

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04803

研究課題名(和文) Kirillov-Reshetikhin 加群の結晶基底とその組合せ論的实现

研究課題名(英文) Crystal bases for Kirillov-Reshetikhin modules and their combinatorial realization

研究代表者

佐垣 大輔 (Sagaki, Daisuke)

筑波大学・数理解物質系・教授

研究者番号：40344866

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1) エクストリーマル・ウェイト加群における Demazure 型部分加群の商加群であって、その次数付き指標が非対称 Macdonald 多項式の特異化になっているものを構成した。(2) 標準単項式理論を半無限 Lakshmibai-Seshadri パスの場合に拡張し、半無限標準単項式理論を構築した。その応用として、優整ウェイトと反優整ウェイトに関する Chevalley 型の公式を与えた。(3) エクストリーマル・ウェイト加群の商加群として、レベル・ゼロ van der Kallen 加群を構成し、その次数付き指標が非対称 Macdonald 多項式の特異化であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

当研究課題の主な研究対象である Kirillov-Reshetikhin 加群のうち、レベルが1のものについては「レベル・ゼロ基本表現」と呼ばれる(結晶基底を持つ)有限次元表現と一致していることが知られている。また、レベル・ゼロ基本表現のいくつかのテンソル積は量子 Weyl 加群と呼ばれており、エクストリーマル・ウェイト加群の(Demazure 型の部分加群の)商加群として得られることが知られている。今回の結果は、非対称 Macdonald 多項式の特異化と、レベル1のKirillov-Reshetikhin 加群を結びつける重要な研究成果である。

研究成果の概要(英文)：(1) I constructed a quotient module of a Demazure-type submodule in an extremal weight module whose graded character is identical to a specialization of a nonsymmetric Macdonald polynomial.

(2) I extended the (classical) standard monomial theory (due to Peter Littelmann) to the case of semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths, and gave the semi-infinite standard monomial theory. As applications, I gave Chevalley-type formulas for graded characters of Demazure-type submodules in extremal weight modules for dominant and antidominant integral weights.

(3) I constructed a level-zero van der Kallen module as a quotient of an extremal weight module, and proved that its graded character is identical to a specialization of a nonsymmetric Macdonald polynomial.

研究分野：リー代数と量子群の組み合わせ論的表現論

キーワード：量子アフィン代数 結晶基底 パス模型 有限次元既約表現 Kirillov-Reshetikhin 加群 Lakshmibai-Seshadri パス Macdonald 多項式 標準単項式理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

量子アフィン代数(次数作用素なしのもの)の有限次元既約表現のうち、結晶基底を持つものは、統計力学における可解格子模型の理論への応用等の点から極めて重要であり、国内外の多くの研究者が組合せ論や幾何学といった様々な手法を用いて研究している。そこで問題になるのは「どのような有限次元既約表現が結晶基底を持つか?」ということだが、これに関しては次のような予想がある。

予想. Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群と呼ばれる有限次元既約表現は結晶基底を持つ。逆に、量子アフィン代数の有限次元既約表現が結晶基底を持つならば、それは KR 加群のいくつかのテンソル積に同型である。

この予想の解決は、量子アフィン代数の表現論や可解格子模型の理論における最も重要な課題の1つであるが、現時点においても部分的にしか解決されていない。

## 2. 研究の目的

- (1) 量子アフィン代数上の KR 加群が結晶基底を持つことを、量子アフィン代数のタイプに依らないような統一的方法で、証明する。
- (2) KR 加群の結晶基底を(クリスタルとして) 組合せ論的に実現する。そして、その応用として、KR 加群の結晶基底の完全性について研究を行う。

## 3. 研究の方法

- (1) KR クリスタルの相似性に着目し、レベル1の KR クリスタル(すなわち、レベル・ゼロ基本表現の結晶基底)を基にして、KR 加群の結晶基底と同型になると予想される(抽象的な)クリスタルを組合せ論的方法で構成する。
- (2) (1)で得られたクリスタルを通して、KR 加群(の結晶基底)の構造を予想し、KR 加群が実際に結晶基底を持つことを証明する。
- (3) (2)の結晶基底が、(1)のクリスタルと同型であることを確認し、(1)のクリスタルを用いて KR クリスタルの完全性などを調べる。

## 4. 研究成果

- (1) レベル1の KR 加群はレベル・ゼロ基本表現と同型である。そして、レベル・ゼロ基本表現のいくつかのテンソル積は、量子 Weyl 加群と呼ばれ、エクストリーマル・ウェイト加群における Demazure 型部分加群の商加群になっていることが知られている。この事実を踏まえて、エクストリーマル・ウェイト加群における Demazure 型部分加群の次数付き指標に関する研究を行い、Demazure 型部分加群の商加群で、その次数付き指標が非対称 Macdonald 多項式に等しいものを構成した。
- (2) Littelman (1996) は、可積分最高ウェイト加群および対応する(通常の)Lakshmibai-Seshadri (LS) パスに対する「標準単項式理論 (standard monomial theory)」を与え

た．当研究において，この理論の「半無限」類似として，エクストリーマル・ウェイト加群と対応する半無限 LS パスに対する「半無限標準単項式理論」を構築した．

- ( 3 ) エクストリーマル・ウェイト加群の商加群として(レベル・ゼロの)van der Kallen 加群を新たに導入し，その結晶基底が半無限 LS パスのなすクリスタルの部分集合として実現した．そして，van der Kallen 加群の次数付き指標が非対称 Macdonald 多項式の特殊化に等しいことを示した．
- ( 4 ) レベル1の KR クリスタルのテンソル積は，量子 LS パスのなすクリスタルと同型である．量子 LS パスのなすクリスタル上の次数関数が，量子 LS パスのテンソル積に関してどのようにふるまうかを記述した．
- ( 5 ) ( 2 )の結果を応用して，エクストリーマル・ウェイト加群における Demazure 部分加群の次数付き指標に関する Chevalley 型の公式(優整ウェイトおよび反優整ウェイトの場合)を証明した．さらに，極小ウェイトに関する Monk 型の公式(極小ウェイトと Demazure 部分加群の最高ウェイトが同じ Weyl 部屋に含まれている場合)も証明した．
- ( 6 ) ( 5 )で述べた反優整ウェイトに対する Chevalley 型の公式を minuscule ウェイトに限定したものを考えた．そして，項のキャンセレーションをすべて取り除き「放物型の」Chevalley 公式を正確に記述することに成功した．
- ( 7 ) A 型の場合に，Monk 型の公式を自然表現に現れる任意の極小ウェイトにまで拡張した．

平成 27 年度から平成 31 年度・令和元年度までに行った当研究では，当初の目標であった KR 加群の結晶基底の存在を示すことはできなかったが，それと密接に関連する半無限 LS パスや量子 LS パスの研究が著しく進展した．将来，これらの研究を基に，Kirillov-Reshetikhin 加群の結晶基底の研究がより広い視点で行われることが大いに期待される．また，半無限 LS パスや量子 LS パスを用いて記述される Chevalley 型の公式や Monk 型の公式については，幾何的応用(半無限シューベルト・カリキュラス等)もあるため，現在も活発に研究を行っている．以上により当研究で得られた研究成果はこの分野の発展にとって大いに重要なものであると考える．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 S.Naito and D.Sagaki	4. 巻 ---
2. 論文標題 Level-zero van der Kallen modules and specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t=\infty$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 ---
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S.Kato, S.Naito, and D.Sagaki	4. 巻 ---
2. 論文標題 Equivariant $K$ -theory of semi-infinite flag manifolds and Pieri-Chevalley formula	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Duke Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 ---
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki	4. 巻 169
2. 論文標題 Tensor product decomposition theorem for quantum Lakshmibai-Seshadri paths and standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 36pp.
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.105122">https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.105122</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S.Naito, F.Nomoto, and D.Sagaki	4. 巻 24
2. 論文標題 Representation-theoretic interpretation of Cherednik-Orr's recursion formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t=\infty$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 155--191
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1007/s00031-017-9467-0">https://doi.org/10.1007/s00031-017-9467-0</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S.Naito, F.Nomoto, and D.Sagaki	4. 巻 370
2. 論文標題 Specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t=\infty$ and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2739--2783
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1090/tran/7114">https://doi.org/10.1090/tran/7114</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 C.Lenart, S.Naito, D.Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono	4. 巻 22
2. 論文標題 A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: nonsymmetric Macdonald polynomials at $t=0$ and Demazure characters	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 1041--1079
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00031-017-9421-1">https://doi.org/10.1007/s00031-017-9421-1</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 C.Lenart, S.Naito, D.Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono	4. 巻 2017
2. 論文標題 A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II. Alcove model, path model, and $P=X$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices (IMRN)	6. 最初と最後の頁 4259--4319
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1093/imrn/rnw129">https://doi.org/10.1093/imrn/rnw129</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Naito and D. Sagaki	4. 巻 283
2. 論文標題 Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 937--978
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1628-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki	4. 巻 290
2. 論文標題 Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 967--1009
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.1016/j.aim.2015.11.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Daisuke Sagaki
2. 発表標題 Chevalley type and Monk type formulas for level-zero Demazure modules
3. 学会等名 Crystals and Their Generalizations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Daisuke Sagaki
2. 発表標題 Combinatorial standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths
3. 学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daisuke Sagaki
2. 発表標題 Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras
3. 学会等名 Lectures in Seoul National University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Daisuke Sagaki
2. 発表標題 Specializations of nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure type submodules of extremal weight modules
3. 学会等名 Algebraic and Combinatorial Aspects in Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Daisuke Sagaki
2. 発表標題 Introduction to extremal weight modules for quantum affine algebras
3. 学会等名 Spring School on Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考