メネラウスの定理・チェバの定理の指導

― 数学的活動を通した自立的・協働的探究 ―

Tips to Teach Menelaus' Theorem and Ceva's Theorem
-To Light the Way to Help the Student Be Autonomous Learner by Collaborative Inquiry-Based Learning Through Mathematical Activities-

数学科　山田 研也

１　はじめに

国際数学・理科教育動向調査 TIMSS2019 によると，「算数・数学の勉強は楽しい」という質問への回答は，小学校で 77%，中学校で 56%となっている。いずれもこの 15 年のスパンでみると上昇傾向を示しているが，国際平均（小学校 84%，中学校 70%）と比べると下回り，特に中学校段階での落ち込みが目立つ。

図形領域について考えてみる。小学校の算数においては，帰納的な考えを働かせ，ものごとを推論する。三角形の内角の和を調べるにしても「A さんの三角形は 180°，B さんも 180°…みんな 180°だね」ということで結論づける。これはわかりやすいし，楽しいだろう。

一方，中学校の数学となると，「平行線を引き，錯角は等しいので…」といった証明（演繹的な推論）が入ってくる。「内角の和が 180°であることはもう確かめたのに…」と考える生徒に，証明の必要性を理解させることは実はなかなか難しい。ここで数学嫌いとなる生徒は少なくない。

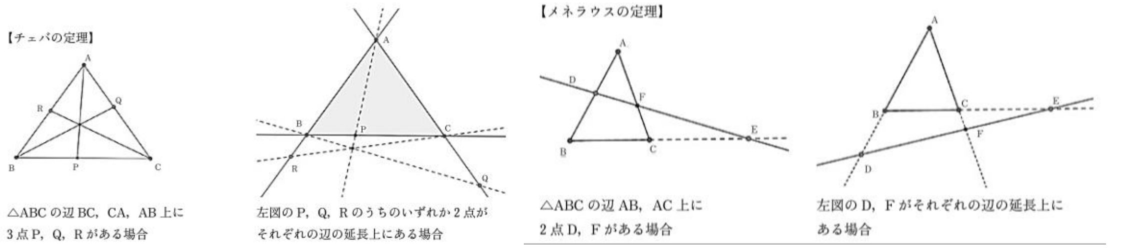
さて，本稿であるが，数学Ａ「図形の性質」の中の，チェバの定理・メネラウスの定理について扱った授業実践について報告する。生徒たちが，帰納的な推論を手がかりとし，事象を論理的・統合的・発展的に考察しながら，自立的・協働的に定理を獲得することを目標とした授業である。目標が達せられるならば，生徒にとっては小学校時代の学びの「楽しさ」を取り戻すものになるだろう。最後に，その成果を検証する。

２　チェバの定理・メネラウスの定理の扱い

２.１　学習指導要領での扱い

平成 24 年度より施行された現行学習指導要領では，その解説において「中学校での学習内容を基にして直接扱える程度の三角形の性質として，…チェバの定理やメネラウスの定理を扱うことも考えられる」という記載がはじめて盛り込まれた。以後，ほぼすべての教科書においてこの２つの定理はとりあげられ，教育課程に数学Ａを設置している多くの学校において扱われることとなった。

来年度より施行される新学習指導要領ではさらに踏み込んで，「指導に当たっては，それぞれの定理の逆が成り立つかどうかを考えたり，次の図のように条件を見直し定理を拡張したりするなど，統合的・発展的に考察することが大切である」とされた。



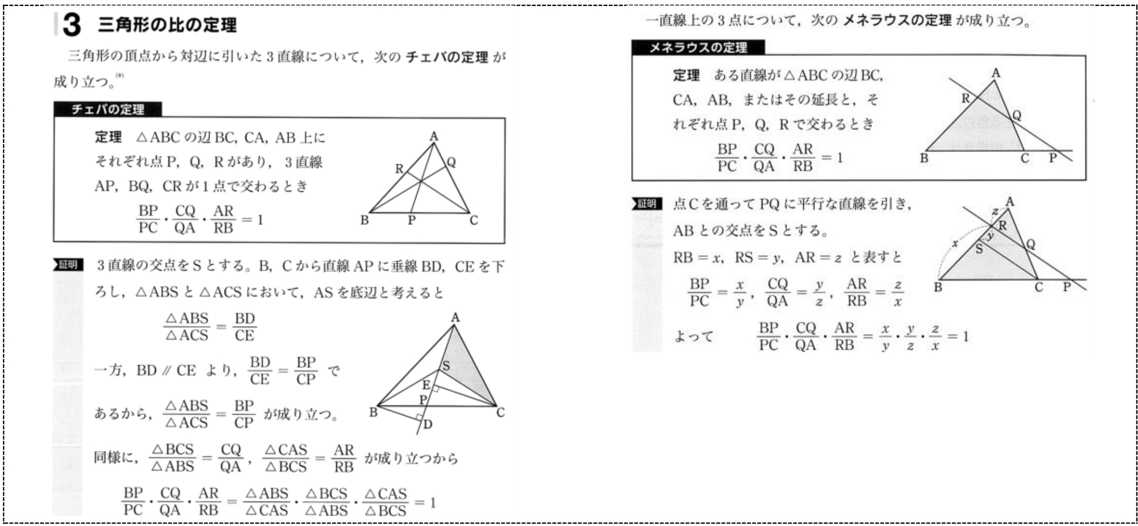
（高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編より）

２.２　学校現場・教科書での取り扱い

では，実際に現場でどのように指導されているかということであるが，多くの学校で以下のような流れとなっているようである。[1]

①定理の紹介 → ②定理の証明 → ③定理の活用法 → ④問題演習

「チェバの定理・メネラウスの定理（以下，「両定理」）の主張するところはやや難解であるし，ましてや証明を独力で行わせることは困難である」という考えのもとか，①②については教科書の記載に沿って教員主導でさらっと説明し，受験対策を視野に入れてか，③④に力点をおいた指導がされているのが多くの学校での現状のようである。



3　三角形の比の定理

三角形の頂点から対辺に引いた 3 直線について，次の **チェバの定理** が成り立つ。

チェバの定理

定理　△ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

証明　3 直線の交点を S とする。B，C から直線 AP に垂線 BD，CE を下ろし，△ABS と △ACS において，AS を底辺と考えると

$$\frac{\triangle ABS}{\triangle ACS}=\frac{BD}{CE}$$

一方，BD // CE より，$\frac{BD}{CE}=\frac{BP}{CP}$ であるから，$\frac{\triangle ABS}{\triangle ACS}=\frac{BP}{CP}$ が成り立つ。

同様に，$\frac{\triangle BCS}{\triangle ABS}=\frac{CQ}{QA}$，$\frac{\triangle CAS}{\triangle BCS}=\frac{AR}{RB}$ が成り立つから

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle ABS}{\triangle CAS}\cdot\frac{\triangle BCS}{\triangle ABS}\cdot\frac{\triangle CAS}{\triangle BCS}=1$$

一直線上の 3 点について，次の **メネラウスの定理** が成り立つ。

メネラウスの定理

定理　ある直線が △ABC の辺 BC, CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

証明　点 C を通って PQ に平行な直線を引き，AB との交点を S とする。RB = x，RS = y，AR = z と表すと

$$\frac{BP}{PC}=\frac{x}{y},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{y}{z},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{z}{x}$$

よって　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$

（東京書籍　Advanced　数学Ａより）

教科書での両定理の証明はかたや面積比，かたや線分比が利用され，２つの定理の連関は明らかにされない（新課程の教科書でも同様）。扱う順序についても，多くの教科書が「チェバの定理」→「メネラウスの定理」の順であるが，それもいかがなものか。そもそも前者は後者よりたちどころに導かれるものであり，その意味でもより基本的な定理である後者を先に学ぶのが自然であると筆者は考えている（詳しくは後述）。

新学習指導要領のいうところの「拡張」にあたる，外分点が内分点より多い場合については，両定理いずれも現課程の教科書での取り扱いは皆無。新課程では記載が見られるようにはなったが，あくまでも特殊な場合という位置づけで，「拡張」した場合を統合的・発展的に捉えるような授業が全国的に展開されることは，残念ながらあまり期待できない。

[1] 筆者が非常勤講師を勤める筑波大学の授業「数学科指導法」にて，受講する大学生（毎年約 30 名×5 カ年）に聞き取り調査を行った結果による。

２.３　高校入学前の段階での取り扱い

両定理は，いわゆる「受験数学」のテクニックとして，高校受験や中学受験のために，塾等で教えられてきている。今回の学習の前に，両定理を学ぶ機会があったかどうかを調査し，まとめたのが**表１**である。[2]

表１

入学段階	学習済	未学習	計
附小から入学	21	9	30
附中から入学	14	8	22
附高から入学	24	2	26
計	59	19	78

また，どの段階で学習したか，何で学習したかをまとめたのが**表２**である。

表２

入学段階	中学校の授業	塾等(高校時)	塾等(中学時)	塾等(小学時)	問題集参考書	その他	計
附小から入学	4	4	17	4	2	9	30
附中から入学	0	2	7	3	5	8	22
附高から入学	9	1	20	1	7	2	26
計	13	7	44	8	14	19	78

４分の３強の 59 名の生徒が学習済みであり，１割程度は小学校時に学習している。中学入試の問題で，両定理を知っていると簡単に解けるような問題が時折見受けられる。（まったくもって好ましいこととは言えないが...）

学習済みと回答した生徒には，さらに３つの質問をした。結果が**表３～５**である。

表３

定理の証明	メネラウス	チェバ
学ぶ機会があり，その内容を覚えていた。	11	11
学ぶ機会はあったが，内容はあやふやであった。	30	30
証明を学ぶ機会がなかった。	18	18
計	59	59

表４

定理の活用法	メネラウス	チェバ
定理を活用し，線分比を求める方法を覚えていた。	37	26
定理は覚えていたが，活用方法についてはあやふやであった。	16	20
定理の内容自体を忘れていた。	6	13
計	59	59

表５

外分点が多い場合	メネラウス	チェバ
学ぶ機会があった。	16	10
学ぶ機会はなかった。	43	49
計	59	59

[2] 本校は，附属小学校から入学して内部進学で附属高校まで進学しているのが全体の約３分の１，中学受験をして附属中学に入学して内部進学しているのが約３分の１，残りが高校受験をして入学してきているという構成になっている。

両定理とも，既習（と回答した）生徒の約３割は証明を学んでいなくて，学んでいたとしても多くはその内容があやふやであった。それに比して，定理の活用法については約半数が覚えていた。つまり，原理はよくわからないが，なんとなく使うことはできる。そういった生徒が多いというのが高校における学習前の状況であるといえる。

「拡張」した（外分点が多い）場合については，想定以上に多くの生徒が「学ぶ機会があった」と回答したが，授業においてそのような場合を処理できていた生徒はほとんどいなかったので，学んでいたとしてもさらっとふれるくらいであったのだろうと推定される。

３　一連の授業で目標とすること

今回報告する一連の授業は，現行学習指導要領において「課題学習」が数学Ａに位置づけられて以来，少しずつアレンジしながら10年近く行ってきているものである。その際，学習指導要領解説にあった下記「数学的活動」に関する記述を強く意識して実施してきた。このままに実施しようとしてきたといっても過言ではない。

> （課題学習の）実施に当たっては，一方的に知識を与えるのではなく，数学的活動を一層重視することが大切である。例えば，課題を理解する，結果を予想する，解決の方向を構想する，解決する，解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり，更に課題を発展させたりする，という一連の過程に沿って，必要な場面で適切な指導を工夫するとともに，適宜自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を取り入れるよう配慮する。

（高等学校学習指導要領（平成21年告示）解説 数学編より）

数学的活動については引き続き重視しつつ，今回はそれに加えて，特に新学習指導要領「数学科の目標」(2)にある３つの力を育てることを目標とした。

> **高等学校学習指導要領　数学科の目標**
> 数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。
> (1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。
> (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。
> (3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

（高等学校学習指導要領（平成30年告示）より）　下線は筆者による

(1)(2)(3)は，それぞれ「育成を目指す資質・能力の柱」の中の「知識及び技能」「思考力，判断力，表現力等」「学びに向かう力，人間性等」に関わるものである。(1)や(3)も当然重要ではあるのだが，特に今回の課題で育成が期待できる力として，(2)にあげられた３つの力をとりあげることとした。

４　授業実践

４．１　概要

両定理についての課題学習を，１学年２つのクラス（１クラス 40〜41 名）において，それぞれ４時間実施した。単元「図形の性質」の３〜６時間目に相当する。（１，２時間目は内分，外分および角の二等分線の性質について）

既習単元「集合と論理」「場合の数と確率」において，多くの数やその並びから規則性を見つけ出し，帰納的に推論したことを証明するといった活動を行ってきている。その中で，一見成り立ちそうだが，実は反例があるような事柄にもふれている（詳しくは後述）。

４．２　三角形の各辺の分点とその関係①

以下，実線枠内は授業プリントからの抜粋である。

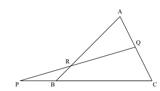
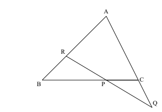
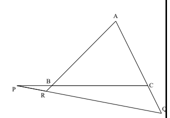
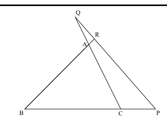
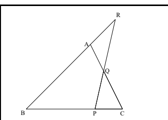
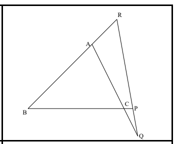
課題 1a　下線部に適当な数値を入れ，括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，それに応じた数値を求めて□に記入し，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。

△ABC において，辺 AB を＿＿：＿＿に ①(内分，外分)する点を R，辺 AC を＿＿：＿＿に ②(内分，外分)する点を Q とする。直線 QR と辺 BC(またはその延長)の交点を P とするとき，P は辺 BC を□：□に ③(内分，外分)する。

《Step 1》４人１組，10 班に分かれてのグループ学習を行う。班毎に，数値と内分，外分の組み合わせを決めさせて，１人１台持っている Chromebook から，各班の決めた数値等を全体で共有した Google スプレッドシートに入力させる。入力結果をスクリーンに投影する。

班	辺ABを			辺ACを			辺BCを			方針・補助線等
1班	2	3	内分	1	3	外分	1	2	内分	Aを通りQPに平行な補助線を引く
2班	2	3	内分	4	5	内分	6	5	外分	面積比について考える
3班	1	2	外分	2	3	内分	4	3	内分	Aを通りPRに平行な補助線を引く
4班	2	3	外分	3	1	外分	9	2	外分	点Aを通り、辺BCに平行な直線を引く
5班	1	3	外分	2	3	外分	2	1	外分	点Rを通り、辺ACに平行な直線を引く
6班	2	1	外分	2	3	外分	1	3	外分	Aを通り辺PCに平行な直線を引く
7班	2	5	内分	7	11	外分	35	22	内分	点Cを通り、線分PQに平行な補助線を引く
8班	1	3	外分	3	2	内分	9	2	内分	Bを通りRQに平行な補助線を引く
9班	1	2	内分	3	1	外分	6	1	内分	面積比を用いる
10班	1	2	外分	3	1	外分	6	1	外分	AからRQに平行な補助線を引く

内分，外分の組み合わせは，大きく６通りある。[3][4]

図						
R	内分	内分	外分(B 側)	外分(A 側)	外分(A 側)	外分(A 側)
Q	内分	外分(C 側)	外分(C 側)	外分(A 側)	内分	外分(C 側)

[3] どのような場合を考えなければならないかを議論させ，６通りをすべて網羅するように調整させたこともかつてはあったが，時間が足りなくなるのでここ数年は行っていない。偏りが出るのを覚悟で，自由に選ばせている。
[4] 数値のとりかたによっては，QR // BC となってしまう場合があるが，それも指摘させる。

組み合わせが決まったら，まず５分間は個人で取り組ませる。その間に，スプレッドシートで同じ組み合わせのものがわかるように，授業者の方で色をつける。

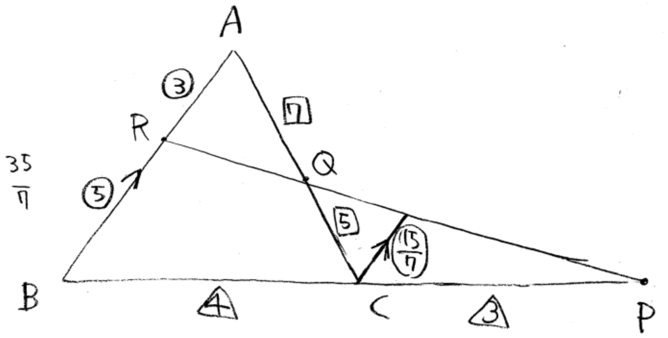
《Step 2》グループ内で交流させる。いろいろな方針（異なる補助線，面積比で処理…）が出てくるが，互いに教え合って共有するよう促す。以下，生徒のプリントを適宜示す。

7.1.2　三角形の各辺の分点とその関係

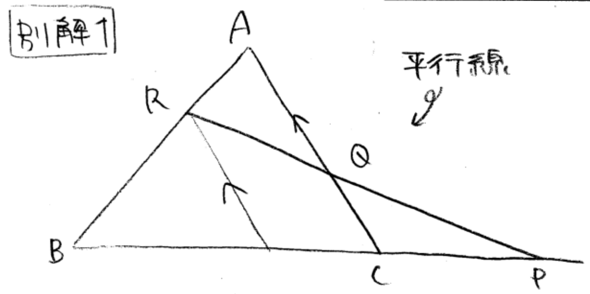
課題 1a　下線部に適当な数値を入れ，括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，それに応じた数値を求めて□に記入し，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。

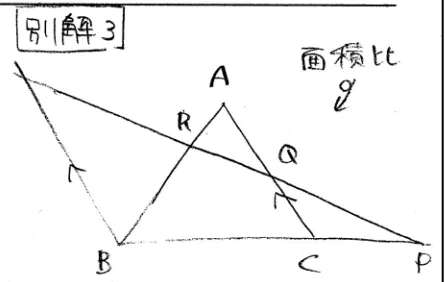
△ABC において，辺 AB を 3 : 5 に ①(内分, 外分)する点を R，辺 AC を 7 : 5 に ②(内分, 外分)する点を Q とする。直線 QR と辺 BC(またはその延長)の交点を P とするとき，P は辺 BC を $\boxed{7}$: $\boxed{3}$ に ③(内分, 外分)する。

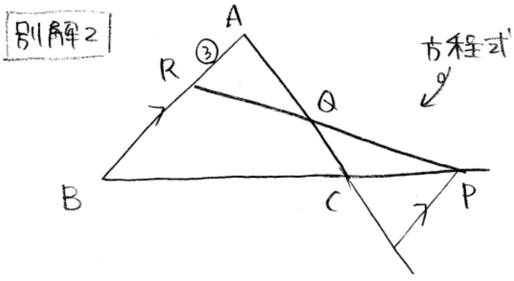
（自分の考え）　方針・補助線等：点Cを通る辺ABの平行線を引く

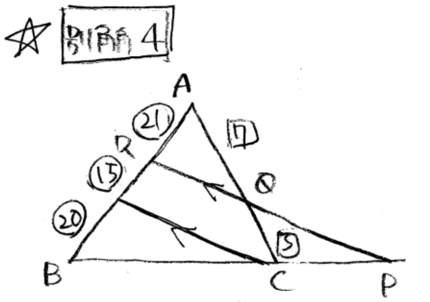


（班の考え）　方針・補助線等：同上









□にあてはまる数値が求められたら，班の中であげられた方針の中で最も多くの生徒の理解が得られたものを一つ選び，数値とともにスプレッドシートに記入する。

内分，外分の組み合わせによって，なかなか求めることができない班も現れる。その際は，まずスプレッドシートで同色（同じ系統の組み合わせ）の班に助けを求めるよう指示

する。それでも難しい場合には，スプレッドシートであげられている他の班の方針を参考にさせる。例えば，「C を通り QR に平行な補助線を引く」という方針は，どの班の図であっても手がかりとなる。できている班には他の班へのヘルプを促し，交流を進めさせる。

《Step 3》 Step 1，2 を，**課題 1b** として再度繰り返す。その際は，**課題 1a** とは異なる内分，外分の組み合わせで取り組ませる。

《Step 4》 スクリーンに投影された**課題 1a**，**課題 1b** における 10 班の数値を互いに見比べ，何か気づくことがないかグループ討議させる。

課題 1c　自分の班，他の班の結果を見て，気づいたことをまとめよ。

☞　数値について：

☞　内分，外分の組み合わせについて：

それぞれが好き勝手に数値を入れているので，一見規則性はなさそうであるが，よくよく見比べると全員に共通しているある性質が見つかる(発見したグループからはもれなく歓声があがる)。往々にして，その性質が成り立たないような班が一つ二つ現れる。そのようなときは，その班の図について全員で検証する時間を設ける。

《Step 5》 私から「すごい性質だね。さて，ここで私はなんて言うと思う？」と投げかける。年度の後半に行うこの授業ともなれば，「どうせまた『どんな数値，組み合わせでも成り立つのか？』とか言うのでしょう」という声が必ず上がる。「その通り。常に成り立つの？」「多分成り立つけど，まだわからない…」「成り立つとしたら，どう確かめる？」「文字でおいてやってみる」「よしやってみよう！」年度の前半から何度も繰り返したやりとりが，ここでもされることとなる。

４.３　メネラウスの定理の導出

課題 1d　括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，$\boxed{}$ にあてはまる文字を求め，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。さらに，それを証明せよ。

△ABC において，辺 AB を $s:t$ に ①(内分，外分)する点を R，辺 AC を $u:v$ に ②(内分，外分)する点を Q とする。QR // BC でないとき，直線 QR と辺 BC(またはその延長)の交点を P とすると，P は辺 BC を $\boxed{}$: $\boxed{}$ に ③(内分，外分)する。

《Step 6》 $\boxed{}$ にあてはまるのは，おそらくは tu と sv であろうことを確認し，その上で班毎に検証をさせる。内分，外分の組み合わせについては，２通り取り組ませる。証明といっても，Step 1，2 と同様の作業なので，ほぼ全員が自力で示すことができる。すると，

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=tu:sv \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{t}{s}\cdot\frac{u}{v} \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}} \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

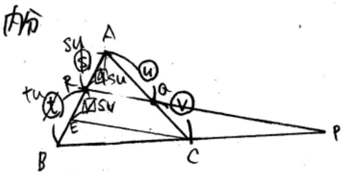
知らず知らずのうちに，「メネラウスの定理」の証明が完成していることになるわけである。当然，「拡張」とされているパターンもすべて網羅されていることとなる。

課題 1d　括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，$\boxed{}$にあてはまる文字を求め，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。さらに，それを証明せよ。

△ABC において，辺 AB を $\boldsymbol{s}:\boldsymbol{t}$ に ①(内分，外分)する点を R，辺 AC を $\boldsymbol{u}:\boldsymbol{v}$ に ②(内分，外分)する点を Q とする。QR//BC でないとき，直線 QR と辺 BC(またはその延長)の交点を P とすると，P は辺 BC を $\boxed{tu}$: $\boxed{sv}$ に ③(内分，外分)する。

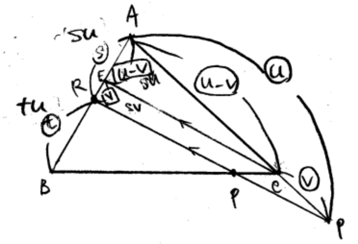
※ 複数の内分・外分の組み合わせで考えてみよ。

(i) 内分/内分



Cから PRとの平行線を引き，ABとの交点をEとする
平行線の性質より AR:RE = u:v
左図より BR:RE = tu:sv (= BP:CP)
よってPは辺BCをtu:svに外分する。

(ii) 内分 / uが大きい外分

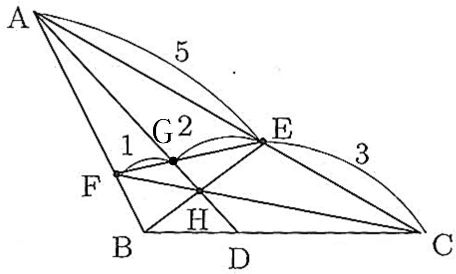


Cから PRとの平行線を引き ABとの交点をEとする。
平行線の性質より AR:RE = u:v
左図より BR:RE = tu:sv (= BP:CP)
よって Pは辺BCをtu:svに外分する

４.４　メネラウスの定理の活用

メネラウスが 2000 年近く前に活躍した人であることや，月のクレーターに名を残していること等を紹介しながら，獲得した事柄を「メネラウスの定理」としてまとめる。

問 174　下の図において，AG : GH を求めよ。



メネラウスの定理の活用を指導する際は，あくまでも「三角形の各辺の分点とその関係」に関する定理であることを強く意識させる。[5]

　　直線 AC，EF に関する情報が与えられ，直線 AH に関する情報を知りたい
→　よって，それら 3 直線によって構成される△AEG に注目
→　辺 AE を外分する点 C，辺 EG を外分する点 F，辺 GA を外分する点 H が共線
→　メネラウスの定理を適用　　といった具合である。

[5] 小中学生対象の塾においては「メネラウスの形」「キツネの形」といった，狐の顔のような形で適用される定理と教えられているようである。

４．５　三角形の各辺の分点とその関係②

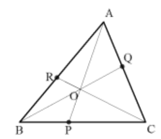
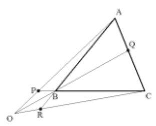
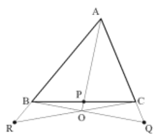
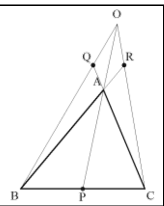
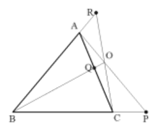
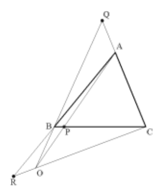
メネラウスの定理を活用して線分比を求める演習を十分に行った後，次の**課題 2a** に取り組ませる。

課題 2a　下線部に適当な数値を入れ，括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，それに応じた数値を求めて $\boxed{\quad}$ に記入し，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。

△ABC において，辺 AB を＿＿：＿＿に ①(内分，外分)する点を R，辺 AC を＿＿：＿＿に ②(内分，外分)する点を Q とする。直線 CR と直線 BQ の交点を O，直線 AO と辺 BC(またはその延長)の交点を P とするとき，P は辺 BC を $\boxed{\quad}$：$\boxed{\quad}$ に③(内分，外分)する。

《Step 7》 Step 1 と同様，10 班に分かれてのグループ学習を行う。班毎に，数値と内分，外分の組み合わせを決めさせて， Chromebook から，各班の決めた数値等を全体で共有した Google スプレッドシートに入力させる。入力結果をスクリーンに投影する。

内分，外分の組み合わせは，やはり６通りある。[6]

図						
R	内分	外分(B 側)	外分(B 側)	外分(A 側)	外分(A 側)	外分(A 側)
Q	内分	内分	外分(C 側)	外分(A 側)	内分	外分(B 側)

組み合わせが決まったら，まず５分間は個人で取り組ませる。その間に，スプレッドシートで同じ組み合わせのものがわかるように，授業者の方で色をつける。

《Step 8》グループ内で交流させる。チェバの定理の証明が既習で，面積比を活用して線分比を出すものも若干名現れる。しかし，内分，内分のパターン（上記左端）以外はその方法だとお手上げとなってしまうケースが多い。[7]

メネラウスの定理をしっかりと学んだ後に取り組む**課題 2a** では，大多数はまず BO : OQ (または CO : OR) をメネラウスの定理を用いて求め，その後にさらにもう一度メネラウスの定理を利用して BP : PC を求めようとする。

これもまた６つのパターンすべてに共通して適用できる方策[8]なので，グループ間で互いに交流をさせて，できている者には指導をさせる。

《Step 9》 Step 8，9 を，**課題 2b** として再度繰り返す。その際は，**課題 2a** とは異なる内分，外分の組み合わせで取り組ませる。

---

[6] 数値のとりかたによっては，CR // BQ となってしまう場合があるが，それも指摘させる。

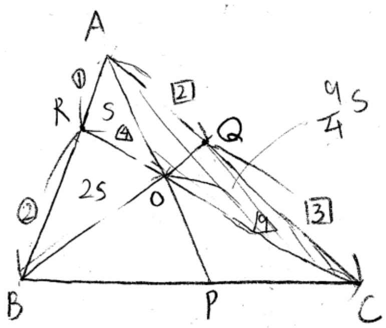
[7] 実はどの図であっても，内分，内分のパターンにおける面積比の証明がそのまま適用できるのであるが，生徒はなかなかそれには気づかない。

[8] しかも，途中経過における立式もまったく同じとなる。

課題 2a　下線部に適当な数値を入れ，括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，それに応じた数値を求めて□に記入し，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。

△ABC において，辺 AB を 1 : 2 に ①(内分，外分)する点を R，辺 AC を 2 : 3 に ②(内分，外分)する点を Q とする。直線 CR と直線 BQ の交点を O，直線 AO と辺 BC(またはその延長)の交点を P とするとき，P は辺 BC を $\boxed{4}$: $\boxed{3}$ に ③(内分，外分)する。

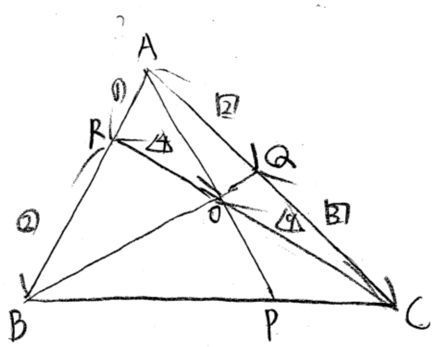
（自分の考え）　方針・補助線等：面積比



$3 : \frac{9}{4} = 12 : 9$

$= 4 : 3$

（班の考え）　方針・補助線等：メネラウス２回



$\frac{CQ}{AQ} \times \frac{AB}{BR} \times \frac{RO}{OC} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{RO}{OC} = 1$

$RO : OC = 4 : 9$

$\frac{CP}{PB} \times \frac{BA}{AR} \times \frac{RO}{OC} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{CP}{PB} \times \frac{\cancel{3}}{1} \times \frac{4}{\cancel{9}_{3}} = 1$

《Step 10》 スクリーンに投影された**課題 2a**，**課題 2b** における 10 班の数値を互いに見比べ，何か気づくことがないかグループ討議させる。実際は，班で討議するまでもなく，全員が気づくところである。

課題 2c　自分の班，他の班の結果を見て，気づいたことをまとめよ。

☞　数値について：

☞　内分，外分の組み合わせについて：

再度，一般化に向かう「儀式（やりとり）」を生徒たちとすることとなる。

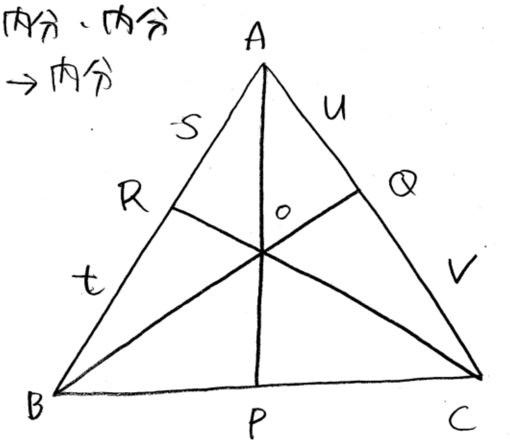
4.6　チェバの定理の導出

課題 2d　括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，$\square$ にあてはまる文字を求め，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。さらに，それを証明せよ。

△ABC において，辺 AB を $\boldsymbol{s}:\boldsymbol{t}$ に ①(内分, 外分)する点を R，辺 AC を $\boldsymbol{u}:\boldsymbol{v}$ に ②(内分, 外分)する点を Q とする。CR//BQ でないとき，直線 CR と直線 BQ の交点を O，直線 AO と辺 BC(またはその延長)の交点を P とすると，P は辺 BC を $\boxed{tu}$: $\boxed{sv}$ に ③(内分, 外分)する。

※ 複数の内分・外分の組み合わせで考えてみよ。

内分・内分
→内分



△ACRについて
メネラウスの定理より

$$\frac{AB}{BR}\times\frac{RO}{OC}\times\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{s+t}{t}\times\frac{RO}{OC}\times\frac{v}{u}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{RO}{OC}=\frac{tu}{sv+tv}$$

△BCRについて
メネラウスの定理より

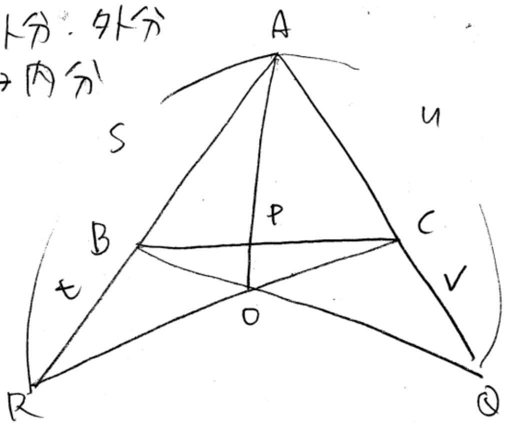
$$\frac{BA}{AR}\times\frac{RO}{OC}\times\frac{CP}{PB}=1$$

$$\frac{s+t}{s}\times\frac{tu}{v(s+t)}\times\frac{CP}{PB}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{CP}{PB}=\frac{sv(s+t)}{tu(s+t)}=\frac{sv}{tu}$$

よって BP : PC = tu : sv

外分・外分
→内分



△ACRについて
メネラウスの定理より

$$\frac{t}{s-t}\times\frac{u}{v}\times\frac{CO}{OR}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{CO}{OR}=\frac{v(s-t)}{tu}$$

△BCRについて
メネラウスの定理より

$$\frac{v(s-t)}{tu}\times\frac{s}{s-t}\times\frac{BP}{PC}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{BP}{PC}=\frac{tu(s-t)}{sv(s-t)}=\frac{tu}{sv}$$

よって BP : PC = tu : sv

課題 2d　括弧①②から内分，外分のいずれかを選べ。また，$\boxed{}$にあてはまる文字を求め，括弧③から内分，外分のいずれか適する方を選べ。さらに，それを証明せよ。

△ABC において，辺 AB を $s:t$ に ①(内分，外分)する点を R，辺 AC を $u:v$ に ②(内分，外分)する点を Q とする。CR∥BQ でないとき，直線 CR と直線 BQ の交点を O，直線 AO と辺 BC(またはその延長)の交点を P とすると，P は辺 BC を $\boxed{}:\boxed{}$ に ③(内分，外分)する。

《Step 10》$\boxed{}$にあてはまるのは，おそらくは tu と sv であろうことを確認し，その上で班毎に検証をさせる。内分，外分の組み合わせについては，２通り取り組ませる。前頁の生徒プリントの通り，メネラウスの定理を２度活用する場合，図によって経過が若干変わるが，ほぼ大差ない。メネラウスの定理と同様，

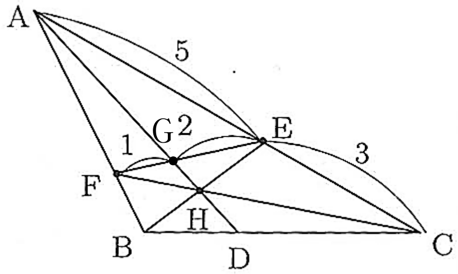
$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=tu:sv \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{t}{s}\cdot\frac{u}{v} \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AR}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{CQ}} \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立ち，メネラウスの定理から自然な形で「チェバの定理」が導かれる。こちらも当然，「拡張」とされているパターンがすべて網羅されていることとなる。

４.７　チェバの定理の活用

チェバは 17 世紀から 18 世紀にかけて活躍した数学者，つまりメネラウスより 1500 年以上あとに生まれた人であることを紹介しながら，獲得した事柄を「チェバの定理」としてまとめる。チェバはメネラウスの定理を再発見したことでも知られているが，歴史を追体験する意味でも「メネラウスの定理→チェバの定理」の順で学習することは極めて自然なことだと筆者には感じられる。

問 175　下の図において，AF : FB を求めよ。



メネラウスの定理の活用と同様，チェバの定理の場合にも，あくまでも「三角形の各辺の分点とその関係」に関する定理であることを強く意識させる。

　　直線 AC，EF に関する情報が与えられ，直線 AB に関する情報を知りたい

→　よって，それら３直線によって構成される△AEF に注目

→　辺 AE の外分点 C，辺 EF の内分点 G，辺 FA の外分点 B について，FC，AG，EB が共点

→　チェバの定理を適用　　といった具合である。

５　アンケート結果とその分析

一連の授業終了後，Google Forms にてアンケートを実施した（回収 78 名）。結果は以下の通りである。

表６

グループワーク（個人で取り組んだ時間）	メネラウス	チェバ
補助線を引く等の方針を立てることができて，線分比を求めることができた。	48	51
方針を立てることはできたが，線分比を求めるには至らなかった。	24	16
方針を立てることもできなかった。	6	11
計	78	78

表７

グループワーク（班で取り組んだ時間）	メネラウス	チェバ
グループ全員が方針や解法を理解し，線分比を求めることができた。	69	68
グループの一部の人のみが方針や解法を理解し，線分比を求めることができた。	8	9
グループのほとんどの人が方針や解法を理解することができなかった。	1	1
計	78	78

表８

一般化のプロセス（定理の証明）	メネラウス	チェバ
文字で表した２辺に関する線分比から，残りの１辺に関する線分比を求められるようになり，定着した。	68	61
文字で表した２辺に関する線分比から，残りの１辺に関する線分比を求めることはできたが，定着には至らなかった。	7	15
数値の場合ではできたが，文字で表した場合はできなかった。	1	1
数値の場合でも，文字で表した場合でもできなかった。	2	1
計	78	78

表９

定理の理解・活用	メネラウス	チェバ
「三角形に注目する」といった定理の仕組みを理解し，活用して線分比を求めることができるようになった。	75	72
活用して線分比を求めることができるようになったが，定理の仕組みは理解できなかった。	3	6
定理を活用できるようにならなかった。	0	0
計	78	78

また，自由記述で回答する，以下の３つの質問も行った。

問１　今回の課題におけるグループでの活動の意義・成果・問題点等をまとめて記述してください。

問２　定理獲得のプロセス（具体での検証 → 帰納的推論 → 一般化）について，感じたこと・考えたことを自由に記述してください。

問３　その他，気づいたこと，感じたことを自由に記述してください。

これらの結果を適宜引用しながら，３（一連の授業で目標とすること）であげたことがどれだけ達成できたか，また，課題はどこにあったかを洗い出していくこととする。

５.１　グループワークについて

班単位での活動を取り入れることによって，企図していたのは，次のサイクルを回すことであった。このサイクルの中で，適宜自分の考えを発表したり議論したりする場面が現れることを期待した。

課題の理解（集団） → 解決の方向を構想（個人） → 解決（個人→集団）
→ 振り返りと発展（集団） → 次の課題の理解（集団） → …

まず，個人で考える時間をとったことについて。[9]

> 自分で考える時間を設けたことで，早い人や知っていた人が答えを言ってしまい，他の人の考える時間を奪ってしまうというような事が起きなくて良かったと思う。

課題 1a，**2a** では５分，**課題 1b**，**2b** では３分とった。他の活動との兼ね合いもあるが，個人個人の深い思索を促すためにも，これは確保すべき時間であるだろう。

課題 1（メネラウスの定理）での生徒の変化を分析する。個人の活動で線分比まで求められたと回答したのが 48 名(62%)であったが，実際は最初の**課題 1a** の際は各班に１人いるかどうかという割合であった。[10] これは，既習で証明まで理解していた生徒の割合(14%)にほぼ一致する。

> 最初は班の人に教えてもらったが，理解してからは自分で方針を立てられるようになったので良かった。

課題 1a，**1b** と個人→集団の活動を２回繰り返したことで，69 名(88%)がグループ全員の理解に達したと回答した。各班において，かなり活発なやりとりが展開された。

> 特に，メネラウスの定理につながる具体的な数値での証明は，補助線の引き方は様々あり，面積比を使った方法もあった。それぞれがやった解法を説明しあって，吟味し，どの解法が良いのか考えることが出来事は，学びを深められたのが良かった。また，教え合うことで自分の理解も深まったのでそれも良かった。

> 証明問題は難しくて苦戦することが多いが，今回の学習では仲間とクイズのように楽しく解いて，わからなかったら教え合うことができた。相手に教える際も，学んできたことをアウトプットすることができてより頭に定着させることができた。

グループ全員の理解に至らなかったと回答した９名がいたことについては，今後の課題である。ここは 100%を目指したいところであった。

> 帰納的推論の時間が長すぎると感じた。

いくつかの事象からすぐに帰納的推論 → 一般化と辿れる生徒にとっては，冗長に感じるところもあったかもしれない。筆者としてはこれ以上短くはできないと感じているが，難

[9]自由記述における生徒の回答を吹き出しで表した。
[10] 62%は，**課題 1b** まで終えての割合であったと考えられる。

しいところである。

５.２　「事象を論理的に考察する力」について

一言で「論理的に考察する力」といってもいろいろに解釈できるが，ここでは，

$\boxed{\text{いくつかの事象を分析}}$ → $\boxed{\text{類似性の発見}}$ → $\boxed{\text{帰納的推論}}$ → $\boxed{\text{一般化}}$

という流れで考察することができたか，さらにはそのように考察する意義，必要性を感じることができたか，という２点で検証してみたい。

まず，必要性を感じることができたかどうかについては，生徒の回答を見る限りでは一定の成果があったと認められる。

> 実際に定理を獲得する流れと同じようになっていて，数学の根本みたいなものがわかって面白かった。流れ的にも自分は受け入れやすく，やりやすかった。小学校だと帰納的推論が結論になってしまっていたが，高校生になって推論 → 一般化というのが加わってより進んだんだなと実感した。

> 自分たちで具体的に求めた答えから帰納的推論をしてから一般化することで，わかりやすく学べた。最初から文字で表すとどうしても難しく感じてしまい，いつも理解に苦しむが，今回はそんなこともなく自分の力で考えることもできたので良かった。また，演習問題などを通して一般化した内容をもう一度復習することもできたので，文字で表した内容を自分の中できちんと納得して問題を解くことができた。

> これが本来の数学の形なのではないかと感じた。一般的な数学の授業では，まず定理を教えて，その証明方法を伝え，演習で使えるようにしていくということになる。自分で定理を導くということがないのだ。大昔に定理を見つけた人は，色々具体で検証し，疑問を見つけ，仮定を立てて，文字などを使って一般化，証明する，という方法を辿ったと思う。同じような道筋をたどることで定着度が上がると思う。

> わからない問題（証明にせよ，なんにせよ）に出会ったときに，具体的な数値で検証，帰納的な推論，一般化という実験予想証明の流れは，けんや先生の授業で何度も扱ってきたが，数学を超えて，不明なことを見つける上での本質的な話だと感じた。

最後の回答のように多くの生徒が感じてくれたのであれば，大変嬉しいことである。

この回答にある「先生の授業で何度も扱ってきたが…」については，例えば次のような事柄を他の単元において扱ってきていた。

集合と論理：最大公約数が１であるピタゴラス数をたくさん書き出し，すべてのピタゴラス数について成り立つと推測される事柄をできる限り多くあげる。それらが本当に成り立つかどうかを考察し，証明する。（反例をあげる）
場合の数と確率：パスカルの三角形について，グループ単位で気づいた特徴をできる限り多くあげ，それらが本当に成り立つかどうかを考察し，証明する。（反例をあげる）

前者については，「奇数が２個，偶数が１個」「３の倍数が入っている」等が，後者については「横の列を加えると２の累乗」「素数段目は両端を除いてその素数の倍数」などがあがる。毎年，多くの事柄があがり，初めて目にするような発見に驚かされることもある。

さらに，前者で「必ず素数が入っている」，後者で「奇数段目は両端を除いてその奇数の倍数」等の，一見成り立ちそうであるが，多くを調べると反例が見つけられるようなものも必ずあげられる。そのような経験を通して，多くで成り立つからといってすべてでは

成り立たないこともあるということ，すべてで成り立つことを示すには何をすればよいのかということを，生徒達は少しずつ身につけてきていたわけである。

考察することができたか，ということについては，やはり「一般化」のところでひっかかる生徒がいた。「文字で表した２辺に関する線分比から，残りの１辺に関する線分比を求めることはできた」と回答した生徒はメネラウスの定理で 75 名(96%)に達したが，うち７名は定着までには至らなかった。

☺ 全部本質的には同じなのに一般化に苦手意識を感じたので，おそらく文字アレルギーなのだと思う。

「本質的には同じ」と捉えてくれたことがせめてもの救いだろうか。やはり，このような経験をいろいろな場面で繰り返していく他はないといえるだろう。

次回につながる貴重な意見も生徒からもらった。

☺ 一般化のときの比で，わざわざ４文字を使わず，$1:s$ と $1:t$ にしたほうが煩雑にならなくて済むのではないかと思った。

まったく考えもしないことであったので，目から鱗であった。一長一短があるとは思うが，ぜひ来年度試してみようと考えている。

５.３　「事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力」について

筆者のねらいとしては，活動を通して次の①②に気づき，そのよさを感じ，次に同様の場面が現れたときに，同じように考察しようとする態度を身につけてもらうことにあった。

① 両定理いずれも，内分，外分の組み合わせによってまったく異なる図となるが，同様のプロセスによって線分比を求めたり証明をしたりすることができるということ。

② 両定理が，ただ見た目が似ているだけにとどまらず，深く関連しているものであるということ。

☺ クラス全員で違う値をいれ，実際に値を出して，表にいれてゆくことで，数値の移り変わりや数値の規則などが見えてきて面白かったです。

☺ 今回学習した定理，特にチェバの定理の学習は，内分×３の形しか知らなかったので，内分外分どちらも成り立つということを感じ，それを場合分けして考えるのは，とても興味深かった。また，点を外分でとろうと内分でとろうと，一言一句証明の表現がおなじになるというのには，定理の普遍性を感じて面白かった。

☺ メネラウスの定理やチェバの定理は形で覚えていたのだが、内分点と外分点に関する、三角形についての定理だということを改めて学ぶことができ、外分点が２,３個の時も同様に定理を使えることが必然的に感じた。定理の本質を理解することは、定理を的確に使うためにも重要だと思った。

①については，実際に両定理について，各班複数の組み合わせで取り組んだことにより，統合的に捉えることができるようになったように見受けられた。新学習指導要領でいうところの「拡張」とされる組み合わせについても，実は拡張でもなんでもなく，まったく同じ構造の事柄であることが理解されたようである。

一方で次のような意見もあった。

> どちらの定理でも，線分比については一般化して証明したが，内分点か外分点かのところは「全例を尽くして考えたので」（だったような?）という考え方だったのが，理解はできても腑に落ちないなあと思いました。

かつて，全員に全パターンを考察させたこともあったのだが，さすがに時間がかかりすぎてやめてしまったという経緯がある。

> 一般化を場合分けをして厳密にしたいと感じたため自分で行った。みんながどう感じたかはわからないがそこが個人的に気になった。

「他のパターンも同様。意欲ある人はぜひ全パターンで確認してもらいたい」といったあたりが落としどころであろうか。

②については，**課題 2** に取り組む際，チェバの定理が既習で証明まで覚えていた 11 名(14%)も含めた大多数が，面積比ではなくてメネラウスの定理で取り組んでいたことを踏まえると，その連関を多くがつかんでいたのではないかと確信している。

> 数学では，今までにやったことや学んだことを踏まえた上で解いていると，繋がっている部分があったりして面白いです。

> 今回メネラウス，チェバの定理について初めて知ったが，とても興味深い内容だと感じた。特にメネラウスの定理に関しては，ずっと昔に見つけられたものだということを知り驚いた。実際に，メネラウスの定理を２回使って比を求めることができるとわかった上でチェバの定理を学んだことで，チェバの定理の発見の際の追体験をしたような気持ちになれて面白かった。

表題「メネラウスの定理・チェバの定理の指導」には，筆者のこだわりが込められている。両定理がバラバラに，チェバ → メネラウスの順に扱われている現状はなんともったいないことか…。逆の順に学習することで，「統合的・発展的に考察する力」を大きく育てる可能性があることを，ぜひ広めていければと考えている。

５.４　「数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力」について

一連のプロセスを経て獲得した定理はいわば「アルゴリズム」であり，いったん獲得すればそれは，プロセスがぎゅっと凝縮された，簡便に目的を達せられるツールとなる。きちんとプロセスを理解した上で，ツールを自在に使いこなせるようになったかどうか。それをもってこの力がついたかどうかを評価することとした。

> 今までは結果しか知らず、チェバの定理については外分外分内分が出てきたら絶対に解けなかった。今回の授業のプロセスで、これらができるようになった。

> はじめに定理を学ぶよりも、具体的な数字で検証してから自分で法則を導き出した方が、より頭に定着して、問題演習のときパッと定理を活用できると感じた。また、もし一般化された法則を忘れてしまっても、自分でもう一度定理を導きだすことができるのではないかと思った。

「三角形に注目する」といった定理の仕組みを理解し，活用することができるようになったのはメネラウスの定理で 75 人(96%)，チェバの定理で 72 人(92%)に達した。問 175 のようなチェバの定理を活用するのが相応しい問題で，メネラウスの定理を用いて別の線分比を求めてしまう生徒も見受けられたが，再度メネラウスを用いれば解決できること，そしてそれこそがチェバの定理を導出するプロセスであったことを思い出させると，「なるほど～確かに！」という反応をしていたのが印象的であった。

ここに至って「定理」は，原理や証明方法はわからなくてもよいからただ使えればよい，とにかくたくさん覚えて使いこなせるようにならなくてはならない，と貶められるものではなく，具体から導かれる，事象を簡潔・明瞭・的確に表現・処理するためのツールとして生徒に落とし込まれ，その有用性を生徒に感じさせるものとなるわけである。

６　おわりに

「コンテンツ・ベースからコンピテンシー・ベースへ」を謳い文句の一つとして検討されてきた新学習指導要領であるが，いよいよ本年４月より年次進行で実施となる。今回の授業では，生徒にどのような力を身につけさせるかを考えるにあたり，まずは新学習指導要領に示されている資質・能力に徹底的に拘ってみた。文部科学省の手先と思われるかもしれないが，決して学習指導要領を鵜呑みにしているわけではなく，拘って実践した成果と課題を検証した先にこそ，自分なりのアレンジが重ねられるものと考えているからである。

今回立てた「生徒たちが，帰納的な推論を手がかりとし，事象を論理的・統合的・発展的に考察しながら，自立的・協働的に定理を獲得する」という目標は，いくつかの新たな課題が浮き彫りになりながらも，概ね達成できたと評価している。ただ，筆者自身の過去の実践の中で，新学習指導要領を見据えた授業をする上で，比較的計算が立つ題材を選んだのも事実である。今回の成果と課題をもとに，他の単元においても，その単元の中で育てたい資質・能力を明確にし，身につけさせる指導法を確立していきたいと考えている。

参考文献・引用文献

1)　佐竹　郁夫・風間　喜美江・豊田　稔・杉本　紘野(2014).「高等学校数学「課題学習」の教材開発について」.『香川大学教育実践総合研究』第 28 巻，45-58

2)　志賀　浩二(2003).『中高一貫数学コース　数学３をたのしむ』.岩波書店

3)　高橋　聡(2012).「高等学校数学における数学的活動：新しい検定教科書での「課題学習」の取り扱いに着目して」.『椙山女学園大学教育学部紀要』第５号，13-21

4)　文部科学省(2009).『高等学校学習指導要領（平成 21 年告示）解説　数学編　理数編』.実教出版

5)　文部科学省(2019).『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』.学校図書