

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18946

研究課題名(和文)半正定値基を用いた錐最適化問題の近似解法の開発

研究課題名(英文) Development of approximation methods for cone optimization problems using semidefinite bases

研究代表者

吉瀬 章子(Yoshise, Akiko)

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：50234472

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では凸多面錐を用いた新たな半正定値行列錐の内部近似と外部近似手法を提案した。まずTanaka and Yoshise (2018) が提案した半正定値基(SD 基)に基づき、SD 基の疎性を失わない拡張を行い、拡張SD 基による凸多面錐近似が優対角行列の集合を含み、スケーリング優対角行列の集合に含まれること、またスケーリング優対角行列の集合は拡張SD 基を用いて表現できることを理論的に示した。さらに、拡張SD 基による凸多面錐近似を使用した切除平面法と、最大安定集合問題の半正定値緩和問題に対する数値実験により、提案手法が既存手法に比べて極めて効率的であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

「数理最適化」は、生産システムやサービス事業の効率化や、さらに最近では人工知能を支える要素技術として、社会に定着している。本研究では、この数理最適化分野で近年特に盛んに研究されている錐最適化の、とりわけ解くことが困難と言われている問題群に対して、応募者らが発案した「半正定値基」を用いて、新たな発想に基づく解法を提案している。さらに「拡張半正定値基」を新規に提案し、それらの凸包が、線形計画問題で判定できる新たな行列の集合を与えていることを理論的に示し、さらにそれらを用いて求解が困難とされる最大安定集合問題に対する、計算効率性に優れた解法を提案したことは、学術的にも、また社会的にも意義は高い。

研究成果の概要(英文)：We develop techniques to construct a series of sparse polyhedral approximations of the semidefinite cone. Motivated by the semidefinite (SD) bases proposed by Tanaka and Yoshise (2018), we propose a simple expansion of SD bases so as to keep the sparsity of the matrices composing it. We prove that the polyhedral approximation using our expanded SD bases contains the set of all diagonally dominant matrices and is contained in the set of all scaled diagonally dominant matrices. We also prove that the set of all scaled diagonally dominant matrices can be expressed using an infinite number of expanded SD bases. We use our approximations as the initial approximation in cutting plane methods for solving a semidefinite relaxation of the maximum stable set problem. It is found that the proposed methods with expanded SD bases are significantly more efficient than methods using other existing approximations or solving semidefinite relaxation problems directly.

研究分野：数理最適化

キーワード：錐最適化 半正定値最適化 二重非負値最適化 共正値最適化 線形計画問題

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

背景 0-1 整数計画問題に対する錐最適化問題の高い問題記述能力

「数理最適化」は、生産システムやサービス事業の効率化や、さらに最近では人工知能を支える要素技術として、1940 年代に誕生して以来、社会に役立つ数理モデル・計算技術として注目を集めている。例えば、人工知能が搭載されたシステムは、自律的でありながら目的に沿った行動を実現するため、所与の制約の範囲内では任意の判断・行動を許す設計が行われている。この「制約の範囲内であるか」を判断する問題は制約充足問題と呼ばれ、数理最適化問題の典型的な問題の一つである 0-1 整数計画問題に帰着されることが知られている。0-1 整数計画問題は、厳密解の求解が困難な「NP 困難」と呼ばれる問題群に属しているため、様々な発見的解法や緩和解法が提案されている。本研究では近年注目を集めている 0-1 整数計画問題に対する「錐最適化緩和」における新たな手法を提案することを目的としている。

背景 論文[1]で副次的に得られた「半正定値基」を用いた近似手法

研究代表者らが下記[1]で副次的に得られた「半正定値基」を用いると、0-1 整数計画問題に対して、「半正定値基による二重非負値錐近似」というこれまでにない斬新な手法が提案できる。

(表 1) は、0-1 変数が  $n$  個あると仮定した際の、2 つの既存緩和モデル (1, 2 列目) と、本研究で提案する新しい緩和モデル (3 列目) に対する、解法、変数の数、各解法 1 反復あたりの計算量をまとめたものである。既存緩和モデルの内、半正定値緩和は精度が不十分であり、二重非負値緩和は精度はよいが計算コストが非常に高いことが知られている。本研究で着目した手法は、半正定値緩和より計算量が多くなる可能性はあるが、使用する半正定値基の数  $k$  が  $k \leq k^2$  であれば、二重非負値緩和より遥かに小さな計算量となる可能性が高く、有望である。

[1] Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise, "Tractable Subcones and LP-based Algorithms for Testing Copositivity," *Annals of Operations Research*, Vol.265, No.1, pp.155-182 (2018).

(表 1) 0-1 変数 $n$ 個を仮定	(既存手法) 半正定値緩和	(既存手法) 二重非負値緩和	$k$ 個の半正定値基の二 重非負値錐近似
緩和モデルの 解を求める解法	半正定値最適化問題に 対する内点法	半正定値最適化問題に 対する内点法	線形計画問題に対する 単体法・内点法
変数の数 (オーダー)	$O(n^2)$	$O(n^4)$	$O(kn^2)$
解法 1 反復の計算量	$O(n^6)$	$O(n^{12})$	$O(k^3n^6)$

### 2. 研究の目的

「数理最適化」は、生産システムやサービス事業の効率化や、さらに最近では人工知能を支える要素技術として、1940 年代に誕生して以来、社会に役立つ数理モデル・計算技術として注目を集めている。本研究の目的は、この数理最適化分野で近年特に盛んに研究されている錐最適化の、とりわけ解くことが困難と言われている問題群に対して、研究代表者らが論文[1]で発案した「半正定値基」を用いて、新たな発想に基づく解法を提案することである。

### 3. 研究の方法

対称半正定値行列すべてからなる集合は、半正定値錐と呼ばれ図 1 の  $2 \times 2$  行列に対する半正定値錐の図が示すように曲面を含んでいる。半正定値錐の部分集合である二重非負値錐も図 1 の  $2 \times 2$  行列に対する二重非負値錐の図が示すように同様に曲面を含む。これまで半正定値錐については、この曲面の性質に関する研究が中心であった。また半正定値最適化問題に対しては、主双対内点法を基盤としたアルゴリズムが、SDPA や SeDuMi といった無償のソルバー (最適化問題の解を求めるソフトウェア) 上や一部の有償ソルバー上でも実装されており、高精度の解が現実的な時間で得られる状況にある。錐最適化問題については十分な計算環境は整備されているとして、既存研究の改良が中心となっていた。

しかし論文[1]で述べたように多様な「半正定値基」が簡単に得られることから、これを用いた新たな挑戦的研究が可能になる。図 3, 4 では、「半正定値基」を用いた錐の内部近

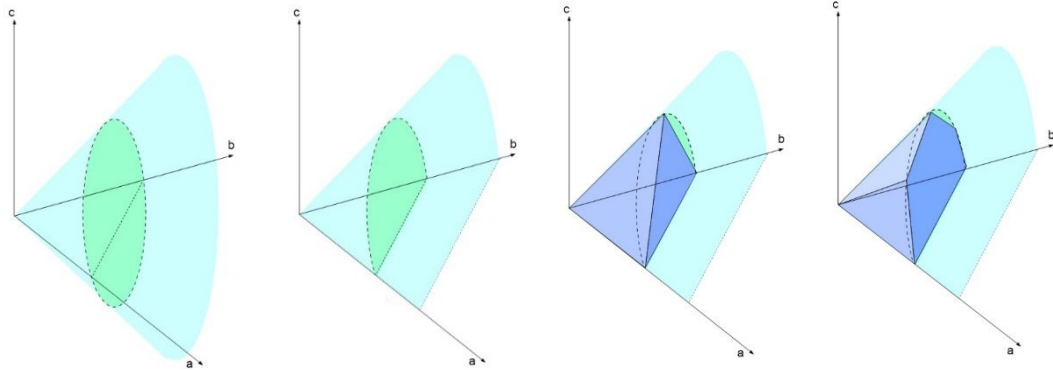


図 1 :  $2 \times 2$  半正定値錐 図 2 :  $2 \times 2$  二重非負値錐 図 3 : 半正定値基近似 1 図 4 : 半正定値基近似 2

似を図示している。さらに内部近似の稜線を構成する「半正定値基」での錐の接平面を用いれば、半正定値錐や二重非負値錐の多面体による外部近似が可能になり、以下のような検証を行うことができる。

- (ア) 「半正定値基」を用いた錐の内部近似・外部近似による近似アルゴリズムと精度の検証
- (イ) 離散最適化の錐最適化緩和における組合せ構造の「半正定値基底」による表現と応用可能性の検証
- (ウ) 半正定値基の拡張可能性に関する検証

本研究では以上 3 点を検証する研究を行った。

#### 4. 研究成果

本課題の成果は、下記の論文にまとめられている。

[2] Yuzhu Wang, Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise, “Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their application,” arXiv:1905.00166 [math.OC] (2019)

「3. 研究の方法」で述べた (ア),(イ),(ウ)のそれぞれに取り組んだが、まず(ウ)に関する興味深い理論的な成果が得られた。

半正定値基を構成する行列の疎性は、(ア)の計算効率に大きな影響を与えるが、半正定値基に単一パラメータを加えるだけで、疎性を壊さずに新たな半正定値基(以下では「拡張半正定値基」と呼ぶ)が得られることを示した。さらに半正定値基の凸包からなる行列の集合が優対角行列全体の集合と一致すること、拡張半正定値基の凸包からなる行列の集合はスケーリング優対角行列全体の集合と一致する、理論的な性質を導くことができた。このことは、線形計画問題で判定できる新たな行列の集合を定義したことを意味している。

さらに拡張半正定値基を用いて、(ア)と(イ)の検証を行った。最大安定集合問題に対する半正定値緩和問題を解くための切除平面法に拡張半正定値基を適用し、半定値緩和問題を直接半正定値計画問題として解く手法を含む、既存手法との比較を行ったところ、拡張半正定値基を適用した切除平面法が極めて効率的であることが確認できた。

本課題では、この数理最適化分野で近年特に盛んに研究されている錐最適化の、とりわけ解くことが困難と言われている問題群に対して、研究代表者らが発案した「半正定値基」を用いて、新たな発想に基づく解法を提案した。特に「半正定値基」の疎性を損なわずに拡張した「拡張半正定値基」を提案し、それらの凸包が、線形計画問題で判定できる新たな行列の集合を与えていることを理論的に示し、さらにそれらを用いて求解が困難とされる最大安定集合問題に対する、計算効率性に優れた解法を提案したことは、学術的にも、また社会的にも意義は高い。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise	4. 巻 265
2. 論文標題 LP-based tractable subcones of the semidefinite plus nonnegative cone	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annals of Operations Research	6. 最初と最後の頁 155-182
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10479-017-2720-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yasutaka Miyagawa, Yosuke Watanabe, Maiko Shigeno, Kiyo Ishii, Atsuko Takehusa and Akiko Yoshise	4. 巻 31
2. 論文標題 Bounds for two static optimization problems on routing and spectrum allocation of anycasting	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Optical Switching and Networking	6. 最初と最後の頁 144-161
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.osn.2018.10.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masaki Yamada, Masashi Kimura, Naoki Takahashi and Akiko Yoshise	4. 巻 1353
2. 論文標題 Optimization-based analysis of last-mile one-way mobility sharing	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discussion Paper Series	6. 最初と最後の頁 1-35
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 成島大吾, 田中彰浩, 吉瀬章子	4. 巻 2018
2. 論文標題 半正定値基底を用いた錐最適化問題の近似について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集	6. 最初と最後の頁 168-169
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 山田匡規, 木村雅志, 高橋直希, 吉瀬章子	4. 巻 2018
2. 論文標題 ワンウェイ型ラストマイルモビリティシェアリングのオペレーション最適化及び新規戦略の検討	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集	6. 最初と最後の頁 88-89
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise	4. 巻 265
2. 論文標題 LP-based tractable subcones of the semidefinite plus nonnegative cone	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annals of Operations Research	6. 最初と最後の頁 155-182
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10479-017-2720-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計5件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Yuzhu wang, Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise
2. 発表標題 Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their applications
3. 学会等名 The Sixth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuzhu wang and Akiko Yoshise
2. 発表標題 Acceleration of the Lagrangian-DNN method for a class of QOPs
3. 学会等名 International Symposium on Mathematical Programming (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田匡規, 木村雅志, 高橋直希, 吉瀬章子
2. 発表標題 ワンウェイ型ラストマイルモビリティシェアリングのオペレーション最適化及び新規戦略の検討
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 成島大吾, 田中彰浩, 吉瀬章子
2. 発表標題 半正定値基底を用いた錐最適化問題の近似について
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Daigo Narushima, Akihiro Tanaka, and Akiko Yoshise
2. 発表標題 Inner and outer approximations of the semidefinite cone using SD bases and their Applications to Some NP-Hard Problems
3. 学会等名 SIAM Optimization 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----