格子点ゲームを題材とした授業の開発

―相手が納得する説明文を書き上げる証明活動に焦点を当てて―

数学科　　三　輪　直　也

１．はじめに

人間は長きに渡って，学問や文化としての数学を創造し，体系化してきた．新たな数学な規則性を見出した際には，その真偽が問われ，誰もが正しいと納得できる形に表現する必要があった．このように，数学的な規則性を発見するとは，他の人々を納得させる言語活動まで指し，他者の同意を得て，数学的知識が誕生するのである（チャートランド，2004）．

新学習指導要領（平成 30 年公示）で重視される思考力・判断力・表現力の育成には，数学学習の証明活動が大きな役割を果たす．「証明」と言えば，数学の命題や定理が成り立つことを，論理的な記述によって明記することを指すと捉える傾向にあるが，近年では，探究を通して数学的な規則性を発見すること，それらが成り立つことを示すために，構想を立ててそれを明文化すること，証明を振り返って評価・改善することを含む総合的な学習プロセスとして捉えられるようになってきている．こういった証明活動が，思考力・判断力・表現力の育成を充実させるだけでなく，上述した学問としての数学観を尊重することになる．

本稿では，こういった証明活動を目指して，格子点ゲームを題材とした授業を開発することを目的とする．

２．格子点ゲームについて

(1) 格子点ゲーム

格子点ゲームは 2 人 1 組で先攻と後攻を決め，競技者同士が条件を満たす格子点を取り合うゲームである．2 人の競技者のうちどちらかが勝利者となるため，勝利を目指した思考を繰り返し行うことができる．その詳細なルールについては図 1 のようになる．

〔格子点ゲームのルール〕

① 2 人 1 組をつくって，先攻と後攻を決めてください．

② 先攻の人から交互にスタートします．座標平面上の格子点をどれか選んで，その上を黒く塗りつぶしてください．

③ 新しく打った点とすでに打ってある点をすべて結んだ線分の中点が，格子点上にあるならば，その点を打った人の負けです．

※ 格子点とは，x 座標，y 座標ともに整数値である点のことです．

図 1．格子点ゲームのルール

例えば，図 2 のように，先攻と後攻の競技者が交互に点 A（1，1），点 B（2，3），点 C（4，

2）と点を打ったとする．すると，点 C を打った時点で線分 CA，CB の中点は格子点上にない．すなわち，この時点では勝敗が決まっていないことになる．次に，後攻の競技者が点 D（5，3）に打ったとすると，線分 DA の中点が×印で示した点（3，2）のとなり，格子点上にある．この時点で，点 D を打った後攻の競技者の負けとなり，先攻の競技者の勝ちとなる．仮に，後攻の競技者が点 D’（5，4）に打ったとすると，すべての線分における中点が格子点上にないので勝敗は決まらず，次に先攻の競技者の順番となる．

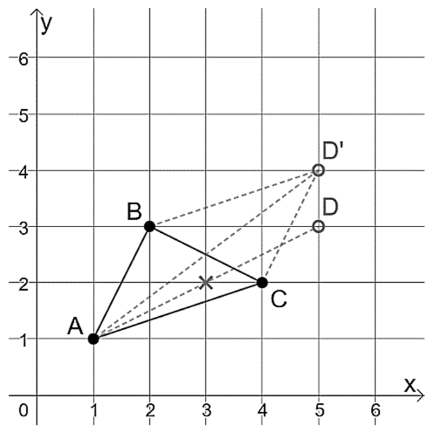

図２．具体例 1)

格子点ゲームは，5 回目に点を打つときには点の打てる格子点がなくなっているため，4 回目に点を打つ後攻の競技者が必ず勝てるようになっている．2 人組を何組かつくれば，ほとんどの組でそういった現象が起こることが予想されるため，「5 回目で点を打てる格子点は本当になくなるのか？」という問いが生まれ,「5 回目でなくなることを証明できないか？」と，演繹的な証明へと活動が前進することになる。先攻と後攻の競技者が点を交互に 4 回打ったことを前提として，5 回目で点を打てる格子点がなくなることを証明するには，後述する部屋割り論法を利用すると簡潔に証明することができる．

(2) 部屋割り論法

部屋割り論法は，1834 年にドイツの数学者ディリクレによって発見され，「鳩の巣原理」もしくは「ディリクレの原理」とも称されている．この論法を利用すれば，「少なくとも○○が 1 つ存在する」ことを述べることができ，単純明快な事実を記した論法であるとして知られている．

> 部屋割り論法とは“いくつかの部屋に部屋の数以上の人数の人を入れると 2 人以上入る部屋が少なくとも 1 つある”というものである（吉田，1989，p.646）．

格子点ゲームにおいては，x 座標と y 座標がそれぞれ偶数か奇数かによって，（偶数，偶数），（偶数，奇数），（奇数，偶数），（奇数，奇数）というように 4 通りの組合せに分けることができる．そして，線分の中点が格子点上にあるときは，線分を構成する 2 つの端点がどちらも 1 つの組合せ内に属している必要がある．例えば，図 2 の点 A（1，1）と点 D（5，3）を結んだ線分 DA の中点（3，2）は格子点上にあるが，点 A と点 D はどちらも（奇数，奇数）の組合せに属している．すなわち，偶数と奇数による 4 通りの組合せに 5 個の点を属させようとすると，どこかの組合せには少なくとも 2 個以上の点が属すことになるため，5 回目で点を打てる格子点はなくなるのである。

(3) 指導上の留意点

格子点ゲームは，偶数と奇数の理解さえあれば行うことができるため，校種問わずに扱うことができる題材である．児童・生徒の実態にも大きく影響されるが，活動が行き詰まる可能性の高い 2 つの場面を取り上げ，それぞれの場面について教師の手立てを考察する．

第一に，偶数と奇数による 4 通りの組合せを導出する場面である．ここで重要な役割を果たすのは，線分の中点が格子点上にあることとはどういった状況であるかを整理する活動である．そのためには，「例えば，（1，1）に打ったときに打てない格子点は？」というような，具体的な数値を用いて打てない点を考える発問が有効である．実際には，打てない点は（1，3），（3，1），（3，3），…があり，数の並びやそれらを座標平面上にとったときの図形的な形から何か規則性を見出すかもしれない．このようにして，偶数と奇数による 4 通り組合せを生徒から導出できるような発問を準備しておく必要がある．

第二に，5 回目で点が打てなくなるという説明文を記述する場面である．おそらく，部屋割り論法を知らない生徒が多いため，どのように文章を構成すればよいか戸惑う可能性がある．そのため，普段の授業から相手を納得させるまでが証明できることを意識付けておく必要がある．また，現象から事実だけを抽出してそれらを論理的に並べる能力や，書き上げた文章を批判的に推敲する能力を継続的に育成していく．様々な説明文が書かれた中で，部屋割り論法の理解を促す説明文を全体で共有したい．

３．格子点ゲームを題材とした授業の実践

(1) 実践した授業の概要

前章の授業構想を踏まえて，下記の概要で実践授業を実施した．今回は授業時数の制約上，部屋割り論法という用語の導入までに留まっている．

日　時：平成 30 年 5 月 12 日　第 3 校時　10 時 20 分～11 時 10 分（50 分間）
対　象：国立大学附属高等学校第 1 学年の生徒 39 名（男子 20 人，女子 19 人）
ねらい：①具体的に考えることで，格子点ゲームの規則性を見出すことができる．
　　　　②格子点ゲームを通して，部屋割り論法について理解することができる．

数学 I の「数と式」の単元では，背理法や対偶を利用した証明法が扱われており，証明における筋道の立て方について整理する機会が設けられている．そこで，数学 I を履修している高校 1 年生を対象とした実践授業を計画した．

(2) 実践授業の実際

最初に，図 3 のような座標平面とルールが書かれたワークシートを配布した．格子点ゲームのルールを全体に説明した後，「先攻と後攻であればどっちが有利だと思いますか？」と問いかけた．しかし，生徒からの反応が少なかったため，格子点ゲームの流れを把握するために隣同士で練習時間を設けた．5 分程の練習時間の後に，「先攻と後攻であればどっちが

有利だと思う？」と再び問いかけたところ，先攻が4割，後攻が6割程度に分かれた．そこで，「廊下側が先攻，窓側が後攻にします．」というように指示を出し，「ゲームスタート！」という合図のもと勝敗を決めるための真剣勝負の時間が始まった．

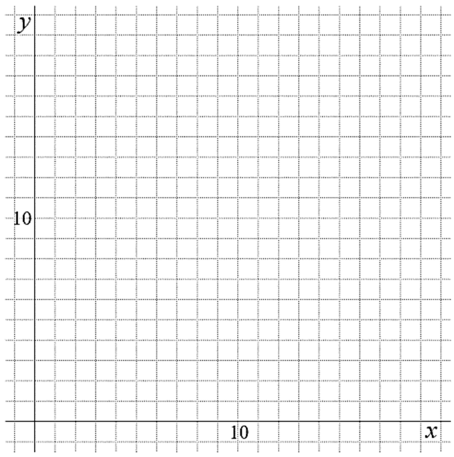

図3．座標平面

大多数の組で勝敗が決まったのを見計らって真剣勝負の時間を終了させ，「先攻と後攻でどちらが勝った？」と順々に聞いていったところ，先攻が3組，後攻が15組，決着がついていないが1組で，後攻の人の方が有利であると結論付けた．そこで，「なぜ，後攻の方が有利なの？」と問いかけたところ，生徒から「5回目で点を打つところがなくなる．」という声が多く聞こえ，5回目で点を打てる格子点がなくなることの演繹的な証明へと活動を前進させていった。

まずは，生徒個人で解決する時間を設けたが，多くの生徒は解決の見通しが立たずに行き詰まっていたため，「みんなで考えてみましょうか．」と全体に投げかけた．ただ，3，4人の生徒については自分の意見をワークシートに記述しており，どの記述内容も見ても，打つ点を文字でおいて考えていた[2)]．

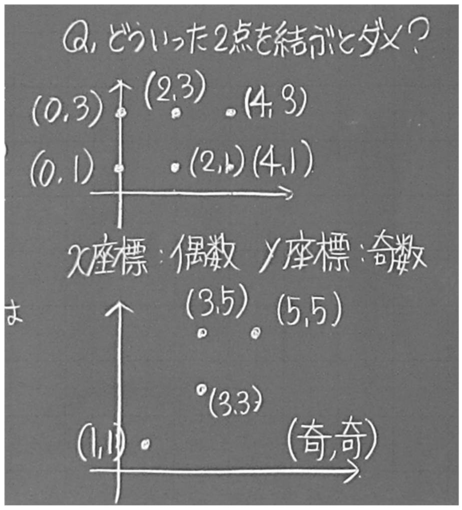

図4．板書

「どういった2点を結ぶと中点が格子点上にくるか？」，「例えば（2，1）であれば，打てない点は何がある？」と問いかけると，（0，1），（4，1），（2，3），…というつぶやきが聞こえたので，図4のようにすべての点を板書した．すると，「x 座標が偶数で y 座標が奇数だったら点を打てない．」という声が聞こえたので，生徒を指名してその意見を全体で共有した．「(2，1) 以外の点だったら？」と問いかけたところ，生徒から「(3，3) は？」という声が聞こえ，(3，3) については，「(奇数，奇数) だったら点を打てない．」と結論付けた．（偶数，偶数）と（奇数，偶数）でも同様であることを共有した後に，「点を5回打つとはどういうことなの？」と問いかけると，「あぁ！」というような声が多く聞こえたため，再び個人で解決する時間を設けた．

大多数の生徒が自分の言葉で証明を記述している中で，「証明は相手が納得する説明ができることが重要だよ．」と机間指導をしながら伝えていった．生徒を指名してワークシートの記述内容を図5のように板書させた．（板書内の「これら」とは，偶数と奇数による4通りの組合せを指している．）最後に，証明の際のこういった筋道の立て方を部屋割り論法ということを伝えた．

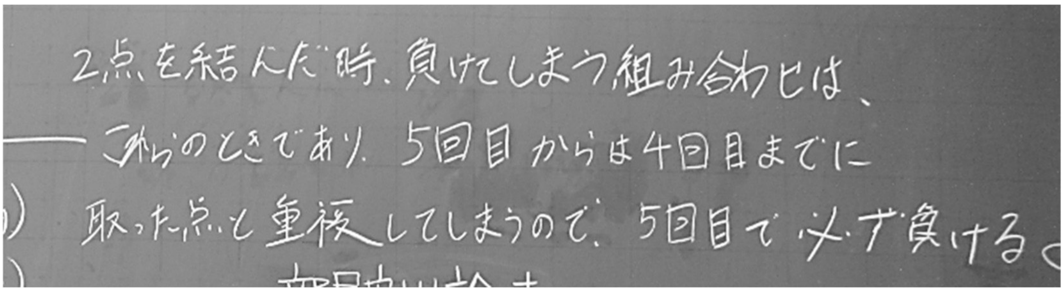

図 5．生徒による板書

４．実践授業の考察

授業後にはアンケートを配布し，生徒からの授業感想を収集した．その文面や授業の様子，ワークシートの記述内容をもとにして，前章で示した授業のねらい①，②が達成できたかを分析していく．

⑴ 具体的に考えることで，格子点ゲームの規則性を見出すことができる．

図 6 の授業感想から，格子点ゲームの規則性を見出すためには，実際に具体的な数値で考える活動が必要であったことを述べている．本実践では活動が行き詰まっていたときに，「例えば（2，1）であれば，打てない点は何がある？」という発問をした．具体的な座標を決めて，その点を打った後に打てなくなる点はどれかを考える中で，偶数と奇数による 4 通りの組合せを生徒が見出すことができた．イメージが湧きにくい抽象的な問題であっても，具体的な場面に置き換えることで，解決の手掛かりとなる考えが見出され，活動が前進していくことを生徒は実感することができた．

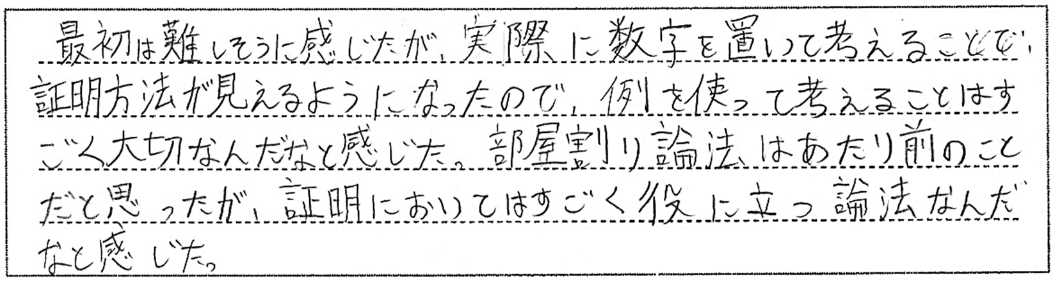

図 6．授業感想

⑵ 格子点ゲームを通して，部屋割り論法について理解することができる．

図 7 の授業感想から，部屋割り論法を理解する上で格子点ゲームが有効にはたらいたことがわかる．格子点ゲームは，ゲーム感覚で親しみやすい題材であったこと，また，生徒が部屋割り論法の単純なロジックを理解することは，比較的に困難ではないことが示唆される．今後は，部屋割り論法を利用して証明することができる格子点ゲーム以外の題材についても，授業の中で取り扱っていきたい．

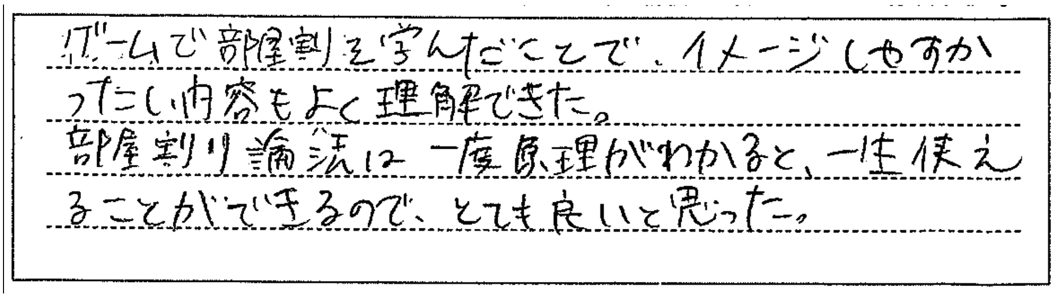
ゲームで部屋割を学んだことで、イメージしやすか
ったし、内容もよく理解できた。
部屋割り論法は一度原理がわかると、一生使え
ることができるので、とても良いと思った。

図 7．授業感想

(3) その他の考察

部屋割り論法は当たり前の事実を述べているだけであると認識する生徒も多く，図 8 の授業感想が示すように，論理的に伝えることの難しさを実感している生徒も現れた．その結果，自分の中で理解するだけでなく，相手を納得させる説明をするまでが証明であるという意識付けができた．部屋割り論法を学習したことが，様々な論法を学習することへの動機付けとして機能することが示唆される．

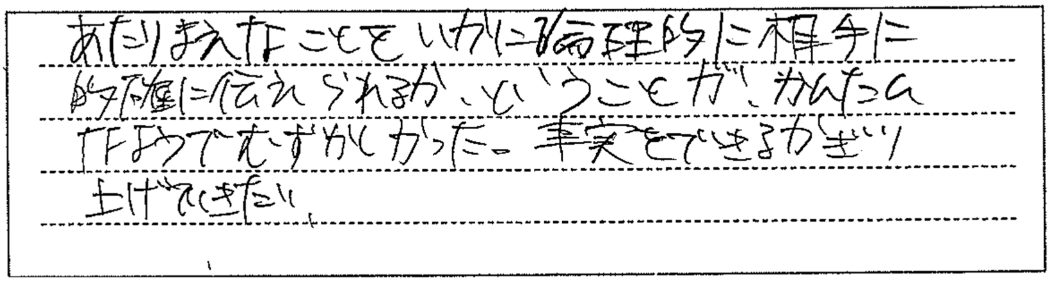
あたりまえなことをいかに論理的に相手に
的確に伝えられるか、ということが、かんたん
なようでむずかしかった。事実をできるかぎり
上げていきたい。

図 8．授業感想

5．おわりに

本稿の目的は，相手が納得する説明文を書き上げる証明活動に焦点を当てて，格子点ゲームを題材とした授業を開発することであった．

開発した実践授業では，生徒からの授業感想をもとに，授業のねらい①，②が達成できた．指導上の留意点として，線分の中点が格子点上にあることとはどういった状況であるかを具体的な数値を用いて整理すること，普段の授業から相手を納得させるまでが証明できることを意識付けておくことを挙げた．

今後の課題として，第一に，部屋割り論法を利用して証明することができる格子点ゲーム以外の題材について検討することが挙げられる．第二に，格子点ゲームを学習した後に，背理法や対偶を利用した証明法とどのように繋げるか，指導系列を検討する必要がある．

註

1）動的な数学ソフトウェア GeoGebra を使用して作成した．
https://www.geogebra.org/?lang=ja

2）打つ点を文字でおいて考えていた生徒のワークシートの記述は，以下の通りである．

Aの初手を(0,0)とする。　(a.b.c.d.e.fは.せいすう)

Bがおけるのは (2a, 2b+1) ① (2c+1, 2d) ② (2e+1, 2f+1) ③

Aがおけるのは ①のとき (2c'+1, 2d') ④, (2e'+1, 2f'+1) ⑤

②のとき (2a', 2b'+1) ⑥ (2e''+1, 2f''+1) ⑦

③のとき (2a'', 2b''+1) ⑧ (2c''+1, 2d'') ⑨

(a', b', c', a'', b'', c''はせいすう)

Bがおけるのは ④⑥のとき (2A+1, 2B+1) … ⑩

⑤⑧のとき (2C+1, 2D) … ⑪

⑦⑨のとき (2E, 2F+1) … ⑫

(A.B.C.D.E.Fはせいすう)

格子で点と点との距離が偶.偶になると中点が格子点!

点の座標

(ぐぐ) (きき) (ぐき) (きぐ)

2回目使ったら同じ

(a,b) (c,d)

$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ a+c. b+d が偶になったらおわり

参考・引用文献

ゲアリー・チャートランドほか（2004）「証明の楽しみ・基礎編」，ピアソン・エデュケーション，pp.1-8,29.

國宗進（2010）「§7 図形の論証」，数学教育学研究ハンドブック 日本数学教育学会編，東洋館出版社，pp.123-132.

文部科学省（2018）.「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」. http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073_05.pdf

吉田稔ほか（1989）「話題源数学 心を揺する楽しい授業」，東京法令出版，pp.645-647.