81 個多いね。」と言いました。

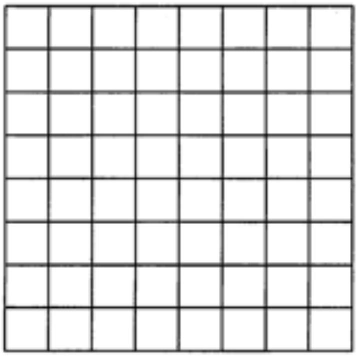


図1 チェス盤

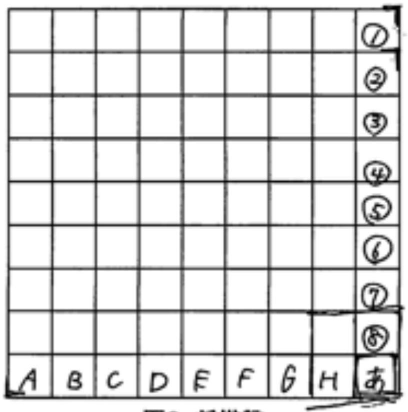


図2 将棋盤

(1) ケンジくんは，将棋盤の正方形の個数を $9 \times 9 = 81$ 個，チェス盤の正方形の個数を $8 \times 8 = 64$ 個と数えたため，トムさんがどのように正方形を数えたのかわかりませんでした。

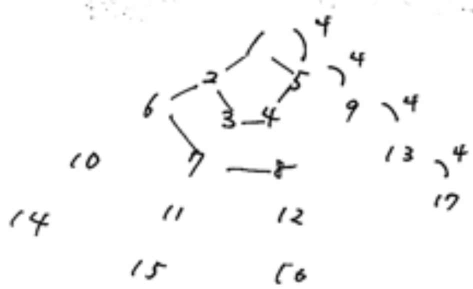
トムさんは正方形の個数をどのように数えたのでしょうか。実際に数えて確認してください。

(1) ①が 右上になる正方形 … 9コ
② 〃 … 8コ
⋮ ⋮
⑧ 2コ
44コ

(2) Aが 左下になる正方形 … 9コ
B 〃 … 8コ
⋮
H 2コ
44コ

1 = 1
1+2 = 3
1+2+3 = 6
10
15
21

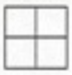
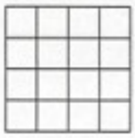
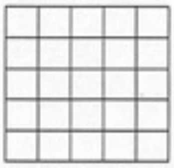
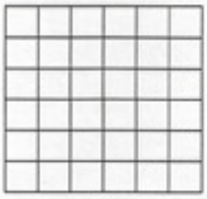
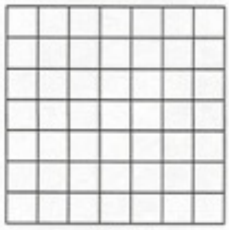
1 = 1
1+3 = 4
1+3+5 = 9
1+3+5+7 = 16
1 4 9 16 25
2 9 9
15 6 17



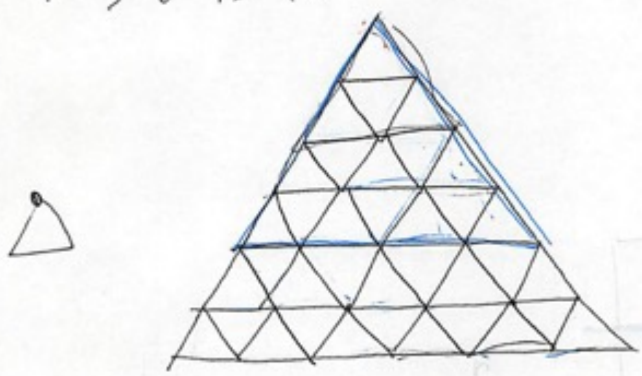
1 5 12 22

(2) ケンジくんとトムさんは，チェス盤と将棋盤の他にも，同じような図形の正方形の個数を数えることにしました。その結果は，次の表1のようになりました。ケンジくんはこの結果を見て，全ての場合で平方数(自然数を二乗した数)の和になっていることに気づきました。このことを確認してください。

表1　正方形の個数

＜2×2の図形＞  5個 1^2+2^2	＜3×3の図形＞  14個 $1^2+2^2+3^2$	＜4×4の図形＞  30個 $1^2+2^2+3^2+4^2$
＜5×5の図形＞  55個 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$	＜6×6の図形＞  91個	＜7×7の図形＞  140個

1　3　6　13　18



$48+(11+5+4+3+2+1+3+1)$

$=48+30$

$=78$

1
3
5
7
9
11

$27+(9+4+3+2+1+20)$

$=27+21$

$=48$

16+7+3+1

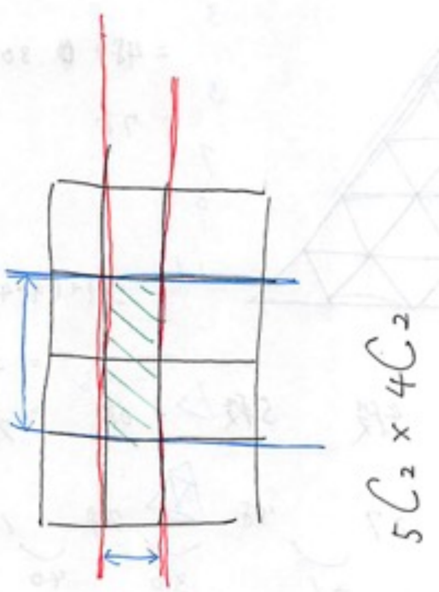
9+3+1　4段　5段　=36　6段　7段

1　5　13　27　48　78　118　170

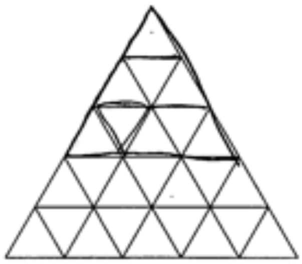
4　8　14　21　30　40　52

4　6　7　9　10　12

2　1　2　1　2


$_5C_2 \times {}_4C_2$

(3) ケンジくんとトムさんは，正方形以外でできる図形にも何か面白い性質がないか調べることにしました。
ケンジくんは正三角形でできる図3のような図形の正三角形の個数ついて調べましたが，特に性質を見つけることができませんでした。一方，トムさんはケンジくんと同じ図形について，上向きの正三角形（▽ではなく△）の個数について考えることで，この図形の性質に気づきました。
(2)のように，正三角形の個数が少ない場合から順々に調べて，性質を見つけてください。



$16+6+3+1$

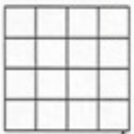
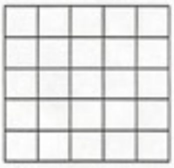
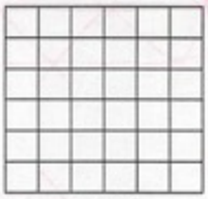
図3　正三角形でできる図形

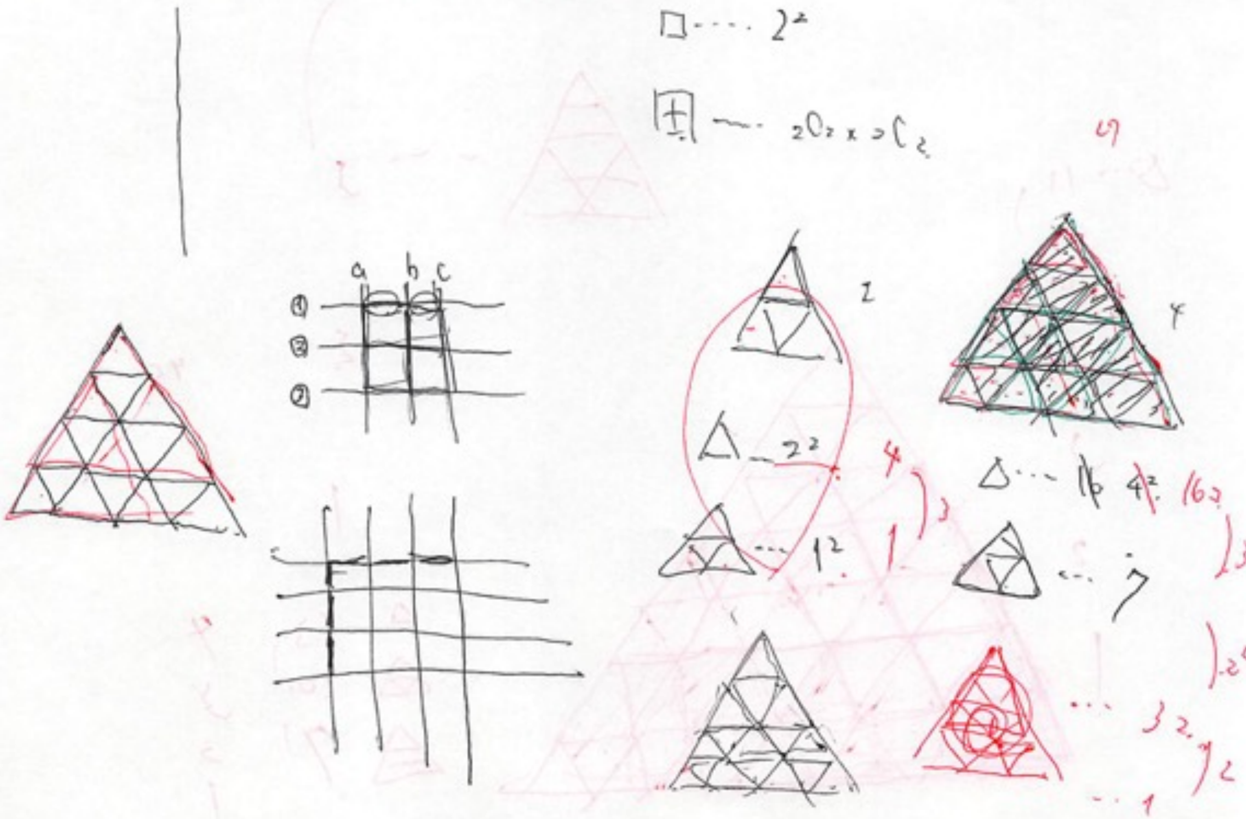
(段)	1	2	3	4	5	6	7	…	n
	~~1~~	~~5~~	~~13~~	~~26~~	~~45~~				
	~~1^2~~	~~2^2+1~~	~~3^2+4~~	~~4^2+10~~	~~5^2+20~~				
	~~1~~	~~4~~	~~9~~	~~16~~					
	1	4	10						

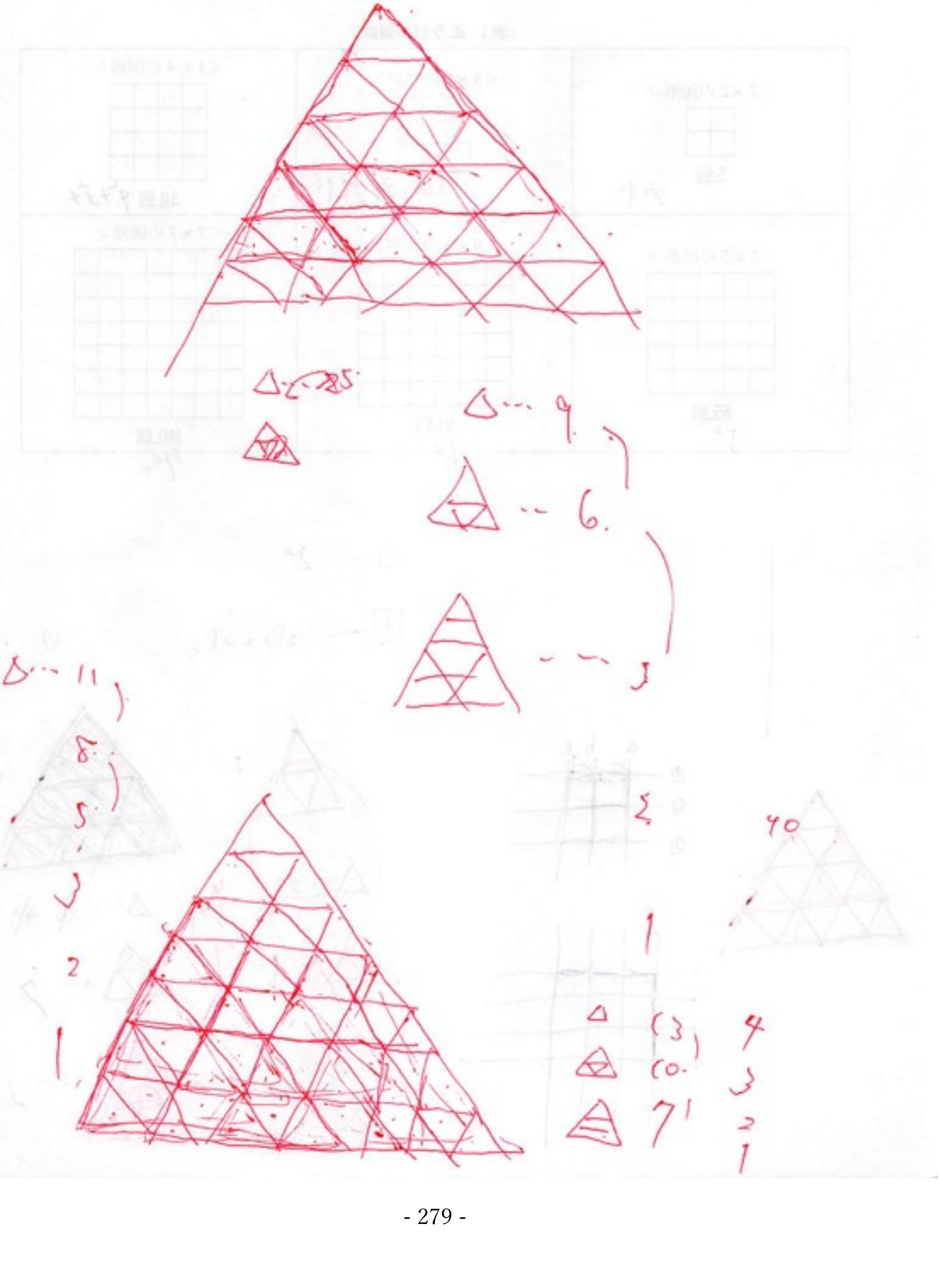
n^2

(2) ケンジくんとトムさんは，チェス盤と将棋盤の他にも，同じような図形の正方形の個数を数えることにしました。その結果は，次の表1のようになりました。ケンジくんはこの結果を見て，全ての場合で平方数（自然数を二乗した数）の和になっていることに気づきました。このことを確認してください。

表1　正方形の個数

＜2×2の図形＞  5個 2^2+1^2	＜3×3の図形＞  14個 $3^2+2^2+1^2$	＜4×4の図形＞  30個 4^2+3^2+
＜5×5の図形＞  55個 5^2	＜6×6の図形＞  91個 6^2	＜7×7の図形＞  140個 7^2+




25
9
6
3
11
8
5
3
2
1
40
13
10
7
4
3
2
1

2 トムさんはケンジくんに将棋を教わっています。トムさんは，チェス盤（図1）と将棋盤（図2）を上から見て比べて，「将棋盤はチェス盤よりも，正方形が 81 個多いね。」と言いました。

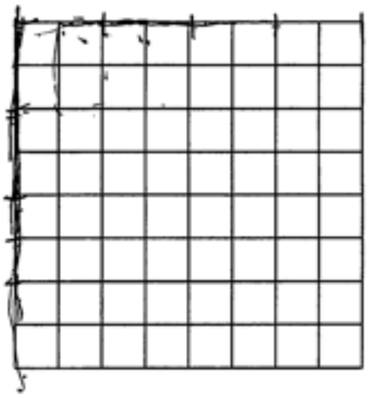


図1 チェス盤

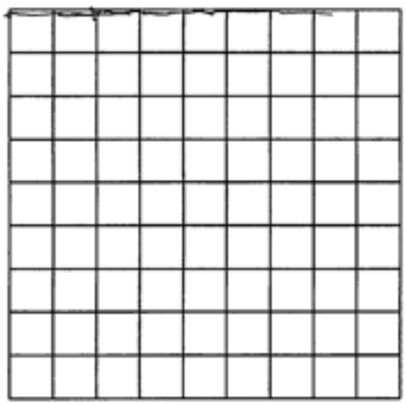


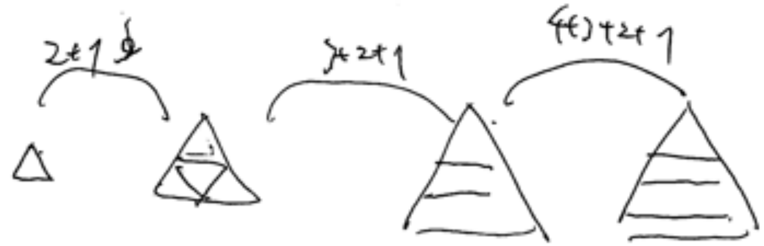
図2 将棋盤

(1) ケンジくんは，将棋盤の正方形の個数を 9 × 9 = 81 個，チェス盤の正方形の個数を 8 × 8 = 64 個と数えたため，トムさんがどのように正方形を数えたのかわかりませんでした。
トムさんは正方形の個数をどのように数えたのでしょうか。<u>実際に数えて</u>確認してください。

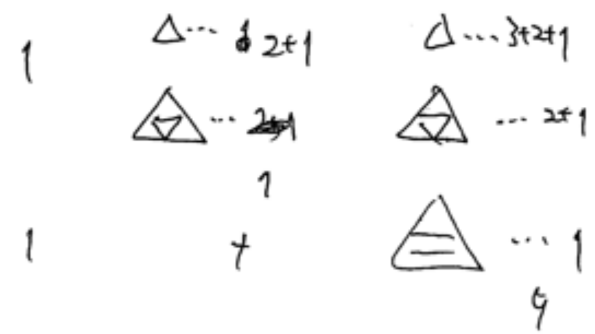
7

□…64　8²
田…49　7≤6×.
…6×6　6²　64 49 36 25 16 9 4 1
…5×5
4×4
3×3
2×2
1×1　9²

□… 9×9 = 81
… ~~8×8~~ -8²
… 7×7
1×9.



5段 6 7 8 ...



1 3 3 6 9 13 18

$(n+1)+n+(n-1)\ldots\ldots+1$

n $n+1$

1 5 14 30 55

1^2 $\quad 2^2+1^2$ $\quad 3^2+2^2+1^2$ $\quad 4^2+3^2+2^2+1^2$ $\quad 5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$

2^2 $\quad 3^2$ $\quad 4^2$ $\quad 5^2$

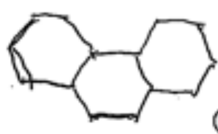
1
2 3
4 5 6
7 8 9 10

← 1

1段 ⋯1

5

2段 ⋯ 4×1



12.

⋯1

5段 7+4×1

11

5

1

4. 10+7+4+1

5.

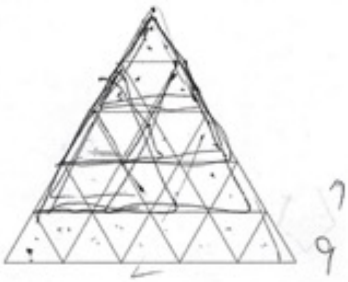
1

1

(3) ケンジくんとトムさんは，正方形以外でできる図形にも何か面白い性質がないか調べることにしました。

ケンジくんは正三角形でできる図3のような図形の正三角形の個数ついて調べましたが，特に性質を見つけることができませんでした。一方，トムさんはケンジくんと同じ図形について，上向きの正三角形(▽ではなく△)の個数について考えることで，この図形の性質に気づきました。

(2)のように，正三角形の個数が少ない場合から順々に調べて，性質を見つけてください。



1+2+3+4

図3 正三角形でできる図形

5+4+3+2+1

9+7+5+3+1

△ … ~~3~~ 15 ~~9+8+7+6+5+4+3+2+1~~

… 10 4+3+2+1

… 6 3+2+1

… 3 2+1

… 1 1

3 サトシくんとモモコさんは，図4で示された「ピンの入れ替え」ゲームで遊んでいます。

白黒2色のピン 10 個が，図のように，直線上に並んだ 11 個の穴の上にあります。この黒いピンと白いピンを入れ替えたいのですが，次のルールに従わなければいけません。

＜ルール＞ピンが移動できるのは，次のいずれかである。

- 隣り合う空きの穴
- 1個のピンを跳び越えた空きの穴

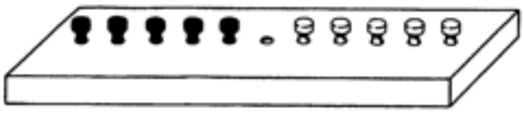


図4 「ピンの入れ替え」ゲーム

(1) 2色のピンは入れ替えられるでしょうか。適当な図をかきながら考えてください。その際，用意してある道具を用いて考えても構いません。

b b O W W

~~b O W~~

3 サトシくんとモモコさんは，図4で示された「ピンの入れ替え」ゲームで遊んでいます。

白黒2色のピン 10 個が，図のように，直線上に並んだ 11 個の穴の上にあります。この黒いピンと白いピンを入れ替えたいのですが，次のルールに従わなければいけません。

<ルール>ピンが移動できるのは，次のいずれかである。

- 隣り合う空きの穴
- 1個のピンを跳び越えた空きの穴

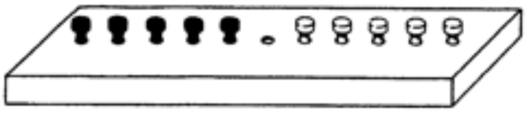


図4 「ピンの入れ替え」ゲーム

(1) 2色のピンは入れ替えられるでしょうか。適当な図をかきながら考えてください。その際，用意してある道具を用いて考えても構いません。

4 3 4 3 4　3 4 3 4 3

B b b b b O W W W W W

b b b b O b W W W W W

b b b b W b O W W W W

b b b b W b W ~~WO~~ OW W W

b b b b W O W b W W W

b b b O W b W b W W W

b b O b W b W b W W W

b b W b O b W b W W W

b b W b W b O b W W W

b b W b W b W b O W W

b b W b W b W b W O W

b b W b W b W O W b W

b b W b W O W b W b W

b b W O W b W b W b W

① b O W b W b W b W b W

$2^2 \times 2$

36 回

~~$(2+3)^2$~~

$2^2 \times 3^2$

14

2-2 3-3 5-5

8回 15回 36回

w\b	2	3	4	5	1
2	8				
3		15			
4			24		
5				~~35~~	
1					3

x^2

$1 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{5} 9$

$3 \xrightarrow{5} 8 \xrightarrow{7} 15 \xrightarrow{9} 24 \xrightarrow{11} 35$

(2 above each step)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$a_x = x \times (x+2)$

$= x^2 + 2x$

$\frac{n-1}{2}$

$\overbrace{1+2+3+4+\cdots+n-1}$ $+ n + n + n +$ $n-1+\cdots+2+1$

$n\left(\frac{n-1}{2}\right)$ $3n$ $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$n^2 - n + 3n = n^2 + 2n$

解答用紙　問題番号________　用紙番号____

①

O b W b W b W b W b W
W b O b W b W b W b W
W b W b O b W b W b W
W b W b W b O b W b W
W b W b W b W b O b W
W b W b W b W b W b O
W b W b W b W b W O b
W b W b W b W O W b b
W b W b W O W b W b b
W b W ~~b~~O W b W b W b b
W O W b W b W b W b b
W W O b W b W b W b b
W W W b O b W b W b b
W W W b W b O b W b b
W W W b W b W b O b b
W W W b W b W O b b b
W W W b W O W b b b b
W W W O W b W b b b b
W W W W O b W b b b b
W W W W W b O b b b b
W W W W W O b b b b b

20

15

左1　1
右2　2
右1
左2　3
左2
左1
右2
右2　4
右2
右1
左2
左2
左2　5
左2
左1
右2
右2
右2　5
右2
右2

解答用紙　問題番号＿＿＿＿　用紙番号＿＿

n 奇数

左1 } 1
右2
右1 } 2
左2
左2
左1 } 3
右2
右2
右2
右1 } 4
⋮
右1
右2
右2
右2 } 4
左1
左2
左2 } 3
右1
右2 } 2
左1 } 1

$a=1, b=2$

$3a+4a-2b$ $\boxed{7a-2b}$

$3+4-4$ 3

n が偶数

右2
右2
⋮
右2
右1 } n−1
左2
⋮
左2
左1 } n
左2
⋮
右2 } n
左1
左2
⋮
左2 } n
右1
右2
⋮
右2 } n−1

左2
⋮
左2 } n

$a+b=3$

$a+b+2(a+b)$

$3(a+b)$

$3+6$

左 1
左 2
左 2
左 2
左 2 } 5
右1
右2
右 2
右 2
右 2 } 4
左 1
左 2
左 2 } 3
右 1
右 2 } 2
左 1 } 1

$\frac{4}{3}+1 \cdots$

$\frac{4}{3}a+\frac{b}{2}-\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$

$=a$

(2) サトシくんはうまく入れ替えることができず，穴とピンがもっと少ない場合で試してみることにしました。サトシくんと同じように，ピンが各色1個ずつの場合，2個ずつの場合，3個ずつの場合について考えて下さい。

8手 15手

b b b O W W W 1

b b O b W W W b 2

b b W b O W W W 3

b b W b W O W W 3

b b W O W b W b 3

b O W b W b W b 2

O b W b W b W b 1

W b O b W b W W

W b W b O b W W

W b W b W b O W

W b W b W O b b

W b W O W b b b

W O W b W b b b

W W O b W b b W

W W W b O b b W

W W W O b b b b

5 左1 } 1

右2 } 2 9

右1

3 左2 左2 } 2 6

右1 右2 } 2

左1 } 1 14

10

2 2 2 2 2 2

1 1 1 1 1 1

1 2 1 2 1 2

1 1 1

1 1 1

(2) サトシくんはうまく入れ替えることができず，穴とピンがもっと少ない場合で試してみることにしました。サトシくんと同じように，ピンが各色1個ずつの場合，2個ずつの場合，3個ずつの場合について考えて下さい。

b\w	1	2	3	4	5
1	3	5	7	9	
2	5	8	1~~10~~		
3	7	~~10~~11	15	19	~~24~~
4	9	14	19	24	29
5	11	17	23	29	35

2 −2
↓ } 3   1−1
2−1

4 −4
} 5   2−1
5 −4

偶のEa2の個数 n

$$\underbrace{2\ \ 2\ 2\ \ 2\ \ \ 2 \cdots\cdots 2\ \ \ 2\ 2.}_{2n}$$

奇数 奇数の前に $\frac{n-1}{2}$ たす

偶数 すべての前に ~~[illegible]~~ たす

$\frac{n-2}{2}$ ~~$\frac{n}{2}$ たす~~