2020筑波大学附属駒場論集60集

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６か年から大学へ（５年計画の４年次）－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須田　　学・薄井　裕樹・鈴木　清夫
須藤　雄生・町田多加志・三井田裕樹
吉崎　健太

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６か年から大学へ（５年計画の４年次）－

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須田　　学・薄井　裕樹・鈴木　清夫
須藤　雄生・町田多加志・三井田裕樹
吉崎　健太

要約

2017 年度にスーパーサイエンスハイスクール４期目に指定され，今年で通算 19 年目となる。当初より，数学科は日々の授業において生徒が探求的で深い学びにつながる数学的活動の契機となるような教材の開発及び実践・発信・共有に継続的に取り組んできた。４期目より新たに企画した本校 SSH 研究で育った OB を活用する数学オリンピックワークショップも４年目を迎え，オンラインでの実施も含め，新たな試みがなされた。課題研究等の主体的な探求活動を支援するための取り組みも，SSH 研究発表会等に参加した生徒が活躍することで成果を出している。ただし，今年度はコロナ禍により，中止になる発表会やイベントも多かった。一方で，オンラインでの新たな実施にも挑戦できた。本稿は数学科の取り組みの報告と，これからの計画について記載したものである。

キーワード：探究的で深い学び，中高大院連携

1　はじめに

本校は 2002 年度からスーパーサイエンスハイスクール（以下，SSH）の指定を受け，今年度は SSH の第４期４年目，通算 19 年目である。高等教育においても探求型の学びや対話的な学びが教育の柱となった昨今において，中等教育においても高等教育機関での学びの視点に立った学習指導で活用する教材の開発はますますその重要性を高めている。また，コロナ禍によりオンライン化も重要な視点となった。

数学科としては本校 SSH 第４期の研究主題「国際社会に貢献する科学者・技術者の育成を目指した探求型学習システムの構築と教材開発」のもと，これまで継続して取り組んできた教材及びカリキュラムの開発により一層注力するとともに，数学オリンピック参加や課題研究等，生徒の探求的な活動を支援する取り組みについても，これまでの実践及び経験を踏まえつつ，オンライン実施も含め新しい取り組みも実践している。

数学科ではこれら様々な取り組みの基盤は授業であると考えている。日々の授業の目標は，知識や技能及び表現力などを身に付けさせながら創造性の基礎を培い，数学のよさを認識して積極的に活用することや数学的論拠に基づいて判断する態度を育てることである。そして，日々の授業において生徒も教師もわくわくして取り組めるような教材を教師が開発し実践することが，生徒の生涯にわたって積極的に数学にかかわっていく能力や態度を育む契機になると考えている。

これまでの 19 年間，数学科は大学や社会に繋がる中高の教材を開発すべく研究を行ってきた。数学の様々な分野において，これまでに開発した教材数は 100 に到達しようとしている。また，これらの教材を効果的に実践するため開発した中高６カ年のカリキュラムも深化させ，本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置するとともに，その実践例を教育研究会・教員研修会等で授業案として発信・公開し，その効果を確認している。

さらに，生徒の数学への興味関心を高めるための探求型学習システムとして「課題研究（高２・高３）」および「テーマ学習（中３）」を設定し，生徒の探求・発表の機会を作るとともに，数学オリンピックへの参加支援や数学科学研究部など生徒の数学的活動の支援等も実施している。

<Project research>
Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

また，第４期からの新しい取り組みとして，本校OB で国際数学オリンピックのメダリスト達に協力を仰ぎ，「数学オリンピックワークショップ」を 2017 年度より継続実施している。コロナ禍により，今年度はオンラインでの実施に挑戦した。

2　今年度(2020 年度)の研究

2.1　教材・カリキュラムの開発

教材開発はいうまでもなく日々の授業において絶えずなされているものである。先述のとおり，本校数学科ではすでに 100 近い教材開発の事例を蓄積しているが，ほとんどの教材に通底しているのは，扱いたい中心課題と，それに対する生徒の発想や反応が対となっていることである。教材によっては，生徒の発想がさらに次の課題を生み出し，数学的活動のサイクルが展開しているものもある。これが，本校数学科における教材開発の基本姿勢として「教師と生徒との相互作用で築き上げること」を掲げている所以である。

教材を束ねるカリキュラムの開発に関しても，発想はトップダウンではなく，ボトムアップであると言えるだろう。すなわち教師は，日々の教材開発において，授業を通して生徒との相互作用で教材を磨きつつ，次にどのような教材を提示するか，どのような課題へとつなげるかを考え，理解や深化，発展や一般化への流れを組み立てる。例えば，関数のグラフの和や差について扱う教材については，中学校での比例・反比例の学習から高校での微分・積分の学習までを一貫し，さらに大学における数学をも見通した中心概念として，長年の教材開発の蓄積が，一種のカリキュラムとして成立しつつある。

ひとつの教材に対し，教師と生徒が授業の中でともに知恵を出し合い，さらに定例の数学科教科会を通して教師間でもさらに深める。この繰り返しが，本校数学科の教材開発と実践研究の中心である。対面授業でなく，オンライン授業であったとしても，これは変わらない。開発教材集として提示しているものは，日々の膨大な授業の中で試行錯誤しながら，一定の成果としてまとまったものの一部にすぎない。また，開発教材自体も完成されたものではなく，同じ教材を異なる教師が扱い，異なる生徒が取り組むことで，さらに新しい視点や，深い考察が生まれていく事例もある。

第４期を迎えた本校 SSH 事業において，今まで以上に求められるのは，新たな教材開発はもちろんのこと，既に開発し共有している教材についても，本校に限らず広く他校で実践していただき，その反応をもとにさらに洗練していくことである。そして，個々の教材と，それを貫くカリキュラムという視点で既存のカリキュラムや教材を見直し再構成することが，研究主題として標榜する「探究型学習システムの構築」にもつながっていくのではないかと考えている。

2.2　SSH 数学科教員オンライン研修会

前節で述べたとおり，開発した教材・カリキュラムを SSH 数学科教員研修会で公開し，全国に向けて共有するとともに，本校における今後の研究の指針を得ることとしている。SSH 事業の取り組みの根幹を教材開発ととらえ，教科で開発した教材・カリキュラムを公開・発信するため，これまでも隔年で全国 SSH 数学科教員研修会を主催してきた。近年では 200 名をこえる数学科教員・数学教育参加者が集まる研修会に成長し，前回（2018 年）は初めて本校ではなく大学の大講義室（筑波大学東京キャンパス）を利用した。今年はちょうどその実施年度にあたり，今までどおり資料冊子の作成，発表者・助言者の手配を中心に，SSH の企画として準備を進めてきたが，これだけ大規模な会となったこともあり，昨今の情勢に鑑みて対面実施を見送ることにし，完全オンラインでの開催に切り替えることとした。

①仮説

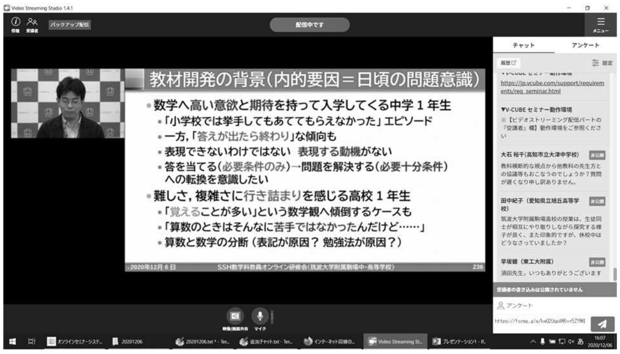
SSH 校の『数学』分野の取り組み事例とともに，生徒の知的な興味関心を刺激し，数学的思考力を育成するような具体的教材について報告・協議することは，SSH 校及びそれ以外の学校の数学教育に資するものと考える。

②実施概要

日程：令和２年 12 月６日（日）
会場：本校　図書スペースよりライブ配信
参加者：中高数学科教諭，大学院生，本校教員
延べ 303 拠点同時接続

＜現場の様子①＞

本研修会では，前述のとおり参加者が200名規模であること（オンラインではさらなる増加もありえるとの見通し）から，ZOOMやGoogle Meetを用いた手作りの研修会では，受講者へのサポートが本校数学科教員だけで賄えないと判断し，外部業者への実施委託を試みた。しかし，SSH事業での経費支援にオンライン研修会の外部委託経費は認められず，SSH事業としての経費支援は，配信用PCと関連周辺機器の購入に限られることになった。一方，教師教育に関する事業として大学より予算を取り付け，研修会自体は300拠点接続規模の外部業者（株式会社ブイキューブ）委託運営にて，ブイキューブセミナーを利用したWebセミナーとして実施することができた。



＜配信画面＞

また，これまでの数学科教員研修会で配布してきた開発教材集をすべて電子化し，URLおよびパスワードを周知することで，紹介した教材をPDFファイル・Excelファイルで公開し，広く共有を図ることを目指した。

なお，ここで紹介したこれまでの開発教材は，本校公式HPに公開している。

＜現場の様子②＞

開催時程：

■ 開会行事　13:00〜13:05
本校副校長 町田 多加志　挨拶

■ SSH教材等についての報告と研究協議
13:05〜16:45

1. 都立日比谷高等学校
発表者　荻野　大吾　先生
2. 市川高等学校
発表者　秋葉　邦彦　先生
3. 豊島岡女子学園中学校・高等学校
発表者　根岸 靖　先生
4. 芝浦工業大学柏中学高等学校
発表者　古宇田　大介　先生
5. 筑波大学附属駒場中高Ⅰ
「筑波大学附属駒場中・高等学校の数学科SSHの取組」　発表者　須田　学
6. 筑波大学附属駒場中高Ⅰ
「筑波大学附属駒場中・高等学校の数学科SSHの取組」　発表者　須藤　雄生

■ 全体講評および指導・助言 16:45〜16:55
芝浦工業大学　牧下 英世 先生
筑波大学　Scott　Carnahan 先生

■ 閉会行事　16:55〜17:00

登壇者に関しても，従前は全国のSSH校に依頼していたが，今回は登壇者のみ本校に来校してもらう形態を選択し，東京近郊のSSH校に依頼することとした。結果，東京都立日比谷高等学校，豊島岡女子学園中学高等学校，市川中学高等学校，芝浦工業大学柏中学高等学校の４校の協力を得た。本校からの２報とあわせて，研修会では計６報の教材実践報告を行った。また助言者には，芝浦工業大学の牧下英世教授，筑波大学のScott Carnahan准教授を迎えた。

申込は本校公式Webサイトより受け付け，参加申込者全員に本校数学科SSH教材集（公式Webサイトにて2017年より限定公開中）へのアクセスパスワードを送付した。限定公開サイトでは，当日の発表資料が，これまでに本校が開発した教材のPDFファイルとともに見られるようにした。

③検証

事前に全国30都道府県から174名の申込があり，当日は延べ303件の視聴接続があった。

今回のWebセミナーシステムは，PCだけでなくスマートフォンのブラウザから参加することも可能で，参加者へのアンケート結果には，地方からでも参加できる，育児休業中でも参加できる等のオンライン研修会特有のメリットが寄せられた。また，回線不具合による接続不良も何件かあったが，業者との連携により

余裕をもって対応できたことも，本実施形態のメリットと言えるだろう。質疑は付属のテキストチャットシステムから受け付け，それらを配信会場の本校で登壇者をまじえて協議する形式をとったが，これについても「一般的なオンラインミーティングのように声が入る心配もなく，個人的にも質問が気軽に送りやすい」という感想があった。一方，参加者同士はそれぞれのテキストチャットの内容が見られない形態を選択したため，フロアにあたる他校参加者の生の意見も知りたかったという感想もあった。以下はアンケート結果の抜粋である。

・例年とは異なる方式でありましたが，筑波大附属駒場高校の先生方の御尽力により大変スムーズでした。この形式であれば，諸条件より多くの先生方の参加がきたいでき，SSH 校のみならず，多くの学校の数学的活動，探究活動の充実に繋がるのではないでしょうか。
・このような形でも会を実施していただけた筑駒の先生方のご尽力に感謝しかありません。
・ウィズコロナの時代において，オンラインと対面の併用でこのような会を開催していただけるとありがたい。今後，更に学校規模が縮小する中，県外出張の旅費も削られていくため，対面では参加できない可能性が高いので。

オンライン研修会，対面による研修会，それぞれに長所・短所はあろうことが考えられるが，ちょうど本研修会が実践の仕掛けよりも教材の内容にこだわって連綿と続いているように，研修会についても内容の充実を第一に考え，それをもとによりよい実施形態を模索していきたい。

2.3　数学ｵﾘﾝﾋﾟｯｸﾜｰｸｼｮｯﾌﾟ

①仮説

数学オリンピックレベルの問題に他の生徒と共同して取り組む経験や，また先輩たちの体験を知ることで，発展的な知識を獲得するとともに，数学的な考え方の良さや楽しさを感じ，数学オリンピックに挑戦する意欲を喚起できると考え，本ワークショップを実施する。

ワークショップの講師及び TA は，数学オリンピックで活躍した本校卒業生で，講師には全体に関わる講演と講義，TA には事前問題および当日問題の作成と解説及び体験談を依頼する。

SSH 第４期で新たに企画した事業である。４年目となる今年度は，コロナウイルス感染症拡大防止対策として，オンラインで実施することとした。

②実施の概要

日　時：2020 年 10 月 10 日（土）14:30～16:30
場　所：本校図書スペースを本部
講　師：大島　芳樹（大阪大学准教授・本校 52 期卒業生・国際数学ｵﾘﾝﾋﾟｯｸ ﾒﾀﾞﾘｽﾄ）
TA２名（数学オリンピックで活躍した本校 OB）
参加者：生徒 26 名（中３～高２）

大島先生のオンライン講演

実施の流れは昨年度と同様に，TA が作成した問題を参加者に事前に提示し，当日は講師による講座，事前問題及び当日問題の演習，TA による問題解説，体験談，最後に講評及び助言とした。

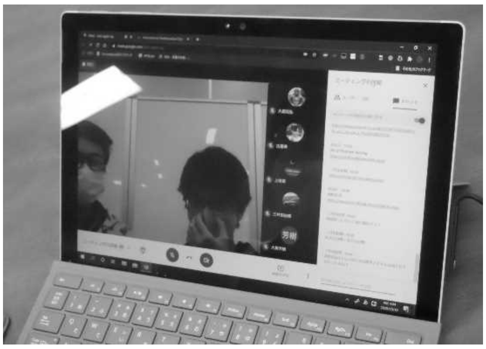
昨年度までと違うことは，コロナ禍対策としてのオンラインによる実施である。遠方の講師と密を避けるための生徒は各家庭よりオンライン参加とし，TA とスタッフは運営を円滑に進めるため，図書スペースに本部を設置し，待機することとした。

JJMO が中止となったため，中３以上の生徒を対象に Gmail で広報し，参加希望者の受付も，ﾜｰｸｼｮｯﾌﾟの classroom を開設し，登録させることとした。事前問題の配布，解答の回収，アンケートの集計なども classroom を活用した。

TA によるオンライン助言

③検証

オンラインのため，参加生徒と講師&TA とのコミュニケーションが取りづらいのではと危惧していたが，生徒たちはチャットで気軽に質問等をして，積極的に参加できていたようである。TA にしても，自分の発言に対して，すぐに反応があるため，それらの反応に丁寧に回答する様子が見られ，オンラインによる弊害を感じられず，それなりのコミュニケーションはとれていたと思われる。また，講師を担当する OB にも，時間的，地理的負担をかけずにすむことから，今後もオンラインによる講師講演は検討する必要があると考える。



オンラインの様子

（アンケート自由記述　抜粋）

・まだまだ自分の勉強が足りないなと思った。

・解説があまりわからなかったが難しい問題に触れることができてとても楽しかった。

・例年に比べオンラインで不自由なこともあったが，楽しく問題に取り組めた。

急遽実施することとなったオンラインのワークショップであったが，講師，TA および生徒たちはすぐに対応ができており，ICT を活用する形態も，今後検討していきたい。

2.4　探究型学習の実践

2.4.1　高校２年課題研究（数学）

本校の「課題研究」「理科課題研究」は，教育課程において，まず高校２年生に１単位設定され，各教科が開講する講座の中から，全員がいずれかを選択して受講する。数学科では毎年講座を開設している。2019 年度は，講座名を「Say Hello to Euler」とし，2020 年度は，「数学の本質は自由にあり」とし，受講生徒自身が自らの感性で数学の様々な側面に注目して課題をそれぞれに設定し，各自の内容について発表や議論を通じて受講生全員で考察や研究を進めることを掲げている。

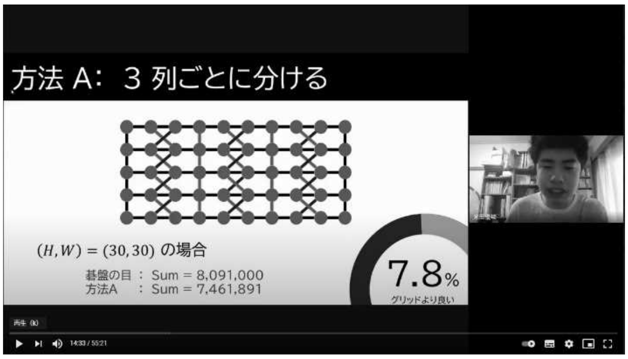
実施概要

今年度は何といっても新型コロナウイルスの感染拡大の影響が甚大であった。例年通りに行く部分は少なく，１学期はほぼオンラインでの実施を余儀なくされた。２学期は対面による経過発表をすることはできたものの，例年行われている発表会のほとんどが中止または実施検討中となってしまい，生徒たちは研究のモチベーションを保つのが大変厳しい状態であったに違いない。

そのような状況の中，外部の発表会のうち，中止ではなくオンラインで代替の場を設けたものや現地での開催にこだわって実施したものもあった。今年度は，例年８月に行われていたマスフェスタが 12 月に現地での実施となったため，研究が進んでいる生徒２名を先行して出展し，残る生徒は主に３学期，２月の学芸大主催 SSH/SGH/WWL 課題研究成果発表会か３月の横浜サイエンスフロンティア高校主催マスフォーラムのいずれかに，全員がポスターまたは口頭発表で出展することとした。さらに，１月の課題研究オープンに筑駒 OB 数名に来てもらい，発表を見て意見をもらう機会を独自で設ける取り組みを検討中である。また，最終的には研究成果を論文としてまとめ，例年通り SSH 課題研究として，論文集を発行することにしている。

時間割内で設定された「課題研究」の枠においては，筑波大学数理物質系よりアソシエイト・坂井公先生，准教授・スコットカーナハン先生をアドバイザーとして迎えるとともに，筑波大学の大学院生や数学課題研究 OB にも加わってもらい，活発な議論を交わしている。

本校の課題研究は高校２年生の１年間で実施するが，高校３年生になっても希望者は１単位を選択することができる。2017 年度に「半素数の逆数有限和による１の分割について」を研究した生徒が 2018 年度も研究続行を希望した。2019 年度も２名が研究続行を希望した。



本校数学科では，課題研究が学校設定科目として設定されるより前から，ゼミナール形式の課題学習を取り入れ，長きにわたり実践してきている。そのなかで2020年度は，例年通りにいかない中でいかにして数学的議論を深めることができるかということが１つ課題となった。一般の授業等では，オンラインでの実施は対面に劣ると言われがちであったが，数学課題研究の場合はむしろ逆で，他教科と比べてオンラインでも各研究を進めることが比較的容易であることを感じた。毎回の発表準備は少々大変な印象であるが，対面の場合とさほど変わらない場をオンラインでも提供できたと考えている。場所を選ばず，紙とペンさえあればこのような状況下でも数学ができるという，まさに数学の本質は自由にありというテーマにあった実践ができたのではないだろうか。例年蓄積してきた実践的なノウハウだけでなく，数学を研究する仲間同士でいかにして議論を深めていったかを今後継承していきたいと考えている。

2.4.2　高校３年課題研究（数学）

実施概要

本校の課題研究は高校２年生の１年間で実施するが，高校３年生になっても希望者は１単位を選択することができる。2019年度は，３名が研究続行を希望し，引き続き研究を進めている。

実施方法

2020 年度である今年度は３名の生徒が研究続行を希望し，高３課題研究を履修した。テーマは以下の通りである。

・道路網の最適化問題
・ラングレーの問題
・あみだくじの最適化

高３課題研究では，高２課題研究のように時間を取ってさまざまな活動をするということはなく，個人研究に没頭する形式をとっており，成果や相談事があれば逐一指導教員の所に来る，という大学の研究室のスタイルに近い形で進めている。

高３の研究発表の場としては，毎年夏に実施される全国SSH発表会と，内々ではあるが９月中旬に実施される校内での高３課題研究発表会の２つである。

前者の全国SSHは，今年度はオンラインで実施された。毎年１名の高３課題研究を選択した生徒が参加しており，例年数学課題研究から参加することが多い。今年の数学選択の高３も３名とも参加を希望したが，校内選考の結果，今年度は理科課題研究を選択する生徒が選出された。

９月の高３課題研究発表会については，今年度のコロナ禍の影響で実施することができなかったが，ポスター発表用のポスター制作および論文執筆の指導を充実させることで代替措置とした。

2.5　学年を超えた少人数学習の研究と実践

数学科では毎年，外部の発表会等に学年を超えて参加し，他校の生徒との研究交流，異学年の生徒との研究交流の機会としている。今年度はコロナ禍により，中止やオンライン開催となる発表会がほとんどで，実地での開催はマスフェスタのみとなった。

2.5.1　全国数学生徒研究発表会（マスフェスタ）

「マスフェスタ（全国数学生徒研究発表会）」は，SSH校である大阪府立大手前高等学校が毎年実施しているもので，今回が12回目である。今年度は新型コロナウイルスの感染拡大にともない，12月に延期して行われた。数学に興味・関心をもつ高校生たちが全国より集まることで，互いの研究発表を通して交流し，研究を深めていくことができる。本校も昨年度に続き代表生徒２名がポスター発表し４名が見学参加した。

実施概要

日　程：2020年12月26日（土）
会　場：大阪府立大手前高等学校（大阪府大阪市）

本校の参加者は高２課題研究数学選択生徒がポスター発表２名，参観（高校２年生）４名。発表タイトルは次の通り。

『Markov Algorithm での整式の微分』
『不変ゲームの確率の導入について』

軒並み発表の場がなくなり，開催してもオンラインでの実施となる中，現地で発表ができる大変貴重な機会となった。感染拡大の第３波の影響により，参加予定の約４割の学校が参加取りやめをする中，14 校，延べ 26 本のポスター発表が行われた。

本校生徒の研究内容は，初見では内容が入りづらいものでもあったため，高校生からは敬遠されていたように感じた。生徒は具体例を挙げるなどして，工夫して発表をし，自身の研究を伝えた。そうした中でも，指導助言の大学の先生方をはじめ，他校の引率の教員，本当に興味を持った人が質問をしてくれたことで，生徒は今後の研究方針が見えてきたようだ。

発表の機会が無くなる中，現地で発表できたこと，他校の取り組みや研究を見学できたことが最大の収穫であったようで，生徒が「今後，研究をがっぱろうと思いました」と感想を言っていたことが何よりであった。

2.5.2　名古屋大学附属高 SSH 重点枠「アメリカで数学をしませんか」

①概要

今年度，名古屋大学教育学部附属高等学校 SSH 重点枠企画「アメリカで数学をしませんか」に連携校として参加した。本校としての参加は 2018 年度に続き２回目となる。

この企画は，全国公募から 1st ステージ 12 チーム→ 2nd ステージ８チーム→　3rd ステージ４チームが選抜されていくチーム対抗コンテスト型の企画で，3rd ステージでは米国でのフィールドワーク，および数学的課題の協同解決が目標とされている。今年度は情勢の変化により，オンラインセッションによる開催進行となっているが，現時点での本校参加生徒の様子について報告する。

②実施形態

《公募から～1st，2nd ステージへ》

４月に公募問題が発表され，本校からは新高校１年生２チーム（１チーム４名構成）が応募した。まずは下のような数学の課題に対しレポートを作成し，この内容によって次のステージに進むチームが選考されるというものであった。

公　募　問　題

問題１

①　三角形の面積について，直線（線分）を利用して二等分する方法はどのような方法が考えられるでしょうか。
数式を用いて説明してください。
いくつかの解法が考えられますが，その中でアピールできるものを３つ以内で提示してください。

②　三角形の面積を二等分する線分について，その中点が動いてできる図形はどのような図形になるでしょうか。
斜辺の長さが $\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形に注目し，数式を用いて説明してください。

図１　公募問題の一部

結果は２チームとも次のステージへの進出がきまり，例年は６月に選抜されたチームによって 1st ステージが行われるが，本年はそれがかなわず，８月に 1st ステージと 2nd ステージを合体する形で全国 14 チームによるオンラインセッションが行われることになった。

《1st ステージ》

８月１日（土）２日（日）の２日間にわたって，Zoom によるオンラインセッションによって 1st ステージが行われた。1st ステージでは，名古屋大学の教員による数学のレクチャーと，それぞれのレクチャーに対応するチームでの課題解決が４本実施された。本校では，まだ校内での土休日の活動が再開していない状況であったため，２チーム８人の生徒は，それぞれの自宅から Zoom セッションに参加することになった。生徒はチームごとにそれぞれ，本校で普段用いている G Suite for Education の機能（Jamboard と画面共有，ドキュメントの共同編集）を使うなどして，慣れないながらも工夫してオンラインでの協同課題解決を行っていた。

《2nd ステージ》

例年であれば名古屋地区の商店街フィールドワークが行われる 2nd ステージは，各チーム単位で，それぞれが身近な現実場面から課題を見いだす形式に変更された。本校から参加した２チームは，それぞれ「お釣りの枚数の最適化」「クラス替えで知り合える人数の期待値」をテーマに設定した。

前者のチームは，生徒４人がそれぞれの地元商店街で調べてきた600個近い商品の価格データをもとに，コンピュータによって「貨幣の構成がいくらであれば，お釣りの受け渡し枚数が最も少なくすむか」を考えた。その結果,「五円玉を六円玉に変えた方がお釣りのやりとりが少ない」「五十円玉は七十円玉に変えた方が少ない」などの不思議な結果が出たという。

後者のチームは，「クラス替えで重視することは何か」ということを学校の教員へインタビュー調査し，そのなかから「卒業までに同じクラスになったことのある生徒をなるべく増やすには」というテーマを数学的に考察していた。例えば，３クラスで３年間クラス替えを行うと，学年全体で考えられる知り合い関係の総数の９分の７までを成立させることができるという。こういった考察を一般のmクラスn年間で行っていた。

各チームの発表審査はオンラインポスターセッションの形式で８月29日（土）に行われた。この時点では他校の内容の発表は聞くことができなかったが，２チームとも次のステージに進出することが決まり，次のステージの中で各校がやってきた研究を知ることができた。

《自己成長ステージ，3rd ステージ》

11月から全８回の計画で，本校を含む選抜された４校（名古屋大附属，筑波大駒場，金沢大附属，三重県立四日市）６チームが英語による数学のプレゼンテーションの練習や研究内容の英訳などに取り組む「自己成長ステージ」が現在実施されている。この後，３月には米国現地校とのオンライン研究交流なども予定されており，生徒たちの活躍と成長が期待されるところである。

2.5.3 部活動「数学科学研究会(MATHIC)」活動支援

数学に興味関心を持った生徒が集まり，研究活動を通して数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を，数学科として行っている。現在，中学・高校あわせて約30名の部員を擁し,例年文化祭での発表において多数の来場者を得るとともに,研究レポート集“Café Bollweck”も刊行している。だだし，今年度は新型コロナウイルスの感染拡大の影響により１学期に活動ができなかったため，研究レポート集“Café Bollweck”は刊行できない予定である。文化祭での発表ができたことが幸いであった。

2.5.4 数学オリンピック参加支援

本校数学科ではこれまで，生徒の数学への興味関心を高めるため，数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募り，学校で一括申込している。2020年度はJMO予選がオンライン開催に変更されるとともに，JJMOのほうは開催中止となってしまったが，高校生72名，中学生31名のあわせて103名がJMO予選に申し込んだ。国際数学オリンピック（IMO）には，日本が初参加した第32回大会から2020年夏の第61回大会までに，のべ43名の生徒が日本代表選手として出場している。

≪IMOでの本校生徒の近年の成果≫

第57回　香港大会

日本代表　銀メダル２名（2016年７月）

第58回　ブラジル大会

日本代表　銀メダル１名 銅メダル１名（2017年７月）

第59回　ルーマニア大会

日本代表　銀メダル１名（2018年７月）

第60回イギリス大会（2019年７月），第61回ロシア大会（オンライン，2020年７月）は代表選出なし

3　開発教材一覧および開発教材の実際

次ページ以降，表の★印で示した教材を掲載する。

開発教材一覧（筑波大学附属駒場中・高等学校数学科） 2020年度

表左端のアルファベットの記号は各分野の略であり，中学は小文字，高校は大文字，数字は実施学年である。もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。教材名の末尾の数字は開発年度である。

A.「代数(Algebra)」

a1.	整数	2008
a1-2.	有理数	2007
a1-3.	剰余類の演算とウィルソンの定理	2014
a1-4.	速算術	2015
a1-5.	最大公約数と差が等しい数の組み合わせ	2017
a3.	暗号理論と整数論	2006
A1.	数と方程式	2008
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012
A1-3.	高校における整数問題	2014
A1-4.	開平法と連分数による平方根の近似値	2014
A1-5.	オイラー関数について	2015
A1-6.	集合と場合の数の導入	2016
A1-7.	多項式から見た二項係数とスターリング数	2019
A2.	離散な数列と連続な関数	2009
A2-2.	ΣＫ＾4と区分求積法	2011
A2-3.	斜交座標の薦め	2015
A2-4.	漸化式	2015
A2-5.	確率漸化式と課題研究	2018
A3.	置換と正多面体群	2007
A3-2.	１次変換の線形性	2008
A3-3.	複素数と複素数平面	2015
A3-4.	複素数平面における1次分数変換	2017

An.「 解析(Analysis)」

an1.	2元1次方程式とその応用	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010
an3-3.	中学での2次関数の扱い	2017
An1.	2次関数	2007
An1-2	2次関数（２）	2009
An1-3	和や積のグラフ	2010
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013
An1-5.	2次関数の係数決定	2019
An1-6.	加法定理の色々な証明	2019
An2.	円周率の近似	2007
An2-2.	三角関数表を作る	2006
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011

G.「 幾何(Geometry)」

g1.	四角形の合同条件	2008
g1-2.	作図の教材	2009
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012
g1-5.	三平方の定理	2013
g1-6.	**中学1年の幾何（作図問題などの補充）**	**★2020**
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007
g3.	立方体の切断	2007
g3-2.	反転法	2007
g3-3.	立方体の切断（２）	2009
g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013
g3-5.	双心四角形の性質	2015
g3-6.	円を使う作図の教材	2017
g3-7.	作図の応用問題	2018
g3-8.	反転を利用した教材	2019
G1.	四面体の幾何	2008
G1-2.	デカルトの円定理	2009
G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013
G2.	正１７角形の作図	2008
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
G2-3.	正射影ベクトルと内積・外積	2017

P.「 確率(Probability)」

p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
Pf1.	組み合わせの確率モデル	2007
Pf2.	EBIと確率・統計	2007
Pf3.	無限集合の確率	2008

S.「 統計(Statistics)」

s1.	統計の基本	2006
s2.	標準偏差・近似直線	2006
s3.	正規分布と標準化	2006
s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
S1.	回帰直線・近似曲線	2006
S1-2.	数理統計学入門	2009
S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
S3.	主成分分析入門	2007
S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
S3-3.	中心極限定理	2016

D.「微分方程式(Differential Equation)」

d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和 からの拡張	2019
d1-2.	『数える』	2010
d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
d2-2.	不等式の活用	2019
d3.	２次関数の接線	2006
d3-2.	面積・体積	2006
d3-3.	最大・最小	2006
d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013
d3-5.	場合の数 ～樹形図から漸化式へ～	2014
d3-6.	**放物線の長さ**	**★2020**
D1.	包絡線	2006
D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007
D2-2.	３次関数の性質	2014
D2-3.	定積分と面積	2019
D3.	包絡線(その２)	2006
D3-2.	微分方程式	2006
D3-3.	微分方程式の応用	2006
D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
D3-5.	曲線と面積	2008
D3-6.	微分方程式の応用（懸垂線）	2019

「O. その他(Others)」

Of.	4元数を高校数学へ	2007
O2.	有限世界の数学	2007

QRコードはこちら⇩

筑駒数学科HPより，PDFファイルを閲覧できます

https://www.komaba-s.tsukuba.ac.jp/ssh/math/

g1－6.　中学１年の幾何（作図問題などの補充）

関連分野：幾何分野
高等数学：平面幾何
対象学年：中学１年生　～
関連単元：「平行と合同」「相似」「三角形の性質」など
教 材 名：「初等幾何」

≪中学での幾何の指導≫

幾何は論理的な思考を培う格好の分野であるが、中学に入学した段階での予備知識は生徒により多様で、また単に定理・性質を「知っている」だけの場合も多い。したがって、ユークリッドの原論にある公理公準から始めて、定理・性質を一つ一つ確認していきたいところだが、向学心に燃えて中学に入学した生徒は楽しまない。そこで中学１年生の幾何では、初めに三平方の定理の証明を取り上げることにしている。2019 年度は大きな分類で 17 通りの証明が発表され、盛り上がった。その後に、証明で用いられた三角形・四角形の性質、三角形の合同・相似などを確認し、最後にそれらの応用として作図（教材集 g1−2 作図の教材　の一部）を取り上げた。

以下、まず作図について、**g1−2 作図の教材**の補充を、その後に生徒から出された三平方の定理の証明を記載する。

g1-6-2　作図の補充

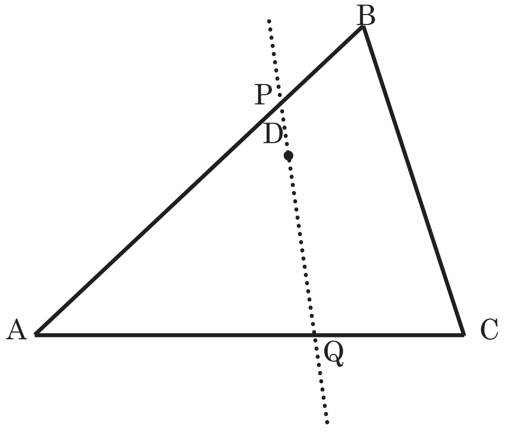
中１幾何のまとめとして扱った作図であるが、生徒が様々な解法を考えて、盛り上がる。

まず、教材集 **g1−2 作図の教材**の中に取り上げられていないもの記す。

【面積を２等分する直線の作図】

三角形の面積を２等分する直線に関して、頂点を通るもの、辺上の点を通るものは容易に作図できる。その発展として次の問題をレポート課題とした。
この課題は難しく、生徒が自力で解決したわけではないようだが、次の解法レポートが提出された。

問。△ABC の内部の点 D を通り、△ABC の面積を２等分する直線 PQ を作図せよ。



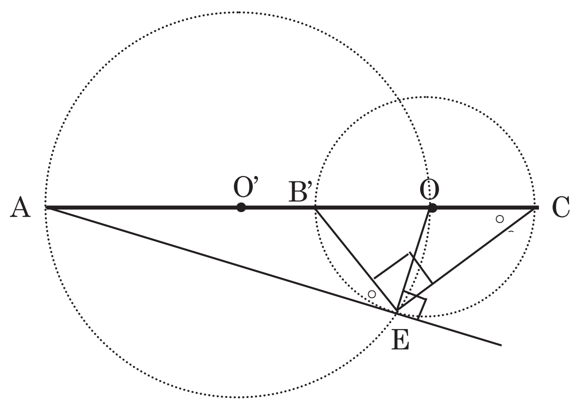
解 1）まず、線分 AC 上に、

$AB' = \dfrac{1}{2}AB$　である点 B’をとる。

B’C を直径とする円 O と、
AO を直径とする円 O’をかき、
その交点を図のように E とする。

このとき、△AEB’∽△ACE　より
AE : AB’＝AC : AE

$AE^2 = AB' \cdot AC = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC$　である。

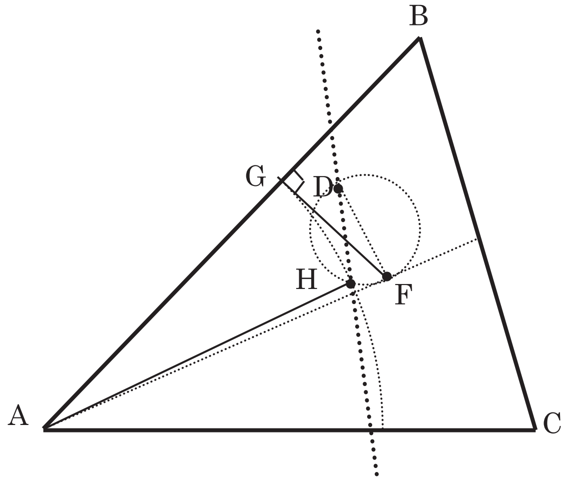


さて、

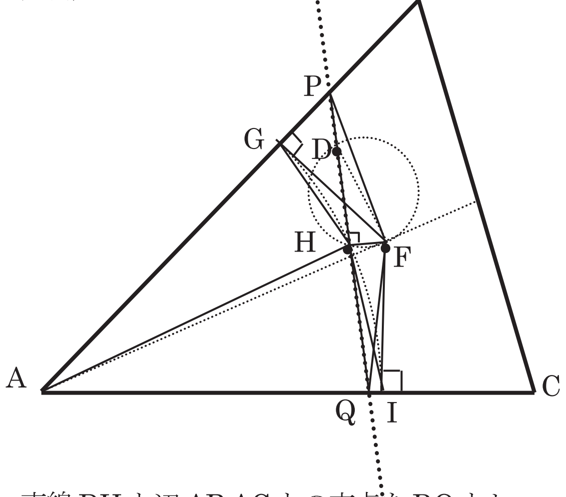
①∠BACの2等分線上に、AF=AEであるFをとる。

②FからABに垂線FGを引き、
　図のように、中心がAで半径AGの孤と、
　直径がDFの円との交点Hをとる。

③直線DHが求める2等分線である。



証明）



直線DHと辺AB,ACとの交点をP,Qとし、
FからACに垂線FIを引く。

△AQFと△AFPで、

AFは∠Aの2等分線だから∠QAF=∠FAP-------①

∠GAH＝$2a$とすると、△AGHは2等辺三角形で、

∠FGP=90°だから∠FGH=a

∠FGP=∠FHP=90°より4点F,H,G,Pは同一円周上にあり、∠FPH=∠FGH=a -----②

同様に、∠HAI=$2b$とすると、

∠FQH=∠FIH=b -----③

②③より∠PFQ=180° $-(a+b)$

さらに∠QAF=∠FAP=$a+b$ であるから、

∠AQF=180° $-(a+b)-$∠AFQ

＝∠PFQ－∠AFQ＝∠AFP-----④

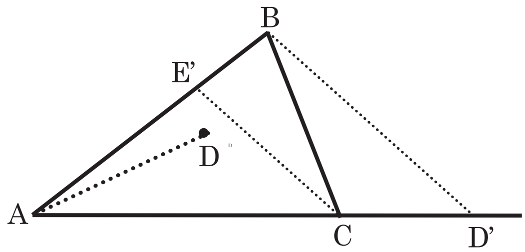
①④より、△AQF∽△AFP

したがって、AF:AP=AQ:AF、 $AF^2 = AP \cdot AQ$

$AF^2 = AE^2 = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ であるから、直線PQ（すなわち直線DH）は△ABCの面積を2等分する。

解2） まず、半直線AC上に、
AD’=2AD　であるD’をとり、
AB上に、CE’//D’B　であるE’をとる。
このとき、AE’ : AB=AC : AD’　であり、
AE’・AD’=AB・AC

よって、$AE' \cdot AD = \frac{1}{2} AB \cdot AC$



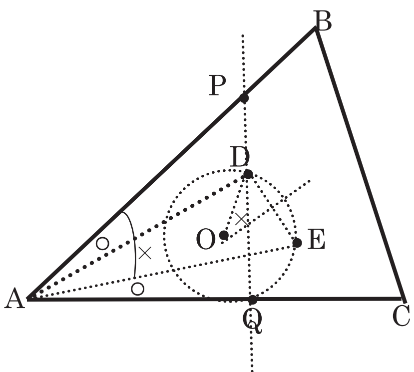
さて、

① 図のように、AE=AE’、∠EAC=∠BADであるEをとる。

② 図のように、線分DEの垂直2等分線上に、∠ODE=90°－∠EAB　であるOをとる。

③ 図のように、中心O,半径ODの円とACの交点Qをとる。

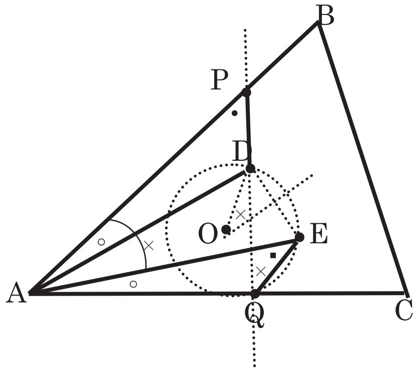
④ 直線QDが求める2等分線である。



証明）直線 QD と AB の交点を P とする。
∠PQE=∠EAP より、4 点 P,A,Q,E は同一円周上にあり、∠APD=∠AEQ　よって、△ADP∽△AQE
したがって、AD : AP=AQ : AE

よって、AP・AQ＝AD・AE＝$\frac{1}{2}$AB$\cdot$AC であり、

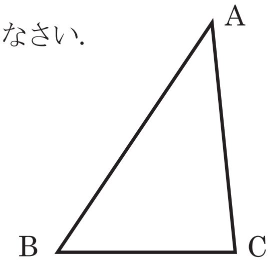
直線 PQ は△ABC の面積を２等分する。



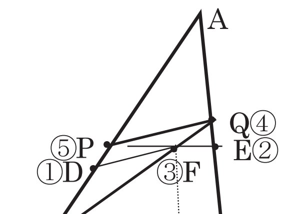
つぎに、教材集 **g1-2 作図の教材**の中に記載されていない別解を記す。問題の番号は **g1-2 作図の教材**でのものである。

$\boxed{\text{問７}}$

図の三角形 ABC の辺 AB，AC 上に BP＝PQ＝QC となる点 P，Q をかきなさい.

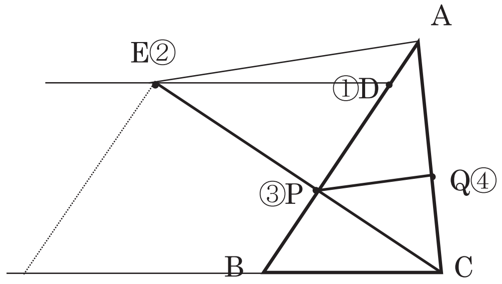


別解１



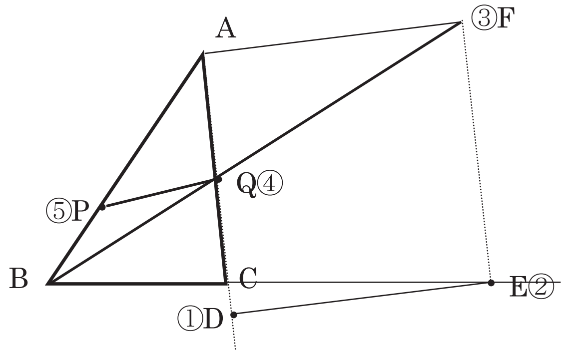
①AB 上に D をとる。
②AC 上に EC=DB である E をとる。
③図のように FD=DB,FE//BC である F をとる。
④直線 BF と AC の交点が Q。
⑤　AB 上で、PQ//DF である点が P。
（③で FE=EC,FD//BC　である F を取ったものもあった。このとき FC と AB の交点が P）

別解２



①AB 上に DB=AC である点 D をとる。
②図のように EA=AC,ED//BC である点 E をとる。
③EC と AB の交点が P。
④AC 上で、QP//AE である点が Q。

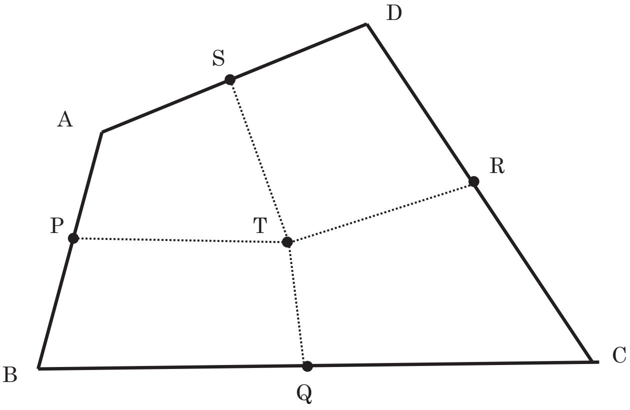
別解３



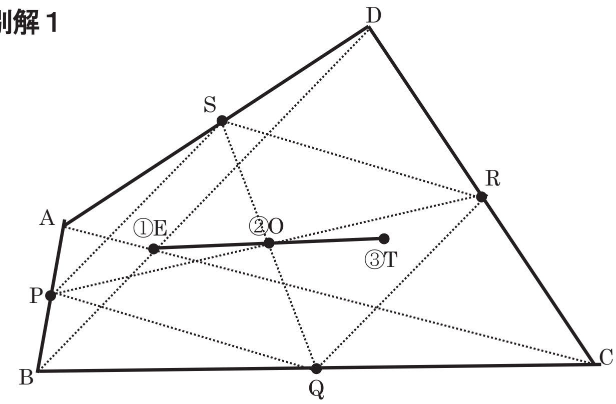
①半直線 AC 上に DA=AB である D をとる。
②半直線 BC 上に ED=AD である E をとる。
③図のように FA=AD,FA//DE である F をとる。
④直線 BF と AC の交点が Q。
⑥　AB 上で、PQ//DF である点が P。

問14

四角形ABCDの各辺の中点を図のようにP, Q, R, Sとする．四角形内部の点Tをとり，P, Q, R, Sとむすぶ．できた4つの四角形の面積が等しいようにするにはTをどこにすればよいか。



別解１



①対角線AC,BDの交点Eをとる。
②平行四辺形PQRSの対角線の交点Oをとる。
③Oについて、Eと対称な点がT

証明)
△APS=△EPS, △CQR=△EQRより、
△APS＋△EQR=△EPS+△CQR

$$=\frac{1}{4}\text{(四角形ABCD)}$$

Oは平行四辺形PQRSの対称の中心だから、
△TPS=△EQR, △TQR=△EPS であり、
△APS＋△TPS=△TQR+△CQR

$$=\frac{1}{4}\text{(四角形ABCD)}$$

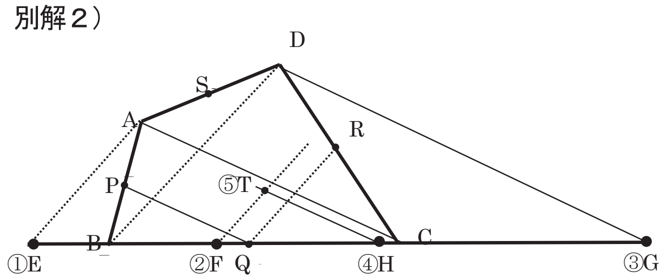
すなわち

$$\text{(四角形TPAS)=(四角形TQCR)=}\frac{1}{4}\text{(四角形ABCD)}$$

同様に、

$$\text{(四角形TSDR)=(四角形TPBQ)=}\frac{1}{4}\text{(四角形ABCD)}$$

別解２）



①半直線CB上にEA//BDであるEをとる。
②線分ECの中点Fをとる。
③半直線BC上にGD//ACであるGをとる。
④線分GBの中点Hをとる。
⑤図のような、TF//QR,TH//PQ　である点がT

証明）(四角形ABCD)=△DECより、

$$\triangle\text{FRC=}\frac{1}{4}\text{(四角形ABCD) =(四角形TQCR)}$$

同様に、(四角形ABCD)=△ABGより、

$$\triangle\text{HPB=}\frac{1}{4}\text{(四角形ABCD) =(四角形TPBQ)}$$

$$\text{このとき、(図形TPADR)=}\frac{1}{2}\text{(四角形ABCD)}$$

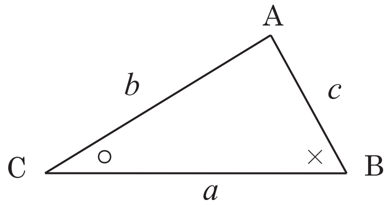
△TPB=△TPA,△TRC=△TRD
△TBQ＝△TCQ,
(四角形TQCR) =(四角形TPBQ) より、
△TSA=△TSD=△TQB=△TQCであり、
条件を満たす。

g1-6-2 **三平方の定理の様々な証明**（生徒配布のまとめプリントより）

以下は生徒による証明をまとめたものである。中学１年生の様々な解法、証明を楽しんでもらいたい。

中１　数学　　　　　＜三平方の定理のいろいろな証明＞　　　　　　　　　　　2019/10/15

三平方の定理（ピタゴラスの定理）



∠A=90°　　ならば　$a^2 = b^2 + c^2$

三平方の定理の逆

$a^2 = b^2 + c^2$　ならば　∠A=90°

注）以下の証明では、面積公式や三角形の内角の和、合同・相似の性質などを証明済みとして用いている。

これらについても後日確認する。

なお、２つの図形がぴったり重ね合わせられるとき、２つの図形は**合同**　という。

また、２つの図形の一方を拡大・縮小して他方と合同になるとき、２つの図形は**相似**　という。

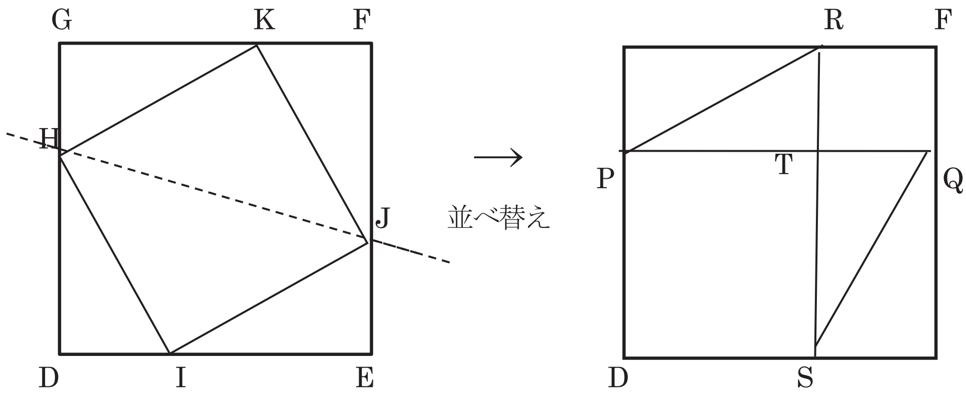
【三平方の定理の証明】

△ABC で、∠A=90°とすると、図の　○+×=90°である。

このとき、$a^2 = b^2 + c^2$　が成り立つことを示す。

【面積、等積変形、合同などの利用】

証明１.



上左図のように、△ABC４枚を４隅とする正方形 DEFG をつくると、
内側の四角形 HIJK は正方形となる。
上右図のように、正方形 DEFG 内で△ABC４枚を並べ替えると、四角形 PDST、RTQF
はいずれも正方形で、面積について次の式が成り立つ。

（正方形 HIJK）＝（正方形 PDST）＋（正方形 RTQF ）　　したがって、$a^2 = b^2 + c^2$

証明２

証明１の左の図で、正方形 DEFG の面積を２通りで計算して、$(b+c)^2 = a^2 + \frac{bc}{2} \times 4$

両辺をそれぞれ計算して、$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$　　したがって、$a^2 = b^2 + c^2$

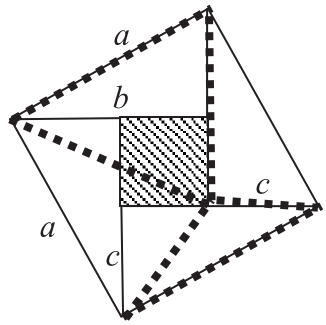
証明３．

証明１の左の図を、点線で２分割した台形について、証明２と同様に面積を計算して、

$$\frac{(b+c)^2}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{2}\times 2 \qquad \text{より、} \qquad a^2=b^2+c^2$$

証明４．

右図のように、１辺aの正方形の内側に、△ABC４枚を、
中央に１辺$b-c$の正方形ができるように置ける。
外側の正方形の面積を２通りで計算して、



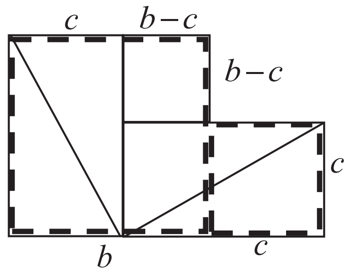
$$a^2=\frac{bc}{2}\times 4+(b-c)^2$$
$$a^2=2bc+b^2-2bc+c^2 \qquad \therefore\ a^2=b^2+c^2$$

証明５． 証明４の図で、太点線の三角形の面積は$\frac{1}{2}b^2$, $\frac{1}{2}c^2$ であるから、 $a^2=b^2+c^2$

証明６．

証明４の図の４枚の三角形と正方形を、
右のように並べ替えると、
太い点線の正方形２つになる。

したがって、$a^2=b^2+c^2$

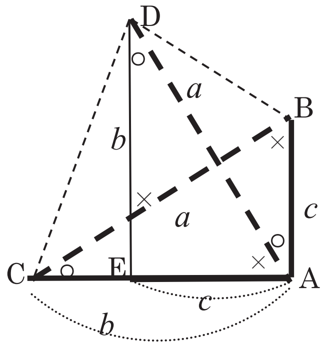


証明７．

△ABC と同じ三角形を、右図の△EAD
のように置き、四角形 ABDC を作る。

この時 ○, × の角はそれぞれ等しく

AD⊥BC である。
面積について、
（四角形 ABDC）
　＝（△CDE）＋（台形 ABDE）



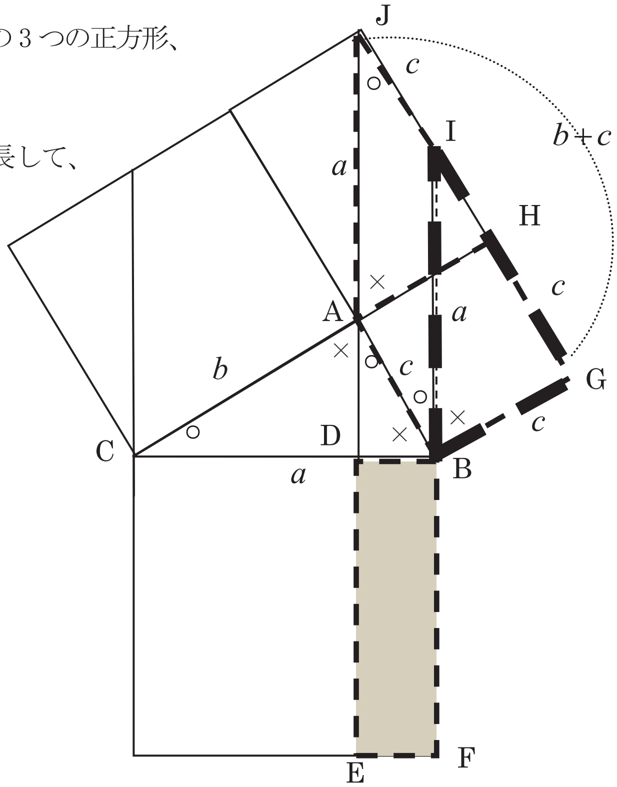
よって、$\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}(b-c)b+\frac{1}{2}(b+c)c$
$$a^2=b^2-bc+bc+c^2 \qquad \therefore\ a^2=b^2+c^2$$

（その２）

上の図で、
(四角形 ABDC) ＝ (△ADC) ＋ (△ABD)

より、$a^2=b^2+c^2$

証明８.



右図は、△ABC の外側に一辺の長さがa,b,cの３つの正方形、

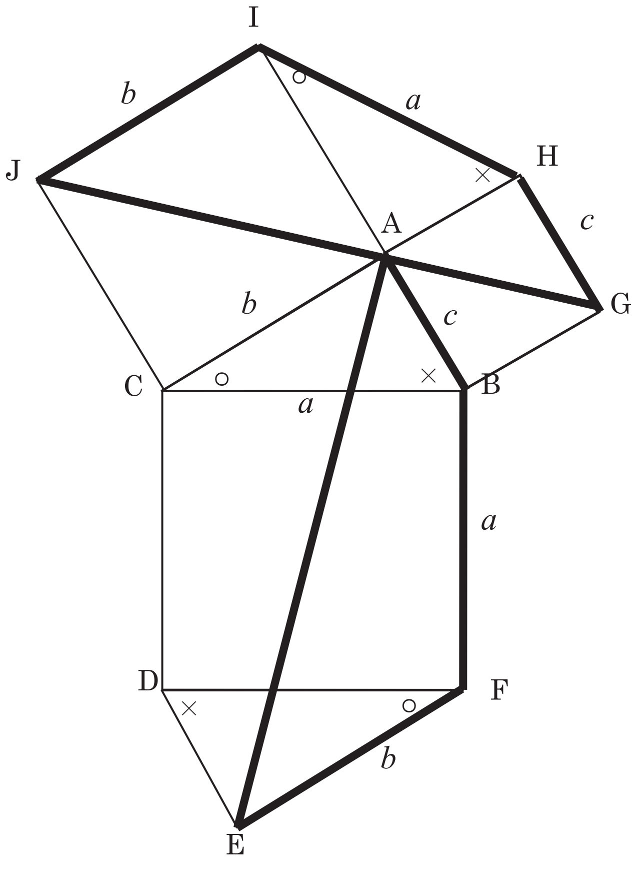
BC に垂直で、A,B,C をそれぞれ通る３直線,

さらに、一辺の長さがb,cの正方形の辺を延長して、

交点Ｊを書いたものである。この時、
△HAJ は△ABC と同じ（合同）なので、
A を通り BC に垂直な直線は、
Ｊを通る。
太い点線の△GBI も△ABC と同じ（合同）
であり、面積について、
（正方形 ABGH）
＝（平行四辺形 ABIJ）
＝（長方形 BDEF）
左側についても、同様に、
正方形の面積と長方形の面積は等しく、
両方を合わせて

$$b^2+c^2=a^2$$

証明９.



右図は、△ABC の外側に一辺の

長さがa,b,cの３つの正方形を

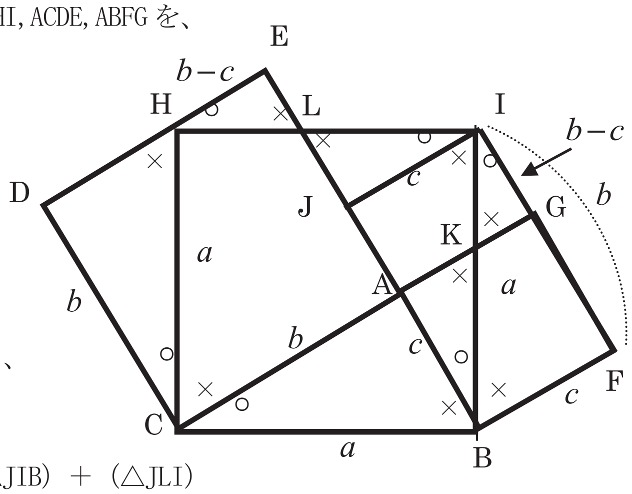
書き、さらに、△ABC と合同な
２つの三角形 AHI,EDF を書いた
ものである。このとき、
太線の２つの四角形 GHIJ,ABFE
は合同。
よって、それぞれを２つ合わせた
６角形 GHIJCB,ABFEDCA の面積は等しい。
よって、

$$b^2+c^2=a^2$$

証明１０.

一辺の長さがa,b,cの３つの正方形BCHI, ACDE, ABFGを、

右図のように書くと、
△ABCと△DHCは合同になるので、
点HはDE上にある。また、
△ABCと△FBIも合同になるので、
I, G, Fは一直線上に並ぶ。
さらに、IJ//BFとすると、△JIBは
△ABC, △FBIと合同。
また、△ELHと△GKI、△JLIと△AKBも、
それぞれ合同。したがって、



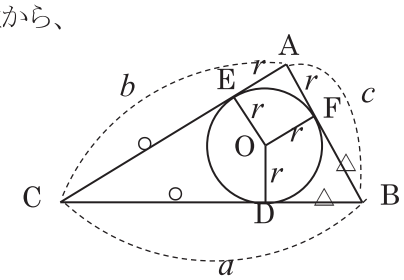
（正方形BCHI）
＝（△ABC）＋（四角形ACHL）＋（△JIB）＋（△JLI）
＝（△DHC）＋（四角形ACHL）＋（△FBI）＋（△AKB）
＝（△DHC）＋（四角形ACHL）＋（△GKI）＋（四角形FBKG）＋（△AKB）
＝（△DHC）＋（四角形ACHL）＋（△ELH）＋（四角形FBKG）＋（△AKB）
＝（正方形ACDE）＋（正方形ABFG）　　ゆえに、　$a^2=b^2+c^2$

【内接円の利用】

証明１１.

△ABCに内接する円Oを書く。
円の半径をr、接点をD,E,Fとすると、円の対称性から、
CE=CD、BD=BF、AE=AF=rである。
△ABCの周りの長さから、$a+b+c=a+a+2r$

これより、$r=\dfrac{b+c-a}{2}$



面積に注目して、

△ABC＝△OBC＋△OCA＋△OAB　より、

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\frac{b+c-a}{2}(a+b+c)$$

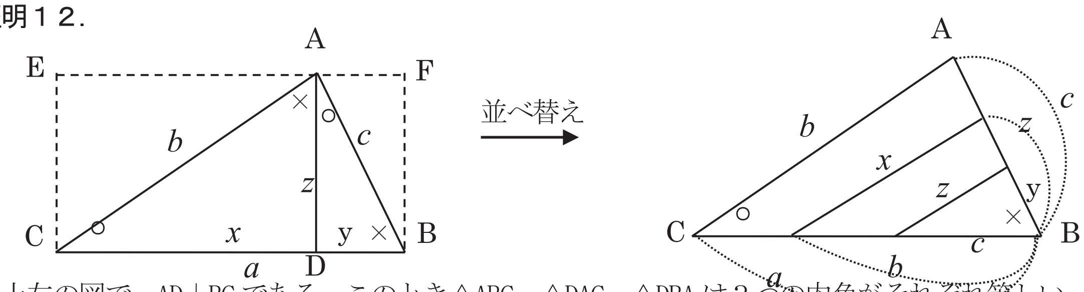
$$2bc=\left\{(b+c)-a\right\}\left\{(b+c)+c\right\}$$

$$2bc=(b+c)^2-a^2$$

$$2bc=b^2+2bc+c^2-a^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

【相似の利用】

証明１２.



上左の図で、AD⊥BC である。このとき△ABC、△DAC、△DBA は３つの内角がそれぞれ等しい。
上右の図は△DAC、△DBA の角×が、△ABC の角×に重なるように動かして作ったものである。
３つの三角形は拡大・縮小の関係（相似）にあり、対応する辺の比は等しい。

上左の図で、CD,DB,AD の長さを x, y, z とすると、

△ABC の３辺の長さは、a, b, c

△DAC の３辺の長さは、b, x, z

△DBA の３辺の長さは　c, z, y　であり、これらの比は等しい。

このとき、

（その１）　△ABC、△DAC、△DBA の対応する長さの比はすべて $a : b : c$

よって面積について、底辺、高さの比も $a : b : c$ なので、

△ABC、△DAC、△DBA の面積の比は $a^2 : b^2 : c^2$

△ABC＝△DAC＋△DBA　であるから、$a^2 = b^2 + c^2$

（その２）　△ABC と△DAC の辺の長さより、$a : b = b : x$　これより、$ax = b^2$

△ABC と△DBA の辺の長さより、$a : c = c : y$　これより、$ay = c^2$

辺々加えて、　$ax + ay = b^2 + c^2$　よって、　$a(x + y) = b^2 + c^2$

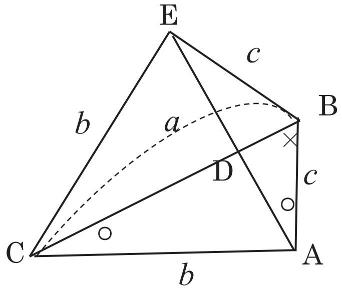
$x + y = a$　であるから、　$a^2 = b^2 + c^2$

（その３）　上と同様に、$x = b \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a}$, $y = c \times \dfrac{c}{a} = \dfrac{c^2}{a}$

BC=CD+DB であるから、　$a = \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{a}$　　$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2$

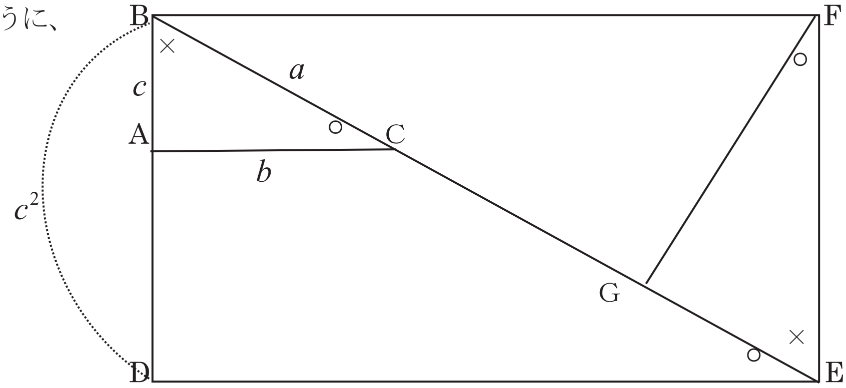
（その４）　　　　　上左の図で、点線の EF//CB, EC//FB//AD である。
△ECA、△FAB　を用いて上と同様に証明。

（その５）　　　　　右図のように、△ABC と辺 BC について対称な△DBD を書くと、AD⊥BC となる。以下同様に、△ABC、△DAC、△DBA が相似であることから証明。



証明１３.

B を中心に△ABC を c 倍して△BDE を作り、右図のように、長方形 BDEF、F から BE への垂線 FG を書く。
このとき、△ABC と△DBE、△GFB, △GEF は相似。
よって、
DE＝bc、BE＝ac



BG＝$b\times\frac{bc}{a}=\frac{b^2c}{a}$、GF＝$c\times\frac{bc}{a}=\frac{bc^2}{a}$、　　GE＝$c\times\frac{c^2}{a}=\frac{c^3}{a}$　、

（その１）長方形の面積に注目して、

$$c^2\times bc=\left(\frac{b^2c}{a}+\frac{c^3}{a}\right)\times\frac{bc^2}{a}\times\frac{1}{2}\times 2$$

$$bc^3=\frac{c(b^2+c^2)}{a}\times\frac{bc^2}{a}$$

$$1=\frac{b^2+c^2}{a^2}\qquad\qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

（その２）対角線の長さに注目して、BE＝BG＋GE　より

$$ac=\frac{b^2c}{a}+\frac{c^3}{a}$$

$$a=\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}\qquad\qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

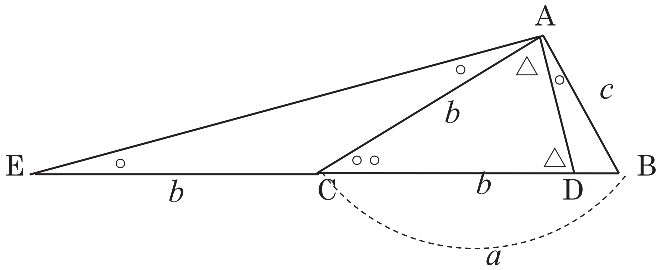
証明１４.

右図のように、△ABC の
辺 CB 上、及び延長上に、
CD=CE=CA となる点 D,E をとる。
このとき、
△AEB と△DAB は相似なので、

$(a+b):c=c:(a-b)$

$c^2=(a+b)(a-b)$

$c^2=a^2-b^2 \qquad \therefore\ b^2+c^2=a^2$



証明１５.

△ABC と合同な△DBE を右図のように置く、
△ABC と△DFC は相似なので、

$$\mathrm{DF}=c\times\frac{a-c}{b}=\frac{c(a-c)}{b}$$

図形全体の面積に注目して

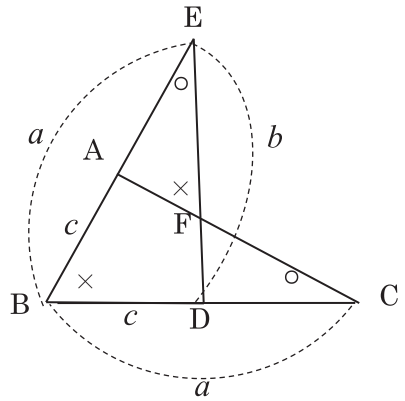
$$\frac{bc}{2}+\frac{1}{2}(a-c)\times\frac{c(a-c)}{b}=a\times\frac{c(a-c)}{b}\times\frac{1}{2}\times 2$$

$$bc+\frac{c(a-c)^2}{b}=\frac{2ac(a-c)}{b}$$

$$b^2+(a-c)^2=2a(a-c)$$

$$b^2+a^2-2ac+c^2=2a^2-2ac$$

$$\therefore b^2+c^2=a^2$$



（その２）　上の図で、△ABC と△DFC は相似なので、$\mathrm{DF}=c\times\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{c(a-c)}{b}$

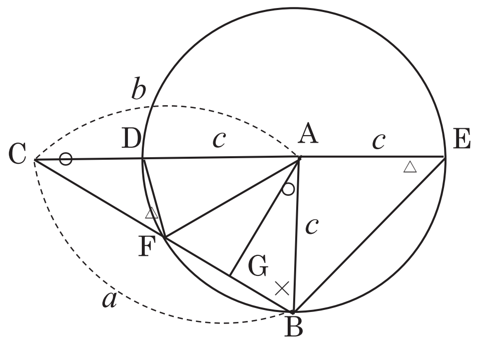
△ABC と△AFC は相似なので、$\mathrm{FE}=a\times\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{a(a-c)}{b}$

DF+FE=DE より、$\dfrac{c(a-c)}{b}+\dfrac{a(a-c)}{b}=b$　これより、$a^2=b^2+c^2$

【円に内接する四角形の性質、相似の利用】

証明１６.

Aを中心とする半径cの円を描き、
円と辺AC及び延長線の交点をD,E、
円と辺CBの交点をF、
線分BFの中点をGとする。
円に内接する四角形の性質から、
図の△の角は等しいので、
△CBEと△CDFは相似であり、



$$a:(b+c)=(b-c):(a-BF) \quad ―― ①$$

また、AG⊥BCであるから、
△ABCと△GBAは相似であり、

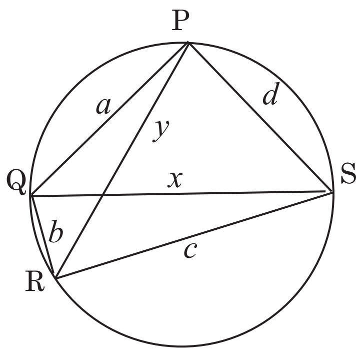
$$a:c=c:\frac{BF}{2} \quad よって、a\times\frac{BF}{2}=c^2,\quad BF=\frac{2c^2}{a}$$

したがって①より、$a(a-\dfrac{2c^2}{a})=(b+c)(b-c)$,　$a^2-2c^2=b^2-c^2,\ \therefore a^2=b^2+c^2$

【トレミーの定理の利用】

証明１７.

円に内接する四角形PQRSの辺の長さを、
図のように、a,b,c,d　、
対角線の長さをx,y　とすると、
次の式が成り立つ。

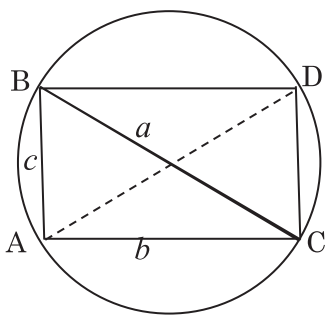


$ac+bd=xy$　（トレミーの定理）

（注：授業ではこの定理を生徒が証明したが、ここでは省略）

さて、直角三角形ABC 2個で長方形ACDBを作ると、
長方形は円に内接するので、
トレミーの定理より、

$b^2+c^2=a^2$　　　である



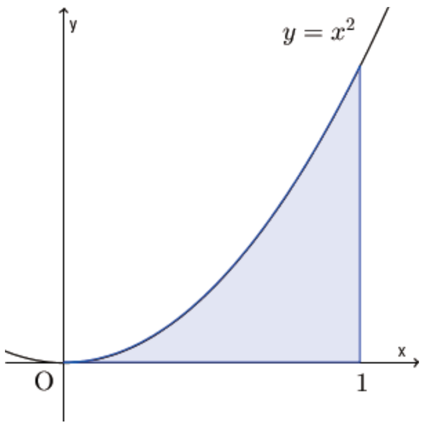
（2020　鈴木）

d3-6．放物線の長さ

関連分野：微分積分
高等数学：線積分
対象学年：中学３年
関連単元：数学 III「曲線の長さ」
教材名：放物線の長さ

1．概要

本校教材集 d3-4 の続きとなるものである。d3-4 で扱っている教材は 2 次関数 $y = x^2$ の放物線グラフと，x 軸および $x = 1$ で囲まれた部分の面積が $\frac{1}{3}$ であることを示せ，というただ 1 つの教材について述べられている。



面積については数 II の積分で決着がつく。今回は同じ構図で $y = x^2$ の $(0,0)$ から $(1,1)$ までの道のりを題材にした教材を開発した。正確な値を求めるためには，数学 III のかなり技巧的な定積分を要する問題となる。しかしながら，中学生の知識でも良い近似値を与えることは可能である。理系の高校生の教材であるが，中学 3 年生が近似を工夫する活動を通して，2 次関数のグラフの形状について深く理解させることが出来るとともに，線積分そのものの考え方を自ら体得することが期待できる教材である。

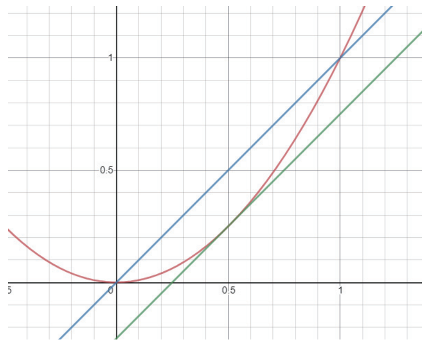
2．面積 $\frac{1}{3}$

d3-4 には実に 17 通りの方法が収録されており，初めて d3-4 を扱うどんな学年でも，様々なアイディアは出て楽しみながら取り組んでくれるものの，本質的には 17 通りのどれかと同じであるようになってきた。

2020 年度になり，まったく新しい 18 通り目のアイディアが生徒から出てきたので，まずそれを紹介したい。この手法では数学的に完全な証明を与えることはできないが，本校のカリキュラムの成功事例ではないかと手ごたえを感じ，ここにまとめておく。

3．求める面積を三角形で強引に近似する

区間 $(0,1)$ において，$y = x^2$ に「似せた」直線を考える。$(0,0)$ と $(1,1)$ を通る直線は $y = x$ で，これに平行な直線で $y = x^2$ に接する直線を $y = x + a$ とする。a は，二次方程式 $x^2 = x + a$ が重解を持つ時なので，$a = -\frac{1}{4}$，すなわち，$y = x$ に平行な接線は $y = x - \frac{1}{4}$ である。



三角形の面積比から，この 2 本の直線 $y = x$ と $y = x - \frac{1}{4}$ を $(2^2 - 1^2) : 1 = 3 : 1$ の位置にある平行な直線がちょうどいいと予想できる。このような直線を求めると $y = x - \frac{3}{16}$ である。この直線と x 軸，$x = 1$ で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{16}\right)^2 = 0.330078125$$

本教材は 2020 年度，新型コロナウィルスの影響で一斉休校になった際の 1 学期にオンライン学習で扱ったものである。なお，この解法を考案した生徒に聞いてみると，まず回帰直線を考えてみようと思ったようである。一斉休校前は中学 2 年生の 3 学期，ちょうど統計の授業で回帰直線を扱っていたため，「ざっくりとした考え」が出来たのだと言う。多くの生徒が精密な近似をしようと分割を細かくしたり，カバリエリの原理を使えるように工夫をする中，統計的手法に思考が繋がっていたことが実に興味深い。

4. 道のりの近似

数学 III の内容になってしまうが，一応道のりの近似値について記しておく。$y = x^2$ の $x = 0$ から $x = 1$ までの道のり L は，定積分

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2} = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}$$

で求めることができる。この積分は $x = \dfrac{\tan\theta}{2}$ と置換することで計算は可能だが，数学 III の積分の中でもかなり大変な部類の定積分である。この定積分をやり切ると，

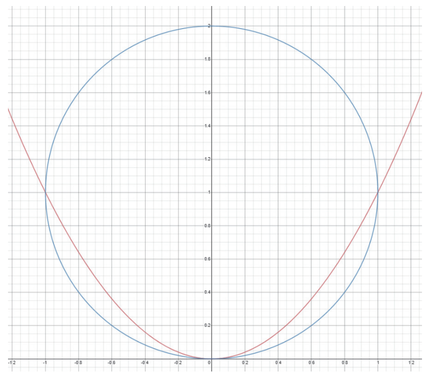
$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\log(\sqrt{5}-2)$$

となり，この近似値が 1.4789... となる。授業では，「道のりを求める」という言い方はせず，最初から「近似値を求める」と提示した。
まずは図で簡単に $\sqrt{2} < L < 2$ を確認し，せっかくの機会なので，競わせる要素を以下のように取り入れた。
· p リーグ：$L < p < 2$ となる p でなるべく小さい p を求める
· q リーグ：$\sqrt{2} < q < L$ となる q でなるべく大きい q を求める
リーグ優勝者 2 名は，クライマックスシリーズで $|L-p|$ と $|L-q|$ を比べて，小さい方をチャンピオンとする。
以下，1.4789 を基準として，さまざまなアプローチを紹介する。

【手法 1】まずは分割というアイディアが出る。区間を 2 分割，3 分割，...と分割を細かくして，何度も三平方の定理をって和を求めるというやり方である。誰もが思いつく，非常に素晴らしい手法である。唯一の欠点は計算が大変である，という点のみである。

【手法 2】 q リーグを導入した意図は，手法 1 に固執させないためである。与えられた 2 次関数は下に凸なので，分割による解法はすべて p リーグに属する。今なら外側から近似値を出せば q リーグトップタイだぞ，と煽る。
与えられた道のりの上にいくつかの点を選び，接線を引く。
接線で近似をして，接線の長さの和で近似するというアイディアが生まれる。ここで生徒には，計算の大変さの比較ではなく，どちらがより少ない分割で精度の良い近似が得られるか，ということを考えさせたくて発問をしたが，夢中で計算していて話を聞いていない生徒が多く，あまり良い反応ではなかったので，言わなくても良いかもしれない。

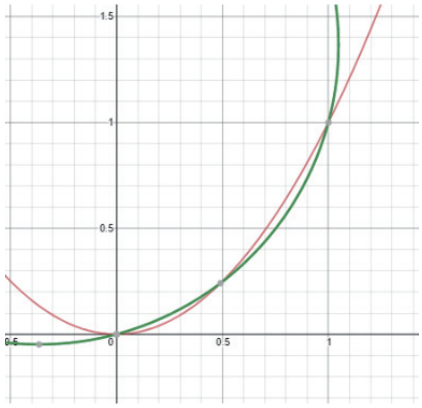
【手法 3】 円で近似をする
中学三年生が持っている知識のうち，放物線以外で曲がっているものは円だけであるため，円で近似をしようと考えた生徒がいた。
中心が $(0,1)$ で半径が 1 の円を考えると，その円の円周の長さの $\frac{1}{4}$ なので，$\frac{\pi}{2}$ は良い近似なのではないか，というのである。



このアイディアが初出の際には大いに盛り上がった。基準値も提示していないので，実はかなり $\sqrt{2}$ に近い値なのだ，という感覚が新鮮だったようである。
一方で，上図をグラフ描画ソフトで生徒に確認をさせてみると，「かなり外側にある」ことが分かる。すると，「放物線の一部分」を，「正多角形の外接円の一部」と捉えようとする着想が引き出せる。

【手法 3.1】 放物線により近い円の中心と半径を探す
だいぶ本題とずれてはきたが，こうなってくると p リーグ，q リーグは気にならないようで，楽しみながら円での近似を考える時間となる。実際の授業では手法 3 の途中でチャイムが鳴ったので，ここからは 2 時間目である。

$(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ，長さ $\sqrt{2}$ の直線を底辺とする正三角形を考え，その正三角形の頂点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円がかなり良い近似を与えるのではないか，というアイディアが出た。



正確な図を確認してみても，なかなか良さそうな近似だということが分かる。半径 $\sqrt{2}$ で中心角が 60° のおうぎ形の弧の長さ $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ が近似値で，これを電卓で計算してみるとなんと $1.48\ldots$，基準値の $1.4789\ldots$ にかなり近い値である。

円の中心がどこにあるかは今回の課題とは逸れるが，教育的な意義があるため，求めさせた。彼らはすぐに「直線 $y=-x+1$ 上にあり，$(0,0)$ からの距離が $\sqrt{2}$ であるような点の座標を求めよ」という問題にたどり着く。これはいかにも高校受験の入試に出てきそうな，総合力を問える重要な問題であろう。しかし，このような扱いで自然発生的にたどり着いた問題は，取り組み方が段違いである。

一応，この円の中心は $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$ である。知的好奇心を刺激されたとある生徒が，2 次方程式の 2 解になっているように見える，と言い出し，多くの生徒が $x^2-x-1=0$ との関係を探り始めたが，何の成果も得られなかったようである。

5. 総括

2021 年に初出の教材で，まだ中学 3 年生でしか扱っていない教材ではあるが，高校生に同じ教材をやってみても別のアイディアがまだまだたくさん出てきそうではある。特に，三角関数を使った近似を考えることができれば，そのままフーリエ級数の考え方の素地とすることが期待できる教材である。

中学生には，まとめとしてグラフの形状の話をした。近似値は $\sqrt{2}$ と 2 の間にあるが，それがだいたい 1.48 で，1.5 よりは小さい。つまり，感覚的にかなり $\sqrt{2}$ に近いため，放物線のグラフをフリーハンドで書くときには「x 軸には接しているが，その後はほぼ $y=x$ に寄せてかく」という書き方のコツにはかなり納得した様子であった。

最終的に，以上の話をまったく聞いておらず，ただ 1 人黙々と手法 1 で 50 分割して見事 1.4789 をたたき出した生徒が学年チャンピオンとなり，「力技に勝るものなし」と本教材を締めくくった。

(2020 吉崎)

4　おわりに（今後の展望）

本校数学科では専任７名が，同じ学年の生徒をできるだけ継続して次年度も担当し，中高６年間，さらに大学での学びをも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標は『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる』ことである。時に生徒達は，こちらの想定していることを大きく超えたアイディアを見せてくれることがある。ただ，これは我々教員にとって，想定外であっても，教材を作るチャンスである。

そのため，授業では問題や定理の仕組みを問い，解法や照明のアイディアの説明・発表をさせる。自分の考えを発表し, また他者の様々な考え方を知ることは, 問題の中に潜む仕組みを一層はっきりと認識させ，理解を深化できる。

数学の面白さは，既成の事実を眺めることで味わうのではなく，既成の事実を疑い，未開の地平で議論ができることにある。本校数学科教員は，日々生徒達から刺激を受けることでアイディアを蓄積し，ここに教材を紹介することが出来ている。

中高一貫の良さは，生徒達が，ゆとりある学校生活を過ごしながら，自分を見つけ出し，何かに熱中し，自分の個性を伸ばすことにある。生徒は教科の勉強だけでなく，学校行事や校外学習，部活動，水田学習などいろいろなものを通して成長していくことにある。数学においても，この６年間を通して，自分で見つけた自分の課題を大切にして納得いくまで個人で研究したり，授業や数学研究のクラブ活動等で友人らと「こんな証明はどうなのだろう」などとわいわい議論して楽しんだり，数学オリンピック・情報オリンピックなどに積極的に何度も挑戦する生徒が多数いる。いうなれば，これらの“数学の特別活動”が活発に行われているということが大切なのであろう。

開発教材の有効性の検証という側面と並行して，より良い教材へと発展させる礎としても，このように教材開発のネットワークを広げていくことは，今後さらに重要性を増すであろう。公開授業・研究協議会や, SSH 数学科教員研修会など，従前より本校数学科では, 他校の先生方から直接意見をいただく機会を継続的に設けているが, 今後フィードバックの仕組みについて, オンラインを活用するなど，より集約しやすいものをつくっていくことも大切ではないかと考えられる。

生徒の数学的活動を支援する取組としては，SSH 事業４期より始動した数学オリンピックワークショップについて，５年目となる来年度はこれまでの取り組みを踏まえ，他校との協力・協同学習やオンライン併用型も取り入れながら，発展させていきたい。