

氏名	日浅 龍太
学位の種類	博士 (理学)
学位記番号	博 甲 第 10195 号
学位授与年月日	令和 4 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	Combinatorial realizations of the crystal bases for extremal weight modules over quantized hyperbolic Kac-Moody algebras of rank 2 (ランク 2 双曲型量子群上のエクストリーマル・ウェイト加群に対する結晶基底の組合せ論的実現)
主査	筑波大学教授 博士(理学) 佐垣 大輔
副査	筑波大学教授 博士(理学) 笥 知之
副査	筑波大学教授 博士(理学) 小野 肇
副査	筑波大学講師 博士(数理科学) 木村 健一郎

論 文 の 要 旨

当学位論文では, ランク2の双曲型 Kac-Moody リー代数に付随した量子群上のエクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の組み合わせ論的実現を研究している. 当学位論文で得られている主要な結果は以下の通りである.

1. 与えられた整ウェイトについて, それを通る Weyl 群軌道が優整ウェイトも反優整ウェイトも含まないための必要十分条件を与えている.
2. Lakshmibai-Seshadri パスのなすクリスタルのクリスタル・グラフが連結になるための必要十分条件を与えている. また, 連結にならない場合は, 連結成分が(可算)無限個あることを示している.
3. Lakshmibai-Seshadri パスのなすクリスタルの主要な連結成分が, エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の主要な連結成分と同型であることを示している.
4. エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の多面体実現を与えている.

学位論文の2節では, この論文を通して使用する記号や, 基礎概念がまとめられている. 2.3節で述べられているように, エクストリーマル・ウェイト加群とは, (量子群の表現論においては最も基本的な)可積分な最高ウェイト加群や最低ウェイト加群の自然な一般化として, 柏原正樹(1994)によって導入された. この加群は, エクストリーマル・ウェイトと呼ばれるデータによって定まる, 量子群上の cyclic な加群であり, 結晶基底を持つことが知られている. 3節ではこの論文で得られた主要な結果が簡潔にまとめられている. 4節以降は3節で述べた定理の証明がそれぞれの節で与えられている.

エクストリーマル・ウェイト加群は, それを定めるエクストリーマル・ウェイトによっては, (良く知られている)可積分な最高ウェイト加群や最低ウェイト加群になってしまうことがある. Theorem 3.1 では, そうならない

ための条件を具体的に与えている. この定理は 4 節で証明されている.

Theorem 3.1 の条件をみたすエクストリーマル・ウェイトが与えられたとき, それを型とする Lakshmibai-Seshadri パスのなす結晶基底が定まる. ここで, Lakshmibai-Seshadri パスとは, エクストリーマル・ウェイトを通る Weyl 群軌道の元を方向ベクトルとする「折れ線」であり, chain condition と呼ばれる組み合わせ論的な条件を満たすもののことである. この集合にはルート作用素を用いて結晶基底の構造が入ることが知られている. Theorem 3.2 ではこの結晶基底の結晶基底・グラフが連結になるための必要十分を与えている. 連結にならない場合は, 連結成分が(可算)無限個あることを示している. この定理の証明は 5 節で与えられている. また, Theorems 3.3, 3.4 および Corollary 3.5 では, Lakshmibai-Seshadri パスのなす結晶基底における「原点とエクストリーマル・ウェイトを結ぶ直線」を含む連結成分と, エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底における「エクストリーマル・ウェイト加群の生成元に対応する元」を含む連結成分について考察し, これらが同型であることを示している. 特に, Lakshmibai-Seshadri パスのなす結晶基底が連結であるとき, この結晶基底がエクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底と同型であることを示している.

Theorems 3.6, 3.7 ではエクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の多面体実現について考察されている(証明は 7 節で与えられている). $Z(\infty)$ を整数全体の集合 Z の可算無限個の直和とすると, $Z(\infty)$ には結晶基底の構造が入ることが知られている. また, エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底が $Z(\infty)$ のある部分結晶基底と同型であることもわかる. これらの定理において, この部分結晶基底を定める($Z(\infty)$ の座標に関する) 不等式が具体的に与えられており, それによってエクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底が $R(\infty)$ (実数全体の集合 R の可算無限個の直和) における多面体の格子点として実現されている.

審 査 の 要 旨

[批評]

Kac-Moody 代数は有限型, アフィン型, 不定型の3つに分類される. 本論文で扱っているランク2の双曲型は不定型に含まれる. 一般に, 不定型の Kac-Moody 代数に関する表現論や組み合わせ論は, 研究が非常に困難であり, いまだ十分な研究が進んでいない. 実際, ランク2の双曲型の場合でも, Lakshmibai-Seshadri パスのなす結晶基底やエクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の構造に関する先行研究は, エクストリーマル・ウェイトが非常に特別な場合に限定されていた. 当学位論文は, その先行研究をエクストリーマル・ウェイトが一般の場合に大幅に拡張したものであり, その価値は非常に高い. 先行研究においては, 結晶基底の構造からエクストリーマル・ウェイト加群の既約性が証明されており, 当学位論文の結果もエクストリーマル・ウェイト加群の構造に関する研究への応用が期待される. また, エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底を, $R(\infty)$ における具体的に記述された多面体内の格子点として実現した研究成果は, (アフィン型の場合ですら)これまでに全くなされていなかった極めて斬新で独自性の高いアプローチであり, 今後, 関連した研究が発展することが期待される.

以上をふまえて, 当学位論文は学位授与に十分に値すると判断する.

〔最終試験結果〕

令和4年2月22日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。