

「仮説検定の考え」の教材研究と授業実践報告

— サイコロ投げの実験による授業を中心に —

数学科 川崎 宣昭

1. はじめに

2022年度から施行される新学習指導要領では、数学Ⅰの「データの分析」の中に「仮説検定の考え」という内容がある。今までに高等学校で統計的な内容を学んだり、大学で数理統計学または確率統計を学んできた教師にとっては、事前の教材研究を十分に行わなければ授業を実践しにくいと考えられる。何故ならば、必修教科が数学Ⅰだけであるため、高等学校で確率を学習せず、中学校で学習した確率の知識と、サイコロ投げなどの実験だけで学習を進められる準備をしなければならないためである。当然、生徒には高等学校の確率の知識はない。

そこで、2021年度の筑波大学附属高等学校教育研究大会の公開授業において、現行学習指導要領下でまだ確率を学習していない高校1年生を対象に、仮説検定の考え方の導入の授業を実践し、どのような授業が可能であるのかを考えてみた。本稿では、以下の順序でその実践報告を記載する。

最初は、高等学校の確率を未学習の生徒故、サイコロ投げの実験で、ある事象の起こりやすさを予想させ、更にサイコロ投げの実験でその事象がどの程度の割合で起こるのかを考えさせた。この内容は、公開授業以前に実施した内容であり、その結果を紹介する。次に、仮説検定の授業を実施する教材に対して、事前にどのような教材研究を行ったのかについて、フリーソフトRを用いたシミュレーションを中心に数学的な分析を紹介する。授業の実施の部分では当日の学習指導案を記載し、最後に授業実施後の感想、及び生徒による観点別評価のアンケート調査の結果をまとめてみた。

1時間（当日は45分）の授業としては扱った内容がやや多く、実際には1.5～2時間分の授業であったが、「仮説検定の考え」の授業を計画する際に、授業方法の改善を加えていくきっかけとし、更なる改善を試みたい。

2. 事前のサイコロ投げの実験

事象の起こりやすさについて、直感による判断では予想できないようなサイコロ投げの実験を毎年試みている。順列・組合せや確率の授業を実施する前の導入として行っている。「サイコロを10回投げるとき、1の目が10回中何回出る可能性が最も高いか」という問いである。「サイコロを1回投げて1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であり、サイコロを10回投げるのであるから、 $10 \times \frac{1}{6} = 1.666\dots$ となる。したがって、

1の目が2回出る可能性が最も高いだろう」と考える生徒がクラスの $\frac{2}{3}$ 以上はいる。この $\frac{1}{6} \times 10$ の値は、サイコロを10回投げるときの1の目が出る回数の期待値であって、1の目が出るそれぞれの回数の確率の最大値を求めているのではない。1の目が出る回数を X 回とし、1の目が k 回出る確率を $P(X = k)$

($k = 0, 1, 2, \dots, 10$) とするとき、 $\max_{0 \leq k \leq 10} P(X = k)$ を求めていることにはならない。

サイコロ投げの実験では、1人につき20回分の実験を行った。すなわち、サイコロを10回投げるということを20サイクル行った。当日の授業の出席者が39名であったため、のべ780人で実験した結果は、右の表のようになった。生徒の予想が2回であったのに対し、実験結果は1回の人数的の方が18人多くなっている。「今回の実験結果は1回の人数的の方が多くなっているが、それはたまたまであり、本当は2回の人数的の方が多いはずだ」と考えるのか、それとも、「この実験結果は理論的にも正しい結果である」と考えるのかは、生徒にはまだわからない。授業では、正しい結果か否かを数学的に調べることが確率の学習目標のひとつであると締めくくった。

数学的には、1の目が1回出る確率が最大となり、2回出る確率との理論的な差はわずかである。私が実施してきた毎年の実験では、概ね理論通りの結果が出てきているが、理論通りにいかなかったことは、30年中、2回程度あった。

10回中1の目 が出た回数	人数
0	133
1	242
2	224
3	133
4	37
5	8
6	2
7	1
8	0
9	0
10	0
計	780

3. 事前の教材研究

(1) 公開授業で扱う問題(その1)

統計の内容であるため、なるべく現実問題に近い題材を扱いたい。そこで最初に、製薬会社が開発している薬品Aの効果に関する以下の<課題1>を考えさせた。

<課題1>

ある製薬会社の薬品Aは、今までの調査の結果、投与した患者のうち半数の人に効果が出ることがわかっています。このとき、次のことを考えて下さい。

- (1) 無作為に1人の患者を選び、薬品Aを投与したとき、問題の条件(下線部)から考えて、効果が出る可能性を確率で表すと?
- (2) 薬品Aを36人の患者に投与したとき、効果が出る人数が以下のア)~エ)となる可能性は何%くらいでしょうか。直感で考えてみて下さい。
ア) 18人以上 イ) 21人以上 ウ) 24人以上 エ) 27人以上

<課題1>の(1)の問題では、投与した患者の半数の人に効果があるので、50% ($p = \frac{1}{2}$) と考える。

この問題は、中学校で学んだ確率の知識の範囲内である。

(2)の問題は、高等学校で学ぶべき確率の知識がなく、当然二項分布の知識もないので、生徒にとっては直感で考える以外に方法はないと思われる。

教材研究では、二項分布としての結果を調べておく必要がある。そのために、公開授業のための事前の教材研究として、フリーソフトRを利用した。

(2) 二項分布による確率の計算

36人の患者に薬品Aを投与した時に効果が出る人の人数を X とすると、 $X \sim B(36, \frac{1}{2})$ の二項分布に従う。ア)～エ)のそれぞれの人数になる確率は、二項分布を用いると、

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^{36} {}_{36}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{36-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{36} \sum_{k=x}^{36} {}_{36}C_k \quad (x=18, 21, 24, 27)$$

の計算結果である。これらの値を、フリーソフト **R** を用いて計算すると、以下のようになる。

sum(dbinom(18:36, 36, 1/2))=0.5660303 (18人以上)

sum(dbinom(21:36, 36, 1/2))=0.2025161 (21人以上)

sum(dbinom(24:36, 36, 1/2))=0.03262267 (24人以上)

sum(dbinom(27:36, 36, 1/2))=0.001966587 (27人以上)

これらの確率を、小数第4位を四捨五入して小数第3位までの近似値とし、百分率で表すと、18人以上が56.6%、21人以上が20.3%、24人以上が3.3%、27人以上が0.2%となる。実際には人数が多いので、コンピューターソフトを使わない場合は二項分布を正規分布に近似して計算することが多い。

(3) 正規分布近似による確率の計算

36人という人数が、二項分布を正規分布に近似できる人数と考え、正規分布に近似して確率の計算を行う。反復試行の回数を n 回、ある事象が起こる確率を p とすると、 $p < \frac{1}{2}$ ならば $np > 5$ 、 $p > \frac{1}{2}$ ならば $n(1-p) > 5$ という基準(参考文献2))があり、今回は $p = \frac{1}{2}$ であるが、 $36 \times \frac{1}{2} = 18 \gg 5$ であることから近似して考えてもよいだろう。

$X \sim B(36, \frac{1}{2})$ のとき、 $E(X) = 36 \times \frac{1}{2} = 18$ 、 $Var(X) = 36 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = 9 = 3^2$ であるから、

$B(36, \frac{1}{2})$ を $N(18, 3^2)$ の正規分布で近似して**R**で計算すると、以下のようになる。

1-pnorm(18, 18, 3)=0.5 (18人以上)

1-pnorm(21, 18, 3)=0.1586553 (21人以上)

1-pnorm(24, 18, 3)=0.02275013 (24人以上)

1-pnorm(27, 18, 3)=0.001349898 (27人以上)

これらの確率を、小数第4位を四捨五入して小数第3位までの近似値とし、百分率で表すと、18人以上が50.0%、21人以上が15.9%、24人以上が2.3%、27人以上が0.1%となる。

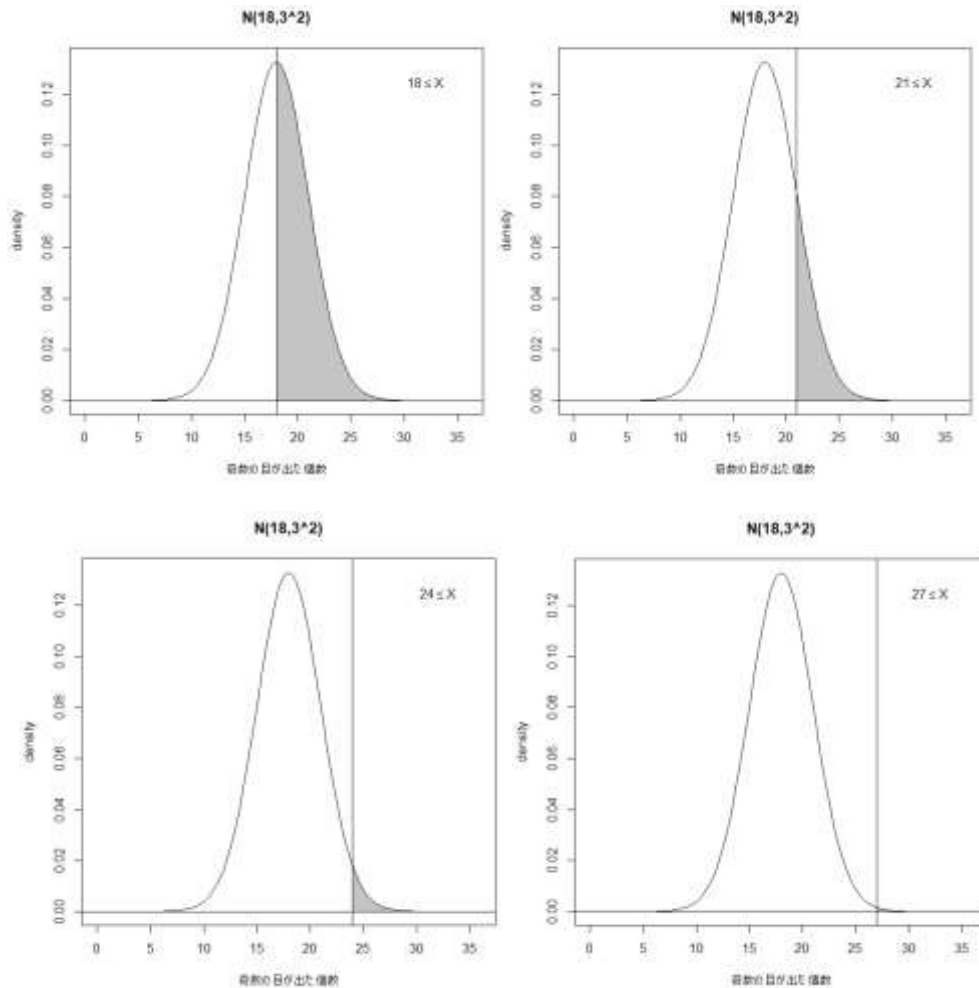
上記のそれぞれの確率の値は、次頁の $N(18, 3^2)$ の確率密度関数のグレーの部分の面積である。以下の**R**のプログラムの数値を変えることにより、次頁の4つのグラフをひとつひとつ描くことができる。なお、各グラフのグレーの部分は、Windowsの”ペイント”を用いて色をつけた。

curve(dnorm(x, 18, 3), 0, 36, main='N(18, 3^2)', ylab='density', xlab='奇数の目が出た個数')

```
abline(h=0)
```

```
abline(v=24) # 24 人以上の場合（以下、この部分の数値を変えてプログラムを実行）
```

```
text(32, 0.125, expression(24<=X), cex=1.0)
```



(4) 半整数補正による確率の計算

二項分布は離散分布，正規分布は連続分布であり，両者の確率の値には少々差が出てくる．そこで，正規分布に近似した確率の計算で半整数補正を行って計算すると，以下ようになる．

$1-pnorm(17.5, 18, 3)=0.5661838$ (18人以上)

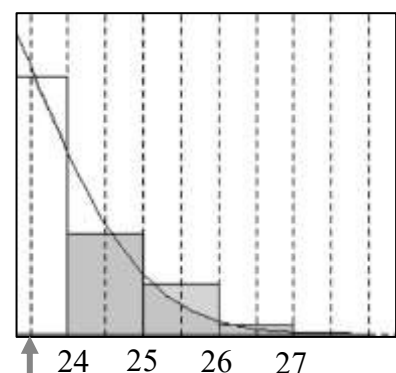
$1-pnorm(20.5, 18, 3)=0.2023284$ (21人以上)

$1-pnorm(23.5, 18, 3)=0.03337651$ (24人以上)

$1-pnorm(26.5, 18, 3)=0.002303266$ (27人以上)

これらの確率を，小数第4位を四捨五入して小数第3位までの近似値とし，百分率で表すと，18人以上が56.6%，21人以上が20.2%，24人以上が3.3%，27人以上が0.2%となり，二項分布で計算した確率の値とほぼ一致する．

なお，半整数補正は，24人以上の確率の計算の場合，24から0.5

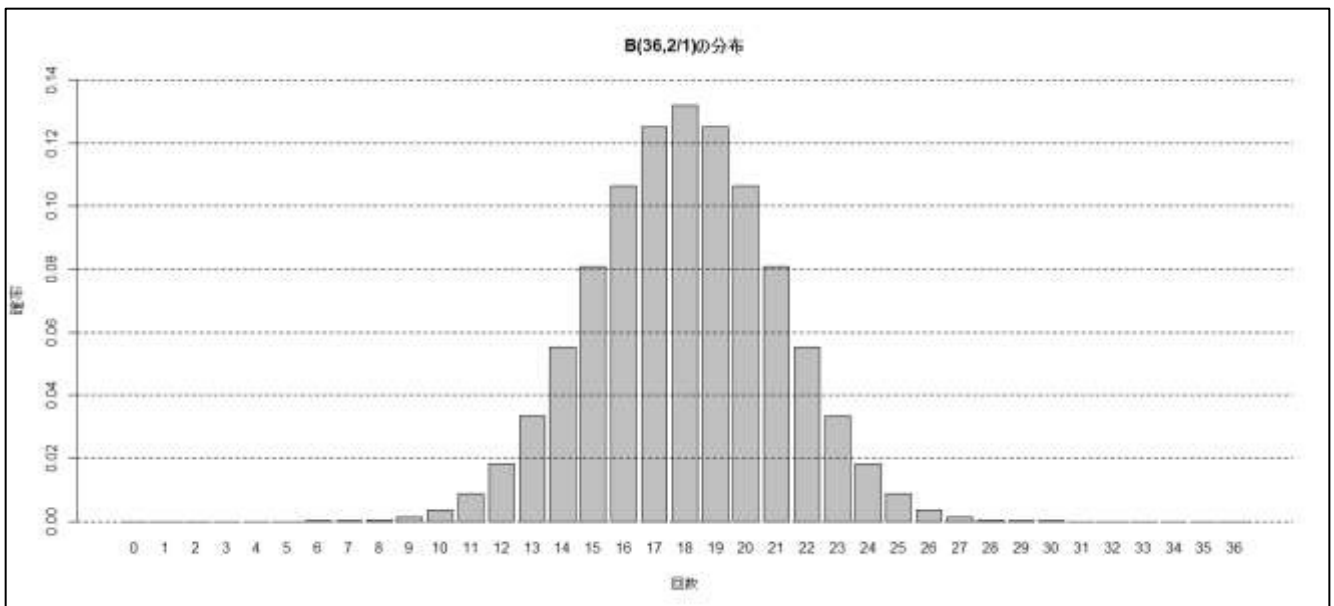


をひいて 23.5 人以上という数値を使う。その理由は、前頁最後の図を用いて説明できる。図のグレーの長方形を、24、25、26、27 人の場合の相対度数とする。24 人以上の相対度数の総和を求める場合、正規分布の確率密度関数（曲線部分）の面積で近似するには 23.5 以上の範囲とする。

(5) 二項分布は正規分布でどの程度近似されているのか？

$X \sim B(36, \frac{1}{2})$ のとき、 $X = 0, 1, 2, \dots, 36$ の場合の確率の理論値をグラフで表すと、以下のよう

に左右対称となる。このグラフを作成する R のプログラムをグラフの後に掲載した。



```
x=0:36
barplot(dbinom(x, 36, 1/2), names=x, ylim=c(0, 0.14),
        main=' B(36, 2/1) の分布', ylab=' 確率', xlab=' 回数' )
for(k in 0:7) {abline(h=k*0.02, lty=2)}
```

$X \sim B(36, \frac{1}{2})$ の場合、この二項分布を正規分布で近似して統計処理を行うことができる。今回の場合

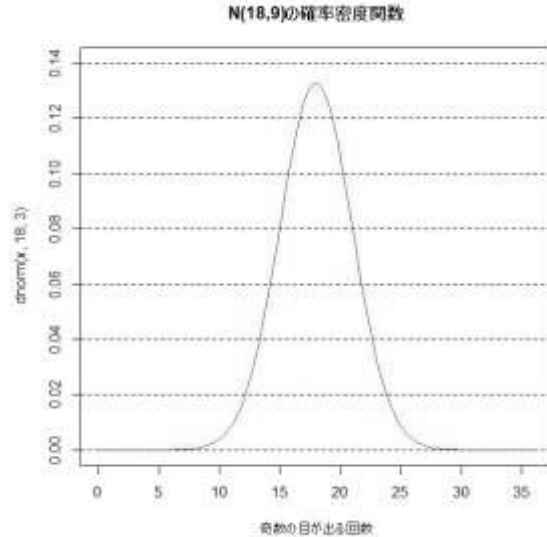
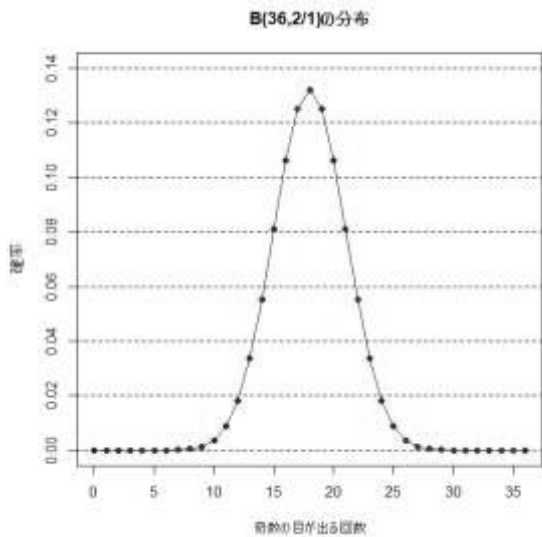
は、二項分布のグラフを見るだけで概ね正規分布になっていることはわかるが、今後の教材研究で二項分布がどの程度正規分布に近似されているのかを視覚的に確かめることがあると思われるので、グラフのプログラム作成してみた。次頁のグラフの左側は二項分布の式で計算した確率の値であり、正規分布の確率密度関数と重ね合わせるために折れ線グラフで表した。右側のグラフは、この二項分布と同じ平均分散の値である正規分布を曲線で描いた。以下は、これらのグラフを描くための R のプログラムである。

<左側の折れ線のグラフ（二項分布）を描く R のプログラム>

```
x=0:36
plot(x, dbinom(x, 36, 1/2), names=x, ylim=c(0, 0.14), type=' o', pch=16,
     main=' B(36, 2/1) の分布', ylab=' 確率', xlab=' 奇数の目が出る回数', col=' blue' )
par(new=T)
for(k in 0:7) {abline(h=k*0.02, lty=2)}
```

<右側の曲線のグラフ（正規分布）を描く R のプログラム>

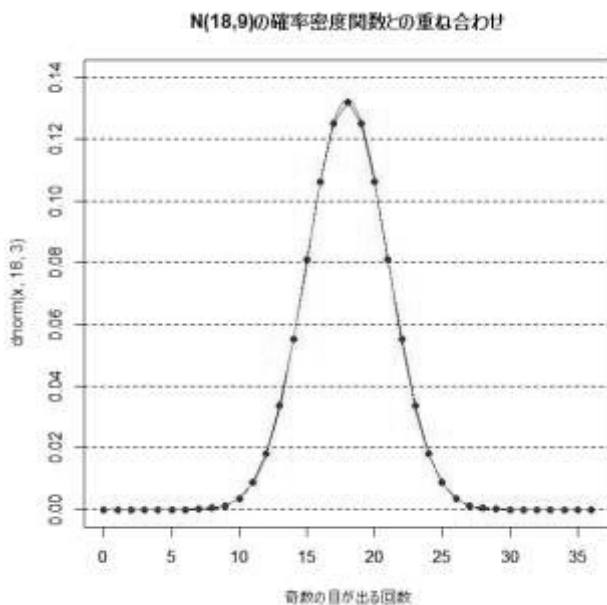
```
curve(dnorm(x, 18, 3), 0, 36, col='red', ylim=c(0, 0.14), main='N(18, 9)の確率密度関数',
      xlab='奇数の目が出る回数')
par(new=T)
for(k in 0:7) {abline(h=k*0.02, lty=2)}
```



これらの2つのグラフを重ね合わせると、下図のようにほとんど一致していることがわかる。グラフを重ね合わせる R のプログラムは以下の通りである。

<二項分布と正規分布の重ね合わせ>

```
x=0:36
plot(x, dbinom(x, 36, 1/2), ylim=c(0, 0.14), type='o', pch=16, ylab='', xlab='', col='blue')
for(k in 0:7) {abline(h=k*0.02, lty=2)}
par(new=T)
curve(dnorm(x, 18, 3), 0, 36, col='red',
      ylim=c(0, 0.14), main='N(18, 9)の確率密度関数との重ね合わせ', xlab='奇数の目が出る回数')
```



※ この頁の3つのグラフは、プログラムを実行すると、赤と青で表示される。

(6) 公開授業で扱う問題 (その2)

<課題1>の問題に対して、仮説検定の話題に近い形の問題文にしたものが以下の<課題2>であり、<課題1>の(2)の問題で24人以上、27人以上の場合を扱う問題とした。

<課題2>

この製薬会社では、従来の薬品Aよりもより多くの患者に効果の出るような薬品Bを開発することになりました。長年の努力と研究を積み重ねてきた結果、薬品Bはいよいよ臨床試験の段階に入りました。患者の中から被検者36人を無作為抽出したところ、被検者全員が臨床試験に協力することになり、36人の患者の中で何人に投与の効果が出るのかを調べることにしました。

(1) 薬品Bで効果が出た人の人数が24人になったとき、次の①、②のどちらの判断をしますか。

① 薬品Aでも、36人中たまたま半数以上の24人に効果が出ることは十分に考えられる。

したがって薬品Bは薬品Aよりもより多くの患者に効果が出るようになったとは言えない。

② 薬品Aの場合に、36人中24人に効果が出るのが全くないわけではないが、それがたまたまとは言えず、薬品Aを患者に投与して24人になる可能性はかなり低い。したがって薬品Bは薬品Aよりもより多くの患者に効果が出るようになった可能性がある。

(2) 薬品Bで効果が出た人の人数が27人になったとき、(1)と同様の考察をして下さい。

(7) 仮説検定の問題にすると?

1人の患者に薬品を投与したときに効果が出る確率を p とすると、仮説検定では、

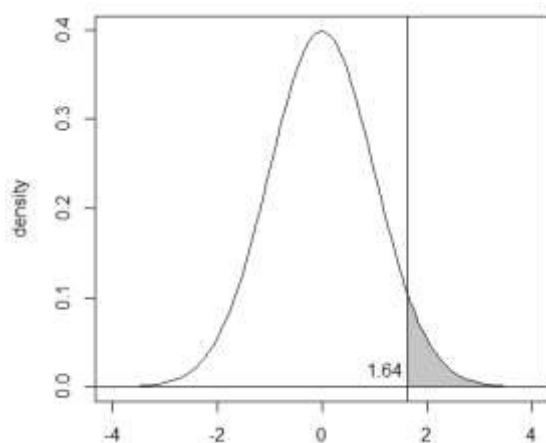
帰無仮説 $H_0 : p = 0.5$

対立仮説 $H_1 : p > 0.5$

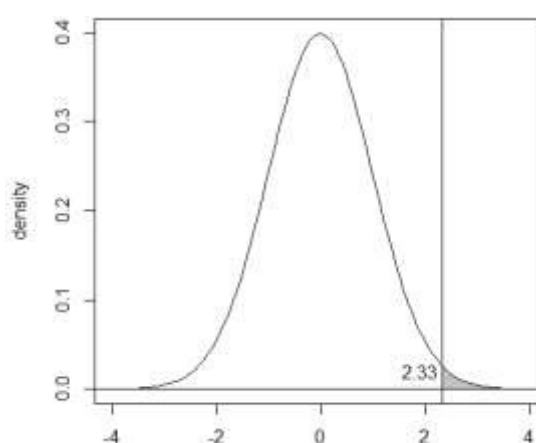
として、上片側検定を行う。薬品の効果の仮説検定について、インターネット上で情報検索をした結果、有意水準を5%として検定を行うことが慣例とされているという記載があったり、有意水準5%や1%が使われることが多いという記載があった。

以下は、正規分布を用いた上片側検定で、有意水準5%及び1%の場所を確率密度関数で表したものであり、その後ろにRのプログラムも掲載した。

<片側5%点>



<片側1%点>



```

curve(dnorm(x, 0, 1), -4, 4, xlab='', ylab='density')
text(1.9, 0.02, expression(x=2.33), cex = 1.0)
abline(h=0)
abline(v=2.33)

```

問題の(1)①については、製品Bで効果が出た患者の割合が $p=0.5$ を超えてはいるが、 $p>0.5$ と判断してもいいほどの人数ではないという説明である。対立仮説を棄却するのだが、薬品Bについて $p=0.5$ に等しいという意味ではなく、薬品Aよりも効果がある可能性はあるが、効果が出た人の人数に有意差を認めないという意味である。

それに対して(1)②では、効果が出た人の人数に有意差があり、帰無仮説を棄却して対立仮説を採択している。薬品Bについては $p=0.5$ ではなく、 $p>0.5$ と判断するのが妥当であるという考え方を表している。

実際に二項分布を用いた確率の計算を行うと、

```

sum(dbinom(23:36, 36, 1/2))=0.06624908 (23人以上)
sum(dbinom(24:36, 36, 1/2))=0.03262267 (24人以上)
sum(dbinom(25:36, 36, 1/2))=0.01440836 (25人以上)
sum(dbinom(26:36, 36, 1/2))=0.005665492 (26人以上)
sum(dbinom(27:36, 36, 1/2))=0.001966587 (27人以上)

```

となるので、有意水準5%の場合は24人以上、有意水準1%の場合は26人以上で帰無仮説が棄却される。したがって、(2)の27人の場合も帰無仮説が棄却されることになる。

(8) 比率の検定の問題にすると？

比率の検定の問題として仮説検定を行う考え方は、以下の通りである。

$X \sim B(n, p)$ のとき、 n が大きくなれば、 $X \sim N(np, np(1-p))$ に近似することができるので、

$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1^2)$ と考える。ひとりひとりの患者にとっては、薬品の効果が出る人と出ない人が

いる。患者から n 人を抽出し、薬品を投与して臨床試験を行うとき、薬品の効果が出る人の人数 X の分

布は二項分布になるが、 n が大きければ正規分布で近似できる。 $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ の分母分子を n で割って、

$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1^2)$ となり、 n 人の中で薬品の効果が出た人の人数 X がわかれば $\frac{X}{n}$ の値がわかる。

そして、その値から薬品の効果が出る比率の検定を行うことができる。

$$P(1.64 \leq \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}) \doteq 0.95, \quad P(2.33 \leq \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}) \doteq 0.99$$

である性質を使い、患者の母集団から抽出した被検者に薬品を投与して効果が出た人の人数の比率が0.5よりも大きいかどうかの検定を行う。 $n=36$ 、 X を18から27までの整数とし、36人中 X 人以上の患者に薬品の効果が出る確率を計算すると以下ようになる。

```
X=seq(18, 27, 1)
n=36
p0=0.5
z=(X/n-p0)/sqrt(p0*(1-p0)/n)
z
options(scipen=100)
1-pnorm(z)
```

z の値は、

```
[1] 0.0000000 0.3333333 0.6666667 1.0000000 1.3333333 1.6666667 2.0000000
[8] 2.3333333 2.6666667 3.0000000
```

X は18から27までの整数なので、薬品の効果が出る人の人数が36人中 X 人以上となる確率は、順に、

```
[1] 0.500000000 0.369441340 0.252492538 0.158655254 0.091211220 0.047790352
[7] 0.022750132 0.009815329 0.003830381 0.001349898
```

となる。23回以上が5%未満、25回以上が1%未満となっている。

(9) 公開授業で扱う問題 (その3)

薬品Aを36人の患者に投与したとき、24人以上、あるいは27人以上に効果が出る可能性がどの程度あるのかについて、サイコロを投げる実験で試すことを考える。学習指導要領解説(参考文献4)では、新素材の枕でよく寝られるかどうかの調査について、サイコロ投げの実験と関連付けた教材が紹介されているが、今回の公開授業でも、その考え方とほぼ同じ方法でサイコロ投げの実験を試みた。

従来の薬品Aを36人の患者に投与したとき、効果の出る人の人数が36人中ある人数以上となる可能性が5%未満である場合、薬品Aでその人数以上の効果が出ることはたまたまではなく、極めてまれであると考え。新しい薬品Bを投与した場合にその人数以上となれば、薬品Bは従来の薬品Aよりも効果が出るようになった可能性があると考え。「5%未満」とは36人中何人以上の場合なのかについて、以下のサイコロの実験によって確かめてみる。

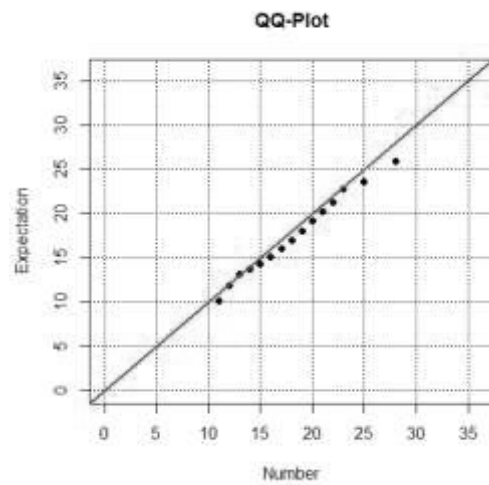
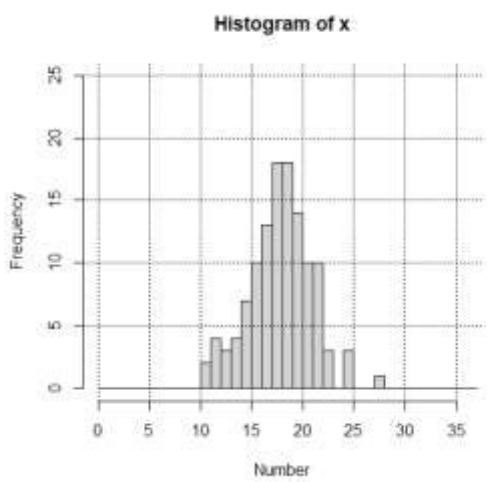
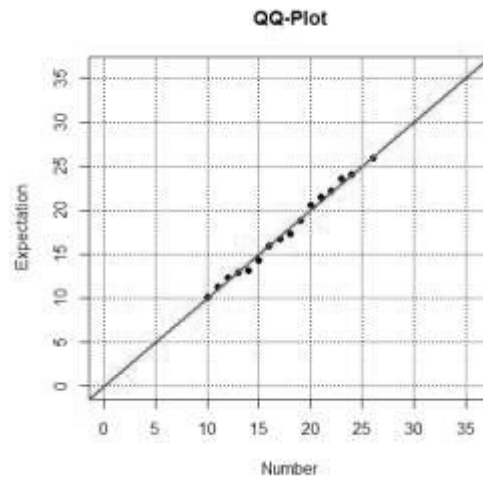
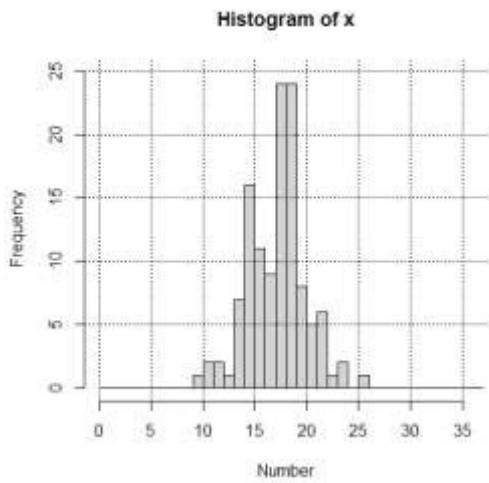
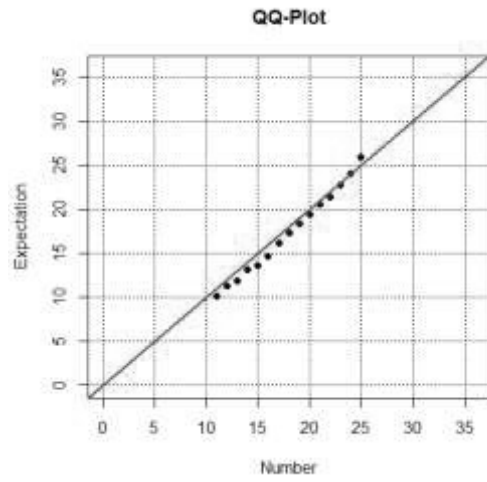
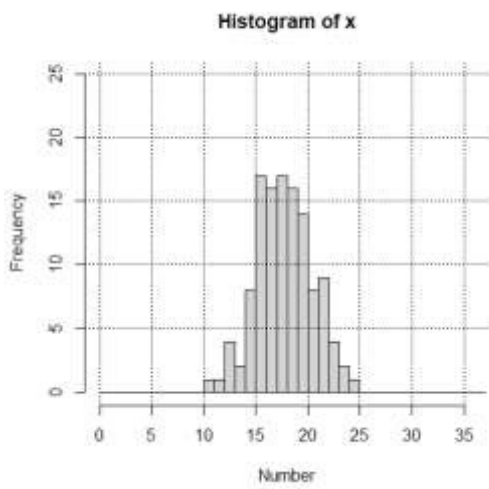
<サイコロ投げの実験>

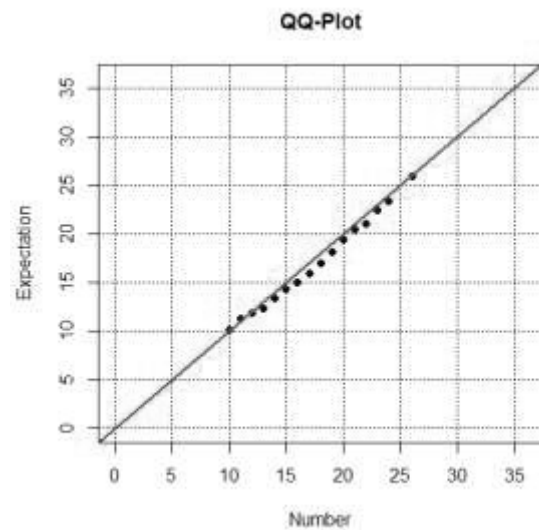
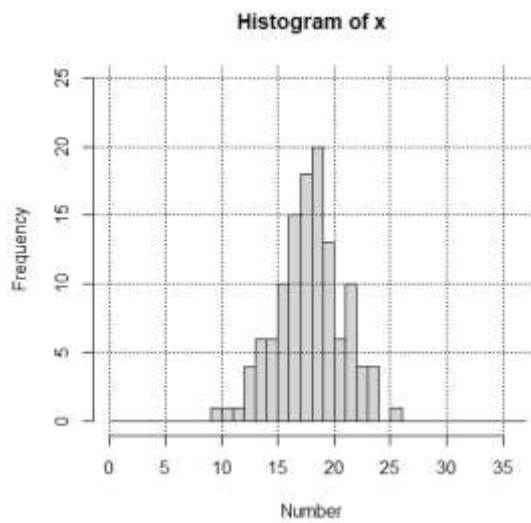
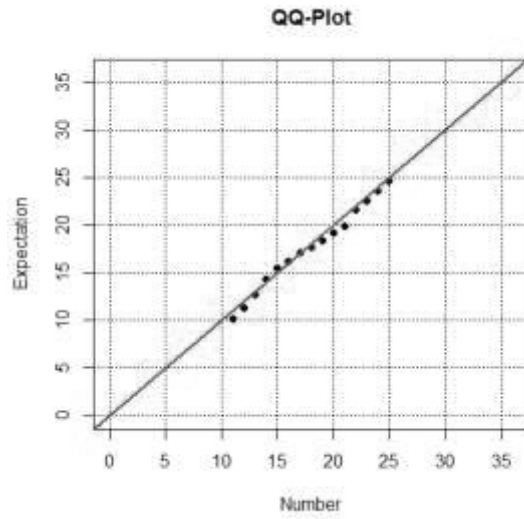
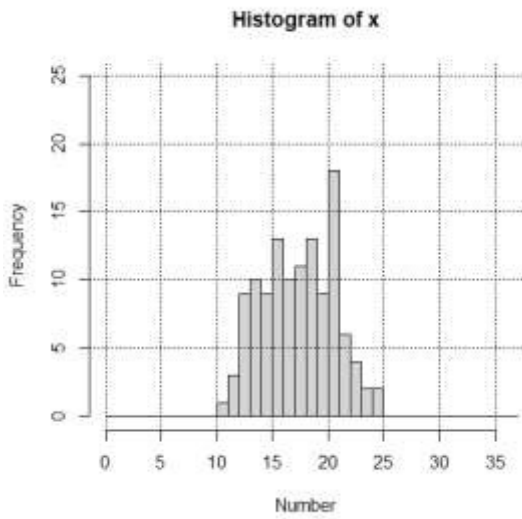
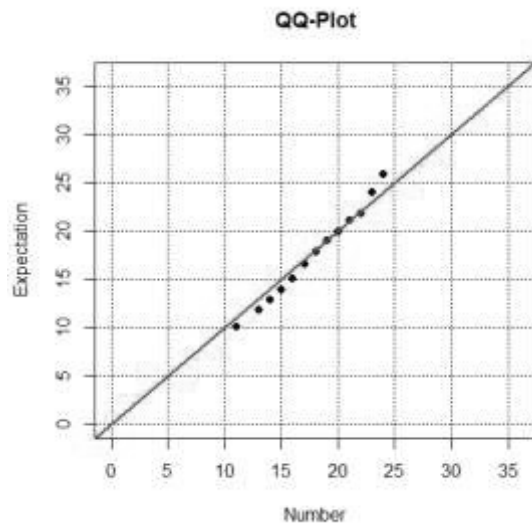
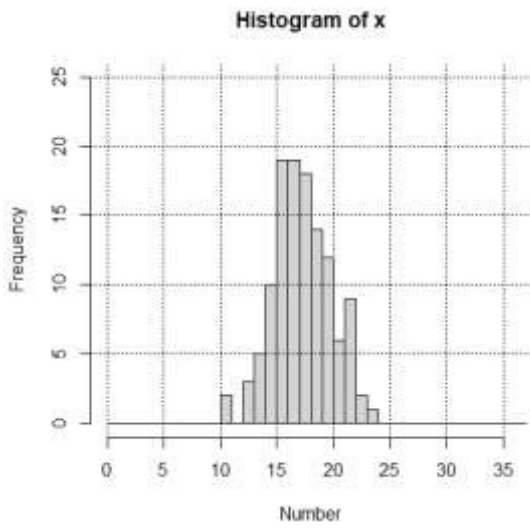
1個のサイコロを1回投げるとき、奇数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ です。そのサイコロを36回投げたときに奇数の目が出た回数を X とします。

- (1) X のとりうる値の範囲をすべてあげて下さい。
- (2) 一人でサイコロを36回投げることは少々大変なので、サイコロ9個が入っている容器をよく混ぜ、サイコロを同時に投げるという操作を4回繰り返すことによってサイコロを36回投げたことにしましょう。そのときに奇数の目が出たサイコロの合計個数を数えて下さい。
- (3) 前問(2)の作業をあと2回行って下さい。

この実験により、薬品Aを36人に投与したとき、24人以上、あるいは27人以上に効果が出る可能性がどの程度あるのかを推測することができる。2人1組で実験し、1人がサイコロを投げ、もう1人

は奇数の目が出たサイコロの個数を数えるようにする。授業で実践する前に、乱数を用いたコンピューターシミュレーションを行った。パソコンによる6回のシミュレーションの結果は以下の通りである。





正規確率プロットと呼ばれる方法で6通りのシミュレーション結果の正規性を目視で確認してみた。実現値と期待値が直線 $y=x$ 上にほぼ載っており、概ね正規分布とみなせるシミュレーション結果となっている。

各シミュレーションにより奇数の目が出た回数は以下の通りである。

回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	
sm1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	2	8	17	16	17	16	14	8	9	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sm2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	1	7	16	11	9	24	24	8	5	6	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sm3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	3	4	7	10	13	18	18	14	10	10	3	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sm4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3	5	10	19	19	18	14	12	6	9	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sm5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	9	10	9	13	10	11	13	9	18	6	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sm6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	4	6	6	10	15	18	20	13	6	10	4	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

シミュレーションと正規確率プロットの描画を行うプログラムは、以下の通りである。

<乱数を用いたサイコロ投げのシミュレーションのプログラム>

```
set.seed(100) # 以下 200, 300, 400, 500, 600 で実行
x=matrix(0, 120, 1)
x=rbinom(120, 36, 1/2)
x
y=hist(x, breaks=seq(0, 37, 1), xlim=c(0, 36), ylim=c(0, 25), xlab='Number')
for(i in 1:5) {abline(h=i*5, lty=3)}
for(i in 0:7) {abline(v=i*5, lty=3)}
y$count
```

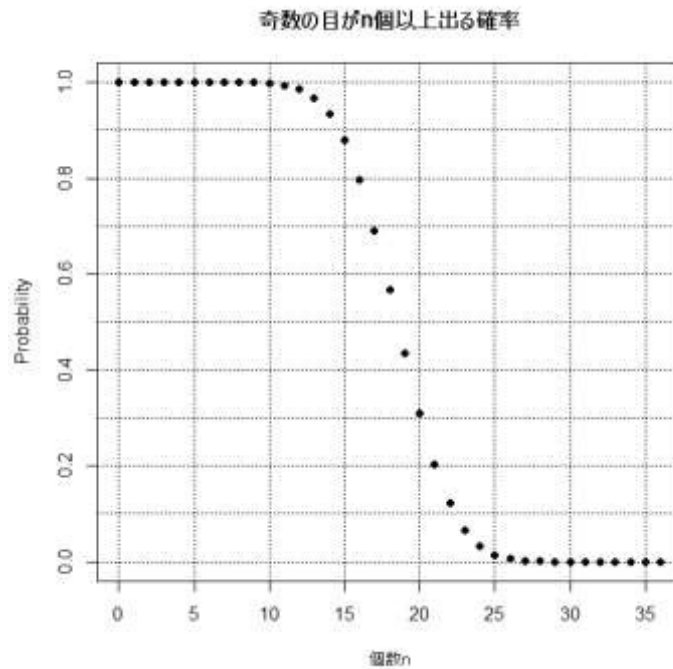
<正規確率プロットのプログラム>

```
set.seed(100) # 100, . 200, 300, 400, 500, 600 の場合にシミュレーションを行います。
data=rbinom(120, 36, 1/2)
ord=rank(data, ties.method = "min")
x=(ord-0.5)/120;y=qnorm(x, 18, 3)
plot(data, y, pch=16, xlim=c(0, 36), ylim=c(0, 36),
      main='正規確率プロット', xlab='回数', ylab='期待値')
for(i in 0:8) {abline(h=5*i, lty=3);abline(v=5*i, lty=3)}
abline(a=0, b=1, col='red', lwd=2)
```

※ 正規確率プロット (normal Q-Q plot)

観測値が正規分布に従う場合の期待値を y 軸にとり、観測値そのものを x 軸にとった確率プロットのことである。観測値を昇順に並べた順位からパーセンタイル (累積確率) を求め、正規分布の確率密度関数の逆関数を用いて期待値を予測する。プロットが一直線上に並べば、観測値は正規分布に従っていると考えられる。(統計用語集参照 <https://bellcurve.jp/statistics/glossary/2071.html>)

なお、奇数の目が36回中 n 回以上 ($(0 \leq n \leq 36)$) 出る確率は以下のようにになっている。



このグラフを描く R のプログラムは以下の通りである。

```
z=matrix(0, 37, 1)
for(k in 0:36) {z[k+1,]=sum(dbinom(k:36, 36, 1/2))}
x=0:36
plot(x, z, pch=16, xlab=' 個数 n ', ylab=' Probability', main=' 奇数の目が n 個以上出る確率')
for(i in 0:7) {abline(v=i*5, lty=3)}
for(i in 0:10) {abline(h=i*0.1, lty=3)}
```

このサイコロの実験から、薬品 B を患者に投与して 24 人や 27 人に効果が出たとき、生徒は、薬品 B が薬品 A よりも効果が出る人の人数が増えた可能性があるかどうかわからない。生徒はこのような問題を初めて考えたはずであり、公開授業で生徒がどのような考え方をするのかについて大変興味がある。生徒は、根拠を持って自分の考えを説明することができず、すべて直感で答えたり考えてしまう可能性もある。

4. 数学科学習指導案

今までのような教材研究を行った後、以下の学習指導案を作成して授業を実践した。

数学科学習指導案 — 仮説検定の考え方 —

1. 日時 : 2021 年 11 月 22 日 (月) 45 分間
2. 授業者 : 筑波大学附属高等学校教諭
川崎 宣昭
3. 学級 : 筑波大学附属高等学校 1 年 4 組 (41 名)

4. クラスの状況

自分の考えを相手にわかりやすく伝えられないことも多々あるが、教師は、新しい問題に対して様々な見方や考え方を授業の中で生徒から引き出すことができる。仮に誤った考え方や発想であっても、クラス全体でそれが正しいのか、あるいはどこに誤りがあるのかを話し合うことができる。授業の中で、生徒同士が協力をして数値実験を行う場面や、話し合い活動などは積極的にを行い、お互いに説明しあえるようなクラス全体の雰囲気作りはできていると思われる。

5. 題目 : 仮説検定の考え

6. 教材観

新学習指導要領の数学 I 「データの分析」の学習内容に「仮説検定の考え」がある。数学 I は必修科目故、全ての高校生が学ぶことになる。その授業を計画するにあたり、教材研究として何を目標とし、生徒の到達度でどのようなことを期待するのかについて考えることが難しい。

授業では、多くの生徒が興味関心を持てる題材を準備し、直感で考えると実際には異なる予想をしてしまう体験をさせることにより「仮説検定の考え」の内容に興味関心を持たせたい。ある事象が起こる可能性を調べる方法として確率分布を考える方法があり、数学 B で学ぶ。「仮説検定の考え」の授業では、その必要性に気づかせるため、クラス全体で様々な種類の実験を行ってできるだけたくさんのデータを集め、確率分布という言葉は出さないものの複数の種類の確率分布にしたがう事象のヒストグラムを作成させて考察させたい。生徒は、確率分布の知識がなくても、クラス全体で協力して得られた実験データを使い、ヒストグラムを作ることは可能である。

7. 本時の学習目標

従来の薬品を患者に投与して効果が出る確率が $\frac{1}{2}$ であるとき、36 人中何人に効果が出る可能性があるのかについて、サイコロ投げの実験（サイコロを投げて奇数の目が出る確率）に置き換えられることに気づかせる。また、直感による予測と実験結果との間に差があり、直感による判断ではなく、数学的（統計的）に考えなければならぬ必要性について理解させる。従来の薬品を患者に投与したときに効果が出る人数のヒストグラムを作成し、従来の薬の場合、新薬で効果が出る人数と同じ人数の効果が出る可能性が全くないとはいえないものの起こりにくいことを理解させたい。帰無仮説や対立仮説の用語は使わないが、従来の薬で効果が出る人数の分布に、新薬で効果が出た人数を当てはめ、有意差があるかどうかを判断する仮説検定の考え方の基本に触れさせたい。なお、仮説検定で用いる有意水準（5%や1%などだが、薬品の効果の場合には5%が慣例のようである）には触れない。

8. 観点別評価（3観点）

文部科学省 https://www.nier.go.jp/kaihatsu/pdf/gakushuhyouka_R010613-01.pdf を参照し、今回の授業に関係する部分をゴシック&アンダーラインとした。

（1）知識・技能

「知識・技能」の評価の考え方は、従前の評価の観点である「知識・理解」、「技能」においても重視してきたところです。具体的な評価方法としては、例えばペーパーテストにおいて、事実的な知識の

習得を問う問題と、知識の概念的な理解を問う問題とのバランスに配慮するなどの工夫改善を図る等が考えられます。また、児童生徒が文章による説明をしたり、各教科等の内容の特質に応じて、観察・実験をしたり、式やグラフで表現したりするなど実際に知識や技能を用いる場面を設けるなど、多様な方法を適切に取り入れていくこと等も考えられます。

・今回の授業では？

- 以前の授業で行ったサイコロ投げの実験（「サイコロを 10 回投げたときに 1 の目が出る回数は何回になることが最も多いかという実験」と結び付けることができましたか？
- サイコロ投げの実験結果をヒストグラムにまとめることの意義が理解できましたか？
- 直感的な判断と実際の実験結果との間に違いがあることをヒストグラムから読みとれましたか？

(2) 思考・判断・表現

「思考・判断・表現」の評価の考え方は、従前の評価の観点である「思考・判断・表現」においても重視してきたところです。具体的な評価方法としては、ペーパーテストのみならず、論述やレポートの作成、発表、グループや学級における話し合い、作品の制作や表現等の多様な活動を取り入れたり、それらを集めたポートフォリオを活用したりするなど評価方法を工夫することが考えられます。

・今回の授業では？

- グループ内での話し合い活動に積極的に参加することが出来ましたか？
- 自分の意見を相手に伝えようとしたときに、何らかの表現の工夫をしましたか？

(3) 主体的に学習に取り組む態度

具体的な評価方法としては、ノートやレポート等における記述、授業中の発言、教師による行動観察や、児童生徒による自己評価や相互評価等の状況を教師が評価を行う際に考慮する材料のひとつとして用いることなどが考えられます。その際、各教科等の特質に応じて、児童生徒の発達の段階や一人一人の個性を十分に考慮しながら、「知識・技能」や「思考・判断・表現」の観点の状況を踏まえた上で、評価を行う必要があります。

・今回の授業では？

- 今回の授業の内容に意欲的に取り組むことが出来ましたか？
- 生徒や教師の話の内容がわからなかったとき、どの部分がわからないのかを質問できましたか？
- 自分自身がよくわかっていない部分が何であるのかを、他の生徒や教師に説明できましたか？
- 友人や教師に質問されたときに、相手の状況に応じてわかりやすく伝える努力をしましたか？

9. 授業展開

今回の公開授業の内容は、ヒストグラムや度数分布表などの細かい図表が多く、通常の学習指導案の授業展開の書式（3段）では書きにくいので、以下のような書式で授業展開をまとめた。

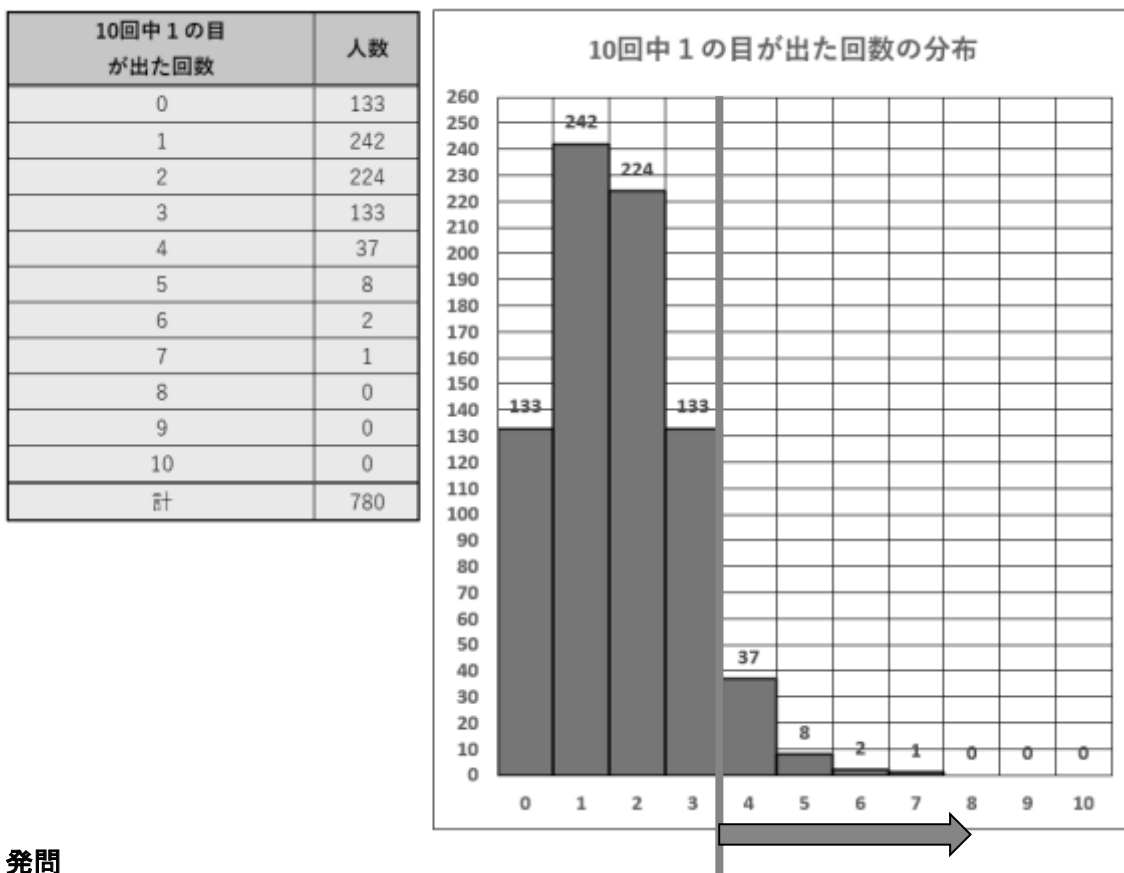
1. 導入（5分）

(1) サイコロ投げの実験の振り返りとヒストグラムの紹介

以下の実験の振り返りを行う。

「1つのサイコロを 10 回投げて 1 の目が出た回数を調べる」ことを 780 人で行うとき、1 の目が何回出

た人の人数が最も多いか？（39人がサイコロを10回投げることを20回行い、のべ780人とした.）



(2) 発問

この実験結果によれば、1の目が1回だけ出る可能性と2回だけ出る可能性とではどちらが高いですか？ また、1の目が4回以上出る可能性は約何%ですか？ それを計算するには？

1) 生徒の活動

約1分間、生徒どうしで話し合わせる。

2) 予想される生徒の考え方

1の目が1回だけ出る可能性の方が高い。

1の目が4回以上出る可能性は、 $\frac{37+8+2+1}{780} = 0.061538$ より約6.2%である。

3) 指導上の留意点

この実験結果の妥当性については、今後の確率の学習のお楽しみ。10回中2回という予想が多かった。今回もサイコロ投げの実験を行うことを予告する。

2. 展開1 (10分)

(1) 以下の<課題1>の問題の紹介

<課題1>

ある製薬会社の薬品Aは、今までの調査の結果、投与した患者のうち半数の人に効果が出ることがわかっています。このとき、次のことを考えて下さい。

- (1) 無作為に1人の患者を選び、薬品Aを投与したとき、問題の条件（下線部）から考えて、効果が出る可能性を確率で表すと？
- (2) 薬品Aを36人の患者に投与したとき、効果が出る人数が以下のア)～エ)となる可能性は何%くらいでしょうか。直感で考えてみて下さい。
ア) 18人以上 イ) 21人以上 ウ) 24人以上 エ) 27人以上

(2) <課題1>の問題を解決しようとする活動

1) 生徒の活動

- (1) は、1人の生徒の指名で解答させる。
- (2) は、席が近い6～7人のグループで話し合い活動をさせる。通常ならば机をグループごとに配置して話し合い活動をさせるが、机を離れたままとする。(感染症対策のための特殊事情)

2) 予想される生徒の考え方

- (1) はすぐにできるだろう。確率は $\frac{1}{2}$

ア) は、50%位ではないかと予想するかもしれないが、イ)～エ)については、生徒は直感的な判断をして数学的な結果よりも高い可能性を予想するだろう。

3) 指導上の留意点

- (1) は、ひとつのサイコロを1回投げて、奇数の目が出る確率と同じであることを確認する。
- (2) は、ひとつのサイコロを36回投げて、奇数の目が18, 21, 24, 27回以上出る可能性と同じであることを確認し、可能性については、導入で紹介した「過去に行ったサイコロ投げの実験」と同じように考えればよいことを確認する。「**%くらいかな？」という程度の答え方でよいことを伝える。

(3) 以下の<課題2>の問題の紹介

<課題2>

この製薬会社では、従来の薬品Aよりもより多くの患者に効果の出るような薬品Bを開発することになりました。長年の努力と研究を積み重ねてきた結果、薬品Bはいよいよ臨床試験の段階に入りました。患者の中から被検者36人を無作為抽出したところ、被検者全員が臨床試験に協力することになり、36人の患者の中で何人に投与の効果が出るのかを調べることにしました。

- (1) 薬品Bで効果が出た人の人数が24人になったとき、次の①、②のどちらの判断をしますか。
 - ① 薬品Aでも、36人中たまたま半数以上の24人に効果が出ることは十分に考えられる。したがって薬品Bは薬品Aよりもより多くの患者に効果が出るようになったとは言えない。
 - ② 薬品Aの場合に、36人中24人に効果が出るのが全くないわけではないが、それがたまたまとは言えず、薬品Aを患者に投与して24人になる可能性はかなり低い。したがって薬品Bは薬品Aよりもより多くの患者に効果が出るようになった可能性がある。

- (2) 薬品Bで効果が出た人の人数が27人になったとき、(1)と同様の考察をして下さい。
- (3) 前問(1)、(2)を確かめるには、サイコロを使ってどのような実験をすればよいですか？

(4) <課題2>の問題を解決しようとする活動

1) 生徒の活動

(1)(2)ともに、席が近い6~7人のグループで話し合い活動をさせる。クラス全体で6班あるが、それぞれの班で話し合ったことを班の代表者に説明させる。説明の際、直感だけで判断したのか、何らかの根拠があるのかについて班で出てきた意見を代表者がまとめる。

(3)については、今までの授業のように、サイコロ投げの実験をしてみたいという意見が出てきて欲しい。

2) 予想される生徒の考え方

根拠のある考え方はなかなか難しく、班でまとめた意見を聞いても相手に伝わらない可能性がある。しかし、「このようなサイコロ投げの実験をしてみたい」という意見が出てくる可能性はある。

3) 指導上の留意点

班での話し合い活動を始める前に、班で出た意見を班員全体で把握させるように指示する。また、班の中でも意見が分かれる可能性があるため、①と②について、何人ずつの意見に分かれ、それぞれがどのような主張をしているのかを発表させる。納得できる説明ができているのかを互いに評価し合う活動もさせたい。

根拠のある説明ができない可能性があり、(1)や(2)の設問を確かめる方法について考えるのが(3)であることに気づかせる。サイコロを36回投げたときに、奇数の目が24回以上、27回以上出ることがどの程度あるのかという実験の必要性に気づかせたい。

3. 展開2 (25分)

<サイコロ投げの実験>

1個のサイコロを1回投げるとき、奇数の目が出る確率は $\frac{1}{2}$ です。そのサイコロを36回投げたときに奇数の目が出た回数を X とします。

(1) X のとりうる値の範囲をすべてあげて下さい。

(2) 1人でサイコロを36回投げることは少々大変なので、サイコロ9個が入っている容器をよく混ぜ、サイコロを同時に投げるという操作を4回繰り返すことによってサイコロを36回投げたことにしましょう。そのときに奇数の目が出たサイコロの合計個数を数えて下さい。

(3) 前問(2)の作業をあと2回行って下さい。

1) 生徒の活動

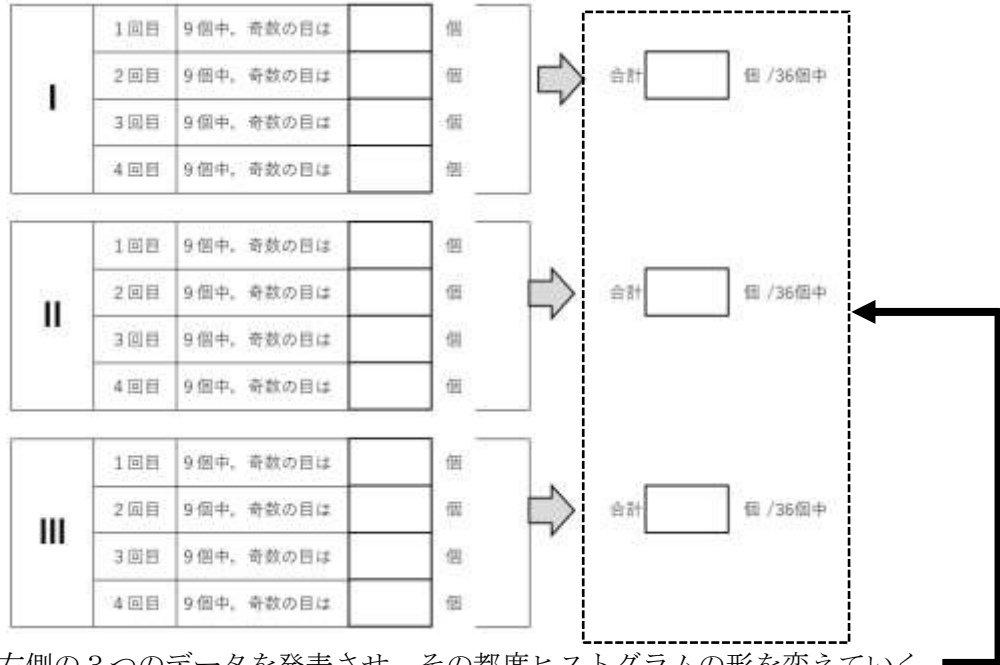
・(1)について

サイコロを36回投げるので、 X の値の範囲が0から36までの整数であることに気づかせる。

・(2) について

サイコロを 36 回投げたときに奇数の目が出た回数（実験では個数）を記録させる．この操作を 1 人につき 3 回行う．40 人の場合、のべ 120 人分の実験データを得ることができる．

以下の表に結果を記入させる．



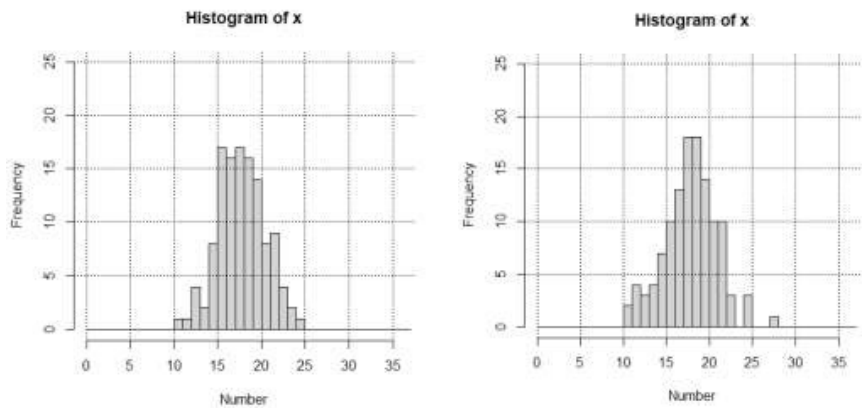
上記の表の一番右側の 3 つのデータを発表させ、その都度ヒストグラムの形を変えていく。

2) 予想される生徒の考え方

- ・以前に行ったサイコロ投げの実験と同じように、全員で実験するとサイコロを 36 回投げて奇数の目が出たサイコロの個数にばらつきがあることに気づく．
- ・18 個付近を境目に概ね左右対称なヒストグラムになっていることに気づく．
- ・24 個以上、あるいは 27 個以上奇数の目が出る可能性はあるものの、予想よりも可能性が低いことに気づく．

3) 指導上の留意点

- ・生徒一人ひとりのデータを EXCEL に入力しながら、ヒストグラムが作成されていく過程に着目させたい．最初はあまりはっきりしなくても、多くの実験データを入力していくと、ヒストグラムに一定の傾向（二項分布または正規分布の形）が見られるようになることに着目させたい．
- ・フリーソフト R によって授業のシミュレーションを 2 回行った結果は以下の通りである．右図左側では 24 回以上が 1 回、右側では 24 回以上が 4 回、27 回以上が 1 回となっているので、生徒の実験結果も概ねこのような結果になっていることを確認したい．



発問：

このサイコロの実験から、従来の薬品Aを患者に投与して24人以上や27人以上に効果が出ることはどの程度起きるのでしょうか。このことから、薬品Bは薬品Aよりも効果が出る人の人数が増えた可能性があると考えてもいいのでしょうか？

1) 予想される生徒の考え方

以下の①～③の3通り位の考え方が出てくるだろう。

- ① 薬品Aを36人の患者に投与して24人以上や27人以上に効果が出る可能性は低く、薬品Bの方が薬品Aよりも効果が出るようになったと断定できる。
- ② 薬品Aを36人の患者に投与して24人以上や27人以上に効果が出る可能性は低く、薬品Bは薬品Aよりもより多くの患者に効果が出るようになった可能性はある。
- ③ 薬品Aを36人の患者に投与しても24人以上や27人以上に効果が出る可能性はあるのだから、薬品Bが薬品Aよりもより多くの患者に効果が出るようになった可能性はあるものの、薬品Bの方が薬品Aよりも効果が出るようになったとはいえない。

2) 指導上の留意点

実際には、有意水準5%の上片側検定を行った場合、24人以上で有意差があることになるが、そのような話には触れない。様々な事象がどの程度起こりうるのかについて全くわからない場合、それに置き換えられる実験によって多くのデータを集め、予測がある程度可能であることに気づかせたい。

4. 整理 (5分)

1) この授業の確認

- ・開発した薬品の効果についての題材を、サイコロ投げの実験に置き換えて考えたことを確認する。
- ・実験によってある事柄がどの程度起こりうる可能性があるのかについて予測できることを確認する。

2) 指導上の留意点

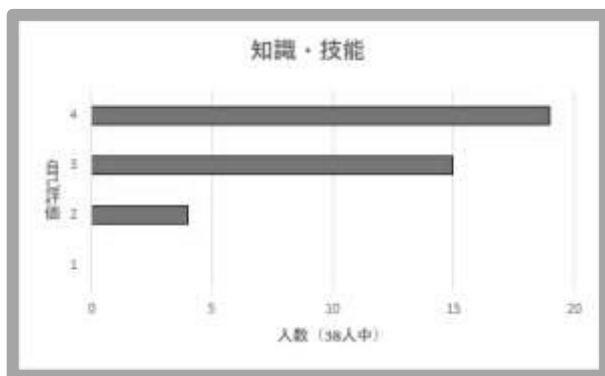
- ・中学校のときに学習した確率の考え方を使い、サイコロ投げの実験などを通じて不確実な現象を数学的(統計的)に分析できることに興味関心を持たせる。

5. 生徒の自己評価と今後の課題

以下の事柄について、個々の項目ではなく、全体的に自己評価させ、その結果を棒グラフにまとめた。

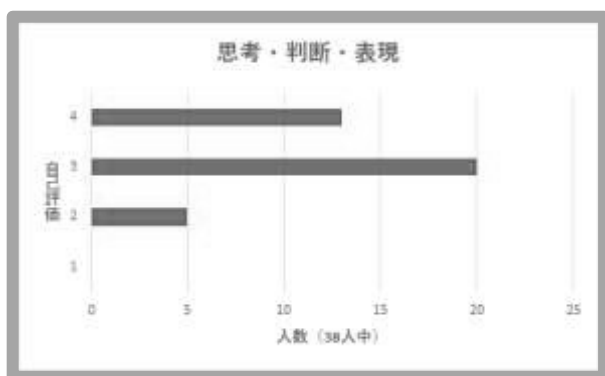
(1) 知識・技能

- 以前の授業で行ったサイコロ投げの実験(「サイコロを10回投げたときに1の目が出る回数は何回になることが最も多いかという実験」と結び付けることができましたか？)
 - サイコロ投げの実験結果をヒストグラムにまとめることの意義が理解できましたか？
 - 直感的な判断と実際の実験結果との間に違いがあることをヒストグラムから読みとれましたか？
4. よくできた。 3. まあまあよくできた。 2. あまりできなかった。 1. できなかった。



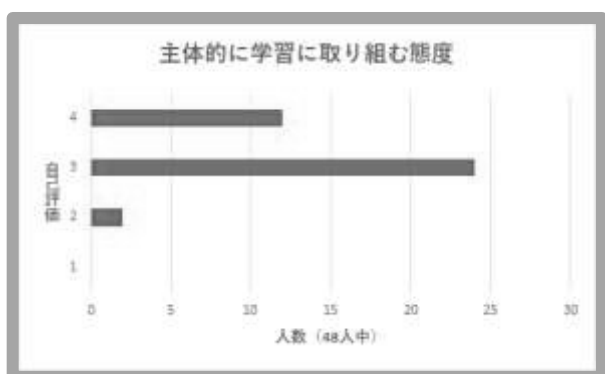
(2) 思考・判断・表現

- グループ内での話し合い活動に積極的に参加することが出来ましたか？
 - 自分の意見を相手に伝えようとしたときに、何らかの表現の工夫をしましたか？
4. よくできた. 3. まあまあよくできた. 2. あまりできなかった. 1. できなかった.



(3) 主体的に学習に取り組む態度

- 今回の授業の内容に意欲的に取り組むことが出来ましたか？
 - 生徒や教師の話の内容がわからなかったとき、どの部分がわからないのかを質問できましたか？
 - 自分自身がよくわかっていない部分が何であるのかを、他の生徒や教師に説明できましたか？
 - 友人や教師に質問されたときに、相手の状況に応じてわかりやすく伝える努力をしましたか？
4. よくできた. 3. まあまあよくできた. 2. あまりできなかった. 1. できなかった.



これらの結果から、予想以上に熱心に学習活動に取り組んでいたことが推察される。授業中の発言では、ほとんどが直感で判断しているような状況が多かったが、このアンケートの結果から、直感で判断しながらも生徒同士の話し合い活動や説明し合う活動はある程度積極的に行われていたようである。

授業実施後において感じたこと、考えたことは以下の通りである。

実際には約2時間分の授業であり、もっと話し合いをさせる活動の時間がとりたかった。時間を気にし

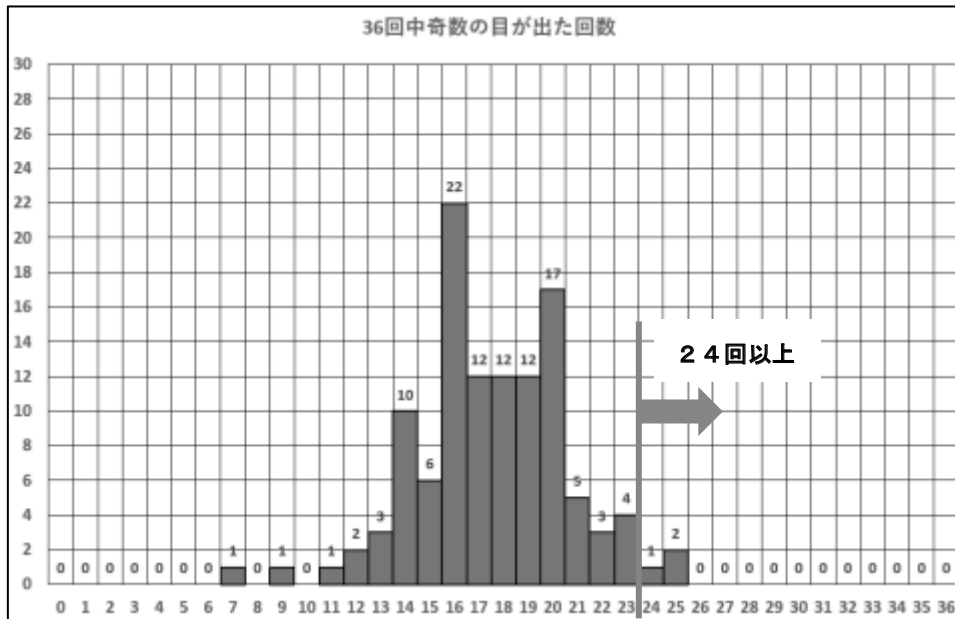
ながら少々急いで授業を進めてしまったような気がする。生徒からの意見をもっと多く収集する時間をとり、その意見に対して討議する時間をとれるようにしたかった。

生徒は確率を学習していないので、根拠のある発言がしにくいただろうという予想はしていた。実際に説得力ある発言は少なかったが、初めて学習する内容であったため、間違いを気にせず、とにかく思ったことを発言しようと努力していた生徒が数名いたことにより、授業全体が活気のあるものになったと思う。

生徒にとって今回の内容を学ぶのは初めてなので、1回の実験だけではなく、何回も同じことを実験してみたいという発想が出ており、多数回実験してみた結果をまとめてみたいという考え方や発想は、統計的な内容を学習する上で大切である。実験結果から予想はできるが、よくわからないという意見もあり、あまり自身がない考えでも授業中に正直な気持ちを発言できる雰囲気があったことは良かったと思う。

今回は、授業前の教材研究、特にPCを用いたシミュレーションに力を入れた。その理由は、サイコロ投げという実験によって起こりうる可能性を推測させなければならないからである。理論的なことがわかっているにもかかわらず、授業中の実験でどのような結果となるのかはわからない。PCで発生させた乱数により何度もシミュレーションを行い、授業中に実施する実験の予測をしておくことが授業実践への自信に繋がる。今回の授業では、根拠のある発言をさせることが難しく、実験によって何を伝え、何を考えさせ、何を今後の学習目標とすればよいのかをしっかりと考えさせるような授業を企画していきたい。

以下に、公開授業におけるサイコロ投げの実験結果のヒストグラムを掲載する。当日は欠席者が3名だったため、 $38 \times 3 = 114$ より、のべ114名の実験結果となった。その中で24回以上奇数の目が出た人は3人であり、27回以上は0人であった。サイコロ投げの実験としては概ね成功したと考えたい。



参考文献

- 1) 統計データ解析入門, 杉山高一・藤越康祝著, みみずく舎, 2009
- 2) 統計学入門, 杉山高一著, 絢文社, 2011
- 3) Rによるやさしい統計学, 山田剛史・杉澤武俊・村井潤一郎著, オーム社, 2012
- 4) 高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説数学編・理数編, 文部科学省, 学校図書, 2019